HW5.

$$D_N = \begin{bmatrix} 0 & & & -\frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} \\ -\frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} & \ddots & & -\frac{1}{2}\cot\frac{2h}{2} \\ \frac{1}{2}\cot\frac{2h}{2} & & \ddots & -\frac{1}{2}\cot\frac{3h}{2} \\ -\frac{1}{2}\cot\frac{3h}{2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} \\ \frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} & & & 0 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

Para la n-esima columna se cumple que los elementos son de la forma que sigue:

$$a_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \equiv 0 \bmod(n) \\ \frac{1}{2}(-1)^i \cot\left(\frac{ih}{2}\right) & \text{si } i \not\equiv 0 \bmod(n) \end{cases}$$

Es claro que $a_{in}=0$ cuando $i=n$, pues $n\equiv 0 \bmod (n)$

Entonces los elementos de $\pi A \pi^{-1}$ serán

$$a_{in} = a_{i+1,n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+1 \equiv 0 \bmod(n+1) \\ \frac{1}{2}(-1)^{i+1} \cot\left(\frac{ih}{2}\right) & \text{si } i+1 \not\equiv 0 \bmod(n+1) \end{cases}$$

Entonces $i \not\equiv 0 \bmod(n)$ y $i+1 \not\equiv 0 \bmod(n+1)$

$\Rightarrow i = kn + r_1$ y $i+1 = k(n+1)+r_2 \Rightarrow i+2 = k(n+2) + (r_2 - r_1)$

Como $r_1 \neq r_2 \Rightarrow i+2 \not\equiv 0 \bmod(n+2)$

Por lo tanto, esto prueba que A es circulante y además que es Toeplitz, pues por definición debe cumplir que $a_{ij} \longrightarrow a_{i+1,j+1}$