HW 04

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \ddots & & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ & & -\frac{1}{12} & & & \frac{1}{12} \\ & & \frac{2}{3} & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \ddots & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & & & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ u_N \end{bmatrix}$$

Teniamos que $w_j = p'(x_j) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{12}u_{j-2} - \frac{2}{3}u_{j-1} + \frac{2}{3}u_{j+1} - \frac{1}{12}u_{j+2}\right]$ (1)

Hay que demostrar que $\pi A = A\pi$, donde $\pi = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$

Entonces para un j fijo tenemos que para el j-ésimo renglón de la matriz A tiene los siguientes elementos

$a_{j\,j-2} = 1/12$, $a_{j\,j-1} = -2/3$, $a_{j\,j+1} = 2/3$, $a_{j\,j+2} = -1/12$

Con $j-2, j-1, j+1, j+2$ $\mathrm{mod}(N)$ y $j = 1, 2, \dots, N$

Todos los demas elementos son ceros.

Entonces la matriz πA tendra los elementos siguientes

$a_{j\,j-2} = a_{j+1\,j-2} = 1/12$, $a_{j\,j-1} = a_{j+1,\,j-1} = -2/3$,

$a_{j\,j+1} = a_{j+1\,j+1} = 2/3$, $a_{j\,j+2} = a_{j+1\,j+2} = -1/12$

y la matriz $\pi A \pi^{-1}$ tendra los elementos

$a_{j\,j-2} = a_{j+1\,j-1} = 1/12$, $a_{j\,j-1} = a_{j+1\,j} = -2/3$

$a_{j\,j+1} = a_{j+1\,j+2} = 2/3$, $a_{j\,j+2} = a_{j+1\,j+3} = -1/12$

si comparamos los elementos con la expresión w_j, por ejemplo

$a_{j\,j-1}$ son los mismos elementos en las mismas posiciones que

$a_{j+1\,j-1}$ pero con $j = 0, 1, \dots, N-1$. Así también para los demas términos y por lo tanto $\pi A \pi^{-1} = A$

$\Rightarrow \pi A = A\pi$ y por el teorema anterior A es circulante.