

3.1 PROJEÇÕES

Em geral, projeções transformam pontos de um sistema de coordenadas n -dimensional em pontos representados em um sistema de dimensão inferior. Neste item, serão estudadas as projeções de um sistema 3D em um sistema 2D.

As projeções podem ser classificadas em dois grupos principais, perspectiva e paralela, como mostra a Figura 3.1. Nas projeções perspectivas, as linhas de projeção convergem para um ponto, denominado centro de projeção, enquanto nas projeções paralelas, as linhas de projeção são paralelas entre si.

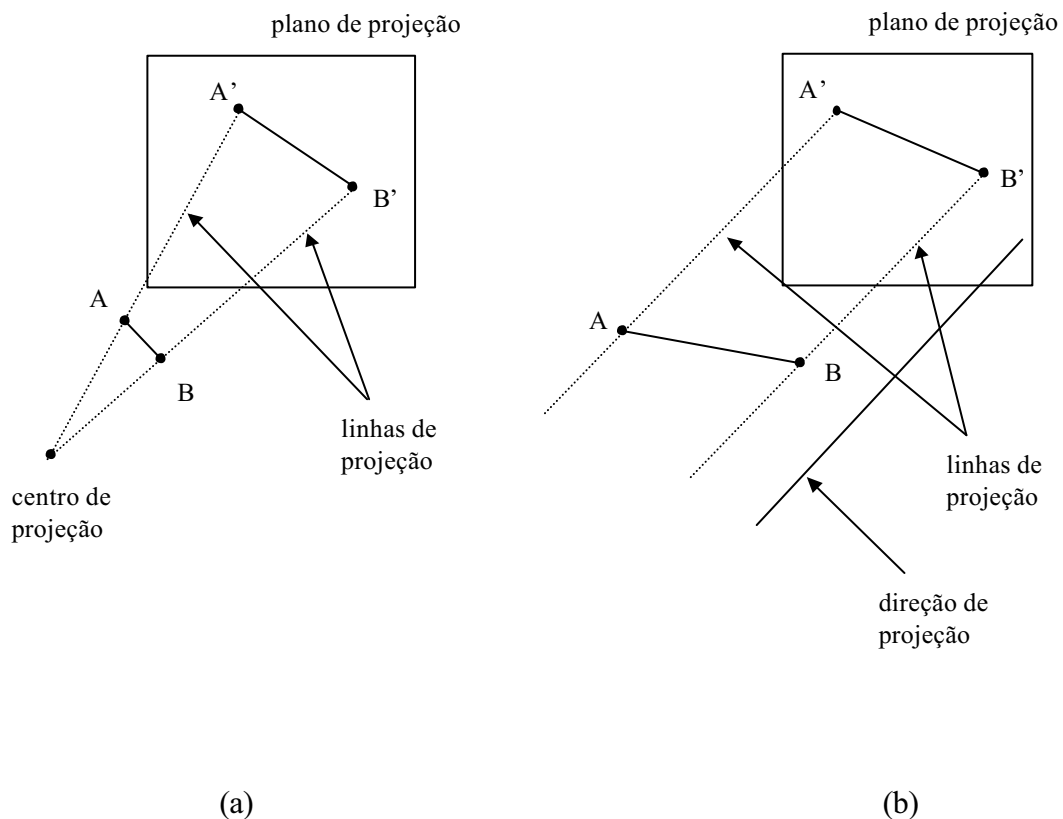
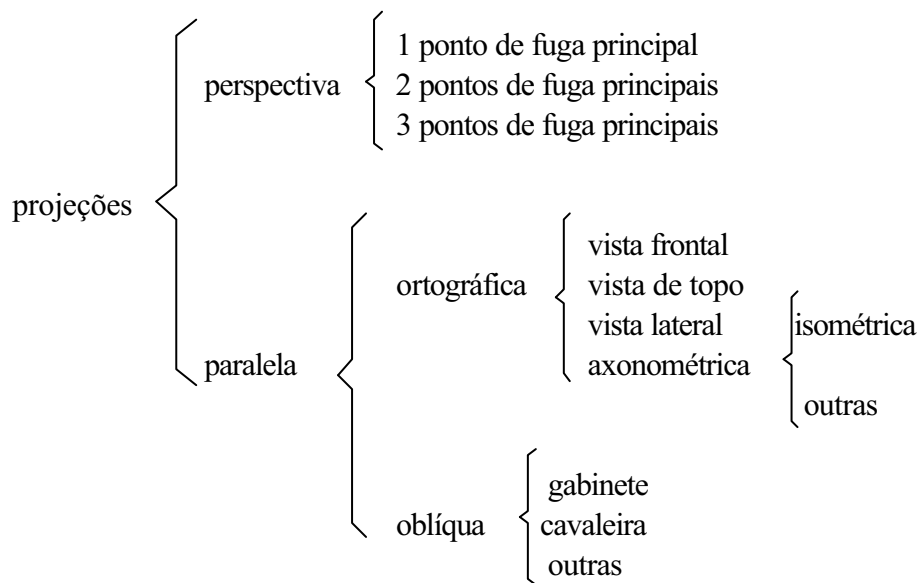


Figura 3.1 - (a) Projeção perspectiva. (b) Projeção paralela.

Os principais tipos de projeções perspectiva e paralela são os seguintes:



3.1.1 Projeção perspectiva

Em uma projeção perspectiva, um conjunto de retas paralelas não paralelas ao plano de projeção converge para um ponto chamado *ponto de fuga*. Como retas paralelas só se encontram no infinito, um ponto de fuga pode ser interpretado como a projeção de um ponto do infinito (Figura 3.2).

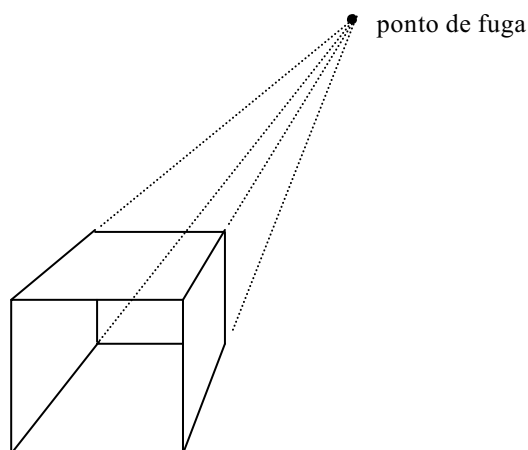


Figura 3.2 - Ponto de fuga.

Ângulos são preservados somente nas faces do objeto paralelas ao plano de projeção. Se um conjunto de retas é paralelo a um dos eixos principais do sistema, o ponto de fuga é dito *ponto de fuga principal* (Figura 3.3).

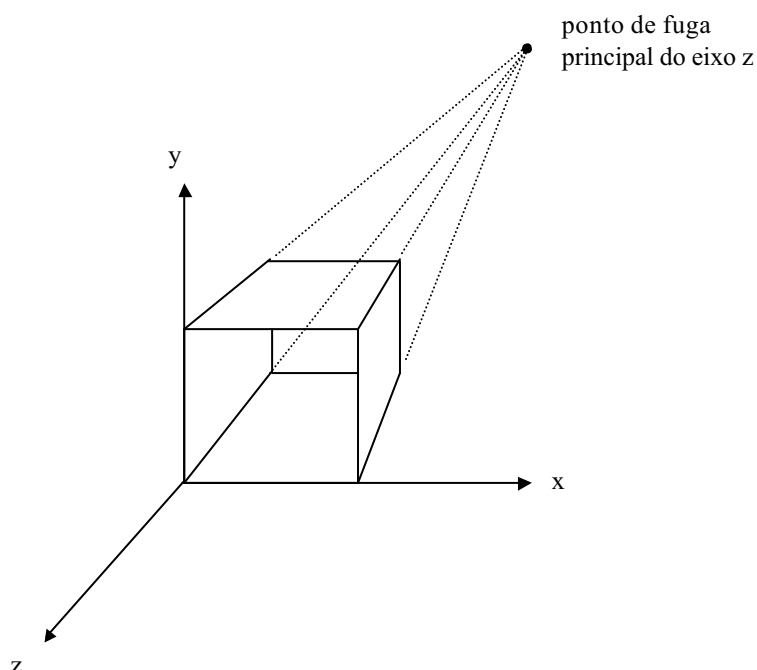


Figura 3.3 - Ponto de fuga principal.

Existem no máximo 3 pontos de fuga principais em uma projeção perspectiva, correspondendo ao número de eixos principais interceptados pelo plano de projeção. Por exemplo, se o plano de projeção intercepta apenas o eixo z (paralelo ao plano xy), somente o eixo z conterá um ponto de fuga principal, porque as linhas paralelas ao eixo x ou y são também paralelas ao plano de projeção. As projeções perspectiva, portanto, classificam-se de acordo com o número de pontos de fuga principais: um, dois ou três pontos de fuga principais.

3.1.2 Projeção paralela

Assim como as perspectivas, as projeções paralelas preservam ângulos somente nas faces do objeto paralelas ao plano de projeção. As projeções paralelas dividem-se em dois grupos, dependendo da relação entre a direção de projeção e a normal ao plano de projeção. Nas projeções paralelas *ortográficas*, a normal ao plano de projeção e a direção de projeção são paralelas. Nas projeções paralelas *obíquas*, a normal ao plano de projeção é oblíqua à direção de projeção.

3.1.2.1 Projeções paralelas ortográficas

As projeções ortográficas caracterizam-se pelo fato de a normal n ao plano de projeção ser paralela à direção de projeção, ou seja, as linhas de projeção são perpendiculares ao plano de projeção (Figura 3.4).

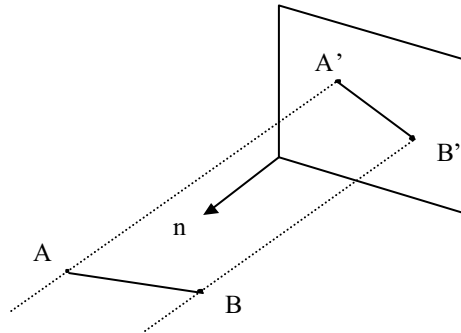


Figura 3.4 - Projeção paralela ortográfica.

As principais projeções ortográficas são a *vista frontal*, *vista de topo* e *vista lateral*. Estas três vistas representam projeções paralelas ortográficas nas quais o plano de projeção é perpendicular a um dos três eixos do sistema de coordenadas (Figura 3.5).

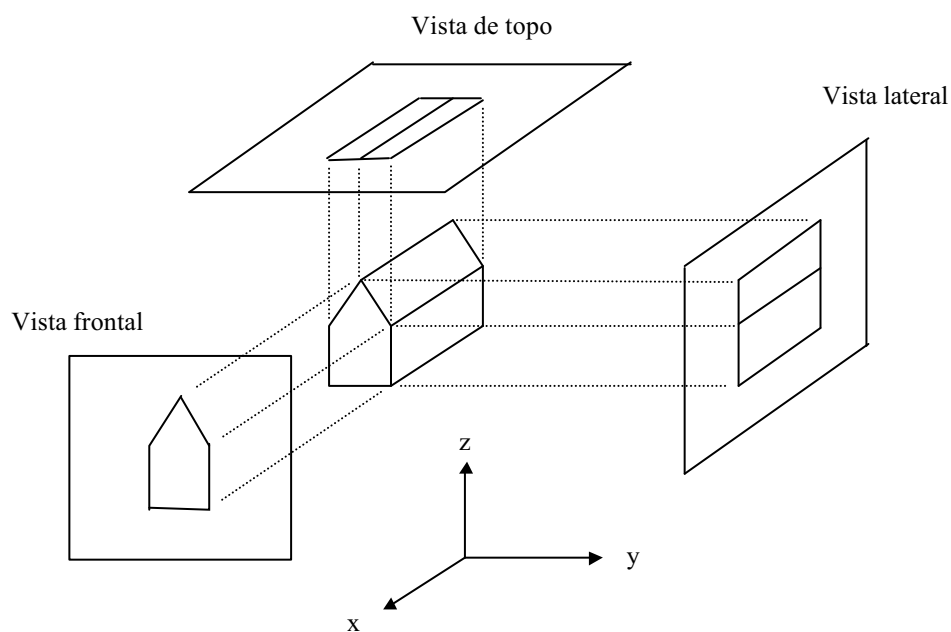


Figura 3.5 - Projeções ortográficas: vistas frontal, lateral e de topo.

As projeções paralelas ortográficas *axonométricas* usam planos de projeção não perpendiculares aos eixos principais. A projeção ortográfica *isométrica* é um caso particular da axonométrica, na qual a normal ao plano de projeção forma ângulos iguais com os três eixos principais do sistema de coordenadas.

3.1.2.2 Projeções paralelas oblíquas

As projeções paralelas oblíquas diferem das ortográficas pelo fato de a normal ao plano de projeção não ser paralela à direção de projeção. Os principais tipos de projeções oblíquas são as projeções *cavaleira* e de *gabinete*.

Nas projeções cavaleiras, a direção de projeção forma um ângulo de 45° com a normal ao plano de projeção, de modo que as projeções segmentos de reta perpendiculares ao plano de projeção mantenham seus comprimentos verdadeiros (Figura 3.6).

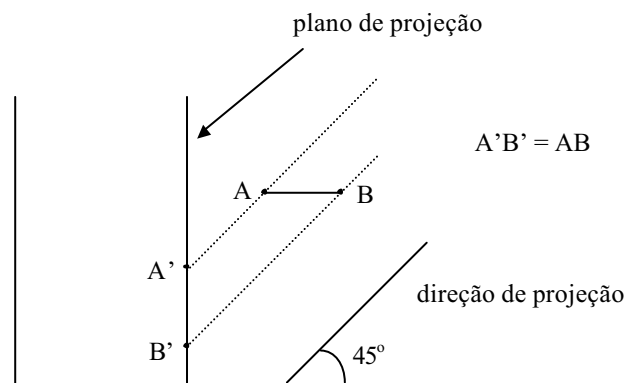


Figura 3.6 - Projeção cavaleira.

Projeções de gabinete são aquelas em que as projeções de segmentos de reta perpendiculares ao plano de projeção apresentam um comprimento igual à metade do comprimento verdadeiro (Figura 3.7).

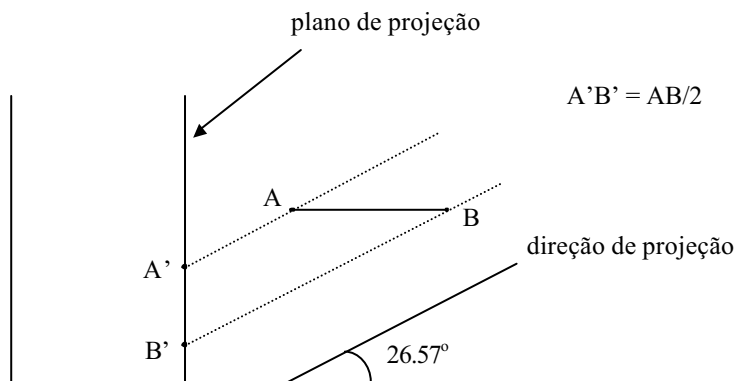


Figura 3.7 - Projeção de gabinete.

3.2 MATEMÁTICA DAS PROJEÇÕES

3.2.1 Projeção perspectiva

Seja a projeção perspectiva em um plano de projeção que contém o ponto $R_0(x_0, y_0, z_0)$ e cuja normal é dada pelo vetor unitário n , de cossenos diretores (n_x, n_y, n_z) . O centro de projeção está localizado na origem do sistema de coordenadas (Figura 3.8). Em coordenadas homogêneas, a projeção $P'(x', y', z', w')$ de um ponto $P(x, y, z, 1)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1a)$$

ou,

$$P' = M_{\text{per}}^0 \cdot P \quad (3.1b)$$

sendo,

$$d_0 = x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y + z_0 \cdot n_z \quad (3.2)$$

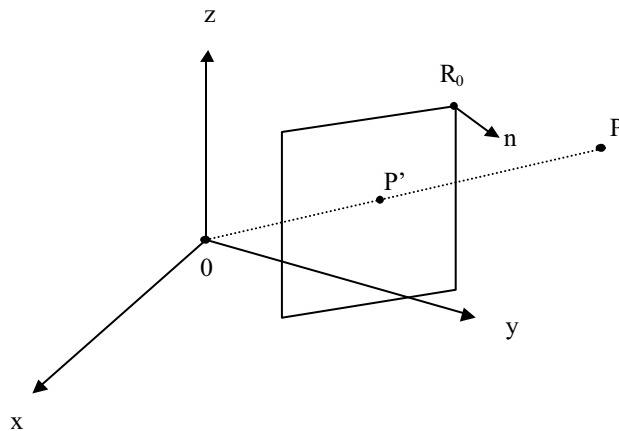


Figura 3.8 - Projeção perspectiva com centro de projeção na origem.

Demonstração:

Como os vetores $P'R_0$ e n são perpendiculares entre si, a equação do plano de projeção é dada por:

$$P'R_0 \bullet n = 0 \quad (3.3)$$

Efetuando o produto obtém-se:

$$(x_0 - x') \cdot n_x + (y_0 - y') \cdot n_y + (z_0 - z') \cdot n_z = 0 \quad (3.4)$$

Introduzindo (3.2) na equação acima:

$$x' \cdot n_x + y' \cdot n_y + z' \cdot n_z = d_0 \quad (3.5)$$

Como P e P' pertencem a uma reta que passa pela origem pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e substituindo este resultado em (3.5):

$$\alpha \cdot x \cdot n_x + \alpha \cdot y \cdot n_y + \alpha \cdot z \cdot n_z = d_0 \quad (3.7)$$

O valor de α é então dado por:

$$\alpha = \frac{d_0}{x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z} \quad (3.8)$$

Em consequência, em coordenadas homogêneas pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Seja agora o mesmo plano de projeção, mas com um centro de projeção $C(a, b, c)$, como mostra a Figura 3.9. A projeção $P'(x', y', z', w')$ de um ponto $P(x, y, z, 1)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + an_x & an_y & an_z & -ad_0 \\ bn_x & d + bn_y & bn_z & -bd_0 \\ cn_x & cn_y & d + cn_z & -cd_0 \\ n_x & n_y & n_z & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

ou,

$$P' = M_{\text{per}} \cdot P \quad (3.10b)$$

sendo,

$$d_0 = x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y + z_0 \cdot n_z \quad (3.11)$$

$$d_1 = a \cdot n_x + b \cdot n_y + c \cdot n_z \quad (3.12)$$

$$d = d_0 - d_1 \quad (3.13)$$

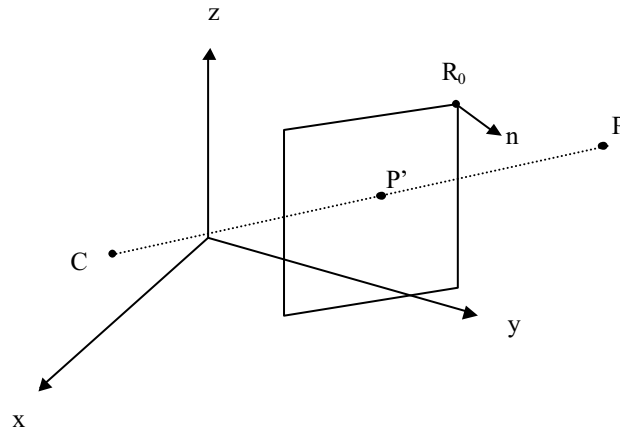


Figura 3.9 - Projeção perspectiva com centro de projeção $C(a, b, c)$.

Demonstração:

A transformação desejada pode ser obtida a partir da seguinte sequência de transformações:

1. Translação $T(-a, -b, -c)$, trazendo o centro de projeção para a origem.
2. Projeção do ponto usando a matriz de projeção em (3.1), para centros de projeção na origem.
3. Translação $T(a, b, c)$, retornando o centro de projeção para a posição original.

Após a translação $T(-a, -b, -c)$, as coordenadas do ponto R_0 , pertencente ao plano de projeção, passam a ser (x_0-a, y_0-b, z_0-c) . Aplicando a matriz de projeção para centros de projeção na origem obtém-se:

$$M_{\text{per}}^0 = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sendo d igual a,

$$d = (x_0 - a) \cdot n_x + (y_0 - b) \cdot n_y + (z_0 - c) \cdot n_z \quad (3.15)$$

Reagrupando os termos da expressão acima, pode-se escrever:

$$d = (x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y + z_0 \cdot n_z) - (a \cdot n_x + b \cdot n_y + c \cdot n_z) = d_0 - d_1 \quad (3.16)$$

Finalmente, aplicando a translação $T(a, b, c)$ obtém-se a transformação desejada:

$$P' = T(a, b, c) \cdot M_{\text{per}}^0 \cdot T(-a, -b, -c) \cdot P \quad (3.17)$$

ou,

$$P' = M_{\text{per}} \cdot P \quad (3.18)$$

sendo a matriz M_{per} igual a:

$$M_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d + an_x & an_y & an_z & -ad_0 \\ bn_x & d + bn_y & bn_z & -bd_0 \\ cn_x & cn_y & d + cn_z & -cd_0 \\ n_x & n_y & n_z & -d_1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.2.2 Projeção paralela

Considere um plano de projeção que contém o ponto $R_0(x_0, y_0, z_0)$ de normal $n(n_x, n_y, n_z)$, e uma direção de projeção dada pela direção do vetor $v(a, b, c)$, como mostra a Figura 3.10. A projeção paralela $P'(x', y', z', w')$ de um ponto $P(x, y, z, 1)$ é dada pela expressão:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - an_x & -an_y & -an_z & ad_0 \\ -bn_x & d_1 - bn_y & -bn_z & bd_0 \\ -cn_x & -cn_y & d_1 - cn_z & cd_0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20a)$$

ou,

$$P' = M_{\text{par}} \cdot P \quad (3.20b)$$

sendo,

$$d_0 = x_0 \cdot n_x + y_0 \cdot n_y + z_0 \cdot n_z \quad (3.21)$$

$$d_1 = a \cdot n_x + b \cdot n_y + c \cdot n_z \quad (3.22)$$

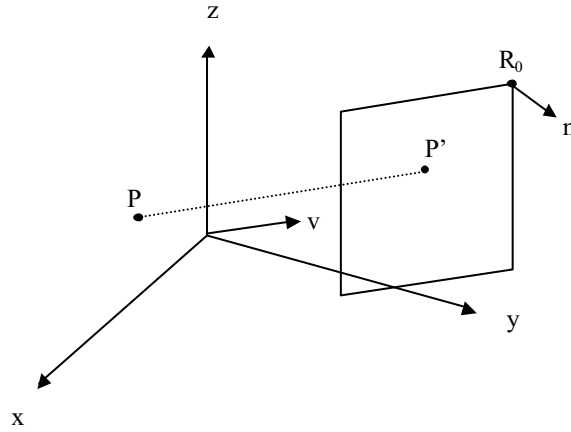


Figura 3.10 - Projeção paralela.

Demonstração:

Equação do plano de projeção:

$$(x_0 - x') \cdot n_x + (y_0 - y') \cdot n_y + (z_0 - z') \cdot n_z = 0 \quad (3.23)$$

$$x' \cdot n_x + y' \cdot n_y + z' \cdot n_z = d_0 \quad (3.24)$$

Como P e P' formam uma reta de cossenos diretores (a, b, c), são válidas as relações:

$$P' = P + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot t \quad (3.25a)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot t \quad (3.25b)$$

onde t é um parâmetro escalar. O ponto de interseção desta reta com o plano de projeção pode ser obtido substituindo a equação acima em (3.24):

$$(x + a \cdot t) \cdot n_x + (y + b \cdot t) \cdot n_y + (z + c \cdot t) \cdot n_z = d_0 \quad (3.26)$$

e obtendo-se então o valor de t para a interseção:

$$t = \frac{d_0 - (x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z)}{d_1} \quad (3.27)$$

Com o valor de t acima, a projeção P' pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{d_0 - (x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z)}{d_1} \right) \quad (3.28)$$

ou em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - an_x & -an_y & -an_z & ad_0 \\ -bn_x & d_1 - bn_y & -bn_z & bd_0 \\ -cn_x & -cn_y & d_1 - cn_z & cd_0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.3 MODELO DE VISUALIZAÇÃO 3D

Em termos conceituais, o modelo de visualização é especificado através de uma projeção (perspectiva ou paralela) em um plano de projeção, um volume de visualização (view volume), e uma região de visualização (viewport) do dispositivo de saída, como será visto a seguir.

3.3.1 Volume de visualização

Para a especificação do volume de visualização é necessário definir, além do sistema de coordenadas de mundo (world coordinates - WC), um outro sistema de coordenadas, o sistema de referência de visualização (viewing reference coordinates - VRC). A origem deste sistema é o ponto de referência VRP (view reference point), fornecido em coordenadas de mundo (Figura 3.11).

Um dos eixos do sistema de referência é o eixo n , definido pelo vetor VPN (view plane normal) normal ao plano de projeção. O eixo v é determinado pela projeção do vetor VUP (view up vector), paralela a VPN, em um plano paralelo ao plano de projeção. O outro eixo, o eixo u , é então determinado de modo que o sistema $u-v-n$ forme um triedro direto (Figura 3.11).

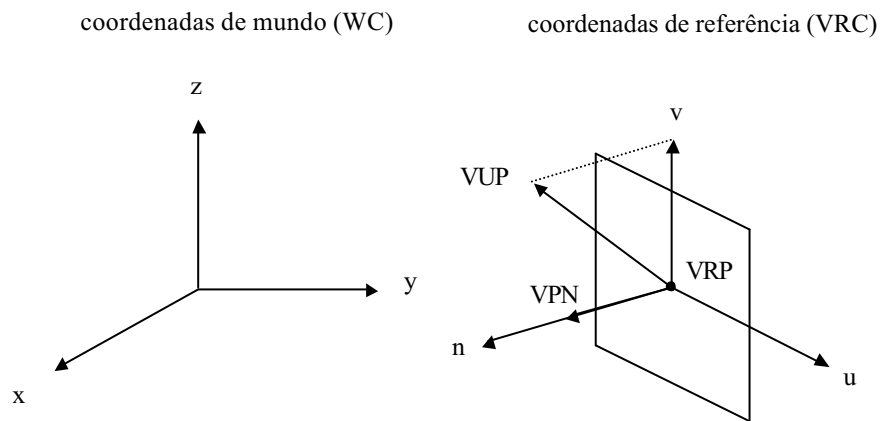


Figura 3.11 - Sistema de coordenadas de referência de visualização.

O plano de projeção (view plane), por definição paralelo ao plano u-v, é determinado por sua distância VPD (view plane distance) à origem de VRC, medida em coordenadas n (Figura 3.12). Uma janela de visualização (view window) do plano de projeção deve ser especificada em termos de coordenadas u e v, como mostra a Figura 3.13.

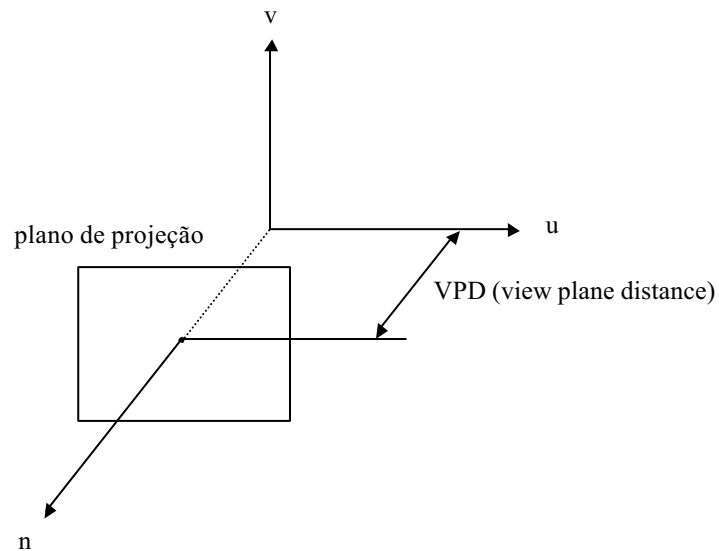


Figura 3.12 - Plano de projeção.

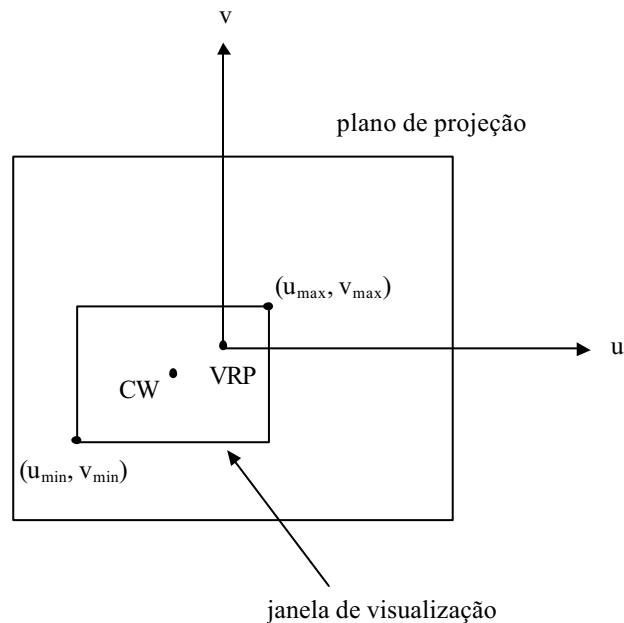


Figura 3.13 - Janela de visualização.

O centro de projeção e a direção de projeção DOP (direction of projection) são definidos pelo ponto de referência de projeção PRP (projection reference point) e um indicador do tipo de projeção. Se a projeção é perspectiva, PRP é o próprio centro de projeção. Se a projeção é paralela, a direção de projeção DOP é definida pela direção da reta PRP-CW, sendo CW o centro da janela de visualização. O ponto PRP é especificado no sistema VRC, e conseqüentemente sua posição em relação a VRP independe da posição e orientação do sistema VRC em relação ao sistema WC.

Na projeção perspectiva, o volume de visualização é a pirâmide semi-infinita com vértice em PRP e faces passando pelos limites da janela de visualização (Figura 3.14). Nas projeções paralelas, o volume de visualização é o paralelepípedo infinito com faces paralelas à direção de projeção, passando pelos limites da janela de visualização (Figura 3.15).

O volume de visualização deve ser tornado finito através da consideração de dois planos paralelos ao plano de projeção, o plano anterior de recorte (front plane) e o plano posterior de recorte (back plane). Assim como o plano de projeção, estes dois planos são especificados através de suas distâncias F e B à origem de VRC, dadas em coordenadas n (Figura 3.16).

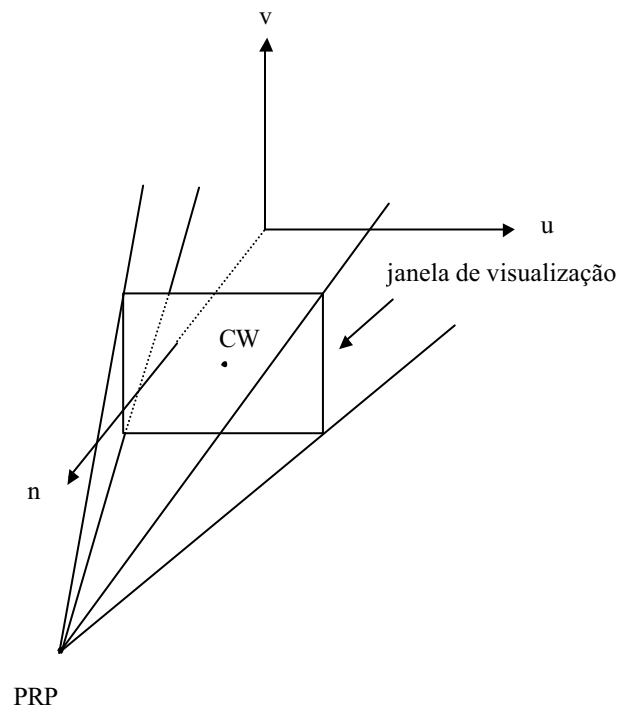


Figura 3.14 - Volume de visualização na projeção perspectiva.

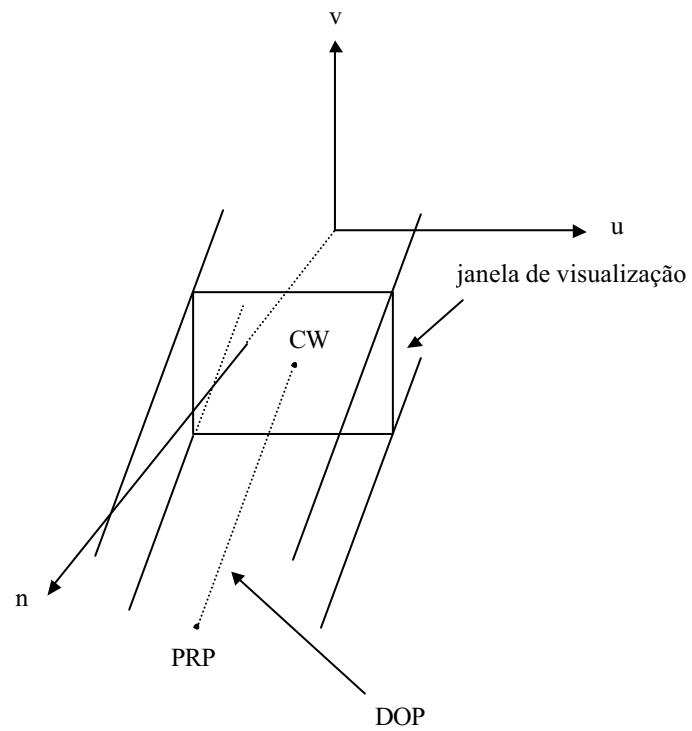


Figura 3.15 - Volume de visualização na projeção paralela.

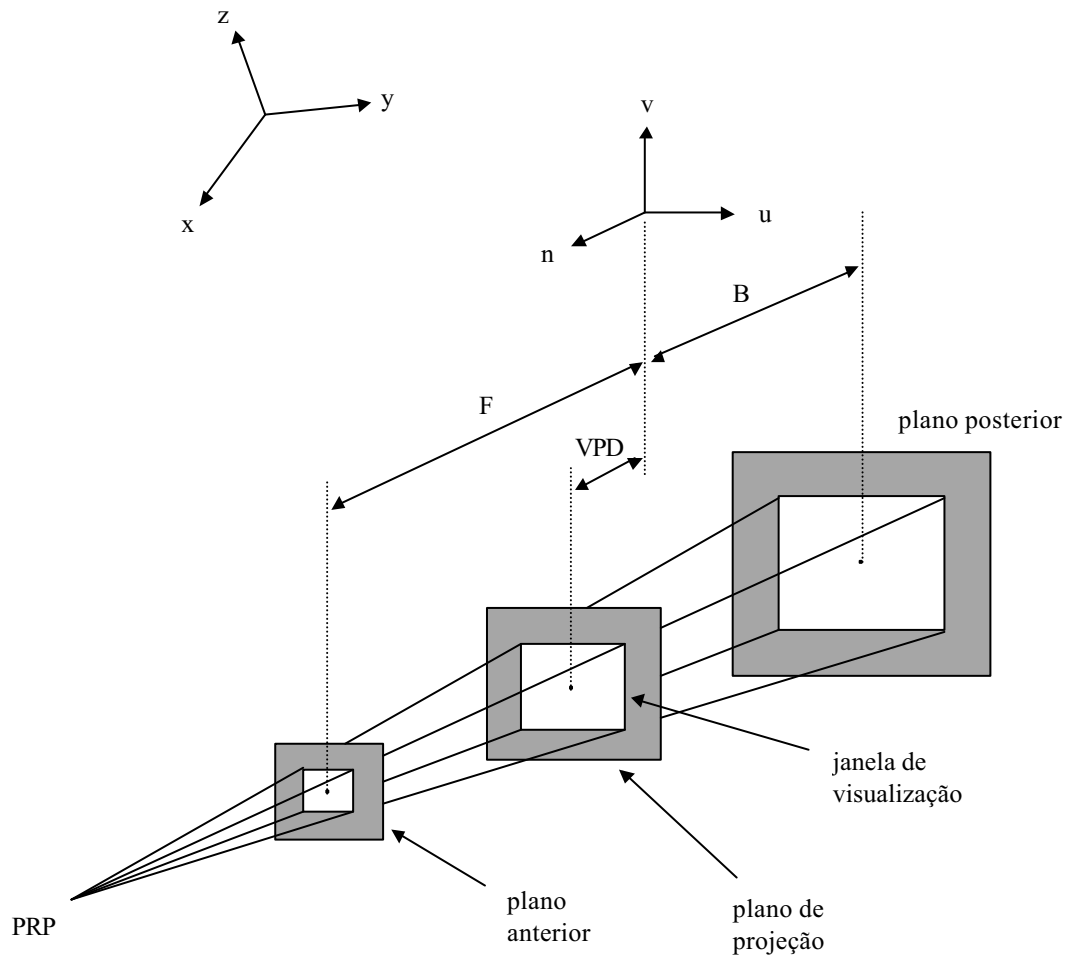


Figura 3.16 - Volume de visualização finito na projeção perspectiva.

3.3.2 Coordenadas normalizadas

Antes de ser mapeado para a região de visualização do dispositivo de saída, o volume de visualização deve ser transformado em um volume de visualização normalizado, definido em um sistema r - s - t de coordenadas normalizadas (NPC - normalized projection coordinates).

Os volumes de visualização normalizados são convenientes, em especial porque simplificam as operações de recorte. As Figuras 3.17 e 3.18 ilustram os dois volumes normalizados adotados no padrão PHIGS, utilizados respectivamente para as projeções perspectiva e paralela.

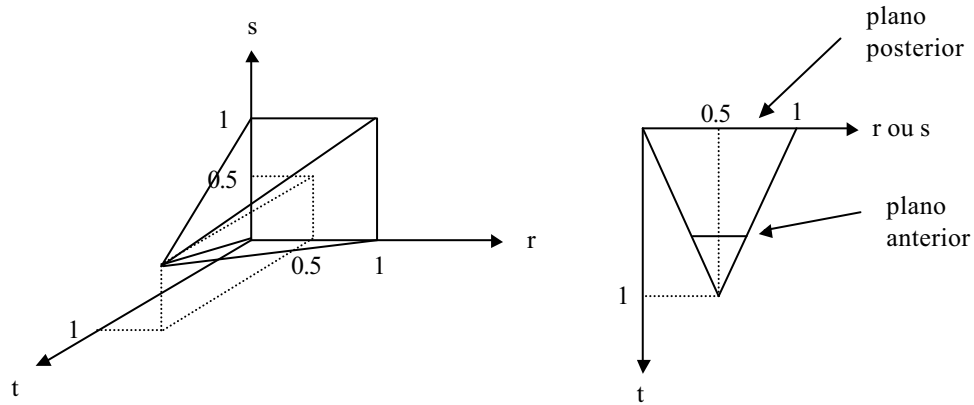


Figura 3.17 - Volume de visualização normalizado - projeção perspectiva.

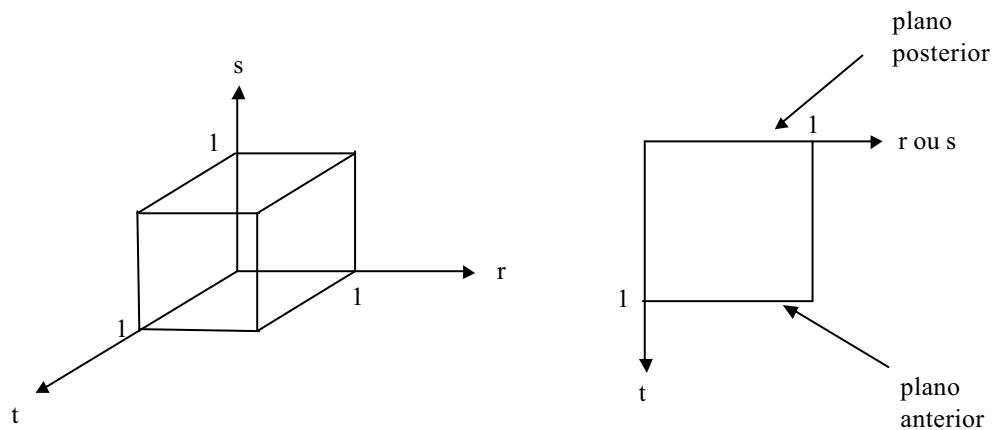


Figura 3.18 - Volume de visualização normalizado - projeção paralela.

3.3.3 Transformações de visualização

O procedimento de visualização 3D de um objeto consiste nas seguintes etapas:

1. Definição do objeto em coordenadas de mundo.
2. Especificação do sistema de coordenadas de referência de visualização VRC, através do ponto de referência VRP e dos vetores VUP e VPN.
3. Especificação do tipo de projeção (perspectiva ou paralela), do ponto de referência de projeção PRP, do plano de projeção, da janela de visualização, e dos planos anterior e posterior de recorte, definido assim o volume de visualização.
4. Especificação da região de visualização no dispositivo de saída gráfica.
5. Transformação das coordenadas do objeto de coordenadas de mundo para coordenadas de referência ($WC \rightarrow VRC$).
6. Transformação de coordenadas do sistema VRC para o sistema de coordenadas normalizadas NPC, de tal modo que o volume de visualização definido em VRC se transforme no volume normalizado definido em NPC.
7. Operações de recorte 3D efetuadas no volume de visualização normalizado.
8. Determinação da visibilidade das primitivas que descrevem o objeto.
9. Projeção do objeto no plano de projeção.
10. Transformação de coordenadas de tal modo que a janela de visualização definida no plano de projeção se enquadre na região de visualização do dispositivo de saída.
11. Conversão das primitivas.

Dependendo do algoritmo utilizado, o problema da determinação da visibilidade das primitivas pode ser resolvido durante a fase de rasterização. As transformações envolvidas nas etapas 5, 6 e 10 são descritas a seguir, e as operações de recorte são discutidas no item 3.7.

3.3.3.1 Transformação coordenadas de mundo-coordenadas de referência

Dados os pontos VRP(VRP_x, VRP_y, VRP_z) e os vetores VPN e VUP (Figura 3.19), os vetores unitários R_u , R_v e R_n nas direções u , v e n são calculados através das seguintes expressões:

$$R_u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \frac{VUP \times VPN}{|VUP \times VPN|} \quad (3.30)$$

$$R_n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{VPN}{|VPN|} \quad (3.31)$$

$$R_v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = R_n \times R_u \quad (3.32)$$

e a transformação $WC \rightarrow VRC$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = R \cdot T(-VRP_x, -VRP_y, -VRP_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

sendo R a matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e T a translação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

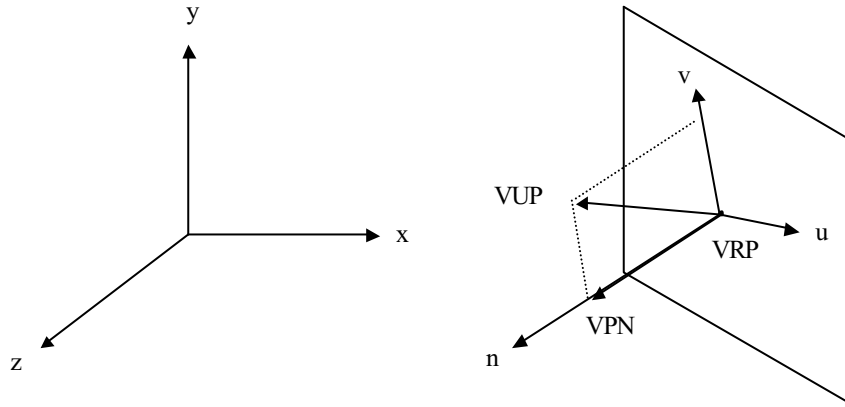


Figura 3.19 - Definição do sistema de coordenadas de referência de visualização.

No padrão PHIGS, o produto $R.T$ corresponde à matriz denominada *view orientation matrix* (VOM):

$$VOM = R.T = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -(u_x \cdot VRP_x + u_y \cdot VRP_y + u_z \cdot VRP_z) \\ v_x & v_y & v_z & -(v_x \cdot VRP_x + v_y \cdot VRP_y + v_z \cdot VRP_z) \\ n_x & n_y & n_z & -(n_x \cdot VRP_x + n_y \cdot VRP_y + n_z \cdot VRP_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.3.3.2 Transformação coordenadas de referência-coordenadas normalizadas

A transformação do sistema de coordenadas de referência de visualização (VRC) para o sistema de coordenadas normalizadas deve ser tal que o volume de visualização definido em VRC se transforme em um volume normalizado pré-definido. Para isto, são necessárias transformações de translação, mudança de escala e distorção linear (shear transformation).

Em duas dimensões, uma matriz de distorção linear na direção x tem a seguinte forma:

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde a é o coeficiente de distorção linear na direção x . A Figura 3.20 mostra o efeito produzido por uma transformação deste tipo. Da mesma forma, uma matriz de distorção linear na direção y tem a forma:

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde b é o coeficiente de distorção na direção y (Figura 3.21).

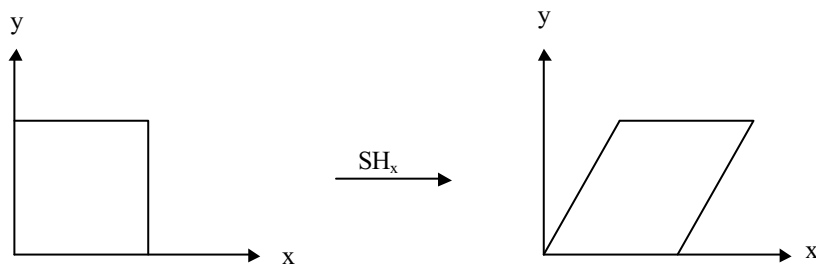


Figura 3.20 - Distorção linear na direção x , em duas dimensões.

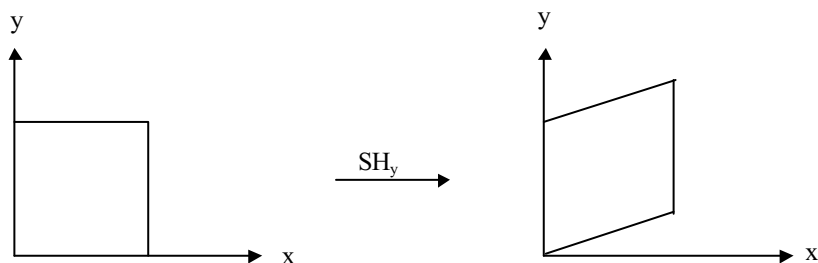


Figura 3.21 - Distorção linear na direção y .

3.3.3.2.1 *Projeção paralela*

Na projeção paralela, a transformação $VRC \rightarrow NPC$ deve ser tal que o volume de visualização da Figura 3.22 seja transformado no volume normalizado da Figura 3.18. Considerando que os eixos r - s - t do sistema NPC sejam inicialmente coincidentes com os eixos u - v - n de VRC, a transformação desejada pode ser obtida através das seguintes etapas:

1. Translação $T(0,0,-B)$ tal que o plano posterior fique contido no plano r - s .
2. Transformação de distorção linear em u e v , tal que a direção de projeção seja paralela ao eixo t (Figura 3.23).
3. Translação $T(-dr, -ds, 0)$.
4. Mudança de escala de forma a normalizar o paralelepípedo da Figura 3.24.

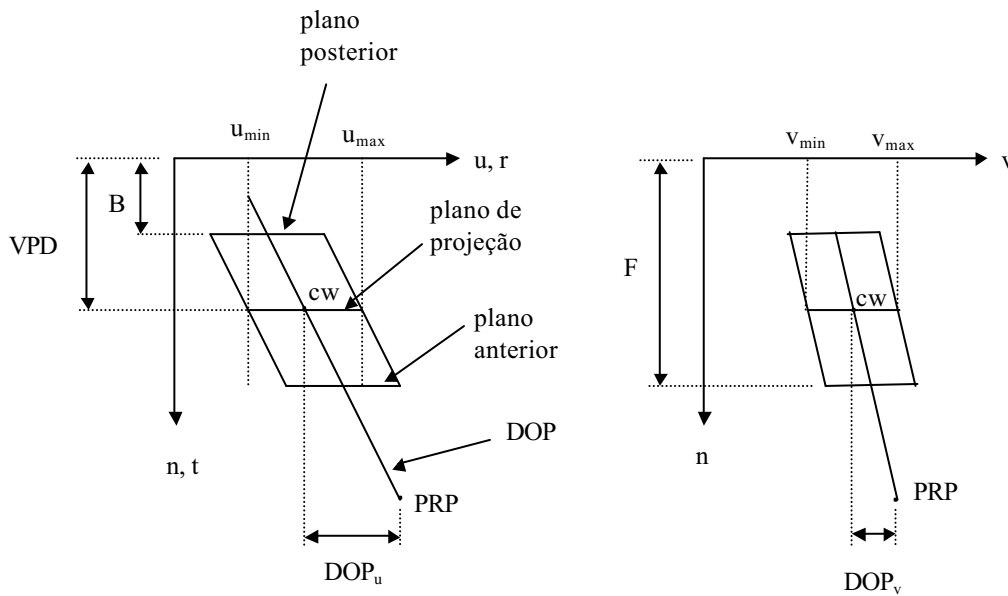


Figura 3.22 - Volume de visualização em VRC - projeção paralela.

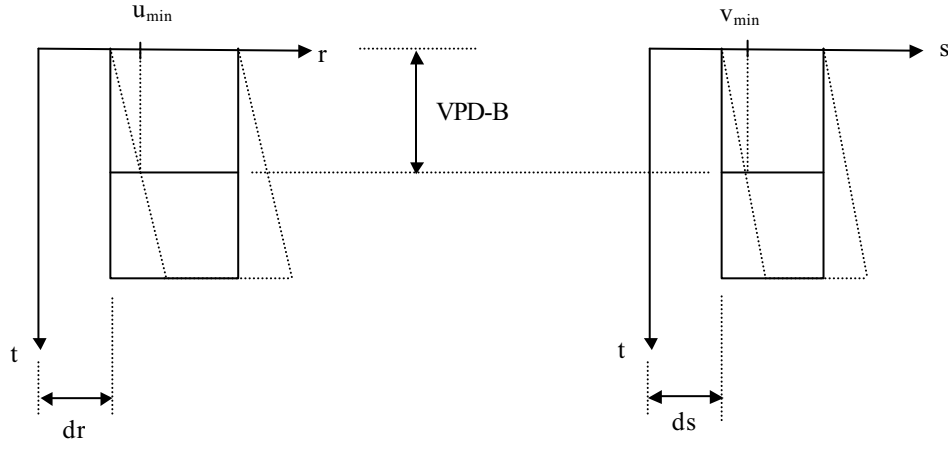


Figura 3.23 - Volume de visualização após translação $T(0, 0, -B)$ e distorção SH_{uv} .

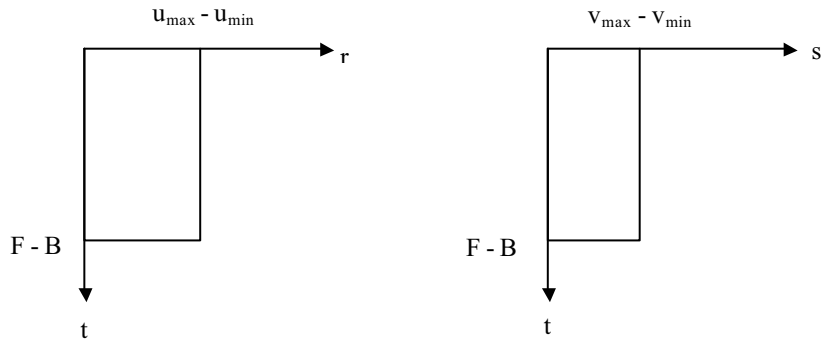


Figura 3.24 - Volume de visualização após translação $T(-dr, -ds, 0)$.

A matriz de distorção linear tem a forma:

$$SH_{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_u & 0 \\ 0 & 1 & sh_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde os coeficientes sh_u e sh_v são iguais a:

$$sh_u = -\frac{DOP_u}{DOP_n} \quad (3.40a)$$

$$sh_v = -\frac{DOP_v}{DOP_n} \quad (3.40b)$$

sendo as componentes da direção de projeção dadas por:

$$DOP = PRP - CW = \begin{bmatrix} DOP_u \\ DOP_v \\ DOP_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PRP_u \\ PRP_v \\ PRP_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (u_{\max} + u_{\min}) / 2 \\ (v_{\max} + v_{\min}) / 2 \\ VPD \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

As translações dr e ds são obtidas a partir das expressões:

$$dr = u_{\min} + (VPD-B) \cdot sh_u \quad (3.42)$$

$$ds = v_{\min} + (VPD-B) \cdot sh_v \quad (3.43)$$

Finalmente, comparando as Figuras 3.24 e 3.18 conclui-se que os fatores da mudança de escala $S(s_u, s_v, s_n)$ devem ser iguais a:

$$s_u = \frac{1}{u_{\max} - u_{\min}} \quad (3.44)$$

$$s_v = \frac{1}{v_{\max} - v_{\min}} \quad (3.45)$$

$$s_n = \frac{1}{F - B} \quad (3.46)$$

Com estes resultados, a transformação composta resultante pode ser escrita na forma:

$$N_{\text{par}} = S(s_u, s_v, s_n) \cdot T(-dr, -ds, 0) \cdot SH_{uv}(sh_u, sh_v) \cdot T(0, 0, -B) \quad (3.47)$$

Efetuada o produto acima, obtém-se:

$$N_{\text{par}} = \begin{bmatrix} s_u & 0 & s_u \cdot sh_u & -s_u \cdot (B \cdot sh_u + dr) \\ 0 & s_v & s_v \cdot sh_v & -s_v \cdot (B \cdot sh_v + ds) \\ 0 & 0 & s_n & -s_n \cdot B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Cada ponto do sistema de coordenadas VRC é transformado para o sistema NPC através da relação:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = N_{\text{par}} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

No padrão PHIGS, a matriz N_{par} corresponde à matriz denominada *view mapping matrix*, responsável pela transformação do sistema VRC para o sistema NPC.

3.3.3.2.2 *Projeção perspectiva*

Na projeção perspectiva, o volume de visualização da Figura 3.25 deve ser transformado no volume normalizado da Figura 3.17. A transformação VRC \rightarrow NPC, neste caso, pode ser obtida seguindo-se as etapas:

1. Translação $T(0, 0, -B)$, trazendo o plano posterior para o plano rs.
2. Transformação de distorção linear em u e v, de modo que a direção PRP-CW fique paralela ao eixo n (Figura 3.26).
3. Translação $T(-dr, -ds, 0)$.
4. Mudança de escala tal que o volume em VRC (Figura 3.16) seja mapeado para o volume normalizado (Figura 3.17).

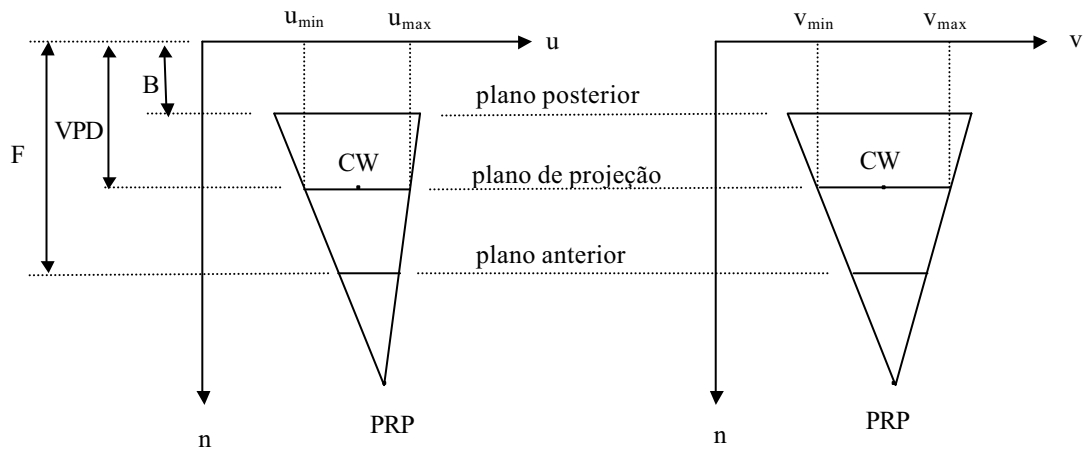


Figura 3.25 - Volume de visualização no sistema VRC.

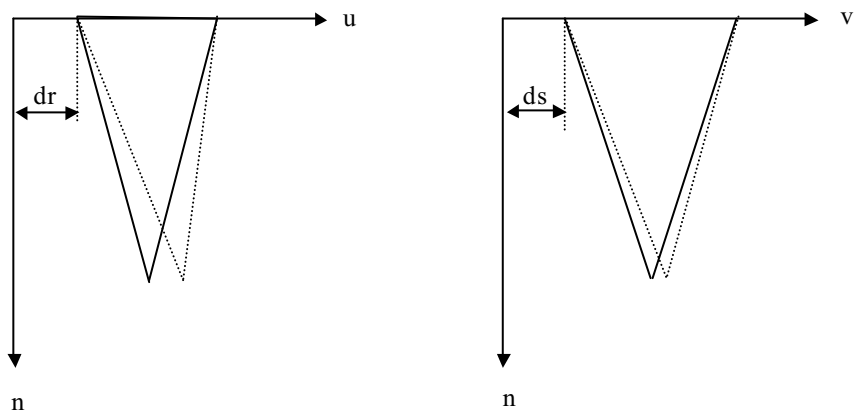


Figura 3.26 - Volume de visualização após translação e distorção linear.

As duas primeiras transformações são idênticas às suas correspondentes na projeção paralela, enquanto que os deslocamentos da translação $T(-dr, -ds, 0)$ são dados por:

$$dr = \frac{(B - PRP_n) \cdot u_{\min} + PRP_u \cdot (VPD - B)}{VPD - PRP_n} \quad (3.50)$$

$$ds = \frac{(B - PRP_n) \cdot v_{\min} + PRP_v \cdot (VPD - B)}{VPD - PRP_n} \quad (3.51)$$

Após estas três transformações, o volume de visualização tem a forma de uma pirâmide de base retangular de lados h_u , h_v , e de altura h_n (Figura 3.27):

$$h_u = \frac{(u_{\max} - u_{\min}) \cdot (PRP_n - B)}{PRP_n - VPD} \quad (3.52)$$

$$h_v = \frac{(v_{\max} - v_{\min}) \cdot (PRP_n - B)}{PRP_n - VPD} \quad (3.53)$$

$$h_n = PRP_n - B \quad (3.54)$$

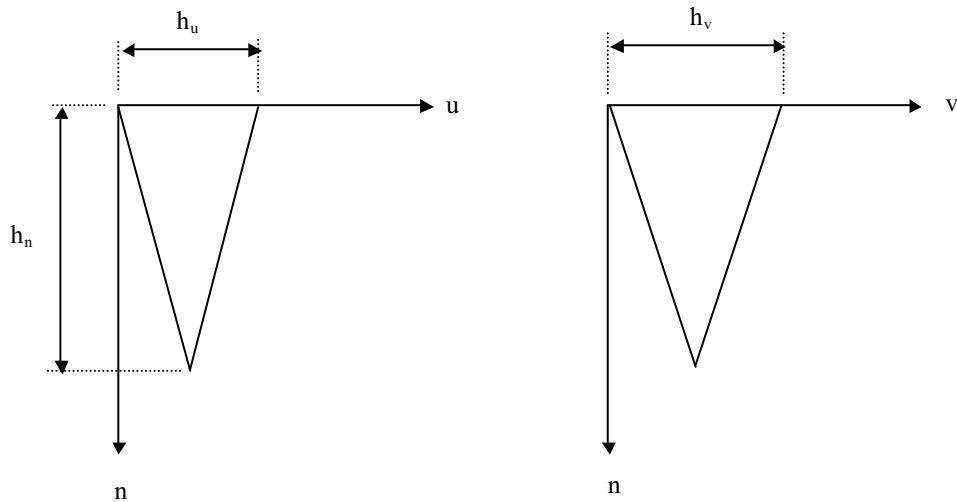


Figura 3.27 - Volume de visualização após translação $T(-dr, -ds, 0)$.

Finalmente, a mudança de escala $S(s_u, s_v, s_n)$ deve ser tal que transforme o volume da Figura 3.27 no volume normalizado. Portanto, os fatores de escala são:

$$s_u = \frac{1}{h_u} \quad (3.55)$$

$$s_v = \frac{1}{h_v} \quad (3.56)$$

$$s_n = \frac{1}{h_n} \quad (3.57)$$

A transformação resultante é :

$$N_{\text{per}} = S(s_u, s_v, s_n) \cdot T(-dr, -ds, 0) \cdot SH_{uv}(sh_u, sh_v) \cdot T(0, 0, -B) \quad (3.58)$$

e tem a mesma forma da matriz em (3.48). Cada ponto do sistema de coordenadas VRC é transformado para o sistema NPC através da relação:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = N_{\text{per}} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

No padrão PHIGS, a matriz N_{per} corresponde à matriz denominada *view mapping matrix*, responsável pela transformação do sistema VRC para o sistema NPC para projeções perspectivas.

3.3.3.3 Transformação coordenadas normalizadas - coordenadas de dispositivo

Os objetos são visualizados no dispositivo de saída através do mapeamento da projeção do volume de visualização normalizado em uma região de visualização (viewport) do dispositivo. No caso da projeção paralela, a projeção é imediata, bastando considerar as coordenadas normalizadas r e s (Figura 3.28). Na projeção perspectiva (Figura 3.29), a projeção das primitivas no plano de projeção é dada pela matriz:

$$M_{\text{per}} = \begin{bmatrix} dt - 1 & 0 & 0.5 & -dt / 2 \\ 0 & dt - 1 & 0.5 & -dt / 2 \\ 0 & 0 & dt & -dt \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

sendo dt igual a:

$$dt = (VPD - B) / (PRP_n - B) \quad (3.61)$$

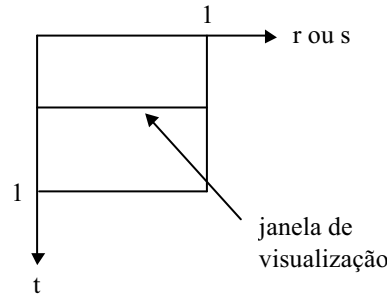


Figura 3.28 - Projeção paralela: janela de visualização em NPC.

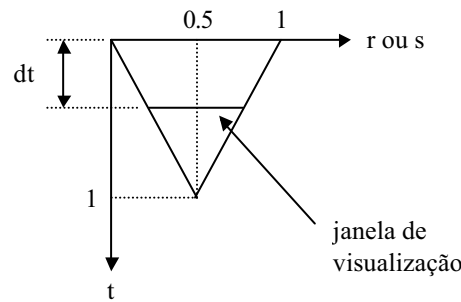


Figura 3.29 - Projeção perspectiva: janela de visualização em NPC.
A projeção perspectiva é então obtida a partir de :

$$\begin{bmatrix} r' \\ s' \\ t' \\ w \end{bmatrix} = M_{\text{per}} \cdot \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

obtendo-se as coordenadas projetadas $(r'/w, s'/w, t'/w, 1)$.

Efetuada a projeção, paralela ou perspectiva, a janela de visualização definida em coordenadas r e s (Figura 3.30) é então mapeada na região de visualização do dispositivo (Figura 3.31). Como foi estudado anteriormente, isto é feito através da matriz M_{wv} :

$$M_{wv} = \begin{bmatrix} s_r & 0 & -r_{\min} \cdot s_r + X_{\min} \\ 0 & s_s & -s_{\min} \cdot s_s + Y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

sendo,

$$s_r = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}} \quad (3.64)$$

$$s_s = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}} \quad (3.65)$$

Um ponto P(X,Y) da região de visualização tem então as seguintes coordenadas:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = M_{wv} \cdot \begin{bmatrix} r' \\ s' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

sendo r' e s' as coordenadas projetadas.

Tendo em vista que na projeção paralela a janela de visualização é dada por:

$$r_{\min} = s_{\min} = 0 \quad (3.67)$$

$$r_{\max} = s_{\max} = 1 \quad (3.68)$$

Os fatores de escala se reduzem a:

$$s_r = X_{\max} - X_{\min} \quad (3.69)$$

$$s_s = Y_{\max} - Y_{\min} \quad (3.70)$$

Na projeção perspectiva tem-se que:

$$r_{\min} = s_{\min} = dt/2 \quad (3.71)$$

$$r_{\max} = s_{\max} = 1-dt/2 \quad (3.72)$$

e os fatores de escala são:

$$s_r = (X_{\max} - X_{\min}) / (1 - dt) \quad (3.73)$$

$$s_s = (Y_{\max} - Y_{\min}) / (1 - dt) \quad (3.74)$$

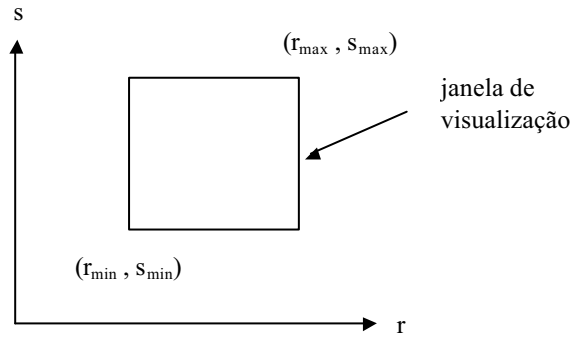


Figura 3.30 - Limites da janela de visualização em NPC.

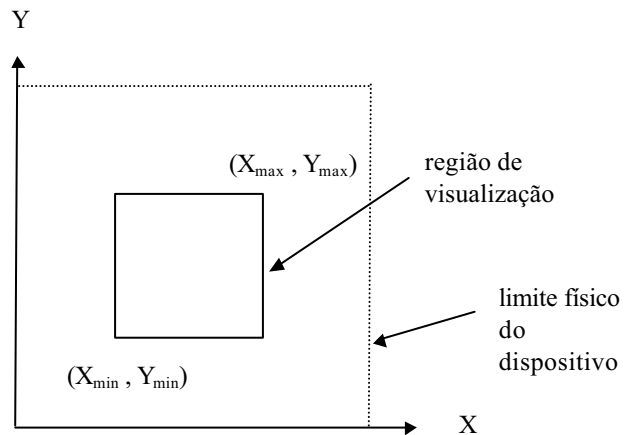


Figura 3.31 - Região de visualização.