

HW5. elementos de la matriz A tienen la forma

$$A_N = \begin{bmatrix} 0 & & & -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & & & -\frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} \\ & \ddots & & -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} & & & \vdots \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} & & & \vdots \\ \vdots & & & \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & & & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Para la n -ésima columna se cumple que los elementos son de la forma que sigue:

$$a_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \equiv 0 \pmod{n} \\ \frac{1}{2} (-1)^i \cot\left(\frac{ih}{2}\right) & \text{si } i \not\equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

Es claro que $a_{in} = 0$ cuando $i = n$, pues $n \equiv 0 \pmod{n}$

Entonces los elementos de $\pi A \pi^{-1}$ serán

$$a_{in} = a_{i+1, n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+1 \equiv 0 \pmod{n+1} \\ \frac{1}{2} (-1)^{i+1} \cot\left(\frac{(i+1)h}{2}\right) & \text{si } i+1 \not\equiv 0 \pmod{n+1} \end{cases}$$

Entonces $i \not\equiv 0 \pmod{n}$ y $i+1 \not\equiv 0 \pmod{n+1}$

$$\Rightarrow i = kn + r_1 \text{ y } i+1 = K(n+1) + r_2 \Rightarrow i+2 = K(n+2) + (r_2 - r_1)$$

Como $r_1 \neq r_2 \Rightarrow i+2 \not\equiv 0 \pmod{n+2}$

Por lo tanto, esto prueba que A es circulante y además que es Toeplitz, pues por definición debe cumplir que $a_{ij} \rightarrow a_{i+1, j+1}$

$$a_{in} = \frac{1}{2} (-1)^i \cot\left(\frac{ih}{2}\right) \text{ si } i \not\equiv 0 \pmod{n}$$

Para si $i \equiv 0 \pmod{n}$ entonces $i = n$ y $a_{in} = 0$.
 Para si $i \equiv 0 \pmod{n+1}$ entonces $i = n+1$ y $a_{i+1, n+1} = 0$.
 Entonces $a_{in} = a_{i+1, n+1}$ y $a_{ij} = a_{i+1, j+1}$