HW02.

Definición. (Matriz circulante)

Una matriz circulante "A" es una matriz cuadrada de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix} = \operatorname{Circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

y esta matriz circulante se dice que es de orden "n".

Esta notación puede ser abreviada como $C = (c_{jk}) = (c_{k-j+1})$

Donde los subíndices son mod(n)

Teorema. Sea $\pi = \operatorname{Circ}(0, 1, \dots, 0)$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces A es circulante si y sólo si $A\pi = \pi A$

Dem:

($\Rightarrow$) Supongamos que A es una matriz de $n \times n$ circulante

La matriz π tiene la forma siguiente

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$ De tamaño $n \times n$

Entonces:

$$\pi A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$A\pi = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & & c_n \end{bmatrix}$$