Demostración - Ejercicio 10

Grupo Pico y Pala

```
foldDoc :: b -> (String -> b -> b) -> (Int -> b -> b) -> Doc -> b
foldDoc fVacio fTexto fLinea doc =
   case doc of
     Vacio -> fVacio {F0}
     Texto s d -> fTexto s (rec d) {F1}
     Linea i d -> fLinea i (rec d) {F2}
     where
       rec = foldDoc fVacio fTexto fLinea

indentar :: Int -> Doc -> Doc
indentar i = foldDoc Vacio (\s rec -> Texto s rec) (\j rec -> Linea (i+j) rec) {I0}
```

Lemas:

L0. indentar k Vacio = Vacio para todo k :: Int positivo. {L0}

L1. indentar k (Texto s d) = Texto s (indentar k d) para todo k :: Int positivo, s :: String y d :: Doc. {L1}

L2. indentar m (Linea k d) = Linea $(m + k)$ (indentar m d) para todo m, k :: Int positivos y d :: Doc. {L2}

Demostración principal

Para todo n, m :: Int positivos y x :: Doc:

$$\text{indentar } n \text{ (indentar } m\ x) = \text{indentar } (n + m)\ x$$

Sea x :: Doc $\to P(x)$ se separa en 2 casos recursivos junto a un caso base:
Para todo s :: String, d :: Doc y i :: Int $\to P(\text{Linea } i\ d) \land P(\text{Texto } s\ d) \Rightarrow$

- $P(\text{Linea } i\ d)$ = "indentar n (indentar m (Linea i d)) = indentar $(n + m)$ (Linea i d)"
- $P(\text{Texto } s\ d)$ = "indentar n (indentar m (Texto s d)) = indentar $(n + m)$ (Texto s d)"

Caso Base $P(\textbf{Vacio})$

indentar n (indentar m Vacio) = indentar $(n+m)$ Vacio:

$$
\begin{aligned}
&1) \\
\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ Vacio)} &\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{indentar } n \text{ Vacio} \\
&\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{Vacio} \\
&2) \\
\text{indentar } (n+m) \text{ Vacio} &\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{Vacio} \\
&\Rightarrow P(\text{Vacio}) = \text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

Caso $P(\textbf{Linea } i\ d)$

indentar n (indentar m (Linea i d)) = indentar $(n+m)$ (Linea i d):

1)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ (Linea } i\ d)) \\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{indentar } n \text{ (Linea } (m+i) \text{ (indentar } m\ d)) \\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } n \text{ (indentar } m\ d)) \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } (n+m)\ d)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } (n+m) \text{ (Linea } i\ d) \\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } (n+m)\ d)
\end{aligned}
$$

Como del lado 1) llegamos a la misma expresión que del lado 2) $\Rightarrow P(\text{Linea } i\ d) =$ Verdadera.

Caso $P(\textbf{Texto}\ s\ d)$

indentar n (indentar m (Texto s d)) = indentar $(n+m)$ (Texto s d):

1)

$$\begin{aligned}
&\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ (Texto } s\ d))\\
&\overset{\text{Lema \{L1\}}}{=} \text{indentar } n \text{ (Texto } s \text{ (indentar } m\ d))\\
&\overset{\text{Lema \{L1\}}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } n \text{ (indentar } m\ d))\\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } (n+m)\ d)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&\text{indentar } (n+m) \text{ (Texto } s\ d)\\
&\overset{\text{Lema \{L1\}}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } (n+m)\ d)
\end{aligned}$$

Como del lado 1) llegamos a la misma expresión que del lado 2) $\Rightarrow P(\text{Texto } s\ d) =$ Verdadera.

Ya que $P(\text{Vacio}) \wedge P(\text{Linea } i\ d) \wedge P(\text{Texto } s\ d) \equiv$ True, podemos concluir que la expresión:

$$\text{indentar } (n+m)\ x = \text{indentar } n \text{ (indentar } m\ x)$$

es verdadera.

Demostración de los lemas

```
foldDoc :: b -> (String -> b -> b) -> (Int -> b -> b) -> Doc -> b
foldDoc fVacio fTexto fLinea doc =
   case doc of
     Vacio -> fVacio {F0}
     Texto s d -> fTexto s (rec d) {F1}
     Linea i d -> fLinea i (rec d) {F2}
     where
       rec = foldDoc fVacio fTexto fLinea

indentar :: Int -> Doc -> Doc
indentar i = foldDoc Vacio (\s rec -> Texto s rec) (\j rec -> Linea (i+j) rec) {I0}
```

Lema L0

"indentar k Vacio = Vacio" para todo k :: Int positivo.

$$\text{indentar } k \text{ Vacio} \overset{\text{Def } \{I0\}}{=}$$
$$\text{foldDoc Vacio } (\lambda s\ rec \to \text{Texto } s\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (i+j)\ rec) \text{ Vacio}$$
$$\overset{\text{Def } \{F0\}}{=} \text{Vacio} \to \text{fVacio (Vacio)} \overset{\text{ß}}{=} \text{Vacio}$$

L0 demostrado gracias a la definición de `indentar` y `foldDoc`, usando el caso F0 como vía de resultado.

Lema L1

"indentar k (Texto s d) = Texto s (indentar k d)" para todo k :: Int positivo, s :: String y d :: Doc.

$$\text{indentar } k \text{ (Texto } s\ d) \overset{\text{Def } \{I0\}}{=}$$
$$\text{foldDoc Vacio } (\lambda s'\ rec \to \text{Texto } s'\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (k+j)\ rec) \text{ (Texto } s\ d)$$
$$\overset{\text{Def } \{F1\}}{=} (\text{Texto } s'\ d') \to (\lambda s'\ rec \to \text{Texto } s'\ rec)\ s\ (rec\ d) \overset{\text{ß}}{=}$$
$$\text{Texto } s\ rec\ d^* = \{rec\ d \equiv \text{indentar } i\ d\} = \text{Texto } s \text{ (indentar } k\ d)$$

$*$ $rec\ d = \text{foldDoc Vacio } (\lambda s\ rec \to \text{Texto } s\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (k{+}j)\ rec)$

Llegamos al otro lado de la igualdad, demostrando que el lema es Verdadero.

Lema L2

"indentar m (Linea k d) = Linea $(m + k)$ (indentar m d)" para todo m, k :: Int positivos y d :: Doc.

$$\text{indentar } m \text{ (Linea } k\ d) \overset{\text{Def } \{I0\}}{=}$$
$$\text{foldDoc Vacio } (\lambda s'\ rec \to \text{Texto } s'\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (m+j)\ rec) \text{ (Linea } k\ d)$$
$$\overset{\text{Def } \{F2\}}{=} (\text{Linea } j\ d) \to (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (m+j)\ rec)\ k\ (rec\ d) \overset{\text{ß}}{=}$$
$$\text{Linea } (m+k)\ rec\ d^* = \{rec\ d \equiv \text{indentar } i\ d\}$$
$$= \text{Linea } (m+k) \text{ (indentar } d)$$

$*$ $rec\ d = \text{foldDoc Vacio } (\lambda s\ rec \to \text{Texto } s\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (k{+}j)\ rec)$

Llegamos al otro lado de la igualdad, demostrando que el lema es Verdadero.