Demostración - Ejercicio 10

Grupo Pico y Pala

```
foldDoc :: b -> (String -> b -> b) -> (Int -> b -> b) -> Doc -> b
foldDoc fVacio fTexto fLinea doc =
   case doc of
     Vacio -> fVacio {F0}
     Texto s d -> fTexto s (rec d) {F1}
     Linea i d -> fLinea i (rec d) {F2}
     where
       rec = foldDoc fVacio fTexto fLinea

indentar :: Int -> Doc -> Doc
indentar i = foldDoc Vacio (\s rec -> Texto s rec) (\j rec -> Linea (i+j) rec) {I0}
```

Lemas:

L0. indentar k Vacio = Vacio para todo k :: Int positivo. {L0}

L1. indentar k (Texto s d) = Texto s (indentar k d) para todo k :: Int positivo, s :: String y d :: Doc. {L1}

L2. indentar m (Linea k d) = Linea $(m + k)$ (indentar m d) para todo m, k :: Int positivos y d :: Doc. {L2}

Demostración principal

Para todo n, m :: Int positivos y x :: Doc:

$$\text{indentar } n \ (\text{indentar } m \ x) = \text{indentar } (n + m) \ x$$

Sea x :: Doc $\rightarrow P(x)$ se separa en 2 casos recursivos junto a un caso base:
Para todo s :: String, d :: Doc y i :: Int $\rightarrow P(\text{Linea } i \ d) \wedge P(\text{Texto } s \ d) \Rightarrow$

- $P(\text{Linea } i \ d)$ = "indentar n (indentar m (Linea i d)) = indentar $(n + m)$ (Linea i d)"
- $P(\text{Texto } s \ d)$ = "indentar n (indentar m (Texto s d)) = indentar $(n + m)$ (Texto s d)"

Caso Base $P(\textbf{Vacio})$

indentar n (indentar m Vacio) = indentar $(n+m)$ Vacio:

$$
\begin{aligned}
&1)\\
\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ Vacio)} &\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{indentar } n \text{ Vacio}\\
&\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{Vacio}\\
&2)\\
\text{indentar } (n+m) \text{ Vacio} &\overset{\text{Lema } \{L0\}}{=} \text{Vacio}\\
&\Rightarrow P(\text{Vacio}) = \text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

Caso $P(\textbf{Linea } i \ d)$

indentar n (indentar m (Linea i d)) = indentar $(n+m)$ (Linea i d):

1)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ (Linea } i \ d))\\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{indentar } n \text{ (Linea } (m+i) \text{ (indentar } m \ d))\\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } n \text{ (indentar } m \ d))\\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } (n+m) \ d)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } (n+m) \text{ (Linea } i \ d)\\
&\overset{\text{Lema } \{L2\}}{=} \text{Linea } (n+m+i) \text{ (indentar } (n+m) \ d)
\end{aligned}
$$

Como del lado 1) llegamos a la misma expresión que del lado 2) $\Rightarrow P(\text{Linea } i \ d) =$ Verdadera.

Caso $P(\textbf{Texto } s \ d)$

indentar n (indentar m (Texto s d)) = indentar $(n+m)$ (Texto s d):

1)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } n \text{ (indentar } m \text{ (Texto } s \ d))\\
&\overset{\text{Lema } \{L1\}}{=} \text{indentar } n \text{ (Texto } s \text{ (indentar } m \ d))\\
&\overset{\text{Lema } \{L1\}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } n \text{ (indentar } m \ d))\\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } (n+m) \ d)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
&\text{indentar } (n+m) \text{ (Texto } s\ d) \\
&\overset{\text{Lema } \{L1\}}{=} \text{Texto } s \text{ (indentar } (n+m)\ d)
\end{aligned}
$$

Como del lado 1) llegamos a la misma expresión que del lado 2) $\Rightarrow P(\text{Texto } s\ d) =$ Verdadera.

Ya que $P(\text{Vacio}) \wedge P(\text{Linea } i\ \ d) \wedge P(\text{Texto } s\ \ d) \equiv$ True, podemos concluir que la expresión:

$$\text{indentar } (n+m)\ x = \text{indentar } n \text{ (indentar } m\ x)$$

es verdadera.

Demostración de los lemas

```
foldDoc :: b -> (String -> b -> b) -> (Int -> b -> b) -> Doc -> b
foldDoc fVacio fTexto fLinea doc =
   case doc of
     Vacio -> fVacio {F0}
     Texto s d -> fTexto s (rec d) {F1}
     Linea i d -> fLinea i (rec d) {F2}
     where
       rec = foldDoc fVacio fTexto fLinea

indentar :: Int -> Doc -> Doc
indentar i = foldDoc Vacio (\s rec -> Texto s rec) (\j rec -> Linea (i+j) rec) {I0}
```

Lema L0

indentar k Vacio = Vacio para todo k :: Int positivo.

$$
\begin{aligned}
\text{indentar } k \text{ Vacio} &\overset{\text{Def } \{I0\}}{=} \\
&\text{foldDoc Vacio } (\lambda s\ rec \to \text{Texto } s\ rec)\ (\lambda j\ rec \to \text{Linea } (i+j)\ rec) \text{ Vacio} \\
&\overset{\text{Def } \{F0\}}{=} \text{Vacio} \to \text{fVacio (Vacio)} \overset{\text{ß}}{=} \text{Vacio}
\end{aligned}
$$

L0 demostrado gracias a la definición de `indentar` y `foldDoc`, usando el caso F0 como vía de resultado.

Lema L1

indentar k (Texto s d) = Texto s (indentar k d) para todo k :: Int positivo, s :: String y d :: Doc.

indentar k (Texto s d) $\overset{\text{Def } \{\text{I0}\}}{=}$

foldDoc Vacio (λs $rec \to$ Texto s rec) (λj $rec \to$ Linea $(k + j)$ rec) (Texto s d)

$\overset{\text{Def } \{\text{F1}\}}{=}$ (Texto s d) $\to$ (λs $rec \to$ Texto s rec) s (rec d) $\overset{\text{ß}}{=}$

Texto s rec $d^* = \{rec\ d \equiv$ indentar i $d\}$ = Texto s (indentar k d)

* rec d = foldDoc Vacio (λs $rec \to$ Texto s rec) (λj $rec \to$ Linea $(k{+}j)$ rec)

Llegamos al otro lado de la igualdad, demostrando que el lema es Verdadero.

Lema L2

indentar m (Linea k d) = Linea $(m{+}k)$ (indentar m d) para todo m, k :: Int positivos y d :: Doc.

indentar m (Linea k d) $\overset{\text{Def } \{\text{I0}\}}{=}$

foldDoc Vacio (λs $rec \to$ Texto s rec) (λj $rec \to$ Linea $(m + j)$ rec) (Linea k d)

$\overset{\text{Def } \{\text{F2}\}}{=}$ (Linea k d) $\to$ (λj $rec \to$ Linea $(m + j)$ rec) k (rec d) $\overset{\text{ß}}{=}$

Linea $(m + k)$ rec $d^* = \{rec\ d \equiv$ indentar i $d\}$

= Linea $(m + k)$ (indentar d)

* rec d = foldDoc Vacio (λs $rec \to$ Texto s rec) (λj $rec \to$ Linea $(k{+}j)$ rec)

Llegamos al otro lado de la igualdad, demostrando que el lema es Verdadero.