



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Análisis de Fenómenos de Ondas No Suaves

Mediante el Método Asintótico Débil

T E S I S

que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias

(Matemáticas)

presenta:

Jessica Yuniver Santana Bejarano

Director de Tesis: Dr. Martín Gildardo García A.

Hermosillo, Sonora, México,

26 de Agosto de 2009

SINODALES

Dr. Oswaldo González Gaxiola

Dpto. de Matemáticas Aplicadas y Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Cuajimalpa (UAM-C).

Dr. Yuri Vorobev

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Georgii Omel'ianov

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Martin G. García A.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen de Grado



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA

Acta No. 12
Foja 12
Libro 1
Exp. No. 202201542

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, siendo las 12:00 horas
del día 26 de Agosto del 2009, se reunieron en:

El Auditorio del Departamento de Matemáticas

de la Universidad de Sonora, los señores:

Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Dr. Yuri Vorovev Dr. Georgii Omelianov

Dr. Oswaldo González Gaxiola

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el
Examen de Grado a:

JESSICA YUNIVER SANTANA BEJARANO

de: Maestro en Ciencias (Matemáticas)

quien presentó el trabajo de tesis

"Análisis de Fenómenos de Ondas no Suaves Mediante el Método
Asintótico Débil"

Los sinodales replicaron a la sustentante y después de debatir entre sí reservada y
libremente, la declararon:

APROBADA POR UNANIMIDAD

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para
constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.

Jessica Yuniver Santana B.
Firma del sustentante

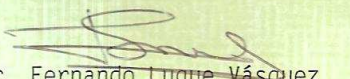
M. G. García A
PRESIDENTE

Oswaldo Gaxiola
SECRETARIO

Juan
VOCAL

Dr. Fernando Luque Vásquez Coordinador
del Programa de: Posgrado en Matemáticas
de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a
los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo, Sonora, a 26 de Agosto del 2009.


Dr. Fernando Luque Vásquez
Coordinador del Programa



Ing. Enrique Gurrola Mac., Secretario de Unidad en Funciones de Vicerrector
de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace
constar que: el Dr. Fernando Luque Vásquez
es a la fecha de expedición de este documento, Coordinador del Programa arriba citado
y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 26 de Agosto del 2009.



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
UNIDAD REGIONAL
CENTRO
VICERRECTORIA


Ing. Enrique Gurrola Mac
Secretario de Unidad en Funciones de
VICERRECTOR
UNIDAD REGIONAL CENTRO

“No sé que le parece al mundo, pero, a mi juicio, no he sido más que un niño que se dedicó a jugar en la playa regocijándose al encontrar un guijarro más pulido que los demás o una concha marina más bonita que las ordinarias, mientras el océano de la verdad yacía ante mí esperando que lo descubriera.”

Issac Newton

**ANÁLISIS DE FENÓMENOS DE ONDAS NO SUAVES
MEDIANTE EL MÉTODO ASINTÓTICO DÉBIL**

**JESSICA YUNIVER SANTANA BEJARANO
UNIVERSIDAD DE SONORA**

Dedico este trabajo a las personas que mas amo:

A mi mamá
Margarita Bejarano Murrieta

A mis hermanos:
Vitaliano, Dupret, Hildegardo, Uriel, Edna, Cinthya, Jaziel y Belem.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente le doy gracias a Dios por haber estado presente en mi caminar en todo momento, ya que gracias a él puedo plasmar hoy en estas páginas estas palabras, pues el fue quien me dio tantas fuerzas para salir adelante, el a sido mi fortaleza, mi ejemplo, la luz de mi vida; esa luz que en un momento se volvió oscuridad pero gracias a él en mi y en mi corazón se encendió una luz, una esperanza y una nueva ilusión por la cual salir adelante. Una ilusión aún más grande que aquella que cuando aún siendo yo muy joven sentí que la vida me arrebatava, pero sólo fue una prueba, una prueba que a estas alturas sólo los que me rodeaban pueden dar testimonio de si pude aprobar. Si sólo aquellos que me apoyaron incondicionalmente y que nunca me dieron la espalda. A ellos con quien pude compartir mis alegrías y mis tristezas mis altas y mis bajas.

A aquellas personas que me extendieron la mano cuando más lo necesite, les agradezco y aquí tienen una pequeña muestra de todo lo que podría hacer con esfuerzo y dedicación.

A mi director de tesis Dr. Martín Gildardo García Alvarado quien desde el primer momento me extendió la mano, me abrió las puertas para continuar con mis estudios en esta Universidad de Sonora, cuando más lo necesite; además de ser pieza clave para que este trabajo llegara a su culminación, y de apoyarme con sus consejos y experiencia cuando me ofrecieron mi primer trabajo en la Universidad del Valle de México y principalmente por que tanto mi mamá como mis hermanos le estamos muy agradecidos ya que gracias a él podemos disfrutar aún de nuestra madre, el pilar más importante de nuestra familia, realmente a sido de gran bendición para mi vida.

Agradezco a CONACYT por el apoyo que me brindo durante el último semestre de mis estudios de maestría.

A mis amigos, que incondicionalmente me ofrecieron su apoyo en todo momento y con quienes tuve muchas experiencias.

A mis sinodales por las correcciones y sugerencias que me dieron para que este trabajo de tesis culminara con éxito y fuera de mayor comprensión para el lector.

Realmente este trabajo de tesis a sido una gran experiencia para mi, porque en el he podido plasmar una pequeña parte de la gran utilidad del Análisis Matemático, algo que muy pocos estudiantes realmente tienen la fortuna de encontrar ya que la gran mayoría piensa que es una materia demasiado abstracta y para la cual no encuentran relación alguna con la vida real.

En este trabajo aprendí a aplicar lo que conozco del análisis, a utilizar paquetería de programación para simular algunos programas; relacionar fuertemente a esta materia con la Física, etc.

A la Doctora Martha Dolores Guzmán Partida por brindarme su apoyo y confianza en todo momento, además de introducirme en el tema de las Distribuciones y despertar en mi un gusto enorme por el Análisis. Por saber aconsejarme cada vez que lo necesite.

A mi hermano Vitaliano por ser mi compañero de travesuras y alegrías, por recorrer tantos momentos de la vida a mi lado. A Dupret por ser un muchacho con tantas ganas de salir adelante y por su apoyo incondicional durante todos estos años. A mis hermanos Hildegardo y Uriel por que han aprendido a vivir solos lejos de nosotros en Guanajuato y Guadalajara, mostrándonos que pueden salir adelante con gran esfuerzo y por el gusto hacia sus estudios, a pesar de que las cosas se tornen en muchas ocasiones difíciles. A mi hermana Edna por ser una chica seria pero detrás de esa seriedad encuentras un alma linda y alegre, con muchas ganas de salir adelante y además tener un gran gusto por la vida y la naturaleza, a sido un gran ejemplo para sus hermanos más grandes pues nos ha mostrado que es muy interesante el tener las puertas abiertas a este mundo y que podemos vivir momentos inolvidables con la gente que nos rodea. A Cinthya por ser la alegría de la casa, por ser una niña atrevida y que le gusta disfrutar cada oportunidad que la vida le ofrece. A Jaziel y a Belem los más pequeños de todos, quienes día a día nos recuerdan que es mejor vivir la vida sin preocupaciones y miedos como sólo un alma de niños puede hacer, pues mientras uno crece va adquiriendo más responsabilidades.

A todos mis compañeros de maestría, más aún a mis amigos con quienes compartí grandes momentos al correr del tiempo en este recinto del saber, experiencias tanto en el aprendizaje que te exige la vida diaria como en lo profesional.

Agradezco también a la Universidad de Sonora, porque ha sido como mi segunda casa; sus edificios y sus pasillos están llenos de la historia de todos aquellos estudiantes que han pasado por este recinto del saber con grandes deseos de crecer en su área, sus árboles viejos y grandes han sido la sombra de muchos que por aquí pasamos todos los días y sus maestros llevan con ellos a todos aquellos estudiantes que una vez tocaron sus puertas para conocer un poco más de aquellas cosas que les interesaban.

A MI MADRE. Ha esa personita que tanto aprecio, que me ha dado de sí, todo y sin embargo, jamás me pide algo. Me ha dicho tanto y sin embargo, no usa palabras sino actos. En cada labor que hace en cada caricia aún en cada reproche, esta su amor por mí. En ella vi la primera luz en ella vi el amor más puro el amor que solo ella me sabría dar; el de madre. A ella que ha tenido desvelos a ella que ha sabido darme consuelo, a ella que ha festejado conmigo todas esas victorias, pero aún más importante ha estado conmigo en mis fracasos cuando más sola me sentía. Así es, aún en los momentos más difíciles cuando todo se torna oscuro su luz es más intensa más brillante, más bella; pues su luz es de amor, amor que me da día a día con esa paciencia con esa templanza que hiciera parecer guerrera cuando no es sino una mujer de la que yo en todo dependo. No tengo ni que contarle como yo le he faltado como la he valorado, como en silencio la amo y sin embargo no puedo externarlo ¿Y saben? aún así, se que lo sabe. Por eso hoy lo plasmo en estas hojas, no esperaré más a decirlo pues se, no la tendré siempre y no quiero tener ese arrepentimiento, de no habérselo dicho. Decirle a mi madre que la quiero, que siempre la he admirado de cómo en silencio me mira cuando ya estoy dormida, de como aún ya mayor pasa a mi cuarto y me da un beso, de como siento su calor cuando esta cerca aún

estando dormida y con ello tengo para sentirme protegida; como cuando era una niña. Si soy una niña que sigue a su madre pues aún cuando he crecido su amor me mantiene joven, así en sus ojos al voltear a verme no ve a un adulto ya crecido, sino a su bebe que la sigue necesitando como cuando la tenía en su regazo. Escribo esto para que cuando ella pase por conflictos y tenga pendiente de mí, recuerde que alguna vez, exprese que la amo por como es, por como me quiere y sin embargo es tan intensa su luz que me impide verla de frente y decirle lo que como ser humano, como hija afortunada le he deseado decir siempre que la amo sin palabras, sin miradas tan solo con el alma entrelazada pues a fin de cuentas fuimos uno y esa unión nos mantendrá siempre así como una hija y una madre que se aman. Recuerde madre querida, si es que el día de mañana como todos los años me brota la cobardía, que la quiero que estuve una tarde escribiendo estas palabras contándole a estas hojas lo maravillosa que es y que me siento afortunada de tenerla como amiga, como profesora, como madre...

Te quiero madre y lamento ser una cobarde por no saber decírtelo en persona, aún cuando se, tú lo sabes...

Todo lo que he logrado en mi vida, a sido gracias a ti que siempre me apoyaste y me aconsejaste, te los dedico en esta fecha tan especial para mí pues son tuyos ya que un día te pusiste la meta de sacarme adelante y en esta ocasión una vez más lo has logrado; si son logros que tal vez yo he representado como persona pero en mí sólo se ve el reflejo de lo que tu sola madre querida has cultivado. Una mujer con metas, con sueños, sin temor a la vida, responsable y que cuando se traza metas nunca mira atrás. Y todo esto no se lo debo a nadie más que a ti, por que toda tu vida me la dedicaste para llevarme por el buen camino. **b Con todo mi amor para ti mamita linda.**

Te amo mamá.

Jessica

Introducción

El objetivo de este trabajo es dar una presentación rigurosa y detallada de una aplicación de la teoría de distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales.

La primera mitad de este trabajo la dedicamos al estudio de resultados básicos de la teoría de distribuciones, la cual fue creada, hacia 1950, por Laurent Schwartz y por la escuela rusa I. M. Gelfand, G. E. Shilov, Sergei Sobolev para dar sustento matemático a varios resultados físicos que fueron utilizados con éxito por los físicos a pesar de su inconsistencia matemática inicial.

Estos resultados iniciaron con la función de Heaviside y culminaron con la creación de la delta de Dirac, $\delta(x)$, cuya definición, como función de densidad, no tiene sentido matemático. Esta situación creaba una situación contradictoria, por un lado fecundidad de su empleo, por el otro carecía de sentido matemático. Schwartz decía que cuando estas situaciones se presentan es muy raro que no resulte una nueva teoría matemática que justifique el lenguaje de los físicos y que hay en ello una fuente importante de progreso para la matemática y la física.

Por otro lado, es muy común que se presenten situaciones contradictorias. Por ejemplo, la creación de los números complejos la cual comprende a los ya conocidos. Análogamente, las distribuciones generalizan a las funciones en un sentido similar al que los números complejos generalizan a los reales; se obtienen así entes más generales, que tienen propiedades nuevas. Por ejemplo las distribuciones son siempre derivables y forman un nuevo campo de estudio más rico y armonioso que el de las funciones en el sentido clásico.

La teoría de distribuciones ha tenido sus precursores, como lo son las generalizaciones del concepto de funciones de Bochner y Sobolev, pero puede afirmarse que la de Schwartz es la primera teoría completa que ha podido englobar y precisar diversos conceptos de diversas ramas de las matemáticas los cuales en muchas ocasiones fueron formulados incorrectamente, razón por la cual esta teoría es de gran interés en el ambiente matemático.

Un estudio riguroso y profundo de la teoría de distribuciones exige conocimientos avanzados de topología, análisis funcional y de la teoría integral de Lebesgue. En este

trabajo de tesis, sólo presentaremos las herramientas necesarias para abordar un estudio de fenómenos de ondas utilizando el método asintótico débil.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos y la lectura y comprensión de éste supone del lector un bagaje mínimo de análisis, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 1 de esta tesis, presentamos a la ya mencionada función de Heaviside, algunas de sus propiedades, la definición y propiedades de la Delta de Dirac por medio de sucesiones de Dirac, también presentamos algunos ejemplos de sucesiones delta.

En el capítulo 2 se presentan las herramientas y terminología necesaria para abordar los conceptos básicos de la teoría de distribuciones; en el establecemos las bases del espacio de funciones de prueba \mathcal{D} , del cual, una vez que conocemos las propiedades de los elementos que podemos encontrar en él, construimos algunos elementos para asegurar que no estamos trabajando en un espacio trivial, ilustrando con varios ejemplos de distribuciones y por último damos a conocer el concepto de regularización para prolongar el concepto de distribuciones en un entorno de un punto singular de ella.

En el capítulo 3 presentamos algunas propiedades que extienden el concepto de función a distribuciones por medio de operadores lineales, tales como operaciones algebraicas, operaciones analíticas, además de dar a conocer el concepto de soporte y soporte singular de una distribución y por último el concepto de convergencia en el sentido distribucional.

En el capítulo 4 presentamos algunas propiedades adicionales tales como la transformada de Fourier para lo que necesitamos introducir el concepto de funciones de prueba de rápido decaimiento, lo que nos lleva a la noción de distribución temperada; también analizaremos los conceptos de producto directo y convoluciones, así como sus propiedades más importantes.

El capítulo 5 es la parte central de este trabajo. Presentamos una aplicación interesante de la teoría de distribuciones: la interacción kink-antikink en ecuaciones semilineales con un parámetro pequeño. Se hace uso del método asintótico débil, que ha sido desarrollado recientemente por los profesores G.Omelyanov *et. al.* ([4]), cuya ventaja principal consiste en reducir el problema de describir la interacción no lineal de ondas al análisis de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se estudian condiciones para la parte no lineal bajo las cuales el resultado de la interacción consiste en un pequeño desplazamiento de los frentes de onda, sin alterar la forma de las mismas, situación que se conoce como *escenario de sine-Gordon*.

La forma de la solución de tipo kink de la ecuación de onda semilineal, que presentamos en este trabajo, es similar a una onda de choque suave. Sin embargo, estas ondas tienen propiedades diferentes. El método asintótico débil toma en cuenta el hecho de que los kinks y antikinks no se deforman después del momento de la interacción al igual que los solitones pero toman la forma de funciones de Heaviside, es decir son suaves cuando $\varepsilon > 0$ pero en el paso al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se vuelven no suaves, por lo cual definimos

el concepto de solución débil. Por esta razón este tipo de soluciones es tratada como un mapeo C^∞ para $\varepsilon > 0$ y únicamente como C uniformemente en $\varepsilon > 0$. Por lo cual las soluciones asintóticas de tipo kink requieren un *ansatz* especial relacionado con la no linealidad.

La ecuación de sine-Gordon apareció en geometría diferencial y en la teoría de campos relativistas. Esta ecuación, así como también algunas técnicas de solución, fue conocida en el siglo XIX, la ecuación creció en importancia cuando se encontró que tiene soluciones de tipo “kink-antikink” con las propiedades de colisión que tienen los solitones. La ecuación de sine-Gordon también aparece en un gran número de otras aplicaciones físicas, incluyendo la propagación de fluxones, el movimiento del péndulo rígido, etc.

Uno de los logros más notables que se han conseguido en la segunda mitad del siglo XX y que además ilustra con claridad la unidad subyacente de las Matemáticas y la Física No Lineal es la teoría de Solitones. Los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento extremadamente inesperado e interesante, ondas solitarias que se propagan sin deformarse.

Tradicionalmente, hablamos de dos tipos de ondas. Las primeras, las ondas lineales, son las ondas familiares de la vida diaria, como, por ejemplo, las ondas de luz y las ondas de sonido. Estas ondas tienen velocidad constante, sea cual sea su forma: un Do sostenido viaja a la misma velocidad que un Fa bemol. Y, además, tienen longitud de onda constante: un Do sostenido sigue siendo un Do sostenido si se oye a un metro o a 100 metros de distancia. Las ondas lineales también obedecen al llamado *principio de superposición* que, en el caso de las ondas sonoras, si se tocan varias notas simultáneamente en un piano, se escuchará la “suma” de todas esas notas a la vez, y esto es lo que produce armonía. Por muy complicado que sea un sonido se puede descomponer en los armónicos básicos que lo constituyen.

Las ondas no lineales son menos familiares. Una ola en el mar aproximándose hacia la orilla es un buen ejemplo de onda no lineal (en el supuesto de que la ola es solución, en algún sentido, de una ecuación diferencial no lineal). Obsérvese que ahora la amplitud, la longitud de onda y la velocidad, van variando según avanza la ola, mientras que en las ondas lineales éstas son constantes. La distancia entre las crestas va decreciendo, la altura de las olas va creciendo mientras van percibiendo el fondo, y la velocidad cambia; la parte superior de la ola se adelanta sobre la inferior, cae sobre ella y la ola rompe.

Como veremos a lo largo del trabajo, el estudio de cada uno de estos casos particulares lleva consigo el manejo de herramienta matemática que incluso por sí misma reviste un gran interés, además de su trascendencia.

Esperamos que este trabajo de tesis pueda servir como referencia para los estudiantes y profesores tanto de Matemáticas como de otras disciplinas científicas que se interesen en el estudio de fenómenos no lineales.

Contenido

Agradecimientos	i
Introducción	v
1 La delta de Dirac.	1
1.1 La función de Heaviside	2
1.2 Sucesiones delta	4
1.3 Sucesiones de Heaviside	8
2 Introducción a la Teoría de Distribuciones	11
2.1 Notación y terminología	11
2.2 Funciones de prueba	14
2.3 Funcionales lineales	19
2.4 Distribuciones regulares	20
2.5 El Espacio \mathcal{D}'	21
2.6 Ejemplos.	24
2.7 Regularización	27
3 Extensión de Operadores Lineales de Distribuciones	29
3.1 Operadores algebraicos	30
3.1.1 Cambio de variables	30
3.1.2 Traslación por $y \in \mathbb{R}^n$ fijo	31

3.1.3	Producto de una distribución y una función	33
3.1.4	Composición con transformaciones lineales	34
3.2	Operaciones analíticas	35
3.2.1	Diferenciación	35
3.2.2	El Soporte y el soporte singular de una distribución	42
3.2.3	Convergencia de distribuciones	48
4	Propiedades Adicionales de Distribuciones.	53
4.1	Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier	53
4.1.1	Funciones de Prueba de Rápido Decaimiento	55
4.1.2	Distribuciones Temperadas	57
4.1.3	Transformada de Fourier	61
4.2	Producto Directo	68
4.2.1	El Producto Directo de Distribuciones Temperadas	72
4.2.2	La Transformada de Fourier del Producto Directo de Distribuciones Temperadas	73
4.3	La Convolución	74
4.3.1	Convolución de Distribuciones Temperadas	77
4.3.2	La Transformada de Fourier de Convoluciones	77
5	Interacción Kink-Antikink	81
5.1	Nociones Básicas	81
5.1.1	Interacción de dos kinks	86
5.2	Interacción Kink-Antikink	87
5.3	Construcción de la Solución asintótica	88
5.4	Análisis del sistema dinámico básico.	109
5.5	Consideraciones gráficas	120
5.6	El anzatz modificado	122
	Conclusiones	129
	Bibliografía	133

Capítulo

1

La delta de Dirac.

Este capítulo tiene como objetivo principal presentar las propiedades básicas de la delta de Dirac, la cual juega un papel muy importante en las aplicaciones físicas, tecnológicas y en diversas áreas de las matemáticas, como lo son las ecuaciones diferenciales parciales y el análisis funcional, por mencionar algunas. En una primera presentación podríamos decir que la delta de Dirac se describe de manera intuitiva como aquella función que se anula en todos los números reales excepto en uno y tiene la particularidad de que el “área” comprendida entre su “gráfica” y el eje de las abscisas vale uno. Esta descripción es muy precaria, pues se hace referencia al área de una región que no existe (basta intentar dibujarla para darnos cuenta de ello); ni siquiera se ha adjudicado un valor a la función en el punto donde no se anula. Parece como si estuviésemos asignando un área unitaria a un sólo punto.

La función delta de Dirac representó durante la primera mitad del siglo *XX* un reto de la física a las matemáticas. Había algunas disciplinas donde se necesitaba de una función que tuviera las propiedades mencionadas; por ejemplo, en mecánica cuántica necesitada de una “función impulso” con propiedades muy específicas y con poco sustento matemático.

Recordemos la historia de la función delta de Dirac o *d*-función. La idea de usarla fue primero dada por Paul Hertz en su artículo “Mecánica Estadística para el Retorno de la Física de Weber y Ganz”. Sin embargo, fue un físico matemático Británico de 25 años llamado Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) quien presentó su artículo “Principios de Mecánica Cuántica” en el cual introdujo definitivamente “su función delta”, ahora conocida como “delta de Dirac” y simbolizada como $\delta(t - \xi)$.

Este objeto matemático fue manejado con gran habilidad por Oliver Heaviside (1850-1925) a finales del siglo *XIX* y ha sido usado sistemáticamente por los físicos desde 1920, pero para los matemáticos carecía de sustento. Hasta mediados del siglo *XX*, con la teoría de distribuciones o de las funciones generalizadas de Laurent Schwartz (1917-2001) y de la escuela rusa (I. M. Gelfand, G. E. Shilov, S. L. Sobolev) no se logró un entendimiento correcto: la delta de Dirac no es una función, sino una *distribución*. Pero los físicos la usaban y la siguen usando exitosamente, Heaviside nunca cometió un error cuando la

manipulaban en su cálculo operacional. Sin embargo, Heaviside fue atacado y muchos de sus trabajos no fueron aceptados para su publicación por los editores de revistas, alegando falta de rigor matemático.

Hubo que esperar hasta 1950 para que el joven de 35 años Laurent Schwartz resolviera la cuestión formulando, además, con ello la *teoría de distribuciones*, proveyendo de métodos eficientes y novedosos al análisis matemático.

Antes de abordar a la delta de Dirac, hablaremos de la función de Heaviside, cuyo interés matemático resaltaré más adelante.

1.1 La función de Heaviside

La función *de Heaviside* se denota con $H(x)$ y se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Nótese que $H(-x) = 1 - H(x)$ y que $H(a-x) = 1 - H(x-a)$. En la figura 1.1 se muestran las funciones $H(x)$, $H(x-a)$ y $H(a-x)$.

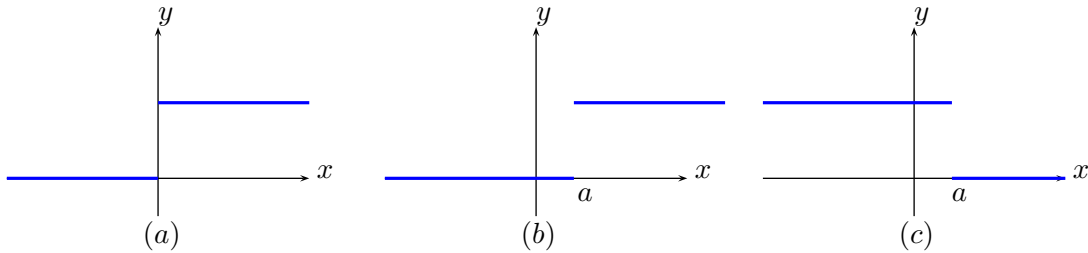


Figura 1.1: (a) $H(x)$; (b) $H(x-a)$; (c) $H(a-x)$

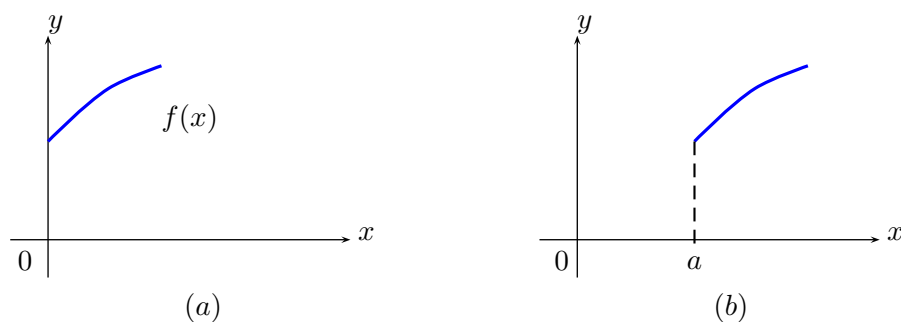
De la definición de $H(x)$ se deduce que

$$H(ax+b) = H\left(x + \frac{b}{a}\right)H(a) + H\left(-x - \frac{b}{a}\right)H(-a),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $y = f(x)$ es una función, la gráfica de la función $g(x) = H(x-a)f(x-a)$ se obtiene trasladando la gráfica de $f(x)$ como se muestra en la figura 1.2.

La función $H(x)$ es muy útil en el estudio de funciones con discontinuidades de salto. Por ejemplo, podemos escribir la función

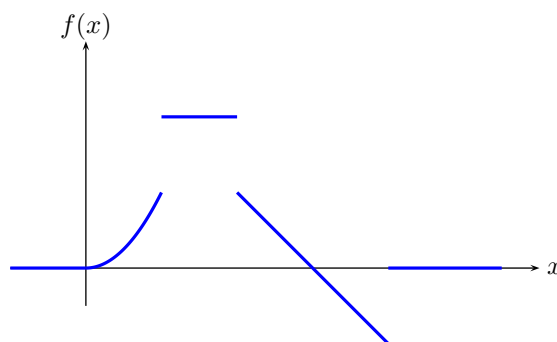
Figura 1.2: (a) $f(x)$; (b) $H(x-a)f(x-a)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2, \\ -x + 3 & \text{si } 2 < x < 4, \\ 0 & \text{para otros valores de } x, \end{cases}$$

como

$$f(x) = x^2 H(x) - H(x-1)(x^2 - 2) - H(x-2)(x-1) + H(x-4)(x-3).$$

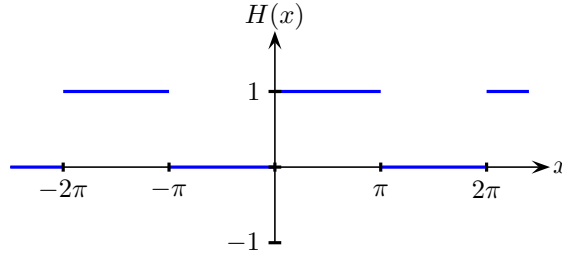
Ver figura 1.3.

Figura 1.3: $f(x)$

De manera similar podemos escribir funciones con un número infinito de discontinuidades de salto. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} H(\sin x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (2n-1)\pi < x < 2n\pi, \\ 1 & \text{si } 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \end{cases} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H(x-2n\pi) - H(x-(2n+1)\pi)]. \end{aligned}$$

La función $H(\sin x)$ se muestra en la figura 1.4.

Figura 1.4: $H(\text{sen } x)$

1.2 Sucesiones delta

En esta sección la definición y propiedades de la delta de Dirac se establecen a partir del concepto de sucesión delta. La idea de una sucesión delta es que, aunque una función delta no puede existir, podemos encontrar una sucesión de funciones $\{S_n(x)\}$ que en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ satisface la ecuación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) f(x) dx = f(0) \quad (1.1)$$

para toda función $f(x)$ suficientemente suave en $-\infty < x < \infty$. Nótese que la definición de $S_n(x)$ de ninguna manera implica que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ exista, pues, en general, no es permitido intercambiar los procesos de límite y de integración.

No obstante, cuando esto ocurre escribimos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \delta(x).$$

Definición 1.1. Una sucesión de funciones $\{S_n(x)\}$ que satisfaga la ecuación (1.1) y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) dx = 1$ se llama *sucesión delta*.

En los ejemplos siguientes consideramos algunas sucesiones delta.

Ejemplo 1.1. Consideremos

$$S_m(x) = \frac{\text{sen } mx}{\pi x}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Claramente para m fijo, cuando $|x| \gg 1$, $|S_m(x)| \ll 1$, pues

$$\left| \frac{\text{sen } mx}{\pi x} \right| \leq \frac{1}{\pi |x|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{para } m \text{ fijo.}$$

En la figura 1.5 se muestran las gráficas de $S_3(x)$ y de $S_6(x)$.

Recordemos (ver [18]) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{\pi x} dx = 1 \quad (1.3)$$

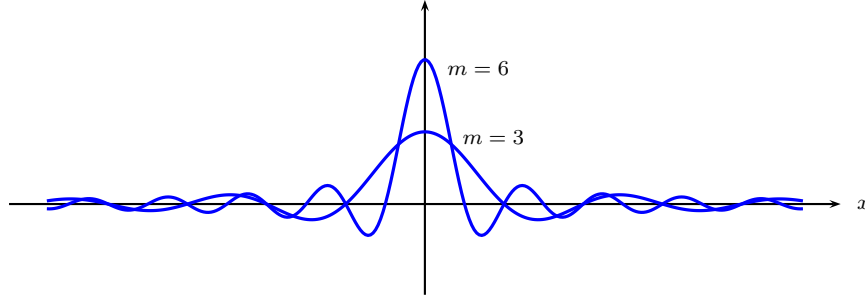


Figura 1.5: $S_m(x) = \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x}$

Cambiando x por mx en (1.3) resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_m(x) dx = 1 \quad (1.4)$$

Ahora veamos que $S_m(x)$ es una sucesión delta. Para esto analicemos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } mx}{\pi x} f(x) dx$$

donde $f(x)$ es diferenciable con $f'(x)$ continua y acotada.

Obsérvese que para cualquier $b > a > 0$

$$\int_a^b S_m(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\text{sen}(mx)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy$$

y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy = 0$$

De manera similar, para $a < b < 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{am}^{bm} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy = 0$$

Así, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(x) f(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x} f(x) dx \\ &= f(0) \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x} dx \right] \\ &= f(0) \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x} dx \right] \\ &= f(0) \end{aligned}$$

donde utilizamos la relación (1.3) y el teorema del valor medio para integrales. \blacklozenge

Ejemplo 1.2. Un ejemplo muy importante de sucesión delta es

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{m}{1 + m^2 x^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Con frecuencia se interpreta (1.5) como una distribución de carga continua en una línea. ver la figura 1.6.

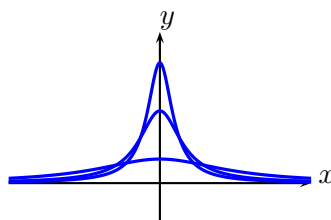


Figura 1.6: $S_m(x) = \frac{m}{\pi(1 + m^2 x^2)}$

Es claro que para $m \gg 1$, $S_m(x) \ll 1$, excepto por una cima de altura $\frac{m}{\pi}$ en una vecindad de $x = 0$.

La carga total $r_m(x)$ a la izquierda del punto x es

$$r_m(x) = \int_{-\infty}^x S_m(u) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(mx),$$

de donde se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_m(u) du = \lim_{x \rightarrow \infty} r_m(x) = 1 \quad \text{para toda } m \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

La gráfica de la distribución de carga acumulativa se muestra en la figura 1.7.

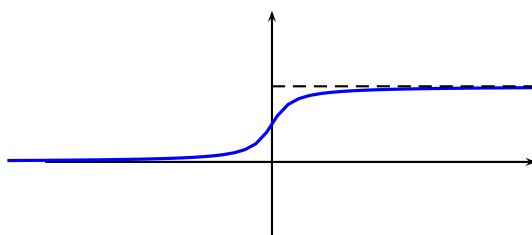


Figura 1.7: $r_m(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(mx)$

Más aún,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ \infty & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Esto significa que, a medida de que m crece, la carga se acumula en el origen. Así, el comportamiento de $S_m(x)$ cuando $m \rightarrow \infty$ “se asemeja” a la delta de Dirac y no es una función ordinaria.

La distribución acumulativa de carga correspondiente, la cual viene de $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x)$, es la función de Heaviside $H(x)$. La sucesión $S_m(x)$ será una sucesión delta si podemos probar que satisface la propiedad

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = f(0), \quad (1.7)$$

para una función $f(x)$ la cual es acotada, integrable y continua en $x = 0$.

La prueba se sigue al escribir la ecuación (1.7) como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) S_m(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx \quad (1.8)$$

donde $g(x) = f(x) - f(0)$. Por (1.6) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) S_m(x) dx = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx$$

Así, la propiedad se satisface si probamos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m dx = 0 \quad (1.9)$$

Para ello, sea A un número positivo; entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{-A} g(x) S_m(x) dx + \int_{-A}^A g(x) S_m(x) dx + \int_A^{\infty} g(x) S_m(x) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Para I_3 denotamos por $M(A)$ al máximo de $|g|$ en $-A \leq x \leq A$. Entonces,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{-A}^A |g(x)| S_m(x) dx \leq M(A) \int_{-A}^A \frac{m dx}{\pi(1 + m^2 x^2)} \\ &= M(A) \left[\frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mA) \right] \leq M(A). \end{aligned}$$

Como $g(0) = 0$ y $g(x)$ es continua en $x = 0$, $\lim_{A \rightarrow 0} M(A) = 0$. Consecuentemente, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número real A suficientemente pequeño tal que $|I_3| < \frac{\varepsilon}{2}$, lo cual es válido independientemente de M .

Con el número A como lo elegimos, resta mostrar que $|I_1 + I_2|$ es pequeño para m suficientemente grande. Como $f(x)$ es acotada y $|g(x)| < |f(x)| + |f(0)|$, se sigue que $|g(x)|$ esta acotada en $-\infty < x < \infty$, digamos $|g(x)| < b$. Entonces

$$|I_1 + I_2| \leq b \left[\int_{-\infty}^{-A} S_m(x) dx + \int_A^{\infty} S_m(x) dx \right] = b \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mA) \right)$$

Con A fijo, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mA) = 1$. Lo que significa que podemos encontrar N tal que

$$b \left[1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(mA) \right] \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad m > N.$$

Con esta elección de N , tenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_m(x) dx \right| \leq |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1 + I_2| + |I_3| < \varepsilon$$

y se sigue (1.9). Lo cual completa la prueba. ◆

1.3 Sucesiones de Heaviside

Finalmente, mencionaremos que también podemos definir una sucesión de Heaviside.

Definición 1.2. Una sucesión $h_m(x)$ es llamada una sucesión de Heaviside si

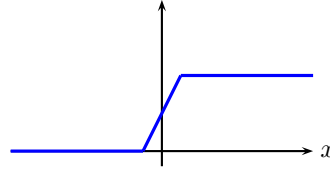
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \langle H(x), f(x) \rangle$$

para toda $f(x)$ suficientemente suave en $-\infty < x < \infty$ y el símbolo $\langle \phi(x), \varphi(x) \rangle$ se utiliza para denotar $\langle \phi(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \varphi(x) dx$.

Ejemplo 1.3. Consideremos la sucesión

$$h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2m} \\ mx + \frac{1}{2} & \text{si } -\frac{1}{2m} \leq x \leq \frac{1}{2m} \\ 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2m} \end{cases}.$$

En la figura 1.8 se muestra la gráfica de $h_2(x)$.

Figura 1.8: $h_m(x)$ para $m = 2$

Para probar que es una sucesión de Heaviside, obsérvese que para $f(x)$ suficientemente suave

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2m}} h_m(x)f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} h_m(x)f(x)dx \\
 &+ \int_{\frac{1}{2m}}^{\infty} h_m(x)f(x)dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} \left(mx + \frac{1}{2}\right)f(x)dx + \int_{\frac{1}{2m}}^{\infty} f(x)dx
 \end{aligned}$$

Cuando $m \rightarrow \infty$ tenemos:


$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx = \langle H(x), f(x) \rangle . \quad \blacklozenge$$

Finalmente, haciendo alusión al tema que desarrollaremos en los siguientes capítulos exploraremos algunas propiedades de la delta de Dirac y encontraremos que es una valiosa herramienta, por ejemplo, en análisis de Fourier. Su descubrimiento, como ya mencionamos, estimuló a los matemáticos a investigar qué es lo que tal expresión, que en teoría contiene infinita energía, realmente significa. Rápidamente fue notorio que existían otras, tales como las funciones signo, la ya conocida función escalón de Heaviside, entre otras, con propiedades similares. Algunas operaciones de las funciones no son inmediatas, por ejemplo no podemos encontrar una derivada directamente con las herramientas ya conocidas; así, todas ellas tienen derivada bien definida si ésta se define apropiadamente.

Ejemplo 1.4. La derivada de la delta de Dirac δ , la cual analizaremos más adelante. Comenzaremos planteándonos la siguiente pregunta: ¿la función δ tiene una derivada? Claramente, intentando encontrar su derivada, rápidamente entramos en conflicto; para empezar ¿cómo debemos entender a este objeto?; pues, como mencionamos anteriormente, no se satisfacen las propiedades de una función. Así, la pregunta que dejamos abierta por un momento es:

¿La función δ tiene una derivada en algún sentido definida en todo punto?

Si a la función δ la vemos como una función en el sentido ordinario con su definición analítica ya dada, entonces no podemos encontrar una derivada para ella. Existe, sin

embargo, una manera totalmente diferente de ver a la función δ , la cual es llamada *función generalizada* o *distribución*. Estos conceptos serán expuestos en los siguientes capítulos, donde daremos respuesta a esta pregunta. 

Capítulo

2

Introducción a la Teoría de Distribuciones

Este capítulo tiene como principal objetivo el presentar las nociones básicas de la teoría de distribuciones, además de establecer la notación y terminología que utilizaremos en el resto de este trabajo.

La idea es la de generalizar la noción de función que conocemos en \mathbb{R}^n y discutir sus principales propiedades.

2.1 Notación y terminología

Sea \mathbb{R}^n el espacio real n -dimensional. Si (x_1, \dots, x_n) son las coordenadas de un punto $P \in \mathbb{R}^n$, entonces, su norma Euclidiana será denotada por $\|x\| = \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Sea \mathbb{N}^n el conjunto de todas las n -adas de enteros no-negativos, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, el cual es llamado multi-índice de orden n ; entonces definimos:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Si α, β son multi-índices definimos $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$. La notación $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha_j \leq \beta_j$, $1 \leq j \leq n$. Además, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, así como también

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ y α es un multi-índice entonces un polinomio en n variables (x_1, \dots, x_n) , de grado $\leq m$ puede escribirse como

$$\alpha(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha.$$

Los coeficientes a_α pueden ser números complejos, en cuyo caso α se dice un polinomio con coeficientes constantes; o funciones a valores complejos, en cuyo caso α será un polinomio

con coeficientes variables.

Las derivadas parciales serán denotadas usando el operador

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad (2.1)$$

donde $D_j^{k_r} = \frac{\partial^{k_r}}{\partial x_j^{k_r}}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Para el caso 1-dimensional D^α se reduce a $\frac{d}{d\alpha}$. Más aún, si cualquier componente de α es cero, la diferenciación con respecto a la correspondiente variable es omitida.

Ejemplo 2.1. En \mathbb{R}^3 , con $\alpha = (3, 0, 4)$, tenemos

$$D^\alpha = \frac{\partial^7}{\partial x_1^3 \partial x_3^4} = D_1^3 D_3^4. \quad \blacklozenge$$

De acuerdo a estas notaciones, un operador diferencial parcial de orden $\leq m$ puede ser escrito como sigue:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^\alpha. \quad (2.2)$$

Ejemplo 2.2. Cuando $n = 1$, tenemos el operador diferencial ordinario

$$L = a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + a_{\alpha-1}(x) \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} + \cdots + a_0(x). \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 2.3. El operador diferencial parcial de segundo orden en \mathbb{R}^2 es:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{|\alpha| < 2} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha(x) D^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x) D^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) D^\alpha \\ &= a_{2,0}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{1,1}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{0,2}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + a_{1,0}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{0,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{0,0}(x). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Definición 2.1. Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Denotamos por $C^m(\Omega)$, donde m es un entero no-negativo, al espacio vectorial sobre \mathbb{C} de todas las funciones a valores complejos definidas en Ω que tienen derivadas parciales continuas de orden $\leq m$. Denotamos por $C^\infty(\Omega)$ al espacio de todas las funciones a valores complejos definidas en Ω que tienen derivadas parciales de todos los ordenes.

Claramente,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega)$$

Los elementos de $C^\infty(\Omega)$ son llamadas funciones continuas infinitamente diferenciables o funciones C^∞ en Ω .

Ahora, podemos establecer las fórmulas de Taylor y de Leibniz:

Fórmula de Taylor: Para $f \in C^{k+1}(U)$, con U abierto, $x \in U$, $n \geq 1$, α multi-índice, $x_0 \in U$ tenemos:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) + R_m(x),$$

donde $R_m(x)$ es el término residual.

Fórmula de Leibniz: Sea ∂^α un operador diferencial parcial, u y v dos funciones tales que $u, v \in C^\infty(\Omega)$. Entonces:

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!} \partial^\beta u \partial^{\alpha - \beta} v.$$

Usaremos la siguiente notación para la integral (en el sentido de Lebesgue) de una función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ sobre una región n -dimensional R :

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_R f(x) dx \quad (2.3)$$

donde $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$. Generalmente, las funciones que consideraremos serán funciones con valores escalares (reales o complejos) de n variables reales, es decir, aplicaciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} (o en \mathbb{C}); en otro caso se indicará en su momento.

Las integrales se entienden en el sentido de Lebesgue, de manera que, en particular, son iguales para dos funciones iguales casi donde quiera (es decir, iguales salvo, posiblemente, en un conjunto de medida cero).

Definición 2.2. Una función $f(x)$ es localmente integrable en \mathbb{R}^n si $\int_R |f(x)| dx$ existe para toda región acotada R en \mathbb{R}^n .

Si f es integrable en \mathbb{R}^n decimos que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ [f] : f \text{ es medible y } \int |f(x)| d\mu < \infty \right\}.$$

Aquí, $[f] = \{g : f = g \text{ } \mu\text{-casi en todas partes}\}$ y

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

Si f es localmente integrable en \mathbb{R}^n escribimos $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

La clase de funciones localmente integrables es bastante extensa. Todas las funciones continuas a pedazos son localmente integrables. Algunas funciones que son infinitas, tales como $\frac{1}{r^m}$, $m < n$, donde $r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ son también localmente integrables.

Es claro que una función integrable es localmente integrable, pero la recíproca no es cierta. De hecho, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es localmente integrable pero

no integrable. También, la función $f(x) = x^{-1}$ no es localmente integrable, pues no es integrable en ningún intervalo que contenga el origen.

Otro concepto que juega un papel crucial en la teoría de distribuciones es el soporte de una función, definido como sigue:

Definición 2.3. El soporte de una función $f(x)$ es la cerradura del conjunto de todos los puntos x tales que $f(x) \neq 0$.

Denotaremos el soporte de una función f por $\text{sop}(f)$.

Ejemplo 2.4. Para $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, el soporte de $f(x)$ consiste de toda la recta real, no obstante que $\sin x$ se anula en $x = n\pi$. Si $\text{sop}(f)$ es un conjunto acotado, entonces se dice que f tiene *soporte compacto*. \blacklozenge

Ejemplo 2.5. El soporte de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty \leq x \leq -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases},$$

es compacto. (ver figura 2.1). \blacklozenge

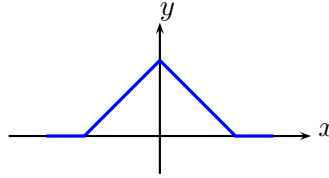


Figura 2.1: $f(x)$

El conjunto complementario del soporte de $f(x)$ es el conjunto de los puntos x del espacio tales que $f(x)$ es idénticamente nula en un entorno del punto, el cual es abierto.

Si K es el soporte, la pertenencia $x_0 \in K$ significa que todo entorno de x_0 contiene un punto x en el cual $f(x) \neq 0$.

Si F es un conjunto cerrado la inclusión $K \subset F$ equivale a la afirmación “ $f(x)$ es nulo fuera de F ”.

2.2 Funciones de prueba

Definiremos ahora los espacios básicos de la teoría:

Espacio \mathcal{D}^0 : Es el espacio de las funciones complejas $\varphi(x)$ definidas en el espacio real n -dimensional \mathbb{R}^n , continuas y de soporte compacto.

Espacio \mathcal{D}^m : Es el espacio de funciones complejas $\varphi(x)$ definidas en \mathbb{R}^n con derivadas parciales continuas hasta orden m y de soporte compacto.

Observemos que una cantidad operacional tal como $\delta(x)$ adquiere sentido sólo si es multiplicada por una función auxiliar suficientemente suave y después es integrada sobre todo el espacio. Este punto de vista también se toma como la base para la definición de una función generalizada arbitraria. De acuerdo a esto, consideremos el espacio \mathcal{D} que consiste de funciones a valores reales $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tal que se satisface lo siguiente:

1. $\varphi(x)$ es una función infinitamente diferenciable definida en todo punto de \mathbb{R}^n . Esto significa que $D^\alpha \varphi$ existe para todos los multi-índices α . Tal función es también llamada una función C^∞ .
2. Existe un número A tal que $\varphi(x)$ se anula para $r > A$. Esto significa que $\varphi(x)$ tiene soporte compacto.

Definición 2.4. Las funciones del espacio \mathcal{D} se llaman funciones de prueba.

Si λ y μ son dos escalares y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ es claro que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \in \mathcal{D}$; es decir, el conjunto \mathcal{D} de las funciones de base es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

A continuación, y con el objetivo de mostrar que el espacio \mathcal{D} es no trivial, mostraremos algunas funciones en \mathcal{D} .

Ejemplo 2.6. (a) Sea $n = 1$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases},$$

La gráfica de $f(t)$ se muestra en la figura 2.2.

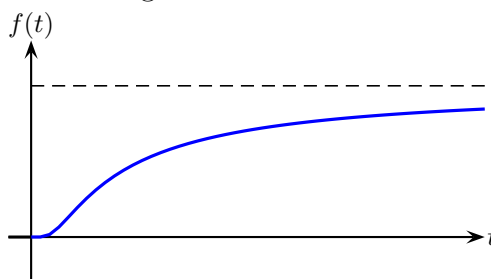


Figura 2.2: $f(t)$

Claramente f es C^∞ , además f y todas sus derivadas están acotadas.

En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{te^{\frac{1}{t}}}$$

Pero,

$$te^{\frac{1}{t}} = t \left[1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{3!t^3} + \cdots \right] = \left[t + 1 + \frac{1}{2!t} + \frac{1}{3!t^2} + \cdots \right]$$

y esto tiende a ∞ cuando $t \rightarrow 0^+$. Así, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = 0$. Por lo que

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

De hecho todas las derivadas de f son de la forma $\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{t^j} e^{-\frac{1}{t}}$ para $N < \infty$. Como para toda x se tiene que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots > \frac{x^n}{n!}$$

entonces,

$$\frac{x^n}{n!} < e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > 0, \quad \text{o} \quad e^{-x} x^n < n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x > 0.$$

Tomando $x = \frac{1}{t}$, se sigue que $\frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} < n! \quad \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto f y todas sus derivadas están acotadas.

Ahora, definamos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f(1+x)f(1-x)$. Entonces $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.

Así,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases},$$

y $\text{sop } \varphi(x) = [-1, 1]$. Entonces, $\varphi \in \mathcal{D}$.

De estas mismas consideraciones se sigue que si definimos $\omega(x; a)$ mediante

$$\omega(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases} \quad (2.4)$$

entonces $\text{sop } \omega(x; a) = [-a, a]$ y $\omega(x; a) \in \mathcal{D}$

(b) También podemos tomar $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases},$$

y, entonces, $\text{sop}(\phi) = \overline{\mathbf{B}_1(0)}$, por lo que $\phi \in \mathcal{D}$.

Entonces, para la función $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Theta(x) = f(1 - |x|^2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases},$$

tenemos que $\Theta \in \mathcal{D}$. ◆

Tomando $a = 1$ en la función $\omega(x; a)$ y multiplicando por el factor de normalización $c = \left(\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx \right)^{-1}$, podemos construir la función

$$\omega(x) := \omega(x, 1) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}.$$

Nótese que en un punto de la frontera del soporte, por ejemplo $x = 1$, son nulas todas las derivadas de $\omega(x)$; la serie de Taylor en $x = 1$, tiene todos sus términos nulos pero no representa a la función en ningún entorno de a .

Este hecho, es evidentemente general: todas las derivadas son nulas en todo punto de la frontera puesto que son continuas y nulas en el exterior del soporte, pero la serie de Taylor tiene todos sus términos nulos y no representa a la función en ningún entorno de este punto (puesto que todo entorno contiene un punto en el cual la función es no nula).

A partir de la función ω , podemos construir, para cada $\varepsilon > 0$, la función ω_ε dada por

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & \text{si } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

con las propiedades:

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \text{sop}(\omega_\varepsilon) = A = \{|x| \leq \varepsilon\}, \quad c_\varepsilon^{-1} = \int_{|x| \leq \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} dx.$$

También podemos formar una sucesión delta a partir de esta función. Claramente la sucesión

$$\omega_m(x) = \begin{cases} c_m e^{-\frac{1}{1-m^2|x|^2}} & \text{si } |x| < \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m}, \end{cases}$$

donde

$$c_m^{-1} = \int_{|x| \leq \frac{1}{m}} e^{-\frac{1}{1-m^2|x|^2}} dx$$

es una sucesión delta y se puede mostrar usando los métodos descritos en la primera sección.

Las siguientes propiedades de las funciones de prueba son fáciles de probar; algunas de ellas ya han sido mencionadas:

1. Si φ_1 y φ_2 son elementos de \mathcal{D} , entonces $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ pertenece a \mathcal{D} , donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Así, \mathcal{D} es un espacio vectorial.
2. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces $D^k\varphi \in \mathcal{D}$
3. Para $f(x) \in C^\infty$ y $\varphi \in \mathcal{D}$, $f\varphi \in \mathcal{D}$
4. Si $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ es una función de prueba m -dimensional y $\psi(x_{m+1}, \dots, x_n)$ es una función de prueba $(n - m)$ -dimensional, entonces $\varphi\psi$ es una función de prueba en las variables x_1, \dots, x_n .

La definición de \mathcal{D} no requiere que todos sus elementos tengan el mismo soporte.

Ejemplo 2.7. Las funciones en \mathbb{R} , definidas mediante

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}} & \text{si } |x| < a, \\ 0 & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

y

$$\omega(x - 3) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x-3|^2}} & \text{si } |x - 3| < a, \\ 0 & \text{si } |x - 3| > a, \end{cases}$$

ambas son miembros de \mathcal{D} sin embargo, sus soportes son:

$$\text{sop } \omega(x) = (-1, 1) \quad \text{y} \quad \text{sop } \omega(x - 3) = (2, 4). \quad \blacklozenge$$

A continuación revisamos las nociones básicas de convergencia que necesitaremos en este espacio.

Definición 2.5. Una sucesión $\{\varphi_m\}$, $m = 1, 2, \dots$ donde $\varphi_m \in \mathcal{D}$, converge a φ_0 si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Las φ_m y φ_0 se anulan fuera de una región común.
2. $D^\alpha\varphi_m \rightarrow D^\alpha\varphi_0$ uniformemente cuando $m \rightarrow \infty$ para todo multi-índice α .

Claramente $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ y por tanto \mathcal{D} es cerrado (o es completo) con respecto a esta definición de convergencia. Para el caso especial $\varphi_0 = 0$, la sucesión $\{\varphi_m\}$ se llama *sucesión nula*.

Ejemplo 2.8. La sucesión

$$\left\{ \frac{1}{m} \omega(x, a) \right\}$$

donde $\{\omega(x, a)\}$ se define en (2.4), es una sucesión nula. Sin embargo, la sucesión

$$\left\{\frac{1}{m}\omega\left(\frac{x}{m}, a\right)\right\}$$

no es una sucesión convergente, porque el soporte de la función $\omega(\frac{x}{m}, a)$ es la esfera con radio ma , el cual es diferente para diferentes valores de m . \blacklozenge

Además del espacio \mathcal{D} de funciones de prueba, usaremos ciertos subespacios de \mathcal{D} . Para una región R en \mathbb{R}^n , el espacio \mathcal{D}_R contiene a todas aquellas funciones cuyo soporte se encuentra en R , esto es,

$$\mathcal{D}_R = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{D}, \text{sop}(\varphi) \subset R\}$$

Claramente es un subespacio de \mathcal{D} .

Ejemplo 2.9. \mathcal{D}_x y \mathcal{D}_y son dos subespacios uno-dimensionales de funciones de prueba $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ y están contenidos en \mathcal{D}_{xy} , el cual es el subespacio de funciones de prueba $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2$. \blacklozenge

La convergencia en \mathcal{D}_R se define de la misma manera que en \mathcal{D} .

2.3 Funcionales lineales

Definición 2.6. *Un funcional lineal T en \mathcal{D} es una operación por medio de la cual asignaremos a toda función de prueba $\varphi(x)$ un número real que denotaremos $\langle T, \varphi \rangle$, tal que*

$$\langle T, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \rangle = c_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle T, \varphi_2 \rangle \quad (2.5)$$

para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se sigue que $\langle T, 0 \rangle = 0$ y $\left\langle T, \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle T, \varphi_j \rangle$, donde $c_j \in \mathbb{R}$.

El siguiente concepto es referente a la continuidad de los funcionales lineales.

Definición 2.7. *Un funcional lineal en \mathcal{D} es continuo si y solamente si, para cada sucesión $\{\varphi_m\} \in \mathcal{D}$, la sucesión de números $\langle T, \varphi_m \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$ cuando $\varphi_m \rightarrow \varphi$. Así,*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_m \rangle = \left\langle T, \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m \right\rangle. \quad (2.6)$$

Ahora, tenemos las herramientas necesarias para definir una distribución.

Definición 2.8. *Una distribución en U es una funcional lineal continua $T : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$, con la continuidad definida en $\mathcal{D}(U)$.*

2.4 Distribuciones regulares

Un tipo de distribuciones es aquel que consiste de las generadas por funciones localmente integrables, como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$. Entonces f se puede identificar con la distribución en U*

$$f : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

mediante la fórmula

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.7)$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\langle f, \varphi \rangle$ es lineal. Ahora, probemos la continuidad. En efecto, para cada $K \subset U$ tal que K es compacto y cada $\{\varphi_j\} \rightarrow \varphi_0$ en $\mathcal{D}(K)$ tendremos:

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \varphi_0 \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_j(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_0(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) [\varphi_j(x) - \varphi_0(x)] dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\varphi_j - \varphi_0(x)| dx \\ &\leq \|\varphi_j(x) - \varphi_0(x)\|_{\infty} \int_K |f(x)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $j \rightarrow \infty$ (pues $\|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi_0\|_{\infty} \rightarrow 0$, cuando $j \rightarrow \infty$).

Así, si la sucesión $\{\varphi_m\}$ converge a cero, entonces $\langle f, \varphi_m \rangle$ converge a cero. De aquí que sea continua. Por lo tanto, $\langle f, \varphi \rangle$ es una distribución. ■

Una distribución definida mediante (2.7) se llama *regular*. Si una distribución no es regular, se llama *singular*.

Dos casos particulares de distribuciones regulares son los siguientes:

a) La distribución cero en \mathcal{D} tiene la siguiente propiedad:

$$\langle 0, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

b) Si c es constante entonces $c \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ y genera la distribución:

$$\langle c, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} c \varphi(x) dx = c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

Las distribuciones regulares también pueden definirse por medio de operadores diferenciales parciales. Si $f(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1$, podemos definir una distribución como:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \varphi \in \mathcal{D}.$$

2.5 El Espacio \mathcal{D}'

El conjunto de todas las distribuciones en \mathcal{D} se denotará \mathcal{D}' .

Cuando U sea un abierto de \mathbb{R}^n entonces $\mathcal{D}'(U)$ será el espacio de distribuciones en el abierto U de \mathbb{R}^n o bien $\mathcal{D}(U)$ es el espacio de funciones de prueba sobre U .

Cuando $U = \mathbb{R}^n$ entonces sólo denotaremos a los espacios como \mathcal{D}' , \mathcal{D} , \mathcal{L}_{loc}^1 , etc.

Las distribuciones T_1 y T_2 dan lugar a una nueva distribución: $T = c_1 T_1 + c_2 T_2$ para toda $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle c_1 T_1 + c_2 T_2, \varphi \rangle = c_1 \langle T_1, \varphi \rangle + c_2 \langle T_2, \varphi \rangle.$$

Así, \mathcal{D}' es un espacio lineal. \mathcal{D}' es el espacio dual de \mathcal{D} , es un espacio más grande que \mathcal{D} y forma una generalización de la clase de funciones localmente integrables por que contiene funciones tales como $\delta(x)$ que no son localmente integrables. Por tal razón las distribuciones son llamadas *funciones generalizadas* o *simbólicas*. Utilizaremos los términos “distribución ” y “función generalizada”, sin distinción alguna.

Otra idea básica en la teoría de distribuciones se incluye en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Dos funciones continuas que producen la misma distribución regular son idénticas.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema se sigue de la fórmula (2.7). Sean $f, g \in C$. Para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx,$$

o bien

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - g(x)] \varphi(x) dx = 0.$$

Sea $h(x) = f(x) - g(x)$ entonces

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Como la única función continua para la cual $\langle h, \varphi \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ es $h \equiv 0$ entonces $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Para funciones localmente integrables este teorema no es válido, porque podemos alterar los valores de $f(x)$ en un conjunto de medida cero sin alterar los valores de la distribución regular asociada con f . Sin embargo, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones localmente integrables y son iguales casi en todas partes, entonces generan la misma distribución, y tenemos:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

Más aún, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Sean $f, g \in \mathcal{L}_{loc}^1$. Entonces, $f = g$ casi en todas partes si y solamente si $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f = g$ casi en todas partes y $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ahora, supongamos que $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}$$

o bien,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - g(x)] \varphi(x) dx = 0.$$

Consideremos $\varphi_t(y - x) = \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{y - x}{t}\right)$ con $\varphi \in \mathcal{L}^1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, $|\varphi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\varepsilon}$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(h * \varphi_t)(x) \rightarrow h(x), \quad t \rightarrow 0$$

donde $h = (f - g)(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Así,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} (f - g)(x) \varphi_t(y - x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi_t(y - x) dx \rightarrow h(y) = (f - g)(y),$$

casi en todas partes. Por lo tanto, $f = g$ casi en todas partes. ■

Este resultado nos lleva al siguiente concepto:

Definición 2.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $F, G \in \mathcal{D}'(U)$. Supongamos que $V \subset U$, V abierto. Diremos que $F = G$ en V si y solamente si para toda $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ se tiene que $\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle$. Si $F, G \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ y $\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ entonces $F = G$ casi en todas partes sobre V .*

Lema 2.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$ un cubrimiento finito por abiertos de K . Entonces, existen funciones $\{\varphi_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{D}$ tales que $0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$;*

$\text{sop } \varphi_j \subset \Omega_j \quad j = 1, \dots, k$ y $\sum_{j=1}^k \varphi_j = 1$ en una vecindad de K . La familia $\{\varphi_j\}_{j=1}^k$ se llama *partición C^∞ de la unidad subordinada a la cubierta $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$* .

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, sabemos que $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$. Sea $x \in K$ entonces, existe $j \in 1, \dots, k$ tal que $x \in \Omega_j$. Existe una vecindad compacta K_x de x tal que

$$x \in K_x^\circ \subset K_x \subset \Omega_j,$$

donde K° denota el interior de K . Por lo que, $K \subset \bigcup_{x \in K} K_x^\circ$. Entonces, existen K_{x_1}, \dots, K_{x_s} tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^s K_{x_j}^\circ \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j \quad \text{con} \quad K_j \subset \Omega_j.$$

Por el lema C^∞ de Urysohn (para una demostración de este lema consultar [9]) existen funciones $\{\chi_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{D}$ tal que $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\text{sop } \chi_j \subset \Omega_j$ y $\chi_j = 1$ en K_j .

Definamos

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \chi_1, \\ \varphi_2 &= \chi_2 (1 - \chi_1), \\ &\vdots \\ \varphi_j &= \chi_j (1 - \chi_1) (1 - \chi_2) \cdots (1 - \chi_{j-1}), \quad 2 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

Claramente, $0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, k$

$$\text{sop } (\varphi) \subset \text{sop } (\chi_j) \subset \Omega_j \quad j = 1, \dots, k.$$

Ahora, $\varphi_1 = 1$ en K_1 , mostremos que $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ en $K_1 \cup K_2$.

Sea $x \in K_1 \cup K_2$.

Si $x \in K_1$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1, \\ \varphi_2(x) &= \psi_2(x) [1 - \varphi_1(x)] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$.

Si $x \in K_2$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 0 \\ \varphi_2(x) &= \psi_2(x) [1 - \varphi_1(x)] = 1 \end{aligned}$$

Supongamos que $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k = 1$ en $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_k$.

Probaremos que $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k + \varphi_{k+1} = 1$ en $\bigcup_{j=1}^{k+1} K_j$.

Sea $x \in \bigcup_{j=1}^{k+1} K_j$. Entonces $x \in K_j$ para algún $j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$.

Si $x \in K_k$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 0, \\ \varphi_2(x) &= \psi_2(x) [1 - \varphi_1(x)] = 0, \\ \varphi_3(x) &= \psi_3(x) [1 - \varphi_1(x)] [1 - \varphi_2(x)] = 0, \\ &\vdots \\ \varphi_k(x) &= \psi_k(x) [1 - \varphi_1(x)] [1 - \varphi_2(x)] \cdots [1 - \varphi_{k-1}(x)] = 1, \\ \varphi_{k+1}(x) &= \psi_{k+1}(x) [1 - \varphi_1(x)] [1 - \varphi_2(x)] \cdots [1 - \varphi_{k-1}(x)] [1 - \varphi_k(x)] = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k + \varphi_{k+1} = 1$ en $\bigcup_{j=1}^{k+1} K_j$. ■

Para terminar esta sección, presentamos el siguiente resultado cuya demostración se sigue del Lema 2.1:

Proposición 2.2. *Sea $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ la familia de abiertos de U y sea $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. Sean $F, G \in \mathcal{D}'(U)$ tal que $F = G$ en V_α para toda $\alpha \in I$. Entonces, $F = G$ en V .*

2.6 Ejemplos.

En los ejemplos 2.10 y 2.11 se hace referencia a los espacios \mathcal{L}^p , que consisten de todas las clases de equivalencias de funciones medibles f para las cuales $|f|^p$ tiene integral de Lebesgue finita, siendo dos funciones equivalentes si son iguales casi donde quiera. A este espacio se le dota de la norma

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ejemplo 2.10. Toda $f \in \mathcal{L}^p(U) = \{[f] : \int |f|^p dx < \infty\}$, $1 \leq p \leq \infty$; Determina un elemento en $\mathcal{D}'(U)$. Pues sabemos que $\mathcal{L}^p(U) \subset \mathcal{L}_{loc}^1(U) \subset \mathcal{D}'(U)$. ◆

Ejemplo 2.11. La convergencia en \mathcal{L}^p implica convergencia en \mathcal{D}' . En efecto, si $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}^p , $1 \leq p < \infty$, mostremos que

$$\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ en } \mathcal{D}'.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$, así

$$\begin{aligned}
 |\langle f_n, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f_n(x) - f(x)] \varphi(x) dx \right| \\
 &\leq \int_{\text{sop } \varphi} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \\
 &\leq \|f_n(x) - f(x)\|_p \|\varphi(x)\|_q \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ en \mathcal{D}' ♦

Ejemplo 2.12. La distribución de Heaviside en \mathbb{R} .

$$\langle H_{\mathbb{R}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad (2.8)$$

ya estudiada en la sección 1.1 del capítulo 1.

Para \mathbb{R} , (2.8) es:

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2.9)$$

Como $H(x)$ es una función continua a pedazos, es una distribución regular. ♦

Ejemplo 2.13. La distribución delta de Dirac en \mathbb{R}^n es

$$\langle \delta(x - \xi), \varphi(x) \rangle = \varphi(\xi), \quad (2.10)$$

para ξ fijo en \mathbb{R}^n . Claramente esta funcional es lineal. Para probar la continuidad observemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \delta, \varphi_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(\xi).$$

Sin embargo, si $\varphi_m(x) \rightarrow 0$ entonces $\varphi_m(\xi) \rightarrow 0$. Así, tenemos la continuidad. De aquí que δ sea una distribución. ♦

Más generalmente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3. Sea $x_0 \in U$, α un multi-índice y $\Gamma_{x_0}^{\alpha} : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante

$$\Gamma_{x_0}^{\alpha}(\varphi) = \partial^{\alpha} \varphi(x_0).$$

Entonces $\Gamma_{x_0}^{\alpha}$ es una distribución en U .

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\Gamma_{x_0}^{\alpha}$ es lineal.

Veamos que $\Gamma_{x_0}^{\alpha}$ es continua:

Si $K \subset U$ es tal que K es compacto y $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{D}(K)$ entonces $\partial^\beta \varphi_j \rightarrow \partial^\beta \varphi$ en K para toda β multi-índice.

Así,

$$\Gamma_{x_0}^\alpha(\varphi_j) = \partial^\alpha \varphi_j(x_0) \rightarrow \partial^\alpha \varphi(x_0) = \Gamma_{x_0}^\alpha \varphi$$

para todo α multi-índice. Por lo tanto, $\Gamma_{x_0}^\alpha$ es una distribución en U . ■

A continuación se prueba que δ y sus derivadas no son localmente integrables. Estas distribuciones son, por tanto, singulares.

Proposición 2.3. $\Gamma_{x_0}^\alpha$ no proviene de una función para ningún multi-índice α . En otras palabras,

$$\Gamma_{x_0}^\alpha(\varphi) \neq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

para alguna $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$.

DEMOSTRACIÓN: Cuando $\alpha = 0$ $\Gamma_{x_0}^\alpha$ proviene de una medida :

$$\Gamma_{x_0}^\alpha(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu_{x_0} = \Lambda_{\mu_{x_0}}(\varphi)$$

donde

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases},$$

es la medida concentrada en A .

Veamos que para $\alpha = 0$, $\Gamma_{x_0}^0(\varphi) = \varphi(x_0)$, No proviene de una función. Supongamos que $x_0 = 0$, $n = 1$, así tenemos $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Como vimos en el ejemplo 2.13 y el Teorema 2.3, la δ es una funcional lineal y continua en \mathcal{D} . Por el Teorema de Hahn-Banach (ver [9] para su demostración) existe una extensión continua de δ al espacio de funciones \mathcal{L}_c^∞ , esto es las funciones en \mathcal{L}^∞ de soporte compacto; digamos

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{L}_c^\infty \rightarrow \mathbb{C} \\ T|_{\mathcal{D}} &= \delta \end{aligned}$$

Supongamos que existe $f \in \mathcal{L}_{loc}^1$ tal que $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}_c^\infty$.

Para los abiertos $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y los compactos $K_n = [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ el Lema C^∞ de Urysohn (ver [9]) permite construir una familia $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\varphi_n \in \mathcal{D}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ en $K_n = [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$, con $\text{sop } \varphi_n \subset U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

Así,

$1 = \varphi_n(0) = \delta(\varphi_n) = T(\varphi_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ esto ya que $\varphi_n f \rightarrow 0$ casi en todas partes, excepto en $x = 0$ y $|\varphi_n f| \leq |f| \in \mathcal{L}^1([-1, 1])$.

Entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (para una demostración de este resultado ver [9]) se sigue que $1 = \varphi_n(0) \rightarrow 0$, lo que nos lleva a una contradicción.

Similarmente podemos demostrar el resultado para todo α multi-índice. ■

Ahora, daremos a conocer un poco de notación: Sean $F \in \mathcal{D}'(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. En vez de escribir $F(\varphi)$ escribiremos $\langle F, \varphi \rangle$. Un caso particular será $F = f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ entonces escribimos $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$.

La reflexión de una función φ en $U \subset \mathbb{R}^n$ es $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Si $y \in \mathbb{R}^n$ δ_y denotará la masa puntual en y , es decir,

$$\begin{aligned}\delta_y &: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} \\ \langle \delta_y, \varphi \rangle &= \varphi(y)\end{aligned}$$

y δ es la masa puntual en el origen, es decir, $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Proposición 2.4. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = a$. Entonces

$$f_t \rightarrow a\delta \text{ si } t \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}'$$

DEMOSTRACIÓN: Mostremos que para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene que $\langle f_t, \varphi \rangle \rightarrow \langle a\delta, \varphi \rangle$. En efecto,

$$\begin{aligned}\langle f_t, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\tilde{\varphi}(0-y)dy \\ &= (f_t * \tilde{\varphi})(0) \rightarrow \tilde{\varphi}(0) = a\delta(\varphi) \\ &= \langle a\delta, \varphi \rangle \quad \text{cuando } t \rightarrow 0.\end{aligned}$$

■

2.7 Regularización

Sea f una función integrable sobre todo compacto, salvo sobre aquellos que contienen ciertos puntos singulares: para simplificar, supondremos un sólo punto singular, en x_0 . El funcional f tal que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

no es una distribución sobre \mathbb{R}^n : el lado derecho sólo está definido, en general, si el soporte de φ excluye a x_0 ; dicho de otro modo, el funcional f es solamente una distribución sobre todo abierto que excluya a x_0 .

El problema de la regularización es el siguiente: encontrar una distribución rf sobre \mathbb{R}^n que se reduzca a la distribución f sobre los abiertos que excluyen a x_0 . Se dirá que esta distribución (que prolonga, en el entorno de x_0 , la definición de la distribución f fuera de este entorno), es una *regularización* de la función f .

Un ejemplo de regularización, es el siguiente.

Ejemplo 2.14. La función $\frac{1}{x}$ no define una distribución regular porque $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ no es convergente para todas las funciones de prueba. Sin embargo, podemos emplear la noción de *valor principal de Cauchy* y definimos:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle &= VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde VP y $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ indican el valor principal. Este límite existe por la siguiente razón. Como $\varphi(x)$ es diferenciable en $x = 0$, existe una función $\psi(x)$ continua en $x = 0$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \quad (2.12)$$

Sea $[-A, A]$ el soporte de la función de prueba $\varphi(x)$, entonces para $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{A \geq |x| > \varepsilon} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx \\ &= \int_{A \geq |x| > \varepsilon} \psi(x) dx \rightarrow \int_{-A}^A \psi(x) dx \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se puede ver fácilmente que está funcional es lineal. Para probar su continuidad hacemos referencia a

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \rightarrow \int_{-A}^A \psi(x) dx \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

donde $\text{sop } \varphi(x) = [-A, A]$ y encontramos que

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_{-A}^A \psi(x) dx \leq 2A \max |\psi(x)|, \quad -A \leq x \leq A,$$

por el teorema del valor medio.

Así, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ es una distribución. ◆

Ejemplo 2.15. $\delta^{\pm}(x) = \frac{1}{2}\delta(x) \mp \frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\frac{1}{x}$ son distribuciones singulares en \mathcal{D} , llamadas *distribuciones de Heisenberg*. ◆

Finalizamos este capítulo introductorio de teoría de distribuciones para dar paso a las propiedades básicas que relacionan esta teoría con la teoría clásica de funciones, las cuales nos servirán en capítulos posteriores para el análisis de ciertos problemas en ecuaciones diferenciales parciales en el sentido distribucional.

Capítulo

3

Extensión de Operadores Lineales de Distribuciones

Este capítulo tiene como propósito principal mostrar como podemos llegar a la definición de los operadores de Distribuciones una vez que conocemos su definición en el sentido clásico, de tal manera que estos estén bien definidos en el sentido de distribuciones. Además mostramos varios ejemplos en los cuales ilustramos el uso de tales operadores para distribuciones que serán de gran importancia en el capítulo 5 de esta tesis. También damos a conocer el soporte y el soporte singular de una distribución mostrando varios resultados de gran importancia y en una última sección hablamos de la convergencia de Distribuciones.

Sea $T : X \rightarrow \mathcal{L}_{loc}^1(V)$ lineal, donde $X \subset \mathcal{L}_{loc}^1(U)$, U y V son abiertos de \mathbb{R}^n y supongamos que $T' : \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{D}(U)$ es lineal y continua, tal que

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (Tf)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(T'\varphi) dx = \langle f, T'\varphi \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ y $f \in X$. Entonces podemos extender $T : \mathcal{D}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(V)$ tal que para $F \in \mathcal{D}'(U)$

$$\langle TF, \varphi \rangle = \langle F, T'\varphi \rangle \quad \text{donde } \varphi \in \mathcal{D}(V).$$

Claramente T sigue siendo lineal y además es continua.

Sea $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red (para una definición de este concepto ver [9]) en $\mathcal{D}'(U)$ tal que $F_\alpha \rightarrow F$ en $\mathcal{D}'(U)$.

Antes de continuar trataremos de explicar un poco este concepto. Es una generalización de la noción de sucesión, la idea clave es utilizar conjuntos indexados más general que \mathbb{N} . La definición precisa es como sigue: Una red en un conjunto X es un mapeo $\phi \mapsto x_\alpha$ de un conjunto directo A en X . Donde un conjunto directo es un conjunto equipado con una relación binaria.

Entonces

$$\langle F_\alpha, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(U);$$

de aquí que,

$$\langle F_\alpha, T'\psi \rangle \rightarrow \langle F, T'\psi \rangle \quad \text{para toda} \quad \psi \in \mathcal{D}(V).$$

Así,

$$\langle TF_\alpha, \psi \rangle \rightarrow \langle TF, \psi \rangle \quad \text{para toda} \quad \psi \in \mathcal{D}(V).$$

Entonces,

$$TF_\alpha \rightarrow TF \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(V).$$

Por lo tanto T es continua.

3.1 Operadores algebraicos

Ya hemos definido la suma de dos distribuciones y la multiplicación por un escalar. Ahora definiremos otras operaciones algebraicas.

3.1.1 Cambio de variables

Conociendo como actúa una distribución F , nos interesa saber qué es $\langle F(x+b), \varphi(x) \rangle$ si $F(x) \in \mathcal{D}'$ y $\varphi(x)$ es una función de prueba.

Sea $\langle f, \varphi \rangle$ una distribución regular generada por una función $f(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $x = Ay - a$, donde A es una matriz de $n \times n$ con $\det A \neq 0$ y a un vector constante, una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle f(Ay - a), \varphi(y) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ay - a) \varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi[A^{-1}(x + a)] dx \\ &= \frac{1}{|\det A|} \langle f(x), \varphi[A^{-1}(x + a)] \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde A^{-1} es la inversa de la matriz A .

Afortunadamente, la misma definición se aplica a una distribución singular, porque $[A^{-1}(x + a)]$ es una operación válida en $\varphi(x)$. De acuerdo a esto, tenemos:

$$\langle T(Ay - a), \varphi(y) \rangle = \left\langle T(x), \frac{\varphi[A^{-1}(x + a)]}{|\det A|} \right\rangle \quad (3.2)$$

Definición 3.1. Si $F \in \mathcal{D}'$, $\det A \neq 0$ entonces $F(Ay + b) \in \mathcal{D}'$

$$\langle F(Ay + b), \varphi(y) \rangle = \left\langle F(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{\det A} \right\rangle \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.3)$$

Observación 3.1. Para una traslación simple, es decir para el caso en el que $A = I$, la matriz unidad, tenemos:

$$\langle F(y - a), \varphi(y) \rangle = \langle F(x), \varphi(x + a) \rangle. \quad (3.4)$$

Observación 3.2. Para una expansión escalar simple, $A = cI$, $b = 0$, (3.3) es

$$\langle F(cy), \varphi(y) \rangle = \frac{1}{|c^n|} \left\langle F(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right\rangle \quad (3.5)$$

Ejemplo 3.1. Consideremos la delta de Dirac. Sabemos que $\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$. Ahora,

$$\langle \delta(y - a), \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + a) \rangle = \varphi(a).$$

La distribución $\delta(y - a)$ se denota $\delta_a(y)$, la cual como ya mencionamos en el capítulo 2, se interpreta como una distribución de masa unitaria concentrada en a . ♦

3.1.2 Traslación por $y \in \mathbb{R}^n$ fijo

Si $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$, consideremos el operador de *traslación*

$$\begin{aligned} \tau_y : \mathcal{L}_{loc}^1(U) &\rightarrow \mathcal{L}_{loc}^1(V) \\ (\tau_y f)(x) &= f(x - y) \end{aligned}$$

donde $V = U + y$ abierto.

Observamos que para toda $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(V)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_y f)(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z + y) dz, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z - (-y)) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \tau_{-y} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Entonces, es natural definir

$$\begin{aligned} T' : \mathcal{D}(V) &\rightarrow \mathcal{D}(U) \\ T' \varphi &= \tau_{-y} \varphi \end{aligned}$$

Así, tenemos la siguiente definición

Definición 3.2. Definimos la traslación por y de una distribución como:

$$\begin{aligned}\tau_y : \mathcal{D}'(U) &\rightarrow \mathcal{D}'(V) \\ \langle \tau_y F, \varphi \rangle &= \langle F, \tau_{-y} \varphi \rangle\end{aligned}$$

para toda $F \in \mathcal{D}'(U)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

Definición 3.3. Una distribución F es homogénea de grado λ si

$$F(cx) = c^\lambda F(x),$$

para $c > 0$.

Si F es homogénea de grado λ ,

$$\langle F(cy), \varphi(y) \rangle = c^{-n} \left\langle F(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right\rangle = c^\lambda \langle F, \varphi \rangle$$

y

$$\left\langle F(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right\rangle = c^{\lambda+n} \langle F, \varphi \rangle.$$

Ejemplo 3.2. $\langle \delta(cy), \varphi(y) \rangle = \frac{1}{|c^n|} \left\langle \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right\rangle = \frac{1}{|c^n|} \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$, o

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c^n|} \delta(x). \quad (3.6)$$

Así, $\delta(x) = \delta(x_1, \dots, x_n)$ es una distribución homogénea de grado $-n$. ◆

Definición 3.4. Sea F una distribución. La reflexión \tilde{F} de F es aquella distribución definida mediante

$$\langle \tilde{F}, \varphi \rangle = \langle F, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(V). \quad (3.7)$$

Ejemplo 3.3. Para la distribución δ tenemos

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi(x) \rangle = \langle \delta, \varphi(-x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

o bien, $\delta(-x) = \delta(x)$. En este sentido se dice que la distribución delta es una distribución par. ◆

Similarmente una distribución con la propiedad

$$\langle F(-x), \varphi(x) \rangle = \langle F(x), \varphi(-x) \rangle = -\langle F, \varphi \rangle$$

es llamada una distribución impar.

3.1.3 Producto de una distribución y una función

En general, es difícil definir el producto de dos funciones generalizadas. Esta dificultad se presenta aún en el caso de que las distribuciones estén asociadas a funciones localmente integrables. Considérese, por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{x^2}$; es claro que $f, g \in \mathcal{L}_{loc}^1$, pero $f(x)g(x) = 1/x \notin \mathcal{L}_{loc}^1$. Sin embargo, es posible asignar un significado al producto de una función generalizada $F(x)$ y una función infinitamente diferenciable $\psi(x)$, como lo exponemos a continuación.

Sea $\psi \in C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, U abierto. Sea $T : \mathcal{L}_{loc}^1(U) \rightarrow \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ definida mediante

$$Tf = \psi f.$$

Así, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi f)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\psi\varphi)(x)dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T' : \mathcal{D}(U) &\rightarrow \mathcal{D}(U) \\ T'\varphi &= \psi\varphi. \end{aligned}$$

De aquí, podemos definir el operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}'(U) &\rightarrow \mathcal{D}'(U) \\ TF &= \psi F \end{aligned}$$

como:

$$\langle \psi F, \varphi \rangle = \langle F, \psi\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U) \quad (3.8)$$

pues $\psi\varphi \in \mathcal{D}$

Ejemplo 3.4. $\langle \psi\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \psi\varphi \rangle = \psi(0)\varphi(0) = \psi(0) \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \psi(0)\delta, \varphi \rangle$

o

$$\psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x). \quad (3.9)$$

Más generalmente,

$$\psi(x)\delta(x - \xi) = \psi(\xi)\delta(x - \xi). \quad (3.10)$$

◆

Ejemplo 3.5. Mostremos que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$x^n \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) = x^{n-1}. \quad (3.11)$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$, entonces

$$\left\langle x^n \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right\rangle = VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n \varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} \varphi(x) dx = \langle x^{n-1}, \varphi \rangle. \quad \blacklozenge$$

3.1.4 Composición con transformaciones lineales

Sean $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertible, $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V = S^{-1}(U)$ abiertos.

Consideremos el mapeo

$$\begin{aligned} T : \mathcal{L}_{loc}^1(U) &\rightarrow \mathcal{L}_{loc}^1(V) \\ Tf &= f \circ S. \end{aligned}$$

Claramente T es lineal. Además, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, se sigue, del teorema de cambio de variables, que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ S)(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(S(x))\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(S(x))(\varphi \circ S^{-1})(S(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f(\varphi \circ S^{-1}))(S(x))dx \\ &= |\det S|^{-1} \left\{ |\det S| \int_{\mathbb{R}^n} (f(\varphi \circ S^{-1}))(S(x))dx \right\} \\ &= |\det S|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (f(\varphi \circ S^{-1}))(z)dz. \end{aligned}$$

Así, para $Tf = f \circ S$ se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\varphi(x)dx = |\det S|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi \circ S^{-1})(x)dx;$$

entonces, igual que antes, se sigue que:

$$\begin{aligned} T' : \mathcal{D}(V) &\rightarrow \mathcal{D}(U) \\ T'\varphi &= |\det S|^{-1} \varphi \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos definir, para $F \in \mathcal{D}'(U)$,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}'(U) &\rightarrow \mathcal{D}'(V) \\ TF &= F \circ S. \end{aligned}$$

Así,

$$\langle F \circ S, \varphi \rangle = |\det S|^{-1} \langle F, \varphi \circ S^{-1} \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

Un caso particular es el siguiente: Sea $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $S(x) = -x$, claramente S es invertible, $S^{-1} = S$ y $|\det S| = 1$ y si $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ entonces $(f \circ S)(x) = f(-x) = \tilde{f}(x)$.

3.2 Operaciones analíticas

En esta sección presentamos la operación de diferenciación de distribuciones, las definiciones de soporte de una distribución y de convergencia de distribuciones.

La definición de derivada de una distribución que desarrollaremos aquí nos lleva a resultados consistentes cuando diferenciamos una distribución que también es una función clásica. Por lo tanto, consideraremos primero una distribución regular generada por una función continuamente diferenciable $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.2.1 Diferenciación

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y

$$\begin{aligned} T : C^{|\alpha|}(U) &\rightarrow \mathcal{L}_{loc}^1(U) \\ Tf &= \partial^\alpha f. \end{aligned}$$

donde α es un multi-índice.

Notemos que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\partial^\alpha \varphi)(x)dx,$$

la última igualdad se obtiene al integrar por partes.

Entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) [(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi](x)dx.$$

En este caso $T' = (-1)^{|\alpha|} T|_{\mathcal{D}(U)}$.

Así, podemos extender $T = \partial^\alpha$ a todo $\mathcal{D}'(U)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha : \mathcal{D}'(U) &\rightarrow \mathcal{D}'(U) \\ \langle \partial^\alpha F, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle F, \partial^\alpha \varphi \rangle, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para $F \in \mathcal{D}'(U)$ y para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Esta es la derivada en el sentido de distribuciones.

Nótese que este resultado transforma el problema de derivar una función generalizada al problema de derivar una función de prueba que tiene derivadas de todos los ordenes.

Propiedades de las derivadas generalizadas

1. De la definición de diferenciación en la ecuación (3.12) se sigue que una función generalizada es infinitamente diferenciable.

2. La igualdad $F'(x) = 0$ es válida si y solamente si la distribución $F(x)$ es constante. De hecho, si suponemos que $F'(x) = 0$, entonces

$$0 = \langle F'(x), \varphi(x) \rangle = - \langle F(x), \varphi'(x) \rangle = - \int_{\text{sop } \varphi} F(x) \varphi'(x) dx.$$

Como $\varphi' \in \mathcal{D}(U)$ y $-\int_{\text{sop } \varphi} F(x) \varphi'(x) dx = 0$ entonces $F(x)$ es constante.

Por otro lado, si $F(x)$ es constante,

$$\langle F', \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle = 0;$$

entonces $F'(x) = 0$.

De esta relación se sigue que si $F'_1 = F'_2$, entonces F_1 y F_2 difieren por una función constante.

3. La derivada generalizada coincide con la derivada clásica siempre que la derivada clásica exista. Sea $f \in C_c^\alpha(U)$, una función continua con derivadas parciales continuas hasta orden α y de soporte compacto, entonces $\partial^\beta f$ en $\mathcal{D}'(U)$ coincide con la derivada clásica $\partial^\beta f$ para β multi-índice tal que $\beta \leq \alpha$.

Si $f \in C_c^\alpha(U)$ entonces $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces, f se puede identificar con la distribución en U definida en el teorema 2.1 del capítulo 2, ecuación (2.7).

Mostremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta f(x) \varphi(x) dx = (-1)^\beta \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial^\beta \varphi(x) dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Supongamos que $n = 1$, $\alpha = 1$, $U = [a, b]$. Integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx.$$

Ahora, si $\alpha = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(x) \varphi(x) dx &= f'(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \left[f(x) \varphi'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \varphi''(x) dx \right] \\ &= (-1)^2 \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Supongamos que se vale para $\alpha = k$, es decir,

$$\int_a^b f^{(k)}(x) \varphi(x) dx = (-1)^k \int_a^b f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$$

Mostremos que se vale para $\alpha = k + 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(k+1)}(x)\varphi(x)dx &= (-1)^k \int_a^b f'(x)\varphi^{(k)}(x)dx \\ &= (-1)^k \left[f(x)\varphi^{(k)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi^{(k+1)}(x)dx \right] \\ &= (-1)^{k+1} \int_a^b f(x)\varphi^{(k+1)}(x)dx. \end{aligned}$$

Similarmente lo podemos hacer por inducción para $n > 1$, utilizando el teorema de Fubini e integración por partes.

4. Como

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right), \varphi \right\rangle, \quad (3.13)$$

el resultado de la diferenciación no depende del orden de la diferenciación, pues φ es C^∞ .

5. La derivada del producto de una distribución F y una función $f(x) \in C$ es

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fF) = \frac{\partial f}{\partial x_j}F + f \frac{\partial F}{\partial x_j}. \quad (3.14)$$

Claramente, para $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(fF)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle fF, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle F, f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \left\langle F, \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle = - \left\langle F, \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle F, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, f\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} F, \varphi \right\rangle = \left\langle f \frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} F, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle f \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} F, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Similarmente podemos definir el producto de derivadas de orden superior y tenemos:

$$\partial^\alpha(fF) = \sum_{\beta < \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (\partial^{\alpha - \beta} f)(\partial^\beta F) \quad (3.15)$$

donde la suma es desde $\beta = (0, 0, \dots, 0)$ a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

A continuación presentaremos las derivadas de algunas funciones generalizadas.

Ejemplo 3.6. Para la delta tenemos, primero

$$\left\langle \frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \delta(x - \xi), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x_j}$$

y en \mathbb{R}^n ,

$$\left\langle \delta_\xi^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \frac{d^n \varphi}{dx^n} \Big|_{x=\xi} = - \left\langle \delta_\xi, \frac{d^n \varphi(x - \xi)}{d\xi} \right\rangle.$$

Segundo, para una función $f(x) \in C^\infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle f \frac{\partial \delta_\xi}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \delta_\xi}{\partial x_j}, f \varphi \right\rangle = - \left\langle \delta_\xi, \frac{\partial (f \varphi)}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \delta(x - \xi), f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle \\ &= -f(\xi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_{x=\xi} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x=\xi} \varphi(\xi) \\ &= f(\xi) \left\langle \frac{\partial \delta_\xi}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle - \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x=\xi} \langle \delta_\xi, \varphi \rangle \end{aligned}$$

o bien

$$f \frac{\partial \delta_\xi}{\partial x_j} = f(\xi) \frac{\partial \delta_\xi}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x=\xi} \delta_\xi. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 3.7. (a) Encontremos la derivada distribucional de la función:

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

Para ello, observemos que para $\varphi \in \mathcal{D}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle x'_+, \varphi \rangle &= - \langle x_+, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} x_+ \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx \\ &= x \varphi \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \langle H(x), \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\frac{d}{dx} x_+(x) = H(x)$.

(b) Para la función de Heaviside tenemos:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

o bien $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$; es decir, la derivada de la distribución de Heaviside es la delta de Dirac.

Obsérvese que la función de Heaviside $H(x)$ es discontinua en el origen y que el salto de discontinuidad es igual a uno. Así, podemos decir que su derivada en el sentido de

distribuciones es el “salto” de discontinuidad en el origen multiplicado por la medida de dirac, δ . \blacklozenge

Ejemplo 3.8. Ahora, estudiaremos la distribución $|x|$

$$\langle |x|, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} x \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 x \varphi(x) dx.$$

Entonces,

$$\langle |x|', \varphi \rangle = -\langle |x|, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx$$

Integrando por partes se sigue que:

$$\langle |x|', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x dx,$$

donde $\operatorname{sgn} x$ denota a la función signo:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

Así,

$$\langle |x|', \varphi \rangle = \langle \operatorname{sgn} x, \varphi \rangle \text{ o } |x|' = \operatorname{sgn} x.$$

Nótese que

$$\operatorname{sgn} x = H(x) - H(-x), \quad (3.16)$$

por lo tanto la segunda derivada se obtiene como sigue:

$$|x|'' = \operatorname{sgn}' x = H'(x) - H'(-x) = \delta(x) + \delta(-x) = 2\delta(x).$$

Estas y sus funciones asociadas juegan una parte muy útil en muchos campos del análisis.

Por ejemplo, podemos evaluar:

$$I = \int_{-1}^1 |x| f''(x) dx.$$

Usando los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} I &= [|x| f'(x)] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 |x|' f'(x) dx \\ &= f'(1) - f'(-1) - [|x|' f(x)] \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 |x|'' f(x) dx \\ &= f'(1) - f'(-1) - [\operatorname{sgn} x f(x)] \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \delta(x) f(x) dx \\ &= f'(1) - f'(-1) - f(1) + f(-1) + 2f(0). \end{aligned}$$

De (3.16) observamos que

$$H(x) = \operatorname{sgn} x + H(-x) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} x).$$

Más aún, podemos escribir (3.16) como:

$$\operatorname{sgn} x = H(x) - \tilde{H}(x). \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 3.9. Sea Ω un intervalo abierto (α, β) en \mathbb{R} , sea $a \in \Omega$. Supongamos que $f \in C^1(\Omega - \{a\})$ y además supongamos que los límites laterales $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $f(a-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existen y son finitos. Sea $[f']$ la derivada clásica de f en $\Omega - \{a\}$ y supongamos que $[f']$ es acotada en $\Omega - \{a\}$. Denotemos como $Jf(a)$ a la diferencia $f(a+) - f(a-)$. Si la función f tiene una discontinuidad simple (o una discontinuidad de tipo uno) en a , $Jf(a)$ denota “el salto” de f en el punto a .

De nuestras hipótesis, se sigue que f y $[f']$ definen distribuciones en Ω . Encontremos la derivada de f en el sentido de distribuciones.

Tenemos, que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\alpha}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^{\beta} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Integrando por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} -\int_{\alpha}^a f(x) \varphi'(x) dx &= -\left[f(x) \varphi(x) \Big|_{\alpha}^a - \int_{\alpha}^a [f'](x) \varphi(x) dx \right] \\ &= -\left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right) \varphi(a) + f(\alpha) \varphi(\alpha) + \int_{\alpha}^a [f'](x) \varphi(x) dx \\ &= -\varphi(a) f(a-) + \int_{\alpha}^a [f'](x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$-\int_a^{\beta} f(x) \varphi'(x) dx = \varphi(a) f(a+) + \int_a^{\beta} [f'](x) \varphi(x) dx.$$

Así,

$$\langle f', \varphi \rangle = \varphi(a) [f(a+) - f(a-)] + \int_{\alpha}^{\beta} [f'](x) \varphi(x) dx.$$

Reescribiendo la última expresión tenemos

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle Jf(a) \delta_a, \varphi \rangle + \langle [f'], \varphi \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto,

$$f' = Jf(a) \delta_a + [f'],$$

es decir, la derivada clásica de f en el sentido de distribuciones es la suma de la derivada clásica $[f']$ más una medida de masa $Jf(a)$ concentrada en el punto a . \blacklozenge

Finalmente presentamos un resultado en el que utilizamos los ejemplos anteriores y que nos servirá más adelante en las aplicaciones:

Teorema 3.1. *Sea $f(x)$ una función n veces continuamente diferenciable; entonces*

$$\begin{aligned} f(x)\delta^n(x) &= (-1)^n f^{(n)}(0)\delta(x) + (-1)^{n-1} n f^{(n-1)}(0)\delta'(x) \\ &\quad + (-1)^{(n-2)} \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(0)\delta''(x) + \cdots + f(0)\delta^{(n)}(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

DEMOSTRACIÓN: Nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\delta^{(n)}(x)\} \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\varphi(x)\} \delta^{(n)}(x) dx \\ &= [\{f(x)\varphi(x)\} \delta^{(n-1)}(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\varphi(x)\}' \delta^{(n-1)}(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\varphi(x)\}' \delta^{(n-1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Después de una sucesión de integraciones por partes, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\varphi(x)\} \delta^{(n)}(x) = (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\varphi(x)\}^{(n)} \delta(x) dx.$$

Ahora, usamos la fórmula

$$\begin{aligned} \{f(x)\varphi(x)\}^{(n)} &= f^{(n)}(x)\varphi(x) + n f^{(n-1)}(x)\varphi'(x) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(x)\varphi''(x) + \cdots + f(0)\varphi^{(n)}(0), \end{aligned}$$

en la relación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\delta^{(n)}(x)\} \varphi(x) dx &= (-1)^n f^{(n)}(0)\varphi(0) + (-1)^n n f^{(n-1)}(0)\varphi'(0) \\ &\quad + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(0)\varphi''(0) \\ &\quad + \cdots + (-1)^n f(0)\varphi^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n f^{(n)}(0)\varphi(0) + (-1)^n n f^{(n-1)}(0)\varphi'(0) \\ &\quad + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(0)\varphi''(0) \\ &\quad + \cdots + (-1)^n f(0)\varphi^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta^{(k)}(x) dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)\delta(x) dx = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

La relación (3.18) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle f(x)\delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle &= (-1)^n f^{(n)}(0) \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle + (-1)^{n-1} n f^{(n-1)}(0) \langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle \\ &\quad + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(0) \langle \delta''(x), \varphi(x) \rangle \\ &\quad + \cdots + \langle \delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

la cual es equivalente a (3.17). ■

Orden de una distribución

Del ejemplo 3.7(b) encontramos que $\delta(x)$ es la derivada de una distribución regular, $H(x)$. Por esta razón, la distribución delta es llamada una distribución *de orden* 1. En general, una distribución se dice *de orden* n si puede ser expresada como la n -ésima derivada de una distribución regular.

Esto significa que mientras más alto sea el orden de una distribución, más “singular” es.

Una distribución de *orden cero* es una distribución regular.

Para generalizar y resumir estas ideas tenemos:

F es una distribución de *orden finito* α , si existe una función localmente integrable f y un multi-índice α tal que

$$F = D^\alpha f.$$

3.2.2 El Soporte y el soporte singular de una distribución

Antes de dar la definición de soporte de una distribución, necesitamos discutir el *teorema del encolado de trozos*.

La cuestión de interés es la siguiente: ¿se puede reconstruir la definición global de una distribución sobre \mathbb{R}^n a partir de sus definiciones locales sobre abiertos que recubran a \mathbb{R}^n ? Esto es lo que Schwartz llama el problema del “encolado de trozos” (ver [10], [13]).

La respuesta, positiva, la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, donde Λ es un conjunto de índices, una cubierta de Ω . Supongamos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe una distribución $F_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega_\lambda)$, y que

$$F_\lambda = F_\mu \text{ en } \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \text{ si } \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset \quad (3.20)$$

Entonces, existe una única $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $F = F_\lambda$ en Ω_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$.

Para demostrar este teorema, haremos uso del Lema 2.1 y del siguiente resultado:

Lema 3.1. Designemos por \mathcal{D}_K al conjunto de los elementos ψ de \mathcal{D} cuyo soporte S es estrictamente interior a K . Haciendo, entonces

$$\psi_j(x) = \psi(x)\varphi_j(x),$$

de donde $\psi(x) = \sum_{j=1}^k \psi_j(x)$, y las φ_j son las funciones encontradas en el Lema 2.1, se tiene que $\psi_j \in \mathcal{D}_K$, para toda j .

DEMOSTRACIÓN: Está función, con soporte contenido en S , es, en efecto, para todo x de la clase C^∞ (puesto que es de esta clase sobre K e idénticamente nula fuera de S). Luego, cualquiera que sea el recubrimiento del compacto K por una unión finita de abiertos acotados Ω_j , todo elemento de \mathcal{D}_K es la suma de igual número de elementos ψ_j del mismo espacio, estando el soporte de ψ_j en Ω_j . ■

Ahora, podemos demostrar el teorema del encolado de trozos.

DEMOSTRACIÓN (del Teorema 3.2): Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, con soporte S . Por el Lema 3.1 tomando para $K \subset \Omega$ compacto tal que S sea interior. Al estar Ω recubierto por los Ω_λ , también lo está K , por un número finito de ellos.

Denotémosle por $\Omega_{\lambda(1)}, \dots, \Omega_{\lambda(m)}$: se tiene, $\psi = \sum_{j=1}^m \psi_j(x)$ siendo cada ψ_j de la clase C^∞ y estando su soporte en $K \cap \Omega_{\lambda(j)}$, $j = 1, \dots, m$.

Entonces podemos elegir,

$$\begin{aligned} \langle F, \psi \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle F, \psi_j \rangle = \sum_{j=1}^m \langle F_{\lambda(j)}, \psi_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle F_{\lambda(j)}, \psi(x)\varphi_j(x) \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde las φ_j son las funciones encontradas en el Lema 2.4.

Consideremos otra cubierta abierta $\Omega'_{\mu(1)}, \dots, \Omega'_{\mu(l)}$ del sop ψ , y un conjunto correspondiente de funciones ψ_k tales que se satisface el Lema 3.1. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \langle F_{\lambda(j)}, \psi(x)\varphi_j(x) \rangle &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \langle F_{\lambda(j)}, \psi\varphi_j\varphi'_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \langle F_{\mu(k)}, \psi\varphi_j\varphi'_k \rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

por (3.20). Sumando sobre las j 's tenemos:

$$\sum_{j=1}^m \langle F_{\lambda(j)}, \psi\varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^l \langle F_{\mu(k)}, \psi\varphi'_k \rangle.$$

Por lo tanto, (3.21) define $\langle F, \psi \rangle$ no ambiguamente. Más aún, si $\text{sop } \varphi \subset \Omega_\lambda$ para algunos $\lambda \in \Lambda$ entonces podemos tomar $l = 1$ y concluir que $F = F_\lambda$ en Ω_λ .

Finalmente, mostremos que (3.21) es una distribución:

Claramente (3.21) es lineal.

Probemos que es continua; en efecto para cada $K \subset \Omega$ tal que K es compacto y $(\psi_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi_j \rightarrow \psi$ en $\mathcal{D}(K)$ tendremos:

$$\begin{aligned} |\langle F, \psi_j \rangle - \langle F, \psi \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^m \langle F_{\lambda(i)}, \varphi_i \psi_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle F_{\lambda(i)}, \psi \varphi_i \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m [\langle F_{\lambda(i)}, \varphi_i \psi_j \rangle - \langle F_{\lambda(i)}, \psi \varphi_i \rangle] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\langle F_{\lambda(i)}, \varphi_i \psi_j \rangle - \langle F_{\lambda(i)}, \psi \varphi_i \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^m |\langle F_{\lambda(i)}, \varphi_i (\psi_j - \psi) \rangle| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $j \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, $\langle F, \psi \rangle$ es una distribución. Quedando así completamente mostrado el teorema. ■

Por ahora, no podemos hablar acerca de propiedades de distribuciones, sólo podemos considerar su acción en la clase de funciones de prueba.

Las funciones generalizadas no pueden ser evaluadas en puntos, pueden ser restringidas a conjuntos abiertos. Si G es un subconjunto de Ω , entonces $\mathcal{D}(G)$ está naturalmente incluido en $\mathcal{D}(\Omega)$, y por lo tanto toda función generalizada en Ω define una función generalizada en G por restricción. Consecuentemente, podemos definir:

Definición 3.5. Decimos que $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se anula en $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto si $\langle F, \varphi \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}$. Una distribución F se anula en una región de \mathbb{R}^n si se anula en una vecindad de toda parte de G . De acuerdo a esto, las distribuciones F_1 y F_2 son iguales en G si $F_1 - F_2 = 0$ para toda $x \in G$.

Definición 3.6. Un punto x se llama un punto esencial de una distribución F si no existe una vecindad de x en la cual F se anula.

Ahora, como una consecuencia del Teorema del Encolado de Trozos definiremos el soporte de una distribución.

Por los resultados anteriormente expuestos, sabemos que cuando una distribución está definida sobre diversos abiertos (por definiciones no contradictorias sobre las partes comunes), está definida sobre su unión.

En particular, si una distribución F es nula sobre diversos abiertos es nula sobre su unión.

Consideremos en tal caso, todos los abiertos en los que $F = 0$. Entre ellos existe uno mayor que los demás, que es su unión. Designémosle por Ω_0 ; su complemento $O = \Omega_0^c$ se denomina *soporte* de la distribución F .

Se puede dar a esta definición varias formas equivalentes:

1. O es el complemento de las uniones de los abiertos en que $F = 0$.
2. $x \in O$ si, y solamente si, F no es nula en ninguna vecindad de x .
3. O es el mínimo cerrado tal que F es nula sobre todo abierto exterior a O .

Técnicamente, podemos describir el soporte como el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual F se anula.

Ejemplo 3.10. El $\text{sop } H(x)$, donde $H(x)$ es la función de Heaviside, es el eje x positivo, es decir, $x \geq 0$. ◆

Ejemplo 3.11. El soporte de la delta de Dirac, $\text{sop } \delta(x)$, y de cada una de sus derivadas, es el punto $x = 0$. ◆

Proposición 3.1. Si la distribución F se anula en $x \in R$ entonces también $D^\alpha F = 0$ para $x \in R$; entonces $\text{sop } D^\alpha F \subset \text{sop } F$.

DEMOSTRACIÓN: La prueba se sigue observando que si $\varphi \in \mathcal{D}_R$, entonces también $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}_R$. Así,

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle = 0,$$

de donde se sigue que $D^\alpha F = 0$ para toda $x \in R$. Por lo tanto, $\text{sop } D^\alpha F \subset \text{sop } F$. ■

Proposición 3.2. Sea a una función. Entonces $\text{sop } aF \subset \text{sop } a \cap \text{sop } F$.

DEMOSTRACIÓN: Nótese que si $x \in \text{sop } aF$, entonces $a(x)F(x) \neq 0$ para toda vecindad de x . Es decir, $a(x) \neq 0$ y $F(x) \neq 0$ para toda vecindad de x . Así, $x \in \text{sop } a$ y $x \in \text{sop } F$, esto es $x \in \text{sop } a \cap \text{sop } F$. ■

Ejemplo 3.12. La distribución

$$|F|^2 = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2$$

tiene a todo el espacio \mathbb{R}^n como su soporte, a pesar de que $|F|^2$ se anula en $F = 0$. La razón es que es el comportamiento de una distribución sobre la vecindad de un punto que determina si el punto está en el soporte de F . ◆

Teorema 3.3. Sea $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si los soportes de F y φ son ajenos, entonces $\langle F, \varphi \rangle = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $K = \text{sop } \varphi$. Por hipótesis, todo punto del compacto K tiene una vecindad abierta en el cual $F = 0$. Esta cubierta abierta de K contiene una subcubierta $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Con ψ_1, \dots, ψ_m como en el Lema 2.1 tenemos:

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle F, 1\varphi \rangle = \left\langle F, \sum_{j=1}^m \psi_j \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^m \langle F, \psi_j \varphi \rangle = 0,$$

ya que $\psi_j \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ y $F = 0$ en Ω_j para $j = 1, \dots, m$ por hipótesis; lo cual prueba el teorema. ■

Corolario 3.1. Si $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y todo punto de Ω tiene una vecindad en la cual $F = 0$, entonces $F = 0$.

Otro concepto importante es el de *soporte singular*. Este se define como la cerradura del conjunto de puntos donde $F(x)$ no es una función suave. Es el conjunto más pequeño fuera del cual F es igual a una función $f(x)$ que posee derivadas de todos los ordenes.

Ejemplo 3.13. La $\delta(x)$ y la función $H(x)$ tienen como soporte singular al punto $x = 0$. Similarmente la distribución $|x|$ también tiene al punto $x = 0$ como soporte singular. ♦

Como último ejemplo consideremos el siguiente.

Ejemplo 3.14. Considere el funcional

$$\int_{-1}^1 (\text{sen } 2x) \varphi(x) dx$$

Escribiéndolo como:

$$\int_{-1}^1 (\text{sen } 2x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } 2x & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es claro que el soporte de este funcional es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ mientras que su soporte singular consiste de los puntos -1 y 1 . ♦

Para terminar esta subsección estudiaremos dos resultados. El primero de ellos se refiere a la composición $\delta[f(x)]$ donde $f(x)$ es una función, y probaremos que

$$\delta[f(x)] = \sum_{m=1}^n \frac{\delta(x - x_m)}{|f'(x_m)|}, \quad (3.23)$$

donde $\{x_m, m = 1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de ceros simples de $f(x)$.

Supongamos que $f(x)$ tiene únicamente un cero simple en $x = x_1$ y que $f'(x_1) > 0$, entonces f es uno a uno en una vecindad de x_1 . La sustitución $y = f(x)$ en el funcional $\int_{-\infty}^{\infty} \delta[f(x)]\varphi(x)dx$ nos da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{\varphi[x(y)]}{f'(x)} dy = \frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Para el caso $f'(x_1) < 0$ los límites de integración se invierten y el lado derecho de la relación anterior es $-\frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)}$. Combinando estos dos casos, tenemos:

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_1)}{|f'(x_1)|}.$$

Cuando la función $f(x)$ tiene ceros simples en x_1, x_2, \dots, x_n , tenemos la relación (3.23). Si $f(x)$ tiene ceros de orden mayor, no se le da significado alguno a $\delta[f(x)]$.

La siguiente aproximación alternativa es instructiva y útil para resolver problemas específicos. Para fijar ideas, supongamos nuevamente que $f(x)$ tiene un cero simple en x_1 y así $f(x_1) = 0$ pero $f'(x_1) \neq 0$, lo que asumimos nuevamente positivo. Más aún, consideremos primero un intervalo finito $\alpha < x_1 < \beta$. Así, $f(x)$ crece monótonamente de $f(\alpha)$ a $f(\beta)$ cuando x corre de α a β , entonces

$$H[f(x)] = H(x - x_1) \quad (3.24)$$

donde H es la función de Heaviside. Derivando (3.24) obtenemos:

$$\frac{d}{dx} H[f(x)] = \delta(x - x_1)$$

o

$$\delta[f(x)] = [f'(x_1)]^{-1} \delta(x - x_1). \quad (3.25)$$

Para una función monótonamente decreciente f

$$H[f(x)] = H(x_1 - x) \quad (3.26)$$

cuya diferencial es

$$\delta[f(x)] = -[f'(x_1)]^{-1} \delta(x - x_1). \quad (3.27)$$

Combinando (3.27) con (3.25) nuevamente tenemos (3.23).

La extensión a más ceros simples e intervalos infinitos ahora es natural.

Claramente, si existen n ceros de $f(x)$, entonces

$$\delta[f(x)] = \sum_{m=1}^n \frac{\delta(x - x_m)}{|f'(x_m)|},$$

como se quería.

Podemos dar un paso más y evaluar $\delta'[f(x)]$, donde $f(x)$ es una función 2 veces continuamente diferenciable que crece monótonamente de $f(\alpha)$ a $f(\beta)$. Si $f(\xi) = 0$, donde $\alpha < \xi < \beta$, entonces

$$\delta'[f(x)] = \frac{1}{|f'(\xi)|^2} \left\{ \delta'(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \delta(x - \xi) \right\}. \quad (3.28)$$

De hecho, si $\varphi(x)$ es una función de prueba y si hacemos el cambio $t = f(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), \delta'[f(x)] \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta'[f(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(f^{-1}(t)) \delta'(t) [f^{-1}(t)]' dt \\ &= - \frac{d}{dt} \left[\varphi(f^{-1}(t)) [f^{-1}(t)]' \right] \Big|_{t=\xi} = - \frac{d}{dt} \left[\varphi(x) \frac{dx}{dt} \right] \Big|_{x=\xi} \\ &= - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi(x)}{f'(x)} \frac{1}{f'(x)} \right) \right] \Big|_{x=\xi} = - \frac{1}{f'(\xi)} \left[\frac{\varphi'(\xi) f'(\xi) - \varphi(\xi) f''(\xi)}{|f'(\xi)|^2} \right] \\ &= - \frac{1}{f'(\xi)} \left[\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{\varphi(\xi) f''(\xi)}{|f'(\xi)|^2} \right] \\ &= \left\langle \varphi(x), \frac{1}{|f'(\xi)|^2} \left\{ \delta'(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \delta(x - \xi) \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

lo que prueba (3.28).

3.2.3 Convergencia de distribuciones

Hemos discutido algunas de las propiedades más importantes de funciones que hemos generalizado a distribuciones; hasta el momento sólo hemos hablado de la convergencia de las funciones de prueba en el sentido clásico. En esta sección desarrollaremos el concepto de convergencia de distribuciones.

Como comentábamos al inicio de la sección 2.5 (página 21), el espacio \mathcal{D}' tiene como dual al espacio \mathcal{D} y le asociamos la siguiente definición de convergencia.

Definición 3.7. Una sucesión de distribuciones $F_m \in \mathcal{D}'$, $m = 1, 2, \dots$, se dice que converge a una distribución $F \in \mathcal{D}'$ si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle F_m, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \quad (3.29)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$.

Cuando la sucesión de distribuciones consiste de funciones localmente integrables $f_m(x)$, existe la siguiente relación entre convergencia clásica y convergencia distribucional también conocida como convergencia débil.

Proposición 3.3. Sean $f_m \in \mathcal{L}_{loc}^1$. Si $f_m(x) \xrightarrow{u} f(x)$ sobre cada intervalo finito, entonces

$$\langle f_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle .$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, \varphi \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \\ &= \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

para $\varphi \in \mathcal{D}$, ya que $f_m(x) \xrightarrow{u} f(x)$. ■

Teorema 3.4. Si la sucesión F_m de distribuciones converge a F , entonces la sucesión $D^\alpha F_m$ converge a $D^\alpha F$.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, para $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle D^\alpha F_m, \varphi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle F_m, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha F, \varphi \rangle ,$$

ya que $F_m \rightarrow F$ en el sentido débil. ■

Definido el concepto de límite de una sucesión de distribuciones tenemos el siguiente concepto para la convergencia de series de distribuciones:

Definición 3.8. Una serie de distribuciones $\sum_{m=1}^{\infty} S_m$ converge a T si la sucesión de sumas parciales $\{T_m\} = \left\{ \sum_{m=1}^k S_m \right\}$ converge a T .

Escribimos $\sum_{m=1}^{\infty} S_m = T$.

Como consecuencia del Teorema 3.4 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2. Toda sucesión convergente o serie de distribuciones puede ser diferenciada término por término las veces que sea necesario.

Hemos visto en la Proposición 3.3 que si una sucesión de funciones localmente integrables converge uniformemente a una función f , entonces también converge a f en el sentido de distribuciones.

Ahora, extenderemos la definición de convergencia débil a una sucesión de distribuciones $F_\lambda(x)$ que depende de un parámetro real λ . Esto es,

$$F_\lambda \rightarrow F \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0 \quad \text{si} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle F_\lambda, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.30)$$

El teorema de diferenciación en este caso nos da:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle D^\lambda F_\lambda, \varphi \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (-1)^{|\alpha|} \langle F_\lambda, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha F, \varphi \rangle.$$

Un resultado importante es la completez de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 3.5. *Sea f_n una sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\langle f_n, \varphi \rangle$ converge para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$. En otras palabras, \mathcal{D}' es completo con respecto a la convergencia débil.*

DEMOSTRACIÓN: Definamos

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle \quad (3.31)$$

Claramente, f es un mapeo lineal de $\mathcal{D}(\Omega)$ a \mathbb{R} .

Para verificar que $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tenemos que establecer su continuidad, es decir, debemos mostrar que si $\varphi_n \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$.

Supongamos lo contrario.

Entonces, después de elegir una subsucesión que nuevamente denotaremos como φ_n , supondremos que $\varphi_n \rightarrow 0$ pero $|\langle f, \varphi_n \rangle| \geq c > 0$.

Ahora, recordemos que convergencia a 0 en $\mathcal{D}(\Omega)$ significa que los soportes de todas las φ_n están en un compacto fijo de Ω y que todas las derivadas de las φ_n convergen a cero uniformemente.

Después de elegir nuevamente una subsucesión, asumiremos que

$$|D^\alpha \varphi_n(x)| \leq 4^{-n} \text{ para } |\alpha| \leq n.$$

Sea ahora $\psi_n = 2^n \varphi_n$. Entonces las ψ_n convergen a 0 en $\mathcal{D}(\Omega)$, pero $|\langle f, \varphi_n \rangle| \rightarrow \infty$.

Ahora, recursivamente construiremos una subsucesión $\{f'_n\}$ de $\{f_n\}$ y una subsucesión $\{\psi'_n\}$ de $\{\psi_n\}$.

Primero elijamos ψ'_1 tal que $|\langle f, \psi'_1 \rangle| > 1$.

Como $\langle f_n, \psi'_1 \rangle \rightarrow \langle f, \psi'_1 \rangle$, debemos elegir f'_1 tal que $|\langle f'_1, \psi'_1 \rangle| > 1$. Ahora, elijamos f'_j y ψ'_j para $j < n$. Entonces, elegimos ψ'_n de la sucesión $\{\psi_n\}$ tal que

$$|\langle f'_j, \psi'_n \rangle| < \frac{1}{2^{n-j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.32)$$

$$|\langle f, \psi'_n \rangle| > \sum_{j=1}^{n-1} |\langle f, \psi'_j \rangle| + n \quad (3.33)$$

Esto es posible por que, por un lado $\psi_n \rightarrow 0$, y por otro lado $|\langle f, \psi_n \rangle| \rightarrow \infty$. Como, $\langle f_n, \psi \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$, podemos elegir f'_n tal que

$$|\langle f'_n, \psi'_n \rangle| > \sum_{j=1}^{n-1} |\langle f'_n, \psi'_j \rangle| + n. \quad (3.34)$$

Ahora, elegimos

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi'_n. \quad (3.35)$$

Se sigue de la construcción de las ψ'_n que las series de la derecha convergen en $\mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\langle f'_n, \psi \rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \langle f'_n, \psi'_j \rangle + \langle f'_n, \psi'_n \rangle + \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle f'_n, \psi'_j \rangle. \quad (3.36)$$

De (3.32) encontramos que

$$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle f'_n, \psi'_j \rangle \right| < \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{n-j} = 1 \quad (3.37)$$

y esto junto con (3.36) y (3.34) implica que $|\langle f'_n, \psi \rangle| > n - 1$.

Por lo tanto, el límite de

$$\langle f'_n, \psi \rangle$$

cuando $n \rightarrow \infty$ no existe, lo cual es una contradicción. ■

Capítulo

4

Propiedades Adicionales de Distribuciones.

En este capítulo desarrollaremos tres propiedades muy importantes de las distribuciones que son: la transformada de Fourier, el producto directo de distribuciones y la convolución. Estas propiedades son de gran utilidad para resolver algunos problemas básicos de ecuaciones diferenciales en el sentido distribucional, llevaremos a la práctica estos resultados para analizar cierto tipo de problemas al final del capítulo.

4.1 Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier

En esta sección, nuestro objetivo será extender la definición de transformada de Fourier a las distribuciones. Primero recordemos que la definición de transformada de Fourier es,

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx. \quad (4.1)$$

Claramente, si $g(x) = f(x)$ casi en todas partes entonces $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. La función $\widehat{f}(\xi)$ definida en (4.1) es una función continua, luego es localmente integrable. Podemos entonces considerarla como una distribución y, si $\varphi(x)$ es una función de prueba, se tiene:

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f} \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx d\xi.$$

Pero, dado que $\varphi(x)e^{i\xi x}f(x)$ es integrable en el espacio producto de las x - ξ , por el teorema de Fubini (ver [9]) se puede intercambiar el orden de integración para obtener:

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Esta relación sugiere que la extensión de la transformada de Fourier a las distribuciones

se puede definir mediante la relación

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (4.2)$$

Para dar sentido a esta fórmula habrá que ver las propiedades que tienen las funciones que son transformadas de Fourier de una función $\varphi(x)$ del espacio \mathcal{D} .

La existencia y la derivabilidad de la transformada de Fourier dependen de que las funciones $e^{i\xi x}\varphi(x)$ y $e^{i\xi x}x\varphi(x)$ sean integrables. Si ξ es real (único caso considerado hasta ahora), tenemos que $|e^{i\xi x}| = 1$, por lo que este factor no influye en la integrabilidad, pero si $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, con $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$, entonces $|e^{i\xi x}| = e^{-\xi_2 x}$ y este factor altera las propiedades de integrabilidad (por ser el intervalo de integración infinito). Pero si $\varphi \in \mathcal{D}$ la integración se hace sobre un intervalo finito y, por lo tanto, las funciones $e^{i\xi x}\varphi(x)$ y $e^{i\xi x}x\varphi(x)$ son integrables para $\xi \in \mathbb{C}$. La fórmula (4.1) define en este caso una función $\widehat{f}(\xi)$ definida y derivable en \mathbb{C} , es decir, una función entera; se tiene entonces que la transformada de Fourier de una función $\varphi(x)$ de soporte acotado es una función $\widehat{f}(\xi)$ que se puede prolongar al campo complejo y dicha prolongación nos da una función entera.

La función entera $\widehat{f}(\xi)$ no puede ser nula en un segmento del eje OX sin ser idénticamente nula. Más aún tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}$ si φ no es idénticamente cero. De hecho, $\widehat{\varphi}$ no puede anularse en un abierto no vacío a menos que $\varphi = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\widehat{\varphi}$ se anula en una vecindad de un punto $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\xi_0 = 0$. (En otro caso, si $\xi_0 \neq 0$ sustituimos φ por la función $e^{i\xi_0 x}\varphi(x)$ y así $\mathcal{F}(e^{i\xi_0 x}\varphi) = \tau_{\xi_0}\widehat{\varphi}$ la cual se anula en una vecindad de 0). Así,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi x)^k}{k!} \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} (\xi x)^k \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} i^k x^\alpha \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \mathcal{F}((ix)^\alpha \varphi(x)) \Big|_{\xi=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \widehat{\varphi}(0) = \sum_{\alpha} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \widehat{\varphi}(0) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula multinomial,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Entonces $\widehat{\varphi(\xi)} = 0$ para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\varphi \equiv 0$. ■

Por lo tanto, si para mantener la definición clásica de la transformada de Fourier de una función, queremos definir la transformada de una distribución por la fórmula (4.2), tenemos que sacar de las funciones de prueba la restricción de ser de soporte acotado.

A primera vista podría pensarse en considerar las distribuciones de soporte compacto, pero acabamos de ver que si nos limitamos a ellas sus transformadas de Fourier no son ya de soporte compacto y no se podrá reiterar la transformada de Fourier.

La posibilidad de la extensión fue conseguida por Schwartz, al evitar estas dificultades enriqueciendo la clase de funciones de prueba creando un nuevo espacio de prueba, el de las funciones indefinidamente derivables de crecimiento rápido en el infinito, en el que se reemplaza la condición de ser nulas en un entorno del infinito, por la condición de que las funciones en el infinito sean infinitésimas de un orden mayor que cualquier infinito potencial, en otras palabras las funciones en este espacio son tales que ella y sus derivadas se anulan en infinito más rápido que el recíproco de cualquier potencia de $|x|$.

4.1.1 Funciones de Prueba de Rápido Decaimiento

Definición 4.1. *El espacio S de funciones de prueba de rápido decaimiento contiene a las funciones a valores complejos $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ que tienen las siguientes propiedades:*

1. $\varphi(x)$ es infinitamente diferenciable; es decir, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\varphi(x)$, así como sus derivadas de todos los ordenes, se anulan en infinito más rápido que el recíproco de cualquier polinomio.

Este espacio de funciones también se conoce como espacio de Schwartz y a sus elementos se les llama funciones de Schwartz.

La propiedad 2 puede expresarse por la desigualdad

$$|x^p D^\alpha \varphi(x)| < C_{p\alpha}, \quad (4.3)$$

donde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ son n -uplas de enteros no-negativos y $C_{p\alpha}$ es una constante que depende de p , α y $\varphi(x)$.

Es evidente que $\mathcal{D} \subset S$, porque todas las funciones de prueba en \mathcal{D} se anulan fuera de un intervalo finito, mientras que todas las funciones de prueba en S decrecen rápidamente en infinito.

Convergencia en S

Una sucesión de funciones de prueba en S , $\{\varphi_m(x)\}$ se dice que converge a $\varphi_0(x)$ si y sólo si las funciones $\varphi_m(x)$ y todas sus derivadas convergen a φ_0 y las correspondientes derivadas

de φ_0 convergen uniformemente con respecto a x en toda región acotada R de \mathbb{R}^n . Esto significa que los números $C_{p\alpha}$ que ocurren en (4.3) pueden elegirse independientemente de x de tal forma que

$$|x^p (D^\alpha \varphi_m - D^\alpha \varphi_0)| < C_{p\alpha} \quad \forall m.$$

Una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es de rápido decaimiento si

$$\|\varphi\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^N D^\alpha \varphi| < \infty \quad \forall N, \forall \alpha. \quad (4.4)$$

Una sucesión $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in S$ se dice que converge a cero en S si $\|\varphi_j\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$.

La razón de esta terminología es que, si $\varphi \in S$, entonces cada $D^\alpha \varphi$ tiende a cero más rápido que $|x|^{-N}$ para toda $N \geq 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Las seminormas en (4.4) generan una topología; más aún tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2. *S es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en S . Entonces

$$\|\varphi_k - \varphi_j\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k, j \rightarrow \infty \quad \forall N, \forall \alpha;$$

es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, j \geq M$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^N |\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Debemos hallar una función $\psi_0 \in S$ tal que $\|\varphi_k - \psi_0\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty \forall N, \forall \alpha$. De (4.5) se tiene que para toda $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon \quad \forall k, j \geq \tilde{N}, \quad \forall \alpha$$

Como esto significa convergencia uniforme de $\partial^\alpha \varphi_k$ en \mathbb{R}^n , para cada α existe ψ_α continua tal que

$$\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \psi_\alpha \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}^n.$$

Veamos que $\psi_\alpha = \partial^\alpha \psi_0$ y que $\|\varphi_k - \psi_0\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty, \forall N, \forall \alpha$.

Notemos que para $\alpha = 0$ $\varphi_k \rightarrow \psi_0$ uniformemente.

Sea $\alpha = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con un 1 en el j -ésimo lugar; entonces

$$\varphi_k(x + te_j) - \varphi_k(x) = \int_0^t \partial_j \varphi_k(x + se_j) ds.$$

Tomamos límite cuando $k \rightarrow \infty$ (y dividiendo por t):

$$\frac{1}{t} [\psi_0(x + te_j) - \psi_0(x)] = \frac{1}{t} \int_0^t \psi_{e_j}(x + se_j) ds.$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\partial_j \psi_0(x) = \psi_{e_j}(x).$$

Inductivamente, tenemos que $\partial^\alpha \psi_0 = \psi_\alpha \forall \alpha$.

Basta ver que $\|\psi_k - \psi_0\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty \forall N, \forall \alpha$. Para $k, j \geq M$ se tiene

$$|x|^N |\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mantenemos fija $k \geq M$ y tomamos límite cuando $j \rightarrow \infty$:

$$|x|^N |\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \psi_0(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Así, para toda $k \geq M$ tenemos $\|\varphi_k - \psi_0\|_{(N,\alpha)} \leq \varepsilon$. Por lo tanto, S es completo. ■

Un resultado no menos importante que el anterior es el siguiente:

Proposición 4.3. i.- \mathcal{D} es denso en S . Más precisamente: dada $\varphi \in S$ y dada $\psi \in \mathcal{D}$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases},$$

entonces, las funciones

$$\varphi_m(x) = \psi\left(\frac{x}{m}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

son funciones de prueba en \mathcal{D} y la sucesión $\{\varphi_m(x)\}$ converge a $\varphi(x)$ en el sentido de S , y verifica que

$$\varphi_m(x) \rightarrow \varphi(x), \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty \text{ en } S.$$

ii.- $S \subset \mathcal{L}^\infty$, y la inyección es continua.

La demostración de este resultado se basa en las normas definidas en (4.5) y la convergencia definida en S .

Funciones de Lento Crecimiento

Una función $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n es de *lento crecimiento* si $f(x)$, junto con todas sus derivadas, crecen en infinito más lento que algún polinomio. Es decir, existen constantes, C , m y A tal que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C |x|^m, \quad |x| > A. \quad (4.6)$$

4.1.2 Distribuciones Temperadas

Un funcional lineal y continuo T sobre S se llama *distribución de lento crecimiento* o *distribución temperada*, si a cada $\varphi \in S$, se le asigna un número complejo $\langle T, \varphi \rangle$ con las propiedades:

1. $\langle T, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \rangle = c_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$,
2. $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_m \rangle = 0$, para toda sucesión nula $\{\varphi_m(x)\} \in S$.

Denotaremos como S' al conjunto de distribuciones temperadas, o bien al dual de S .

Se sigue de la definición de convergencia en \mathcal{D} y en S que una sucesión $\{\varphi_m(x)\}$ que converge a $\varphi(x)$ en el sentido de \mathcal{D} también converge a $\varphi(x)$ en el sentido de S , pues al estar todas contenidas en un compacto fijo la convergencia uniforme de las φ_m^α hacia φ^α implica la convergencia uniforme de las $x^N \varphi_m^\alpha$ hacia $x^N \varphi^\alpha$, puesto que la potencia está acotada en el compacto fijo.

Así, todo funcional lineal y continuo en S también lo es en \mathcal{D} y, por lo tanto $S' \subset \mathcal{D}'$.

En efecto, si $T \in S'$, como $\mathcal{D} \subset S$, $\langle T, \varphi \rangle$ esta definida para toda $\varphi \in \mathcal{D}$. Además, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$ en \mathcal{D} , se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$ en S , luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$. Por otra parte, si T es temperada, el conocimiento que se tiene de $\langle T, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}$ nos permite, por continuidad, definir $\langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S$.

De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4. *Dada $F \in S'$ entonces $F|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'$.*

Para mostrar la validez de este resultado basta probar que si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en \mathcal{D} entonces $\langle F, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$.

Así, si $S' = \{F \in \mathcal{D}' : F \text{ se extiende continuamente a } S\}$, entonces $S' \subset \mathcal{D}'$.

Afortunadamente, muchas de las distribuciones en \mathcal{D} ya discutidas son distribuciones en S . Sólo aquellas distribuciones en \mathcal{D} que crecen muy rápido al infinito no pueden ser extendidas a S .

Diremos que una función localmente integrable es temperada si como distribución lo es. De hecho, así como las funciones en \mathcal{L}_{loc}^1 forman un subconjunto especial de \mathcal{D}' , las funciones de lento crecimiento juegan ese papel en S' .

El resultado correspondiente es:

Teorema 4.1. *Toda función $f(x)$ de lento crecimiento genera una distribución a través de la fórmula:*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S. \quad (4.7)$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente, es un funcional lineal. Para probar la continuidad, debemos mostrar que si $\{\varphi_m\}$ es una sucesión nula en S , entonces $\langle f, \varphi_m \rangle \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Ahora, para cada m ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{(1+|x|^2)^l} [(1+|x|^2)^l \varphi_m(x)] dx,$$

donde $l \geq 0$ es un entero.

Cuando l es suficientemente grande, $\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^l}$ es absolutamente integrable, y tenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_m(x) dx \right| \leq \sup |(1+|x|^2)^l \varphi_m(x)| \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{(1+|x|^2)^l} \right| dx.$$

El lado derecho se aproxima a cero cuando $\varphi_m \rightarrow 0$ para toda φ_m nula, lo cual prueba la continuidad. ■

Ahora presentamos algunos ejemplos de distribuciones en S' .

Ejemplo 4.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y definamos

$$\mathcal{E}'(U) = \{F \in \mathcal{D}'(U) \mid \text{sop } F \text{ es compacto}\}$$

Entonces $\mathcal{E}' \subset S'$.

Sean $F \in \mathcal{E}'$ y $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset S$ tal que $\varphi_n \rightarrow 0$ en S , es decir,

$$\|\varphi_n\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^N |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad \forall N, \forall \alpha.$$

Entonces, φ_n converge en C^∞ a 0. Así,

$$\langle F, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle F, 0 \rangle \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $F \in S'$. ◆

Ejemplo 4.2. $\mathcal{L}^p \subset S'$ para $1 \leq p \leq \infty$. Sean $f \in \mathcal{L}^p$ y $(\varphi_k)_{k=1}^\infty \subset S$ tal que $\varphi_k \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$ en S , entonces $\|\varphi_k\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para toda N y para toda α .

Luego,

$$|\langle f, \varphi_k \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\varphi_k(x)| dx \leq \|f\|_p \|\varphi_k\|_q,$$

donde p y q son exponentes conjugados.

Si $q = \infty$, es decir $p = 1$ ya terminamos pues $\|\varphi_k\|_q = \|\varphi_k\|_\infty = \|\varphi_k\|_{(0,0)}$.

Supongamos que $1 < p \leq \infty$, así $1 \leq q < \infty$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{Nq} |\varphi_k(x)|^q \frac{dx}{|x|^{Nq}} \\ &\leq \|\varphi_k\|_{(N,0)}^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^{Nq}} \\ &< C_{Nq} \|\varphi_k\|_{(N,0)}. \end{aligned}$$

De aquí que $|\langle f, \varphi_k \rangle| \leq \|f\|_p \|\varphi_k\|_{(N,0)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, $f \in S'$. ◆

Ejemplo 4.3. Sea $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. $f \in C^\infty \subset \mathcal{L}_{loc}^1$, así $f \in \mathcal{D}'$ pero $f \notin S'$.

Construiremos una sucesión $(\psi_j)_{j=1}^\infty \subset S$ tal que $\psi_j \rightarrow 0$ pero $\langle f, \psi_j \rangle$ no converja a cero.

Sea $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \psi = 1$.

Sea $\psi_j(x) = e^{-x} \psi(x-j)$, $\psi_j \in S$ por que $\psi_j \in C^\infty$ y

$$\begin{aligned} |x|^N \partial^\alpha(\psi_j) &= |x|^N \partial^\alpha(e^{-x} \psi(x-j)) \leq |x|^N \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} |\partial^\beta e^{-x}| |\partial^{\alpha-\beta} \psi(x-j)| \\ &= |x|^N \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} e^{-x} |\partial^{\alpha-\beta} \psi(x-j)| \end{aligned}$$

$\text{sop } \psi \subset (-B, B)$, para algún $B > 0$.

Si $j > 2B$, $x-j \leq B-j < -B$ entonces $\psi(x-j) = 0$ para toda $x \in \text{sop } \psi$.

Por lo tanto, $\|\psi_j\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ para toda N y para toda α .

Así, $\psi_j \rightarrow 0$ en S . Pero

$$\langle f, \psi_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x e^{-x} \psi(x-j) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-j) dx = 1,$$

es decir, $\langle f, \psi_j \rangle$ no converge a 0.

Por lo tanto, $f \notin S'$. ◆

Ejemplo 4.4. Sea ahora $f(x) = e^x \cos e^x$, $f \in S'$.

$f(x) = g'(x)$ donde $g(x) = \text{sen } e^x$.

Si $(\varphi_k)_{k=1}^\infty \subset S$ tal que $\varphi_k \rightarrow 0$ en S , es decir, $\|\varphi_k\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_k \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g'(x) \varphi_k(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi_k'(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\text{sen } e^x| |\varphi_k'(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k'(x)| (1+|x|)^2 \frac{dx}{(1+|x|)^2} \\ &\leq \|\varphi_k\|_{(2,1)} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+|x|)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Así, S' puede contener ciertas funciones en \mathcal{L}_{loc}^1 que no son de lento crecimiento.

Como en el caso de \mathcal{D}' , definimos convergencia en S' como convergencia débil. La definición exacta es:

Definición 4.2. La sucesión $\{F_m\}$ de distribuciones en S' converge a $F \in S'$ si para toda $\varphi \in S$, se tiene que $\langle F_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ cuando $m \rightarrow \infty$.

De esta definición y ya que $S' \subset \mathcal{D}'$, se sigue que una sucesión de distribuciones F_m que converge en S' a una distribución $F \in S'$, también converge en \mathcal{D}' a una distribución F .

Resumamos los resultados anteriores en el siguiente teorema:

Teorema 4.2. $\mathcal{D} \subset S$ y $S' \subset \mathcal{D}'$. Más aún, convergencia en \mathcal{D} implica convergencia en S , y convergencia débil en S' implica convergencia débil en \mathcal{D}' .

Las operaciones que fueron definidas para distribuciones en \mathcal{D}' son válidas en S' porque S' es un subespacio de \mathcal{D}' .

Finalmente, tenemos las herramientas necesarias para definir la transformada de Fourier.

4.1.3 Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de Funciones de Prueba

Consideremos primero la transformada de Fourier de las funciones de prueba

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)] = \int e^{i\xi x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S \quad (4.8)$$

donde $\xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$ y ξ_1, \dots, ξ_n son números reales.

La transformada inversa es

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\xi)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i\xi x} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (4.9)$$

Teorema 4.3. Si $\varphi \in S$, entonces $\widehat{\varphi}(\xi)$ existe y también esta en S .

DEMOSTRACIÓN: Por el rápido decaimiento de $\varphi(x)$ en $|x| = \infty$, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{i\xi x} \varphi(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

converge absolutamente. Esta integral es el resultado de diferenciar k veces, bajo el signo de integral, la expresión para $\widehat{\varphi}$. Por lo tanto, representa la k -ésima derivada de $\widehat{\varphi}$,

$$\frac{d^k \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{i\xi x} \varphi(x) dx = [(ix)^k \varphi]^\wedge(\xi).$$

De esta relación se sigue que

$$\left| \frac{d^k \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^k} \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x^k \varphi| dx,$$

la cantidad del lado izquierdo es acotada para toda ξ . También,

$$(i\xi)^p \frac{d^k \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k \varphi(x) \frac{d^p}{dx^p} e^{i\xi x} dx = (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^p}{dx^p} (ix)^k \varphi(x) \right] e^{i\xi x} dx,$$

donde hicimos uso de integración por partes. Como el término entre corchetes está en S , la función $\left[\frac{d^p}{dx^p} \varphi(x) \right] e^{i\xi x}$ es absolutamente integrable, y por lo tanto $\left| \xi^p \frac{d^k \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^k} \right|$ es acotado para toda ξ . Los multi-índices k y p son arbitrarios. Así, $\widehat{\varphi}(\xi) \in S$.

Así, los miembros de S son mapeados por la transformada de Fourier en miembros de S . La operación transformada inversa \mathcal{F}^{-1} tiene propiedades análogas. Más aún, por la fórmula de inversión, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} \widehat{\varphi}(z) dz = 2\pi \varphi(-x)$$

o

$$[\widehat{\varphi}]^\wedge = 2\pi \varphi(-x). \quad (4.10)$$

Esto muestra que toda función en S es una transformada de Fourier de alguna función en S . También, si $\widehat{\varphi} = 0$, entonces $\varphi = 0$; es decir, la transformada de Fourier es única. Así, la transformada de Fourier es un mapeo lineal de S en S .

Este mapeo también es continuo. De hecho, sea $\varphi_m \rightarrow \varphi$ cuando $m \rightarrow \infty$ en S . Entonces, del análisis previo encontramos que

$$\begin{aligned} \left| \xi^p \frac{d^k}{d\xi^k} [\varphi_m - \varphi]^\wedge(\xi) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^k}{dx^k} [x^p (\varphi_m - \varphi)] \right| dx \\ &\leq \sup \left| \frac{d^k}{dx^k} [x^p (\varphi_m - \varphi)] \right| (1+x^2)^l \int \frac{dx}{(1+x^2)^l}. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se sigue que

$$\xi^p \frac{d^k}{dx^k} \widehat{\varphi}_m \rightarrow \xi^p \frac{d^k}{dx^k} \widehat{\varphi},$$

con lo que queda probado el teorema. ■

El resultado análogo es válido para la transformada de Fourier inversa. Podemos resumir estos resultados en el siguiente

Teorema 4.4. *La transformada de Fourier y su inversa son mapeos lineales, continuos y 1-1 de S en S .*

Para obtener la transformada de Fourier de una distribución temperada, necesitamos algunas fórmulas específicas para la transformada de Fourier de φ , las cuales discutiremos enseguida.

Usando integración por partes, tenemos que

$$\left[\frac{d^k \varphi}{dx^k} \right]^\wedge (\xi) = (-i\xi)^k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \widehat{\varphi}(\xi), \quad (4.11)$$

o

$$\left[\left(\frac{id}{dx} \right)^k \varphi \right]^\wedge (\xi) = \xi^k \widehat{\varphi}(\xi). \quad (4.12)$$

De la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k \varphi(x) e^{i\xi x} dx = \frac{d^k}{d\xi^k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx,$$

tenemos la k -ésima derivada de la transformada de Fourier,

$$[(ix)^k \varphi]^\wedge (\xi) = \left(\frac{d}{d\xi} \right)^k \widehat{\varphi}(\xi), \quad (4.13)$$

o

$$[x^k \varphi]^\wedge (\xi) = \left(-\frac{id}{d\xi} \right)^k \widehat{\varphi}(\xi). \quad (4.14)$$

Una traslación de $\varphi(x)$ a $\tau_a \varphi(x)$ en S nos lleva a un factor de multiplicación $e^{ia\xi}$, el cual se puede ver rápidamente sustituyendo $x - a$ por x en (4.8).

Claramente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_a \varphi(x) e^{i\xi x} dx = e^{ia\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{i\xi y} dy,$$

o

$$[\varphi(x - a)]^\wedge (\xi) = e^{ia\xi} \widehat{\varphi}(\xi). \quad (4.15)$$

Por otro lado, la traslación de la transformada de Fourier es

$$[\varphi]^\wedge (\xi + a) = [e^{ia\xi} \varphi]^\wedge (\xi), \quad (4.16)$$

lo cual se verifica al reemplazar ξ por $\xi + a$ en (4.8).

En el caso n -dimensional es análogo; las fórmulas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [\widehat{\varphi}](\xi) &= (2\pi)^n \varphi(-\xi), \\
 [D^\alpha \varphi](\xi) &= (-i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \\
 [(iD)^\alpha \varphi](\xi) &= \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \\
 [(ix)^\alpha \varphi](\xi) &= D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \\
 [x^\alpha \varphi](\xi) &= (-iD)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \\
 [\widehat{\varphi}(x-a)](\xi) &= e^{ia\xi} \widehat{\varphi}(\xi), \\
 [\varphi](\xi+a) &= [e^{iax} \varphi](\xi).
 \end{aligned}$$

Con estas propiedades de la transformada de Fourier podemos obtener varias fórmulas de transformadas de Fourier, entre ellas tenemos la siguiente que será utilizada más adelante:

Ejemplo 4.5.

$$\left[e^{-ax^2} \right]^\wedge = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

En otras palabras, debemos mostrar que

$$\left\langle \left[e^{-ax^2} \right]^\wedge, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}, \varphi(x) \right\rangle.$$

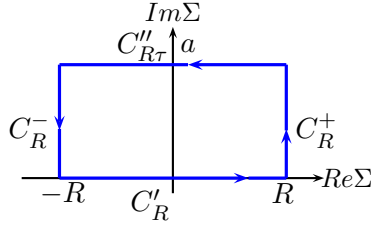
Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left[e^{-ax^2} \right]^\wedge, \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle e^{-ax^2}, \widehat{\varphi}(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \widehat{\varphi}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx d\xi.
 \end{aligned}$$

Analicemos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx$. Haciendo el cambio $\sigma = \sqrt{a}x$ se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2 + i\frac{\sigma}{\sqrt{a}}\xi \pm \frac{\xi^2}{4a}} d\sigma \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma^2 + 2\sigma i\frac{\xi}{2\sqrt{a}} + (i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2)} d\sigma \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2} d\sigma
 \end{aligned}$$

Ahora, sea $\Sigma = \sigma + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}}$ y analicemos qué sucede con $\int_{Im(\Sigma)=a} e^{-\Sigma^2} d\Sigma$. Sea C el contorno representado por las flechas en la siguiente figura: entonces $\int_C e^{-\Sigma^2} d\Sigma = 0$, pues

Figura 4.1: Contorno C

$$\int_{C_R^\pm} e^{-\Sigma^2} d\Sigma = \int e^{-(R+i\tau)^2} d\tau = \int e^{-R^2} e^{\tau^2 - 2iR\tau} d\tau \rightarrow 0,$$

cuando $R \rightarrow \infty$. Entonces,

$$0 = \lim \int_{C_R} e^{-\Sigma^2} d\Sigma = \int e^{-\sigma^2} d\sigma - \int_{\text{Im}(\Sigma)=a} e^{-\xi^2} d\xi,$$

así

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \int_{\text{Im}(\Sigma)=a} e^{-\xi^2} d\xi.$$

De aquí que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Así tenemos el resultado deseado, es decir:

$$\left\langle \left[e^{-ax^2} \right]^\wedge, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}, \varphi(x) \right\rangle.$$

Por lo tanto, $\left[e^{-ax^2} \right]^\wedge = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ ♦

Transformada de Fourier de Distribuciones Temperadas

Anteriormente, hicimos notar las dificultades que se presentan al tratar de definir la transformada de Fourier de una distribución en \mathcal{D} . Cuando utilizamos las funciones de prueba de S y distribuciones temperadas estas dificultades desaparecen.

Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 4.3. Si F es una distribución temperada, su transformada de Fourier es:

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S \quad (4.17)$$

La funcional definida en el lado derecho de (4.17) está bien definida porque $\widehat{\varphi} \in S$, lo cual ya fue mostrado en el Teorema 4.3. Claramente es lineal. Para probar la continuidad, observemos del Teorema 4.3 que, si $\varphi_m \rightarrow 0$ entonces $\widehat{\varphi}_m \rightarrow 0$ también.

Así, si $\varphi_m \rightarrow 0$ para toda $\varphi_m \in S$ entonces $\langle T, \widehat{\varphi}_m \rangle \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.

De (4.10) y la Definición 4.3 tenemos que $\widehat{\widehat{F}} = 2\pi F(-x)$. Por lo tanto, toda distribución en S' es una transformada de Fourier de algún miembro de S' . Más aún, esta relación implica

$$\langle \widehat{F}, \widehat{\varphi}(x) \rangle = \langle F(x), \widehat{\widehat{\varphi}}(x) \rangle = 2\pi \langle F(x), \varphi(-x) \rangle.$$

Un resultado que debemos destacar es el siguiente:

Teorema 4.5. *Si $F \in S'$ entonces $\mathcal{F}(F) \in S'$. En otras palabras, $\mathcal{F}(F)$ es una distribución temperada cada vez que F lo sea.*

DEMOSTRACIÓN:

La \mathcal{F} esta bien definida para cada $\varphi \in S$, por el teorema 4.3.

Como la transformada de Fourier y $F \in S$ son operadores lineales entonces $\mathcal{F}(F)$ es lineal.

Por último, $\mathcal{F}(F)$ es continua, ya que si $\varphi_i \rightarrow 0$ entonces $\widehat{\varphi}_i \rightarrow 0$ en S ; de aquí que $\langle F, \widehat{\varphi} \rangle \rightarrow 0$, ya que F es continua. ■

El mismo resultado es válido para la transformada de Fourier inversa, definida como:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(F), \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle. \quad (4.18)$$

Sea $\{F_m(x)\}$ una sucesión de distribuciones en S' que converge débilmente en S' a una distribución F . Entonces, la sucesión $\{\widehat{F}_m(\xi)\}$ también converge en S' , y su límite distribucional es $\widehat{F}(\xi)$. Claramente,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \widehat{F}_m(x), \varphi(x) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle F_m(\xi), \widehat{\varphi}(\xi) \rangle = \langle F(\xi), \widehat{\varphi}(\xi) \rangle = \langle \widehat{F}(x), \varphi(x) \rangle.$$

con lo que queda probada nuestra afirmación.

Es importante que la definición (4.17) sea consistente con la definición clásica si la última es aplicable, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *La definición (4.17) es consistente con la definición clásica para la transformada de Fourier de una función ordinaria $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \varphi \rangle &= \langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

donde $F(x)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. ■

De (4.18) se siguen las ecuaciones (4.11)-(4.16) para distribuciones temperadas. Las fórmulas correspondientes son:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^\alpha F}{dx^\alpha} \right]^\wedge(\xi) &= (-i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi), \\ \left[\left(\frac{id}{dx} \right)^\alpha F \right]^\wedge(\xi) &= \xi^\alpha \widehat{F}(\xi), \\ [(ix)^\alpha F]^\wedge(\xi) &= \left(\frac{d}{d\xi} \right)^\alpha \widehat{F}(\xi), \\ [x^\alpha F]^\wedge(\xi) &= \left(-\frac{id}{d\xi} \right)^\alpha \widehat{F}(\xi), \\ [F(x-a)]^\wedge(\xi) &= e^{ia\xi} \widehat{F}(\xi), \\ [F]^\wedge(\xi+a) &= [e^{iax} F]^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

Análogamente se tienen los resultados para el caso n -dimensional.

Finalizaremos ésta sección con unos ejemplos.

Ejemplo 4.6. Analicemos la transformada de Fourier de la delta de Dirac, $\widehat{\delta}$. Sea $\varphi \in S$, entonces

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

Por lo tanto, $\widehat{\delta} = 1$. ◆

Ejemplo 4.7. Analicemos la transformada de Fourier de la distribución constante 1: Sea $\varphi \in S$, entonces

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) dx = [\widehat{\varphi}](0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Por lo tanto, $\widehat{1} = \delta$. ◆

Ejemplo 4.8. La transformada de Fourier que no puede definirse de manera clásica como una integral puede determinarse como límites de regularizaciones. Consideremos la función $H(x)$. Claramente no podemos definir su transformada de Fourier como

$$\int_0^\infty e^{i\xi x} dx.$$

Observe, sin embargo que

$$H(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(x) e^{-\varepsilon x}$$

en el sentido de distribuciones temperadas, y

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{H}(x), \varphi(x) \rangle &= \langle H(x), \widehat{\varphi}(x) \rangle = \left\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(x) e^{-\varepsilon x}, \widehat{\varphi}(x) \right\rangle \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle H(x) e^{-\varepsilon x}, \widehat{\varphi}(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle H(x), e^{-\varepsilon x} \widehat{\varphi}(x) \rangle \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \int_0^\infty e^{-\varepsilon x + ix\xi} dx d\xi.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = (\varepsilon - i\xi)x$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \int_0^\infty e^{-\varepsilon x + ix\xi} dx d\xi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\xi)}{\varepsilon - i\xi} \int_0^\infty e^{-u} du d\xi \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\xi)}{\varepsilon - i\xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

Para $\delta > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\xi)}{\varepsilon - i\xi} d\xi &= \int_{|\xi| > \delta} -\frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi + \int_{-\delta}^\delta -\frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{i\xi} d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\delta}^\delta \frac{\varphi(0)}{\varepsilon - i\xi} d\xi \\
 &= \int_{|\xi| > \delta} -\frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi + \int_{-\delta}^\delta -\frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{i\xi} + \pi\varphi(0) \\
 &= \int_{|\xi| > \delta} \frac{i\varphi(\xi)}{\xi} d\xi + \int_{-\delta}^\delta \frac{i[\varphi(\xi) - \varphi(0)]}{\xi} d\xi + \pi\varphi(0) \\
 &= i \left[\int_{|\xi| > \delta} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi + \int_{-\delta}^\delta \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi} d\xi \right] + \pi\varphi(0) \\
 &= i\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \pi\delta(\xi),
 \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{F}(H(x)) = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$. ◆

4.2 Producto Directo

Sean \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n espacios Euclidianos de dimensiones m y n respectivamente, denotemos como $x = (x_1, \dots, x_m)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ a los puntos en \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n respectivamente. Entonces un punto en $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tiene la forma $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Más aún, denotemos por \mathcal{D}^m , \mathcal{D}^n y \mathcal{D}^{m+n} , los espacios de funciones de prueba con soporte compacto en \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^{m+n} respectivamente. Cuando f y g son funciones localmente

integrables en los espacios \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , entonces la función fg es también una función localmente integrable en \mathbb{R}^{m+n} . Su distribución regular se define como:

$$\begin{aligned}\langle f(x)g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \int f(x) \int g(y) \varphi(x, y) dy dx \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle\end{aligned}\quad (4.19)$$

o

$$\begin{aligned}\langle g(y)f(x), \varphi(x, y) \rangle &= \int g(y) \int f(x) \varphi(x, y) dx dy \\ &= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle\end{aligned}\quad (4.20)$$

para $\varphi \in \mathcal{D}^{m+n}$.

Denotemos por $F_1 \otimes F_2$ al producto directo de las distribuciones $F_1 \in \mathcal{D}'^m$ y $F_2 \in \mathcal{D}'^n$, así por (4.19), se sigue que para $x \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle F_1(x) \otimes F_2(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle F_1(x), \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \quad \varphi(x, y) \in \mathcal{D}^{m+n} \quad (4.21)$$

Para revisar si el lado derecho de esta ecuación define una funcional lineal y continua sobre \mathcal{D}^{m+n} tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.1. *La función $\psi(x) = \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle$, donde $F_2 \in \mathcal{D}'^n$ y $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}^{m+n}$, es una función de prueba en \mathcal{D}^m y*

$$D^\alpha \psi(x) = \langle F_2(y), D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle \quad (4.22)$$

para todo α multi-índice, donde D_x^α denota diferenciación con respecto a (x_1, \dots, x_m) únicamente.

También, si la sucesión $\{\varphi_l(x, y)\} \rightarrow \varphi(x, y)$ cuando $l \rightarrow \infty$ en \mathcal{D}^{m+n} , entonces la sucesión $\psi_l(x) = \{\langle F_2(y), \varphi_l(x, y) \rangle\} \rightarrow \psi(x)$ cuando $l \rightarrow \infty$ en \mathcal{D}^m .

DEMOSTRACIÓN: Para toda $x \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}^m$ y esta bien definida en \mathbb{R}^m .

Para mostrar que es continua, fijemos x y sea $\{x_l\}$ tal que $x_l \rightarrow x$ cuando $l \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\varphi(x_l, y) \rightarrow \varphi(x, y), \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (4.23)$$

porque los soportes de $\varphi(x_l, y)$ son acotados en \mathbb{R}^n independientemente de l y para toda q se sigue que

$$D_y^q \varphi(x_l, y) \rightarrow D_y^q \varphi(x, y), \quad \text{cuando } l \rightarrow \infty, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, apelando a la continuidad de la funcional $F_2(y)$ en \mathcal{D}^n encontramos, de (4.23), que

$$\psi_l(x) = \langle F_2(y), \varphi(x_l, y) \rangle \rightarrow \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle = \psi(x).$$

Esto prueba que $\psi(x)$ es una función continua.

Para probar (4.22) nuevamente fijamos un punto x en \mathbb{R}^m y elegimos $h_i = (0, 0, \dots, h, \dots, 0)$, donde h se localiza en el i -ésimo lugar de la fila. Entonces

$$\chi^i(y) = \frac{1}{h} [\varphi(x + h_i, y) - \varphi(x, y)] \rightarrow \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i} \quad (4.24)$$

cuando $h \rightarrow 0$, en \mathcal{D}^m . También, los soportes de χ^i son acotados en \mathbb{R}^n independientemente de h , y tenemos, que para toda q

$$D^q \chi^i(y) = \frac{1}{h} [D_y^q \varphi(x + h_i, y) - D_y^q \varphi(x, y)] \rightarrow D_y^q \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando (4.24) y la continuidad de $F_2(y)$ observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x + h_i) - \psi(x)}{h} &= \frac{1}{h} [\langle F_2(y), \varphi(x + h_i, y) \rangle - \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle] \\ &= \left\langle F_2(y), \frac{\varphi(x + h_i, y) - \varphi(x, y)}{h} \right\rangle \\ &= \langle F_2, \chi^i \rangle \rightarrow \left\langle F_2(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, (4.22) es válido para $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donde 1 se localiza en la i -ésima coordenada. Repitiendo las aplicaciones de los pasos anteriores, obtenemos (4.22) en toda su generalidad.

De este modo probamos que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Basta probar que ψ tiene soporte compacto, pero esto se sigue del hecho de que $\varphi(x, y) = 0$ para $|x| > R$; para estos valores de x , $\psi(x) = \langle F_2(y), 0 \rangle$. Así, $\psi(x)$ es una función de prueba.

Finalmente, para probar la tercera parte es suficiente con mostrar que si $\{\varphi_l(x, y)\}$ es una sucesión nula entonces también lo es $\{\psi_l(x)\}$. Ahora, los soportes de $\varphi_l(x, y)$ están acotados en \mathbb{R}^{m+n} independientemente de l , entonces los soportes de $\{\psi_l(x)\}$ también están acotados independientemente de l . Entonces, sólo tenemos que probar que

$$D^\alpha \psi_l(x) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } l \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (4.25)$$

Supongamos que esto no es válido; entonces podemos encontrar un número $\varepsilon_0 > 0$, un multi-índice α_0 y una sucesión de puntos x_l tal que

$$D^{\alpha_0} [\psi_l(x_l)] \geq \varepsilon_0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Como los soportes de $\psi_l(x, y)$ son acotados en \mathbb{R}^m independientemente de l , se sigue que la sucesión $\{x_l\}$ también es acotada en \mathbb{R}^m . Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos elegir una subsucesión convergente $x_{l_j} \rightarrow x_0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Entonces,

$$D_x^{\alpha_0} \varphi_{l_j}(x_{l_j}, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

Consecuentemente, la distribución $F_2(y)$ satisface la relación

$$D^{\alpha_0} \psi_{l_j}(x_{l_j}) = \langle F_2(y), D_x^{\alpha_0} \varphi_{l_j}(x_{l_j}, y) \rangle - \langle F_2(y), 0 \rangle = 0, \quad (4.27)$$

lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto el lema queda demostrado. ■

Regresando a la definición (4.21), y usando el Lema 4.1 encontramos que $\psi(x) = \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle \in \mathcal{D}^m \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{m+n}$. Así, el lado derecho de (4.21), digamos $\langle F_1, \psi \rangle$, se define para cualesquiera distribuciones F_1 y F_2 sobre \mathcal{D}^{m+n} . La linealidad de este funcional se sigue de la linealidad de las funcionales F_1 y F_2 .

Para probar la continuidad de este funcional, sea la sucesión $\{\varphi_l\} \rightarrow \varphi$ cuando $l \rightarrow \infty$ en \mathcal{D}^{m+n} . Entonces por el Lema 4.1 tenemos:

$$\langle F_2(y), \varphi_l(x, y) \rangle \rightarrow \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle \quad \text{cuando } l \rightarrow \infty \quad \text{en } \mathcal{D}^m.$$

Como el funcional es continuo, tenemos

$$\langle F_1(x), \langle F_2(y), \varphi_l(x, y) \rangle \rangle \rightarrow \langle F_1(x), \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad \text{cuando } l \rightarrow \infty, \quad (4.28)$$

Esto prueba la continuidad del funcional definido por el lado derecho de (4.21) y $F_1(x) \otimes F_2(y)$ es una función generalizada en \mathcal{D}'^{m+n} .

Es natural preguntarnos cómo operar el producto directo si lo combinamos con otras operaciones. Ahora mencionaremos algunas de ellas (ver [15]):

1. **Conmutatividad:** El producto directo es conmutativo.

Para probar este resultado para cualquier función de prueba $\varphi(x, y)$, se hace uso del hecho de que $\mathcal{D}^m \otimes \mathcal{D}^n$ es denso en \mathcal{D}^{m+n} . Para una demostración de este resultado consultar [15]

2. **Continuidad:** Si $\{F_l\} \rightarrow F$ cuando $l \rightarrow \infty$ en \mathcal{D}'^m , entonces

$$\{F_l(x) \otimes F_1(y)\} \rightarrow F(x) \otimes F_1(y),$$

en \mathcal{D}'^{m+n} .

3. **Asociatividad:** Para $F_1 \in \mathcal{D}'^m$, $F_2 \in \mathcal{D}'^n$, y $F_3 \in \mathcal{D}'^p$ tenemos

$$F_1(x) \otimes [F_2(y) \otimes F_3(z)] = [F_1(x) \otimes F_2(y)] \otimes F_3(z).$$

4. **Soporte:**

$$\text{sop}(F_1 \otimes F_2) = (\text{sop } F_1) \times (\text{sop } F_2).$$

5. **Diferenciación:**

$$D_x^\alpha [F_1(x) \otimes F_2(y)] = [D_x^\alpha F_1(x) \otimes F_2(y)] \quad (4.29)$$

6. **Multiplicación por una Función C^∞ .** Para $a(x) \in C^\infty$ tenemos

$$a(x) [F_1(x) \otimes F_2(y)] = [a(x)F_1(x)] \otimes F_2(y) \quad (4.30)$$

7. **Traslación:**

$$(F_1 \otimes F_2)(x + h, y) = F_1(x + h) \otimes F_2(y) \quad (4.31)$$

Ahora mostraremos algunos ejemplos que ilustren estas propiedades del producto directo.

Ejemplo 4.9. El producto directo de la distribución Delta en \mathbb{R}^m con la distribución Delta en \mathbb{R}^n nos da la función delta en \mathbb{R}^{n+m} :

Para $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \delta(x) \otimes \delta(y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle \delta(x), \langle \delta(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta(x), \varphi(x, 0) \rangle \\ &= \varphi(0, 0) \\ &= \langle \delta(x, y), \varphi(x, y) \rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

◆

Ejemplo 4.10. Sea $H(x)$ la función de Heaviside de n variables:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

Claramente, $H(x)$ es el producto directo de $H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes \dots \otimes H(x_n)$. Derivando, y usando el hecho de que $\frac{dH(x_i)}{dx_i} = \delta(x_i)$, tenemos

$$\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.33)$$

◆

4.2.1 El Producto Directo de Distribuciones Temperadas

Sean $F_1 \in S'^m$, $x \in \mathbb{R}^m$ y $F_2 \in S'^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Como $S' \subset \mathcal{D}'$, el producto directo $F_1(x) \otimes F_2(y) \in \mathcal{D}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Nuestro objetivo es probar que $F_1(x) \otimes F_2(y) \in S'^{m+n}$. Por la definición del funcional $F_1(x) \otimes F_2(y)$, donde ahora $\varphi(x, y) \in S$,

$$\langle F_1(x) \otimes F_2(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle F_1(x), \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad (4.34)$$

Mostraremos que el lado derecho de (4.34) es un funcional lineal y continuo en S^{m+n} . Procedemos como antes.

Lema 4.2. La función $\psi(x) = \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle$, donde $F_2 \in S^n$, $\varphi \in S^{m+n}$, es una función de prueba en S^m , y

$$D^\alpha \psi(x) = \langle F_2(y), D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle, \quad (4.35)$$

es válido para todos los multi-índices α .

Más aún, si la sucesión en $S^{m+n} \{\varphi_l(x, y)\} \rightarrow \varphi$ cuando $l \rightarrow \infty$, entonces $\varphi_l(x) = \langle F_y, \varphi_l(x, y) \rangle \rightarrow \langle F_2(y), \varphi(x, y) \rangle$ en S

La prueba de este resultado es análoga al Lema 4.1 de la sección 4.2. Muchas de las propiedades que son válidas para el producto directo en \mathcal{D}^{m+n} también valen para S^{m+n} y su prueba es similar.

4.2.2 La Transformada de Fourier del Producto Directo de Distribuciones Temperadas

Sean $F_1 \in S^m$ y $F_2 \in S^n$, entonces

$$[F_1 \otimes F_2]^\wedge = \hat{F}_1 \otimes \hat{F}_2. \quad (4.36)$$

Para $\varphi(u, v) \in S^{m+n}$

$$\begin{aligned} \left\langle [F_1(x) \otimes F_2(y)]^\wedge(u, v), \varphi(u, v) \right\rangle &= \langle F_1(x) \otimes F_2(y), \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle F_1(x) \otimes F_2(y), \mathcal{F}_v \mathcal{F}_u [\varphi](x, y) \rangle \\ &= \langle F_1(x), \langle F_2(y), \mathcal{F}_v \mathcal{F}_u [\varphi](x, y) \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde \mathcal{F}_u y \mathcal{F}_v son la transformada de Fourier de φ para los argumentos x y y respectivamente, entonces

$$\mathcal{F}_v \mathcal{F}_u [\varphi](x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ivy} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iux} \varphi(u, v) du dv.$$

Así,

$$\begin{aligned} \left\langle [F_1(x) \otimes F_2(y)]^\wedge(u, v), \varphi(u, v) \right\rangle &= \left\langle F_1(x), \left\langle \hat{F}_2(v), \mathcal{F}_u [\varphi](x, v) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle F_1(x) \otimes \hat{F}_2(v), \mathcal{F}_u [\varphi](x, v) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}_x [F_1(x) \otimes \hat{F}_2(v)], \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{F}_2(v), \langle F_1(x), \mathcal{F}_u [\varphi](x, v) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{F}_2(v), \left\langle \hat{F}_1(u), \varphi(u, v) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{F}_1(u) \otimes \hat{F}_2(v), \varphi(u, v) \right\rangle, \end{aligned}$$

lo que prueba (4.36).

Ejemplo 4.11. Para el caso $n = 2$, considere la función $H(x, y)$,

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

lo que podemos escribir como $H(x, y) = H(x) \otimes H(y)$. Cuando usamos (4.36) y el ejemplo 4.8 tenemos:

$$\begin{aligned} [H(x, y)]^\wedge &= [H(x) \otimes H(y)]^\wedge = \hat{H}(x) \otimes \hat{H}(y) \\ &= \left(\pi \delta(u) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \otimes \left(\pi \delta(v) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{v} \right) \right). \end{aligned}$$

◆

4.3 La Convolución

La convolución $f * g$ de dos funciones f y g , ambas en \mathbb{R}^n , se define como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy. \quad (4.38)$$

Es claro que

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x - y)dy = g * f \quad (4.39)$$

siempre que la convolución exista. Supongamos que las funciones $f, g \in \mathcal{L}_{loc}^1$.

Entonces $f * g \in \mathcal{L}_{loc}^1$ y por lo tanto define una distribución regular $\langle f * g, \varphi \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(z)\varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(z - y)dy \right] \varphi(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(z - y)\varphi(z)dz \right] dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x + y)dx \right] dy \end{aligned}$$

o

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int f(x)g(y)\varphi(x + y)dxdy = \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (4.40)$$

La ecuación (4.39) nos lleva a una propiedad de la ecuación que será usada para definir la convolución de dos distribuciones. Esto es, la convolución de dos distribuciones F_1 y F_2 en \mathcal{D}' es

$$\langle F_1 * F_2, \varphi \rangle = \langle F_1 \otimes F_2, \varphi(x + y) \rangle \quad (4.41)$$

Tenemos un pequeño problema; la función $\varphi(x, y)$ no tiene soporte compacto; su soporte es la franja entre $x + y = A$ y $x + y = -A$, donde A es una constante que depende de los soportes de F_1 y F_2 . Para poder ajustar este detalle, tenemos que hacer ciertas suposiciones.

Sabemos que $\text{sop}(F_1 \otimes F_2) = \text{sop } F_1 \times \text{sop } F_2$. Según (4.41), tendrá sentido si la intersección de $\text{sop}(F_1 \otimes F_2)$ y $\text{sop } \varphi(x + y)$ es acotado. Claramente, en este caso, cambiando $\varphi(x + y)$ por una función finita $\varphi(x + y)$ que es igual a $\varphi(x + y)$ en esta intersección y se anula fuera de ella. En lo que sigue, denotaremos a dicha función por $\varphi(x + y)$.

El acotamiento de la intersección del $\text{sop}(F_1 \otimes F_2)$ y $\text{sop } \varphi(x + y)$ puede obtenerse de las dos maneras siguientes:

1. El soporte de una distribución es acotado.

Sea por ejemplo, el $\text{sop } F_2$ acotado. En este caso el $\text{sop } \varphi(x + y)$ esta en una franja horizontal de longitud finita $\{x, y : |x + y| \leq A, |y| \leq R\}$.

Así, por virtud de la definición de producto directo, tenemos

$$\langle (F_1 * F_2), \varphi \rangle = \langle (F_1 \otimes F_2), \varphi(x + y) \rangle = \langle F_1(x), \langle F_2(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle. \quad (4.42)$$

Por otro lado, si el soporte de F_1 es acotado, entonces el $\text{sop } \varphi(x + y)$ esta contenido en una franja vertical de longitud finita. Bajo estas circunstancias, la función $\psi(x) = \langle F_2(y), \varphi(x + y) \rangle$ es un miembro de \mathcal{D}^m .

2. $\text{sop } F_1$ y $\text{sop } F_2$ son acotados en el mismo lugar. Por ejemplo, sea $F_1 = 0$ para $x > R_1$ y sea $F_2 = 0$ para $y > R_2$. En este caso el $\text{sop } \varphi(x + y)$ esta contenido en una cuarta parte del plano bajo alguna linea horizontal y a la izquierda de alguna linea vertical. Por lo tanto, el lado derecho de (4.41) esta nuevamente bien definido.

Propiedades de la Convolución de Distribuciones

1. **Conmutatividad**

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1 \quad (4.43)$$

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición (4.42) y la conmutatividad de los productos directos $F_1 \otimes F_2$.

2. **Asociatividad**

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3) \quad (4.44)$$

si el soporte de dos de las tres distribuciones son acotados o si los soportes de las tres son acotados en el mismo lugar.

La prueba de este resultado es una extensión de la prueba dada para la validez de la definición (4.42).

3. **Diferenciación** Si la convolución $F_1 * F_2$ existe, entonces las convoluciones $(D^\alpha F_1) * F_2$ y $F_1 * (D^\alpha F_2)$ existen y

$$(D^\alpha F_1) * F_2 = D^\alpha(F_1 * F_2) = F_1 * (D^\alpha F_2). \quad (4.45)$$

Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes, de (4.45) tenemos que

$$(LF_1) * F_2 = L(F_1 * F_2) = F_1 * (LF_2) \quad (4.46)$$

Estos resultados implican que, para diferenciar una convolución, es suficiente diferenciar cada uno de los factores.

4. **Continuidad** En ciertos casos la convolución es un operador continuo. Este resultado se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Si la sucesión de distribuciones $\{F_l\} \rightarrow F$, cuando $l \rightarrow \infty$, entonces $\{F_l * F_2\} \rightarrow F * F_2$ bajo cada una de las siguientes condiciones:*

1. *Todas las distribuciones F_l están concentradas en el mismo conjunto acotado.*
2. *La distribución F_2 esta concentrada en un conjunto acotado.*
3. *Los soportes de las distribuciones F y F_2 están acotadas en el mismo lugar por una constante independiente de l .*

DEMOSTRACIÓN: Por (4.42) tenemos,

$$\langle F_l * F_2, \varphi \rangle = \langle F_l, \langle F_2, \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (4.47)$$

Si la condición 1 es válida, podemos reemplazar $\langle F_2, \varphi(x+y) \rangle$ por una función de prueba $\psi(x)$ que se anula fuera de la región en la cual las F_l están concentradas. Entonces

$$\begin{aligned} \langle F_l * F_2, \varphi \rangle &= \langle F_l \otimes F_2, \varphi(x+y) \rangle = \langle F_l, \langle F_2, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle F_l, \psi(x) \rangle \rightarrow \langle F, \psi(x) \rangle = \langle F, \langle F_2, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle F \otimes F_2, \varphi(x+y) \rangle = \langle F * F_2, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4.48)$$

Así, $F_l * F_2 \rightarrow F * F_2$ cuando $l \rightarrow \infty$.

En el segundo caso, $\psi(x) = \langle F_2, \varphi(x+y) \rangle$ es una función de prueba e igual que antes obtenemos el resultado deseado.

Por último, en el caso 3 supongamos que el soporte de las distribuciones F y F_2 se encuentran acotados por la izquierda y que el soporte de $\psi(x) = \langle F_2, \varphi(x+y) \rangle$ es acotado por la derecha. Entonces procedemos como antes. ■

4.3.1 Convolución de Distribuciones Temperadas

El análisis previamente desarrollado puede extenderse para distribuciones de lento crecimiento. Tenemos la misma definición (4.41) para la convolución de dos distribuciones de lento crecimiento. Las restricciones son similares. Para establecer varias propiedades hacemos uso del producto directo de distribuciones temperadas.

4.3.2 La Transformada de Fourier de Convoluciones

Sean f y g dos funciones localmente integrables. Entonces la Transformada de Fourier de la convolución $f * g$ es

$$\begin{aligned}
 [f * g]^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g e^{i\xi x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{i\xi y}dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{i\xi(x-y)}d(x-y) \\
 &= \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

Así, la transformada de Fourier de $f * g$ es el producto de sus transformadas de Fourier. Un resultado similar es válido para la transformada de Fourier Inversa.

Ejemplos

Ejemplo 4.12. a) Podemos expresar la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy, \quad \varphi \in S$$

como una convolución. Eligiendo, $y = x - z$, encontramos que

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy = - \int_0^{\infty} \varphi(x-z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} H(z)\varphi(x-z)dz = H * \varphi.$$

b) Sea F una distribución arbitraria. La convolución de $\delta(x)$ y $F(x)$ es

$$\langle \delta * F, \varphi \rangle = \langle \delta(z), \varphi(x+z) \rangle = \langle F(x), \varphi(x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

o

$$\delta * F = F.$$

Así, la función delta es un elemento identidad en \mathcal{D}' para la operación de convolución. \blacklozenge

Ejemplo 4.13. Uno de los usos más importantes de la teoría de convolución es obtener una solución particular de una ecuación diferencial.

$$Lu = f \quad (4.49)$$

donde $Lu = L(D)u$, es un operador diferencial lineal. Esto se encuentra haciendo uso de la solución fundamental E , la cual está dada de la siguiente manera: Una distribución E se dice una solución fundamental para el operador diferencial L si

$$LE = \delta. \quad (4.50)$$

Claramente nuestra solución para u es de la forma

$$u = f * E \quad (4.51)$$

Esto se sigue al aplicar el operador L a ambos lados de (4.51):

$$Lu = L(f * E) = f * LE = f * \delta = f. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 4.14. En muchos problemas físicos la convolución es natural. Demostraremos esto considerando el problema de valores iniciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.52)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \quad (4.53)$$

Este es un problema famoso del movimiento de una partícula el cual nos da el desplazamiento inicial $\varphi(x)$ y velocidad inicial $\psi(x)$.

La solución general de (4.52) es

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad (4.54)$$

la cual podemos verificar por sustitución directa.

De (4.53) tenemos que

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \quad (4.55)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f'(x) - g'(x) = \psi(x) \quad (4.56)$$

Integrando (4.56) con respecto a x tenemos

$$f(x) - g(x) = \int_a^x \psi(s) ds, \quad (4.57)$$

donde la constante de integración se incorpora bajo el límite, (4.55) y (4.57) nos permiten resolver para $f(x)$ y $g(x)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \psi(s)ds \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_a^x \psi(s)ds$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.54), obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2} \int_a^{x+t} \psi(s)ds - \left[\frac{1}{2} \int_a^{x-t} \psi(s)ds - \frac{1}{2}\varphi(x-t) \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds \end{aligned} \quad (4.58)$$

la cual es la fórmula de D'Alembert.

Interpretemos esta fórmula desde el punto de vista de la presente teoría. Para este propósito, tenemos el caso especial $\varphi(x) = 0$. Entonces (4.58) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds \quad (4.59)$$

Podemos expresarla como una distribución con ayuda de la función generalizada $E(x, t)$ definida como

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| < t \\ 0 & \text{si } |x| > t \end{cases} , \\ &= \frac{1}{2} H(t+x) H(t-x) = \frac{1}{2} H(t-|x|) \end{aligned} \quad (4.60)$$

entonces (4.59) toma la forma

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-s, t) \psi(s)ds = E * \psi \quad (4.61)$$

Como un segundo caso especial, elegimos $\psi(x) = 0$. Entonces (4.58) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+x-s) + \delta(x-t+s)] \varphi(s)ds. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ahora, de (4.60) se sigue que

$$\frac{\partial E(x-s, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} [\delta(t+x-s) H(t-x+s) + \delta(t-x+s) H(t+x-s)],$$

para $t > 0$, es

$$\frac{\partial E(x-s, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} [\delta(t+x-s) + \delta(t-x+s)]. \quad (4.63)$$

Combinando (4.62) y (4.63):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E(x-s, t)}{\partial t} \varphi(s) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} E(x-s, t) \varphi(s) ds = \frac{\partial}{\partial t} (E * \varphi), \quad t > 0. \quad (4.64)$$

llamada la regla de Stokes. La fórmula general se sigue sumando (4.61) y (4.64)

$$u(x, t) = E * \psi = E * \psi + \frac{\partial}{\partial t} (E * \varphi) \quad (4.65)$$

◆

Ejemplo 4.15. Ahora estudiemos el problema con valores iniciales para la ecuación de calor,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (4.66)$$

para $t \geq 0$, donde $f(x)$ es una función generalizada y k es una constante positiva.

Tomando la transformada de Fourier de ambas partes de la ecuación (4.66) tenemos:

$$\frac{dU(u, t)}{dt} - ku^2 U(u, t) = 0, \quad U(u, 0) = F(u)$$

donde $U = \widehat{u}$ y $F = \widehat{f}$.

Su solución es

$$U(u, t) = e^{-ku^2 t} F(u). \quad (4.67)$$

Para invertir la ecuación (4.67) debemos encontrar la función $v(x, t)$ cuya transformada de Fourier es válida en la región $t \geq 0$ y que satisface la ecuación diferencial (4.66). Tal relación la obtenemos de los Ejemplos 4.5 y 4.6 la cual es:

$$v(x, t) = \begin{cases} \delta(s) & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{-ku^2 t}}{\sqrt{kt}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Finalmente, usando la fórmula para transformada de Fourier de convoluciones obtenemos la solución de (4.66) como:

$$u(x, t) = v(x, t) \times f(x) = \frac{1}{\sqrt{kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2} ds. \quad \blacklozenge$$

Con este capítulo, terminamos lo referente a la teoría de Distribuciones, obteniendo una teoría muy rica la cual aplicaremos en el siguiente capítulo a Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Capítulo

5

Interacción Kink-Antikink Para Ecuaciones de Onda Semilineales con un Parámetro Pequeño.

En este capítulo presentamos una aplicación interesante de la teoría de distribuciones a las ecuaciones diferenciales parciales, para lo cual hacemos uso de los resultados descritos en los capítulos anteriores y del método asintótico débil. Las soluciones del problema que describiremos a continuación son suaves para $\varepsilon > 0$ pero en el paso al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se vuelven no suaves, razón por la cual debemos definir el concepto de solución débil.

Consideremos una clase de ecuaciones de onda semi-lineales con un parámetro pequeño y no linealidades tales que las ecuaciones tengan soluciones exactas del tipo kink. El objetivo principal consiste en obtener condiciones suficientes para el término no lineal bajo las cuales la colisión kink-antikink ocurre sin cambios en la forma de las ondas y con únicamente algunos cambios de las trayectorias de ondas solitarias.

5.1 Nociones Básicas

Consideremos una clase de ecuaciones de onda semi-lineales con un parámetro ε

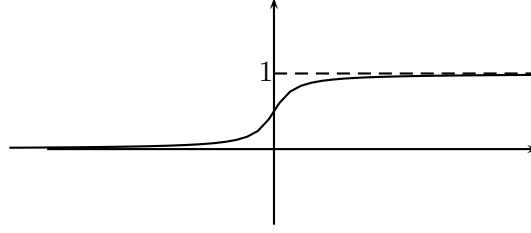
$$\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) = 0 \quad (5.1)$$

En este trabajo supondremos que la función no lineal $F(u)$ es par y es tal que las ecuaciones (5.1) tienen soluciones exactas auto-similares de las llamadas de tipo “kink” (también llamados “fluxones”):

$$u(x, t, \varepsilon) = \omega\left(S\beta\frac{x - Vt}{\varepsilon}\right), \quad S = \pm 1, \quad \beta = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad |V| < 1, \quad (5.2)$$

$$\omega \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \omega(\eta) \rightarrow 0 \text{ para } \eta \rightarrow -\infty, \quad \omega(\eta) \rightarrow 1 \text{ para } \eta \rightarrow \infty,$$

donde ω es la solución autosimilar para (5.1). La gráfica de una función ω típica se muestra en la figura 5.1.

Figura 5.1: Una función ω típica

Más en detalle, la función (5.2) es llamada “kink” si $S = 1$ y “antikink” si $S = -1$, como se muestran en la figura 5.2.

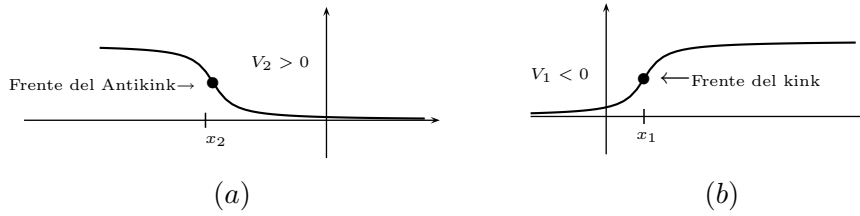


Figura 5.2: (a) Antikink; (b) Kink.

Los correspondientes frentes son x_i , $i = 1, 2$.

En (5.2) t es el tiempo, V es la velocidad, β es el controlador de la velocidad, ε es un parámetro pequeño y $x - Vt$ es la trayectoria que sigue el frente del kink o del antikink.

Sustituyendo (5.2) en (5.1) obtenemos

$$F'(\omega(\eta)) = \omega_{00}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2}{d\eta^2} \omega(\eta). \quad (5.3)$$

Si la función F satisface las condiciones

- A) $F(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F(z) > 0$ para $z \in (0, 1)$,
- B) $F^{(i)}(z_0) = 0$, $i = 0, 1$, $F''(z_0) > 0$, donde $z_0 = 0$ o $z_0 = 1$,

existe una solución $u(x, t, \varepsilon)$ en la forma (5.2) y tiende a los valores límites (1 si $\eta \rightarrow +\infty$, 0 si $\eta \rightarrow -\infty$) suficientemente rápido. De hecho, la condición $F''(z_0) > 0$ en $z_0 = 0$ o 1 es equivalente a requerir que la concavidad de la función $\omega(\eta)$ se anule más rápidamente que $\omega_0(\eta)$ en $\pm\infty$.

Bajo la hipótesis adicional

$$\text{C) } F\left(\frac{1}{2} + z\right) = F\left(\frac{1}{2} - z\right)$$

la función $\omega(\eta) - \frac{1}{2}$ será impar y $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$.

Para considerar la superposición de las ondas $\omega\left(\pm \frac{\beta_i(x - V_i t - x_i^0)}{\varepsilon}\right)$ con distancias grandes entre sus frentes $x = V_i t + x_i^0$ como dos kinks o antikinks no-interactuantes (para $t \ll 1$) imponemos la condición de periodicidad:

D) $F(z + 1) = F(z)$.

Ejemplos de funciones que satisfacen tales condiciones son las siguientes:

$$F(z) = \frac{1 - \cos(2\pi z)}{4\pi^2}, \quad y \quad F(z) = \sin^4(\pi z), \quad (5.4)$$

Resolviendo la ecuación (5.3) para estas funciones encontramos que las correspondientes funciones $\omega(\eta)$ son

$$\omega = \frac{2}{\pi} \arctan(\exp(\eta)) \quad y \quad \omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot}(-\sqrt{2\pi}\eta), \quad (5.5)$$

respectivamente.

Por ejemplo, para el caso $F(z) = \sin^4(\pi z)$, resulta que la ecuación (5.3), que es equivalente a la ecuación $F(\omega(\eta)) = \omega_0^2/2$, es $\sin^4(\pi\omega(\eta)) = \omega_0^2/2$. Separando variables se obtiene $\sqrt{2}d\eta = \csc^2(\pi\omega)d\omega$. Integrando y usando la condición a la frontera ($\omega \rightarrow +1$ si $\eta \rightarrow +\infty$), se concluye que $\omega(\eta) = \operatorname{arccot}(-\sqrt{2\pi}\eta)\pi$.

El primer ejemplo corresponde a la ecuación de sine-Gordon. Es conocido que los kinks de la ecuación de sine-Gordon colapsan sin cambiar sus formas y el único resultado de la interacción es la aparición de un cambio de fase. Este resultado se probó inicialmente usando el método llamado *Inverse Scattering Transform*. Llamaremos a tal tipo de interacción de kinks “escenario de Sine-Gordon”. Recíprocamente, dependiendo de las velocidades V_i , la interacción kink-antikink seguirá el escenario de sine-Gordon o resultara un aparente “breather”, ver la figura 5.3.

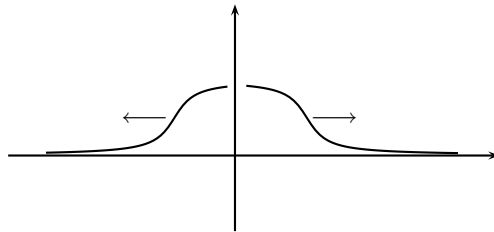


Figura 5.3: Un “breather” como resultado de la interacción.

La pregunta natural que nos podemos hacer aquí es la siguiente: ¿Es la ecuación de sine-Gordon la única de la clase (5.1) para la cual tal escenario es válido? Si no, ¿cómo

encontramos condiciones en F bajo las cuales los kinks y los antikinks de la ecuación (5.1) colapsen siguiendo el escenario de sine-Gordon?

No podemos usar métodos tradicionales para describir el escenario de colisión de ondas, pues no podemos usar soluciones exactas del problema de Cauchy, ya que la ecuación de sine-Gordon es la única representante de la clase (5.1) que puede ser integrada exactamente. Por lo tanto, construiremos una solución asintótica tratando a ε como un parámetro pequeño. Sin embargo, las aproximaciones asintóticas tradicionales no pueden responder la pregunta considerada aquí, ya que hoy en día existen problemas no resueltos.

Para evitar estas dificultades, usamos el *método asintótico débil* el cual ha sido desarrollado por los profesores G. Omel'yanov y V. Danilov (ver [4]). La ventaja principal de esta aproximación es la posibilidad de reducir el problema de describir la interacción de ondas no lineales a un análisis cualitativo de alguna ecuación diferencial ordinaria (en vez de EDP). Este método toma en cuenta el hecho de que los kinks, los cuales son suaves para $\varepsilon > 0$ se vuelven no-suaves en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces trataremos a las soluciones de la ecuación (5.1) como un mapeo $C^\infty(0, T; C^\infty(\mathbb{R}_x))$ para $\varepsilon > 0$ y únicamente como $C(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x))$ uniformemente en $\varepsilon \geq 0$.

Ahora, para construir una definición de una solución asintótica que admita el paso al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es natural usar la construcción estándar del espacio \mathcal{D}' .

Una distribución $u \in \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}_x)$ se dice ser una solución de la ecuación (5.1) si $F'(u) \in \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}_x)$ y la relación

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon^2 u(\psi_{tt} - \psi_{xx}) + \psi F'(u)) dx dt = 0 \quad (5.6)$$

es válida para cualquier función de prueba $\psi(x, t) \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}_x)$.

La relación 5.6 se obtiene al usar las propiedades de la derivada distribucional en la definición usual de solución débil:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u), \psi \rangle &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u)] \psi(x) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u(\psi_{tt} - \psi_{xx}) + \psi F'(u) dx dt. \end{aligned}$$

Sin embargo, nótese que la relación (5.6) presenta una inconsistencia. De hecho, la hipótesis **B**) implica que para cualquier función suave $\varphi = \varphi(t)$ las siguientes igualdades

son válidas:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) F' \left(\omega \left(\beta \frac{x-\varphi}{\varepsilon} \right) \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F' \left(\omega \left(\beta \frac{x-\varphi}{\varepsilon} \right) \right) \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \psi(x') dx' dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 \left(\varphi + \eta \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \frac{d}{d\eta} F'(\omega(\eta)) d\eta \\
&= -\psi(\varphi) \frac{\varepsilon}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \frac{d}{d\eta} F'(\omega(\eta)) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

donde $\psi_1(x) = \int_{-\infty}^x \psi(x') dx'$, $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$.

Esto significa que, en (5.6), el lado izquierdo es $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ mientras que el lado derecho es 0.

La idea principal es usar funciones de prueba especiales, digamos, aquellas que son rápidamente variantes donde la solución varía rápidamente.

Para la ecuación (5.1) significa la elección de las funciones de prueba $u'_x \psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donde u'_x es una función que varía rápidamente en x . Transformaciones estándar para la definición débil para tales funciones nos lleva al siguiente resultado:

Definición 5.1. Una función $u(t, x, \varepsilon)$, perteneciente a $C^\infty(0, T; C^\infty(\mathbb{R}_x))$ para $\varepsilon > 0$ y perteneciente a $C(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x))$ uniformemente en ε , es llamada una solución asintótica débil mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ de la relación (5.1) si la relación

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u_t u_x \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \{(\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u)\} \psi_x dx = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.7)$$

se satisface para cualquier función de prueba $\psi = \psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

El lado izquierdo es una función C^∞ para $\varepsilon > 0$ y una función uniformemente continua a pedazos en $\varepsilon \geq 0$. La estimación se entiende en el sentido $C(0, T)$:

$$g(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^k) \longleftrightarrow \max_{t \in [0, T]} |g(t, \varepsilon)| \leq C \varepsilon^k. \quad (5.8)$$

Notemos que en contraste con la igualdad (5.6), la definición 5.1 involucra en el término principal las derivadas de u con argumentos $\frac{x}{\varepsilon}$ y $\frac{t}{\varepsilon}$. Más aún, se requiere la relación $\beta^2 = \frac{1}{1-v^2}$ para la solución de ondas solitaria (5.2). El lado izquierdo de (5.7) es el resultado de la multiplicación de la ecuación (5.1) por $\psi(x)u_x$ e integración por partes en caso de u suave, por lo tanto, es cero para cualquier solución kink exacta. Por otro lado, la relación (5.7) es la condición de ortogonalidad que aparece para fases asintóticas simples. Esta condición garantiza la existencia de la primera corrección y nos ayuda a encontrar una ecuación para el movimiento distorsionado de frentes de kinks.

En lo que sigue usaremos la notación $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^k)$ para la pequeñez en el sentido débil:

Definición 5.2. Denotamos por $v(t, x, \varepsilon) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^k)$ a la función $v(t, x, \varepsilon)$ la cual pertenece a $C^\infty(0, T; C^\infty(\mathbb{R}_x))$ para $\varepsilon > 0$ y pertenece a $C(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x))$ uniformemente en ε tal que la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t, x, \varepsilon) \psi(x) dx = \mathcal{O}(\varepsilon^k),$$

es válida para cualquier función de prueba $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$. Aquí la estimación del lado derecho es tratada de la misma manera que en la definición 5.1.

Integrando por partes la segunda integral en el lado izquierdo de (5.7) se obtiene la relación:

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^2 u_t u_x - \frac{\partial}{\partial x} \{ (\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u) \} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (5.9)$$

5.1.1 Interacción de dos kinks

El caso de interacción de dos kinks fue estudiado en el artículo [17]. Más en detalle, la ecuación (5.1) esta complementada por las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \omega \left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{i=1}^2 \beta_i V_i \omega_0 \left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad (5.10)$$

donde $\beta_i = \frac{1}{\sqrt{1 - V_i^2}}$, $|V_i| \in (0, 1)$, y las posiciones iniciales de los frentes x_i^0 son tales que $x_1^0 - x_2^0 > 1$. Suponemos que las trayectorias $x = V_i t + x_i^0$ tienen un punto de intersección $x = x^*$ en el instante de tiempo $t = t^*$.

En [17] se probó la siguiente conclusión:

Teorema 5.1. Supongamos que A-D son válidas. Más aún, sean la función F y los números β_i , $i = 1, 2$, tales que la siguiente desigualdad se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta) + \omega(\theta\eta)) d\eta \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F(\omega(\eta)) + F(\omega(\theta\eta)) + 2\beta_2^2 \sqrt{F(\omega(\eta))F(\omega(\theta\eta))} \right\} d\eta, \quad (5.11)$$

donde $\theta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$. Entonces la interacción de kinks en el problema (5.1), (5.10) preserva el escenario de sine-Gordon con exactitud $\text{mod } \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ en el sentido de la definición 5.1

Simulaciones numéricas nos muestran que este teorema es válido para los ejemplos mostrados en las ecuaciones (5.4), (5.5).

Observación 5.1. La hipótesis **C)** no es esencial. La elegimos ya que la propiedad de simetría de $\omega(\eta)$ nos ayuda a simplificar detalles técnicos en la prueba de los teoremas. La

hipótesis **D**) se puede cambiar por una más débil: $F(z)$ para $z \in (1, 2)$ tiene las mismas propiedades que para $z \in (0, 1)$. Sin embargo, la periodicidad de F también implica simplificaciones de la prueba. Hacemos hincapié en que todas las hipótesis nos facilitan verificar los teoremas, al menos numéricamente, ya que para cualquier F fija la función ω puede encontrarse fácilmente como la solución del problema de Cauchy

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \sqrt{2F(\omega)}, \quad \omega \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (5.12)$$

5.2 Interacción Kink-Antikink

Nuestro objetivo aquí es la consideración de la colisión kink-antikink,

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \omega \left(S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 S_i \beta_i V_i \omega_0 \left(S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad (5.13)$$

donde $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $x_1^0 - x_2^0 > 1$ y usamos la misma notación que en (5.10).

(5.13) es válida ya que, para el caso $t = 0$ se sigue que

$$u = \omega \left(\beta_1 \frac{x - x_1^0}{\varepsilon} \right) + \omega \left(-\beta_2 \frac{x - x_2^0}{\varepsilon} \right)$$

donde $x_i^0 = x - V_i t$. Así

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \beta_1 V_1 \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - x_1^0}{\varepsilon} \right) - \beta_2 V_2 \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - x_2^0}{\varepsilon} \right).$$

Para una representación geométrica en el tiempo de interacción de las ondas de choque, ver la figura 5.4

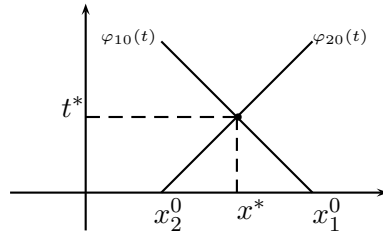


Figura 5.4: Evolución de los frentes no perturbados $\varphi_{i0}(t)$

El resultado principal consiste en obtener condiciones suficientes para el término no lineal bajo las cuales la interacción kink-antikink ocurre sin cambiar las formas de las ondas. Es muy importante que la condición principal, la cual aparece en vez de (5.11), sea

verificada numéricamente para cualquier no-linealidad específica y para cualesquiera velocidades V_i de las ondas no interactivas. Sin embargo, tienen una forma muy complicada y no podemos simplificarlas en alguna manera razonable. Por lo tanto, presentaremos el teorema principal al final de este capítulo. Aquí sólo notaremos que, aparentemente, no existen no-linealidades tales que esta condición se cumpla para todas las posibles velocidades V_i de ondas solitarias.

Describamos el contenido del presente capítulo. En la sección 5.3 presentamos el término principal de la solución asintótica débil para el problema (5.1), (5.13). Después de algunos cálculos técnicos obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los parámetros de las asintóticas. Luego, pasamos a un sistema dinámico 2×2 para funciones auxiliares W y σ con una singularidad en la recta $\sigma = 0$. La existencia de la solución asintótica requerida es equivalente a la existencia de una trayectoria γ_s tal que:

1. Pase del semi-plano izquierdo al derecho,
2. Su coordenada W tienda a cero cuando $\sigma \rightarrow \pm\infty$.

La investigación del sistema dinámico, en la sección 5.4, muestra que la primera propiedad puede ser realizada únicamente bajo algunas hipótesis específicas. De hecho, esta es la condición adicional requerida en **A)-D)**. Al mismo tiempo la segunda propiedad falla. Por otro lado el término principal de la solución asintótica no tiene algún parámetro libre adicional para cambiar γ_s . Por esta razón en la sección 5.6 suplementamos el término principal de la solución asintótica por algunas correcciones pequeñas las cuales se localizan cerca del origen $\omega = 0, \sigma = 0$. El objetivo de esta transformación es rotar las trayectorias preservando las propiedades principales del retrato fase y obteniendo la trayectoria γ_s con las propiedades requeridas. La prueba de la existencia de tales correcciones completa la construcción de la solución asintótica. El resultado principal, Teorema 5.2, se formuló al final de la sección 5.6. Presentamos también el Teorema 5.3 el cual muestra que las condiciones requeridas para la no-linealidad pueden obtenerse directamente de dos pequeños equilibrios en la ecuación (5.1). En la sección 5.5 presentamos algunas consideraciones gráficas, de los resultados obtenidos para el primer ejemplo que presentamos en la ecuación 5.4, correspondiente a la ecuación de sine-Gordon.

5.3 Construcción de la Solución asintótica

Escribamos el término principal de la solución asintótica débil $\text{mod } \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ del problema (5.1), (5.13) mediante el *ansatz*

$$u = \sum_{i=1}^2 \omega \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right), \quad (5.14)$$

que representa la suma de dos ondas solitarias, donde

$$\Phi_i(t, \tau) = \varphi_{i0}(t) + \varepsilon \varphi_{i1}(\tau). \quad (5.15)$$

Las funciones $\varphi_{i1}(\tau)$ son correcciones de las fases $\varphi_{i0}(t)$ por un parámetro ε (los frentes del kink y del antikink son $\varphi_{i0} = V_i t + x_i^0$, para $i = 1, 2$, respectivamente). Utilizaremos un tiempo rápido definido por $\tau = \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}$ donde $\psi_0(t) = \varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)$. Supondremos que las funciones $\varphi_{i1} = \varphi_{i1}(\tau)$ son suaves y que

$$\varphi_{i1} \rightarrow 0, \text{ cuando } \tau \rightarrow -\infty \quad \varphi_{i1} \rightarrow \varphi_{i1}^\infty \equiv \text{cte}_i \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty \quad (5.16)$$

con una rapidez no menor que $\frac{1}{|\tau|}$. Las constantes β_i , V_i y S_i son las mismas que en (5.13).

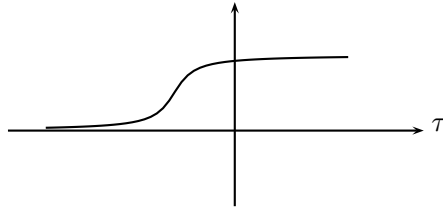


Figura 5.5: Funciones $\varphi_{i1}(t)$

Nos interesa saber que es lo que pasa justo en el momento de la interacción.

Consideremos brevemente el ansatz en la ecuación (5.14). Como $x_1^0 > x_2^0$, la diferencia $\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)$ resulta negativa durante algún $t < t^*$. Así, para este intervalo de tiempo, el “tiempo rápido” $\tau = \frac{\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, la primera hipótesis en (5.16) implica que la función (5.14) describe el movimiento de dos ondas solitarias no interactuantes. Después de la interacción, $\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t) > 0$ y entonces $\tau \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. En el caso en el cual la segunda hipótesis de (5.16) se cumple, la colisión kink-antikink ocurre sin cambiar la forma de las ondas. Por el contrario, si las funciones φ_{i1} son no acotadas cuando $\tau \rightarrow \infty$, entonces los corrimientos de las fases no se estabilizaría, sino que variarían con el tiempo. Finalmente, la no existencia de φ_{i1} para algún $\tau \geq 0$ significa que las ondas viajeras pierden la forma de kink durante la interacción. Supondremos que las funciones φ_{i1} existen y satisfacen las propiedades (5.16).

Pasemos a la construcción de la solución asintótica débil. Obviamente, para este objetivo debemos calcular asintóticas débiles con discrepancia $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ para las expresiones $(\varepsilon u_x)^2$, $(\varepsilon u_t)^2$ y las otras que aparecen en el lado izquierdo de la relación (5.7). Clarificaremos las técnicas usadas para cada uno de los términos.

Antes de ello, definamos $\omega_0(\eta) = \frac{d\omega(\eta)}{d\eta}$ donde ω es como la definimos anteriormente en (5.7). La hipótesis **C)** implica que $\omega(\eta) - \frac{1}{2}$ es impar, de aquí que ω_0 sea una función par pues

$$\omega_0 = \frac{d\omega}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(\omega(\eta) - \frac{1}{2} \right).$$

En la figura 5.6 se muestran las funciones $\omega(\eta)$ y $\omega(\eta) - \frac{1}{2}$.

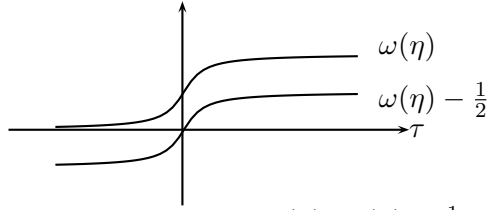


Figura 5.6: Funciones $\omega(\eta)$, $\omega(\eta) - \frac{1}{2}$

Ahora si estamos listos para aclarar las técnicas usadas para llegar a cada uno de los términos que aparecen en el lado izquierdo de (5.7):

Primeramente, realicemos los cálculos necesarios para el término $(\varepsilon u_x)^2$:

Diferenciando el anatz (5.14) con respecto a x tenemos:

$$u_x = \sum_{i=1}^2 \omega_0 \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \frac{S_i \beta_i}{\varepsilon}, \quad (5.17)$$

ya que las funciones Φ_i no dependen de x ; luego,

$$\begin{aligned} \varepsilon u_x &= \sum_{i=1}^2 S_i \beta_i \omega_0 \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \\ &= \beta_1 \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) - \beta_2 \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_x)^2 &= \beta_1^2 \omega_0^2 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \beta_2^2 \omega_0^2 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - 2\beta_1 \beta_2 \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Integrando tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta_1^2 \omega_0^2 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\} \psi(x) dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta_2^2 \omega_0^2 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\} \psi(x) dx \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} 2\beta_1\beta_2\omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \times \\ &\quad \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es una función arbitraria.

Analicemos el primer término de la derecha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta_1^2 \omega_0^2 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\} \psi(x) dx,$$

haciendo el cambio de variables $\xi = \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon}$ se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta_1^2 \omega_0^2 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \varepsilon \beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_1 \xi) \psi(\Phi_1 + \varepsilon \xi) d\xi. \quad (5.20)$$

Aplicando la Fórmula de Taylor de primer orden:

$$\psi(\Phi_i + \varepsilon \xi) = \psi(\Phi_i) + \varepsilon \xi \psi'(\xi^*),$$

donde ξ^* es un punto intermedio. Entonces de la ecuación (5.20) obtenemos la relación:

$$\begin{aligned} \varepsilon \beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_1 \xi) \psi(\Phi_1 + \varepsilon \xi) d\xi &= \varepsilon \beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_1 \xi) [\psi(\Phi_1) + \varepsilon \xi \psi'(\Phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] d\xi \\ &= \varepsilon \beta_1^2 \psi(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_1 \xi) d\xi \\ &\quad + \varepsilon \beta_1^2 \psi'(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \xi \omega_0^2(\beta_1 \xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \beta_1^2 \psi(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_1 \xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

para lo cual hicimos uso de que las funciones $\omega_0(\xi)$ y ξ son par e impar, respectivamente, y que Φ_1 no depende de x .

Como el segundo término de la derecha en la ecuación (5.19) es similar tenemos:

$$\beta_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2 \left(\beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \varepsilon \beta_i^2 \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_i \xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

para $i = 1, 2$.

Ahora, el tercer término en (5.19):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx,$$

donde por el momento no usaremos el factor $-2\beta_1\beta_2$.

Hacemos el cambio de variables siguiente:

$$\xi = \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon}, \text{ entonces } \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon} + \xi = \sigma + \xi,$$

donde σ esta dada por

$$\sigma = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon} = \tau + \varphi_{21}(\tau) - \varphi_{11}(\tau). \quad (5.21)$$

Así, el tercer término es:

$$\begin{aligned} &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1(\sigma + \xi)) \omega_0(\beta_2\xi) \psi(\Phi_2 + \varepsilon\xi) d\xi \\ &= \varepsilon \psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1(\sigma + \xi)) \omega_0(\beta_2\xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde nuevamente hicimos uso de la fórmula de Taylor de primer orden. Multiplicando por $-2\beta_1\beta_2$, tenemos que el tercer término toma la siguiente forma:

$$-2\beta_1\beta_2\varepsilon\psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1\sigma + \beta_1\xi) \omega_0(\beta_2\xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

De aquí, se sigue la relación:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx &= \varepsilon \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_i\xi) d\xi \\ &\quad - 2\beta_1\beta_2\varepsilon\psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1\sigma + \beta_1\xi) \omega_0(\beta_2\xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.22)$$

la cual es correcta para cualquier función de prueba.

Si hacemos $\eta = \beta_i\xi$ en la primera integral y $\beta_2\xi = \eta$ en la segunda integral en el lado derecho de (5.22) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx &= \varepsilon \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i^2}{\beta_i} \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta \\
&\quad - 2\varepsilon \beta_1 \psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \beta_i \psi(\Phi_i) - 2\varepsilon \beta_1 \psi(\Phi_2) a_2 \lambda_1(\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

donde hemos usado la notación

$$a_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta, \quad \lambda_1(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma) d\eta, \quad \theta = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (5.23)$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \psi(\Phi_i) - 2\beta_1 \psi(\Phi_2) \lambda_1(\sigma) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.24)$$

Entonces, (5.24) en el sentido de distribuciones es:

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - \Phi_2) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (5.25)$$

Más aún, existe una manera de simplificar (5.25). Sabemos que las correcciones de los frentes de propagación del kink y el antikink están dadas por la ecuación (5.15) de tal manera que el retrato fase de estas propagaciones están dadas por la figura 5.4. Buscamos determinar la interacción en (x^*, t^*) , así $x^* = V_i t^* + x_i^0$ lo cual implica que $x_i^0 = x^* - V_i t^*$.

De aquí que en este punto las trayectorias sean $\Phi_i = V_i t + x^* - V_i t^* + \varepsilon \varphi_{i1}(\tau)$ esto es,

$$\Phi_i = x^* + V_i(t - t^*) + \varepsilon \varphi_{i1}(\tau).$$

Por (5.21) tenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} [(t - t^*) [V_2 - V_1] + \varepsilon [\varphi_{21}(\tau) - \varphi_{11}(\tau)]] \\
&= \frac{\nu}{\varepsilon} (t - t^*) + (\varphi_{21} - \varphi_{11})
\end{aligned}$$

donde $\nu := V_2 - V_1$. Entonces,

$$t - t^* = \frac{\varepsilon}{\nu} [\sigma + \varphi_{11} - \varphi_{21}].$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= x^* + V_i \frac{\varepsilon}{\nu} [\sigma + \varphi_{11} - \varphi_{21}] + \varepsilon \varphi_{i1}(\tau) \\
 &= x^* + \varepsilon \left\{ \frac{V_i}{\nu} [\sigma + \varphi_{11} - \varphi_{21}] + \varphi_{i1}(\tau) \right\} \\
 &= x^* + \varepsilon \{ b_i [\sigma + \varphi_{11} - \varphi_{21}] + \varphi_{i1}(\tau) \} \\
 &= x^* + \varepsilon \{ b_i \sigma + b_i \varphi_{11} - b_i \varphi_{21} + \varphi_{i1}(\tau) \}
 \end{aligned}$$

con $b_i = \frac{V_i}{\nu}$ y $b_2 - b_1 = 1$.

Así,

$$\Phi_i = x^* + \varepsilon \chi_i, \quad i = 1, 2,$$

donde

$$\chi_i = b_i \sigma + b_i \varphi_{11} - b_i \varphi_{21} + \varphi_{i1} \quad (5.26)$$

Mostremos que

$$\chi_i = b_i \sigma + b_2 \varphi_{11} - b_1 \varphi_{21}. \quad (5.27)$$

usando la igualdad $b_2 - b_1 = 1$.

En efecto, para el caso $i = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 b_1 \sigma + b_1 \varphi_{11} - b_1 \varphi_{21} + \varphi_{11} &= b_1 \sigma + \varphi_{11} (b_1 + 1) - b_1 \varphi_{21} \\
 &= b_1 \sigma + b_2 \varphi_{11} - b_1 \varphi_{21}.
 \end{aligned}$$

Para el caso $i = 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 b_2 \sigma + b_2 \varphi_{11} - b_2 \varphi_{21} + \varphi_{21} &= b_2 \sigma + b_2 \varphi_{11} + \varphi_{21} (1 - b_2) \\
 &= b_2 \sigma + b_2 \varphi_{11} - b_1 \varphi_{21}.
 \end{aligned}$$

Así, (5.27) queda probada.

Nótese, además, que $|\sigma \lambda_1(\sigma)| \leq \text{cte}$. De hecho, geoméricamente podemos ver esta afirmación en la figura 5.7. Ya que $\beta_1 \sigma$ mueve a la gráfica de $\omega_0(\eta)$ hacia la izquierda o hacia la derecha dependiendo del signo y θ hace que la gráfica sea más estrecha o más ancha, entonces $\omega_0(\eta) \omega_0(\theta \eta + \beta \sigma)$ tenderá a cero cuando $|\sigma| \rightarrow \infty$. Así, $\lambda_1(\sigma) \rightarrow 0$ cuando $|\sigma| \rightarrow \infty$. Entonces λ_1 es una función de Schwartz.

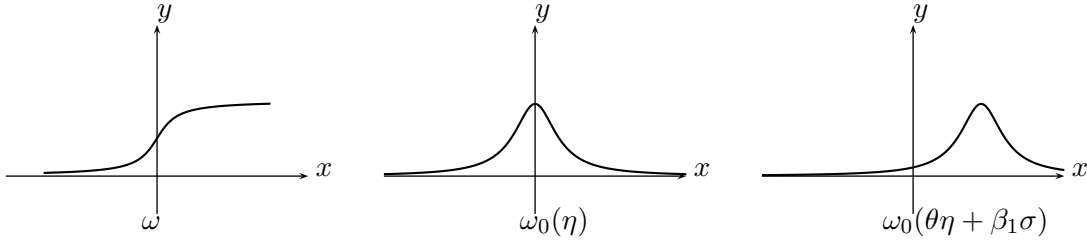
Ahora, usaremos el siguiente resultado (ver [11]):

Lema 5.1. *Sea $S(\tau)$ una función del espacio de Schwartz y sea $\varphi_k(\tau) \in C^\infty$ con la siguiente representación:*

$$\varphi_k(\tau) = x^* + \varepsilon \chi_k(\tau),$$

donde x^* es constante y χ_k es una función lentamente creciente. Entonces,

$$S(\tau) \delta(x - x^*) = S(\tau) \delta(x - \varphi_k(\tau)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon).$$

Figura 5.7: (a) ω ; (b) $\omega_0(\eta)$; (c) $\omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma)$

Claramente en nuestro problema se sigue que $|\chi_i(\tau)| \leq c|\tau|^{N_k}$ pues:

$$\begin{aligned}
 |\chi_i(\tau)| &= |b_i\sigma + b_2\varphi_{11} - b_1\varphi_{21}| = |b_i[\tau + \varphi_{21} - \varphi_{11}] + b_2\varphi_{11} - b_1\varphi_{21}| \\
 &\leq |b_i[\tau + \varphi_{21} - \varphi_{11}]| + |b_1\varphi_{11}| + |b_1\varphi_{21}| \\
 &\leq |b_i\tau| + |b_i\varphi_{21}| + |b_i\varphi_{11}| + |b_2\varphi_{11}| + |b_1\varphi_{21}| \\
 &= |b_i||\tau| + |\varphi_{21}|[|b_i| + |b_1|] + |\varphi_{11}|[|b_i| + |b_2|] \\
 &= c_0|\tau| + |\varphi_{21}|c_1 + |\varphi_{11}|c_2 \\
 &\leq c_0|\tau|^{N_i} + c_4c_1 + c_3c_2 \\
 &= c|\tau|^{N_i}
 \end{aligned}$$

Como se satisfacen las hipótesis del Lema 5.1 tenemos que

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (5.28)$$

Por último, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta'(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta'(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).$$

Los cálculos para los otros términos en el lado izquierdo de (5.7), se obtienen como a continuación se muestra.

Para el término $(\varepsilon u_t)^2$:

Derivando el ansatz (5.14) con respecto a t se sigue que:

$$u_t = -\frac{S_1\beta_1}{\varepsilon} \omega_0 \left(S_1\beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \dot{\Phi}_{1t} - \frac{S_2\beta_2}{\varepsilon} \omega_0 \left(S_2\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \dot{\Phi}_{2t}. \quad (5.29)$$

Ahora, por la definición de Φ_i dada en (5.15) se sigue que

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{i_t} &= \varphi'_{i0}(t) + \varepsilon \varphi'_{i1}(\tau) \tau' \\ &= V_i + [\varphi'_{20}(t) - \varphi'_{10}(t)] \varphi'_{i1}(\tau) \\ &= V_i + \nu \varphi'_{i1}(\tau) \\ &= \nu [b_i + \varphi'_{i1}(\tau)],\end{aligned}\tag{5.30}$$

donde hicimos uso de las definiciones de ν , b_i y φ_{i0} .

Entonces, denotando por $\omega_{0,i} = \omega_0 \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right)$ tenemos:

$$\varepsilon u_t = -S_1 \beta_1 \omega_{0,1} \dot{\Phi}_{1_t} - S_2 \beta_2 \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{2_t},\tag{5.31}$$

de aquí que,

$$\begin{aligned}(\varepsilon u_t)^2 &= \left[-S_1 \beta_1 \omega_{0,1} \dot{\Phi}_{1_t} - S_2 \beta_2 \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{2_t} \right] \left[-S_1 \beta_1 \omega_{0,1} \dot{\Phi}_{1_t} - S_2 \beta_2 \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{2_t} \right] \\ &= S_1^2 \beta_1^2 \omega_{0,1}^2 (\dot{\Phi}_{1_t})^2 + S_2^2 \beta_2^2 \omega_{0,2}^2 (\dot{\Phi}_{2_t})^2 + 2 S_1 S_2 \beta_1 \beta_2 \omega_{0,1} \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{1_t} \dot{\Phi}_{2_t}\end{aligned}$$

Ahora, como $S_1 = 1$ y $S_2 = -1$ tenemos:

$$(\varepsilon u_t)^2 = \beta_1^2 \omega_{0,1}^2 (\dot{\Phi}_{1_t})^2 + \beta_2^2 \omega_{0,2}^2 (\dot{\Phi}_{2_t})^2 - 2 \beta_1 \beta_2 \omega_{0,1} \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{1_t} \dot{\Phi}_{2_t}.\tag{5.32}$$

Los tres términos importantes en la igualdad (5.32) son $\omega_{0,1}^2$, $\omega_{0,2}^2$ y $\omega_{0,1} \omega_{0,2}$ los cuales analizaremos a continuación:

Para los primeros dos términos se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_{0,1}^2 \psi(x) dx = \varepsilon \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{0,i}^2(\beta_i \xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

donde utilizamos los resultados ya descritos para el término $(\varepsilon u_x)^2$.

Utilizando el hecho de que $a_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta = \frac{1}{\beta_i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta$ entonces tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_{0,i}^2 \psi(x) dx = \frac{\varepsilon a_2}{\beta_i} \psi(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\tag{5.33}$$

en el sentido de distribuciones:

$$\omega_{0,i}^2 = \frac{\varepsilon a_2}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2),\tag{5.34}$$

luego, por (5.30) tenemos:

$$\omega_{0,i}^2 (\dot{\Phi}_{i_t})^2 = \frac{\nu^2 \varepsilon a_2}{\beta_i} b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + 2 \frac{\nu^2 \varepsilon a_2}{\beta_i} b_i \varphi'_{i1} \delta(x - \Phi_i) + \frac{\nu^2 \varepsilon a_2}{\beta_i} (\varphi'_{i1})^2 \delta(x - \Phi_i).$$

Ahora, utilizaremos el Lema 5.1 ya que las funciones φ'_{i1} son funciones del espacio de Schwartz y $\Phi_i = x^* + \varepsilon\chi_i$ entonces:

$$\begin{aligned}\omega_{0,i}^2(\dot{\Phi}_i)^2 &= \frac{\nu^2 \varepsilon a_2}{\beta_i} b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + 2 \frac{\nu^2 \varepsilon a_2}{\beta_i} \varphi'_{i1} \delta(x - x^*) \\ &\quad + \beta_i \nu^2 \varepsilon a_2 (\varphi'_{i1})^2 \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Para el tercer término en (5.32) se sigue que

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \left(-\beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\ &= \varepsilon \psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1(\sigma + \xi)) \omega_0(\beta_2 \xi) d\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{5.35}$$

donde utilizamos los cálculos ya realizados para el término $(\varepsilon u_x)^2$. Haciendo el cambio de variables

$$\eta = \beta_2 \xi \quad y \quad \beta_1(\sigma + \xi) = \beta_1 \left(\sigma + \frac{\eta}{\beta_2} \right) = \beta_1 \sigma + \theta \eta$$

donde $\theta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{\varepsilon \psi(\Phi_2)}{\beta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_1 \sigma + \theta \eta) \omega_0(\eta) d\eta \\ &= \frac{\varepsilon \psi(\Phi_2)}{\beta_2} a_2 \lambda_1(\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{5.36}$$

donde como ya mencionamos anteriormente $\lambda_1(\sigma)$ es una función de Schwartz.

En el sentido de distribuciones tenemos que:

$$\omega_{0,1} \omega_{0,2} = \frac{\varepsilon a_2}{\beta_2} \lambda_1(\sigma) \delta(x - \Phi_2) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).\tag{5.37}$$

Utilizando nuevamente el Lema 5.1 se sigue que

$$\omega_{0,1} \omega_{0,2} = \frac{\varepsilon a_2}{\beta_2} \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*).$$

Notemos que $\dot{\Phi}_{1t} \dot{\Phi}_{2t} = \nu^2 [b_1 b_2 + b_1 \varphi'_{21} + b_2 \varphi'_{11} + \varphi'_{11} \varphi'_{21}]$, entonces

$$\omega_{0,1} \omega_{0,2} (\dot{\Phi}_{1t} \dot{\Phi}_{2t}) = \nu^2 \frac{\varepsilon a_2}{\beta_2} \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) [b_1 b_2 + b_1 \varphi'_{21} + b_2 \varphi'_{11} + \varphi'_{11} \varphi'_{21}].$$

Así,

$$-2\beta_1 \beta_2 \omega_{0,1} \omega_{0,2} [\dot{\Phi}_{1t} \dot{\Phi}_{2t}] = -2\beta_1 \nu^2 \varepsilon a_2 \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) [b_1 b_2 + b_1 \varphi'_{21} + b_2 \varphi'_{11} + \varphi'_{11} \varphi'_{21}].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon u_t)^2 &= \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 [\beta_i b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + 2\beta_i b_i \varphi'_{i1} \delta(x - x^*) + \beta_i (\varphi'_{i1})^2 \delta(x - x^*)] \\
&\quad - 2\varepsilon a_2 \nu^2 \beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) \dot{\Phi}_{1t} \dot{\Phi}_{2t} \\
&= \varepsilon a_2 \nu^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + K_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

donde $K_1 = \sum_{i=1}^2 \beta_i \varphi'_{i1} (2b_i + \varphi'_{i1}) - 2\beta_1 \lambda_1 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2$.

Por último se sigue que,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon u_t)^2 = \nu^2 \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + K_1 \delta'(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \tag{5.39}$$

Ahora analicemos los cálculos para el término $(\varepsilon^2 u_t u_x)$:

De las ecuaciones (5.17), (5.18), (5.29) y (5.31) conocemos los valores de u_x , u_t , εu_x y εu_t , entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 u_t u_x &= \left[- \sum_{i=1}^2 S_i \beta_i \omega_{i,0} \dot{\Phi}_{it} \right] \left[\sum_{i=1}^2 \beta_i S_i \omega_{i,0} \right] \\
&= \left[-\beta_1 \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \dot{\Phi}_{1t} + \beta_2 \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \dot{\Phi}_{2t} \right] \\
&\quad \times \left[\beta_1 \omega_0 \left(\beta_1 \omega_0 \left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) - \beta_2 \omega_0 \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right) \right] \\
&= -\beta_1^2 \omega_{0,1}^2 \dot{\Phi}_{1t} + \beta_1 \beta_2 \omega_{0,1} \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{1t} + \beta_1 \beta_2 \omega_{0,1} \omega_{0,2} \dot{\Phi}_{2t} - \beta_2^2 \omega_{0,2}^2 \dot{\Phi}_{2t} \\
&= - \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \dot{\Phi}_{it} \omega_{i,0}^2 + \beta_1 \beta_2 (\dot{\Phi}_{1t} + \dot{\Phi}_{2t}) \omega_{0,1} \omega_{0,2}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Ahora,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u_t u_x \psi(x) dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta_i^2 \dot{\Phi}_{it} \omega_{i,0}^2 + \beta_1 \beta_2 (\dot{\Phi}_{1t} + \dot{\Phi}_{2t}) \omega_{0,1} \omega_{0,2} \right\} \psi(x) dx \tag{5.41}$$

Para el primer término de la derecha en la ecuación (5.41) ya hemos realizado los cálculos pertinentes a través de los casos $(\varepsilon u_x)^2$ y $(\varepsilon u_t)^2$ descritos en las ecuaciones (5.33), (5.34). Luego,

$$\begin{aligned}
\omega_{i,0}^2 \dot{\Phi}_i &= \frac{\varepsilon a_2}{\beta_i} \nu (b_i + \varphi'_{i1}) \delta(x - \Phi_i) \\
&= \frac{\nu \varepsilon a_2 b_i}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{\nu \varepsilon a_2}{\beta_i} \varphi'_{i1} \delta(x - \Phi_i)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Ahora, utilizando el Lema 5.1 ya que las funciones φ'_{i1} son funciones de Schwartz como se observa en la figura 5.8 y $\Phi_i = x^* + \varepsilon\chi_i$ entonces (5.42) es



Figura 5.8: (a) φ_{i1} ; (b) φ'_{i1} . Las funciones φ'_{i1} son de Schwartz.

$$\frac{\nu\varepsilon a_2 b_i}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{\nu\varepsilon a_2}{\beta_i} \varphi'_{i1} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \quad (5.43)$$

Ahora, el término

$$\begin{aligned} \beta_i^2 \omega_{0i}^2 \dot{\Phi}_i &= \nu\varepsilon a_2 b_i \beta_i \delta(x - \Phi_i) + \nu\varepsilon a_2 \beta_i \varphi'_{i1} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \\ &= \nu\varepsilon a_2 [b_i \beta_i \delta(x - \Phi_i) + \beta_i \varphi'_{i1} \delta(x - x^*)] + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ahora, para el segundo término en (5.41) igual que antes tenemos la expresión (5.36) y en el sentido de distribuciones se sigue la ecuación (5.37). Entonces

$$\omega_{0,1} \omega_{0,2} (\dot{\Phi}_{1t} + \dot{\Phi}_{2t}) = -\nu \frac{\varepsilon a_2}{\beta_2} \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) [b_1 + b_2 + \varphi'_{11} + \varphi'_{21}].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t u_x &= -\nu\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 [b_i \beta_i \delta(x - \Phi) + \beta_i \varphi'_{i1} \delta(x - x^*)] \\ &\quad + \nu\varepsilon a_2 \beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) \left[\sum_{i=1}^2 b_i + \sum_{i=1}^2 \varphi'_{i1} \right] \\ &= -\nu\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \delta(x - \Phi) - \nu\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \beta_i \varphi'_{i1} \delta(x - x^*) \\ &\quad + \varepsilon a_2 \beta_1 \lambda_1 \sum_{i=1}^2 \dot{\Phi}_{it} \delta(x - x^*) \\ &= -\nu\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \delta(x - \Phi_i) - \varepsilon a_2 \left[\sum_{i=1}^2 (\beta_i \varphi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \dot{\Phi}_{it}) \right] \delta(x - x^*) \\ &\quad + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Denotemos por $K_2 = \sum_{i=1}^2 (\beta_i \varphi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \dot{\Phi}_{i_t})$, entonces

$$\varepsilon^2 u_t u_x = -\nu \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \delta(x - \Phi_i) - \varepsilon a_2 K_2 \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^2 u_t u_x) &= \nu \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \delta'(x - \Phi_i) \dot{\Phi}_{i_t} - \varepsilon a_2 \frac{dK_2}{dt} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \\ &= \nu^2 \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \delta'(x - \Phi_i) [b_i + \varphi'_{i1}] - \varepsilon a_2 \frac{dK_2}{dt} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \\ &= \nu^2 \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i^2 \beta_i \delta'(x - \Phi_i) + \nu^2 \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \varphi'_{i1} \delta'(x - \Phi) \\ &\quad - \varepsilon a_2 \frac{dK_2}{dt} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nuevamente, $\varphi'_{i1} \in S$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^2 u_t u_x) &= \nu^2 \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i^2 \beta_i \delta'(x - \Phi_i) + \nu^2 \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 b_i \beta_i \varphi'_{i1} \delta'(x - x^*) \\ &\quad - \varepsilon a_2 \frac{dK_2}{dt} \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ahora, realicemos los cálculos para el término $2F(u)$:

Claramente,

$$F(u) = F \left[\sum_{i=1}^2 \omega \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] = F \left[\omega \left(S_1 \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) + \omega \left(S_2 \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right]$$

Escribamos, $F(u) = \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) + F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i)$ entonces

$$F(u)\psi(x) = \sum_{i=1}^2 F(\omega_i)\psi(x) + \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x).$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\psi(x)dx = \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_i)\psi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x)dx \quad (5.44)$$

Analicemos los términos de la derecha en la ecuación (5.44). Para el primer término, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_i) \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega \left(\beta_i S_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega \left(\beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (5.45)$$

pues las propiedades $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$ y $F(z + 1) = F(z)$ hacen que

$$\begin{aligned} F[\omega(S_i \eta)] &= F \left[\omega \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] = F \left[\omega \left(-\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= F \left[1 - \omega \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right] = F \left[-\omega \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= F \left[-\omega \left(\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \right] = F[-\omega(\eta)] = F[S_i \omega(\eta)] = F[\omega(\eta)]. \end{aligned}$$

Esto es,

$$F[\omega(S_i \eta)] = F[S_i \omega(\eta)] = F[\omega(\eta)] \quad (5.46)$$

En (5.45) hacemos el cambio $\eta_i = \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}$ y haciendo uso de la fórmula de Taylor de primer orden entonces,

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{\beta_i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta_i)) \psi \left(\Phi_i + \varepsilon \frac{\eta_i}{\beta_i} \right) d\eta_i \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta_i} \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta_i)) \left[\psi(\Phi_i) + \frac{\varepsilon}{\beta_i} \eta_i \psi'(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] d\eta_i \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta_i} \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta_i)) d\eta_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon}{\beta_i} \frac{a_2}{2} \psi(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde se hizo uso de la igualdad $\frac{a_2}{2} := \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta_i)) d\eta_i$. En el sentido de distribuciones tenemos:

$$F(\omega_i) = \frac{\varepsilon}{\beta_i} \frac{a_2}{2} \delta(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (5.47)$$

Ahora, para el segundo término denotando $\omega(\beta_i S_i \frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}) = \omega_i$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ F[\omega_1 + \omega_2] - F[\omega_1] - F[\omega_2] \} \psi(x) dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_1} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega(S_1 \eta_1) + \omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] \times \\
&\quad \psi \left(\Phi_1 + \frac{\varepsilon \eta_1}{\beta_1} \right) d\eta_1 \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \{ F[\omega(S_1 \eta_1)] \} \psi \left(\Phi_1 + \frac{\varepsilon \eta_1}{\beta_1} \right) d\eta_1 \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] \psi \left(\Phi_1 + \frac{\varepsilon \eta_1}{\beta_1} \right) d\eta_1 \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_1} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega(S_1 \eta_1) + \omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] \times \\
&\quad \left[\psi(\Phi_1) + \frac{\varepsilon}{\beta_1} \eta_1 \psi'(\Phi_1) + \mathcal{O}_{\varepsilon^2} \right] d\eta_1 \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_1} \psi(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \left[F \omega(S_1 \eta_1) + \omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] d\eta_1 \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega(S_1 \eta_1)] d\eta_1 \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] d\eta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_1} A_1 \psi(\Phi_1) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hicimos el cambio de variables $\eta_1 = \beta_1 \frac{x-\Phi_1}{\varepsilon}$ así, $\beta_2 \frac{x-\Phi_2}{\varepsilon} = \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta}$. En la tercera igualdad aplicamos nuevamente la fórmula de Taylor de primer orden y también aplicamos la ecuación (5.46) y denotamos a

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F \left[S_1 \omega(\eta_1) + \omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] - F[S_1 \omega(\eta_1)] - F \left[\omega \left(S_2 \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) \right] \right\} d\eta_1.$$

En el sentido de distribuciones se sigue que:

$$\left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] = \frac{\varepsilon}{\beta_1} A_1 \delta(x - \Phi_1) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).$$

Si en A_1 se hace el cambio $\eta_2 = \frac{\eta_1 - \beta_1 \sigma}{\theta}$ entonces se tiene:

$$A_1 = \theta \int_{-\infty}^{\infty} \{ F[S_1 \omega(\theta \eta_2 + \beta_1 \sigma) + \omega(S_2 \eta_2)] - F[S_1 \omega(\theta \eta_1 + \beta_1 \sigma)] - F[\omega(S_2 \eta_2)] \} d\eta_2.$$

Denotemos como

$$\frac{a_2}{2}B_\Delta := \int_{-\infty}^{\infty} F[S_1\omega(\theta\eta_2 + \beta_1\sigma) + \omega(S_2\eta_2)] - F[S_1\omega(\theta\eta_2 + \beta_1\sigma)] - F[\omega(S_2\eta_2)]d\eta_2, \quad (5.48)$$

entonces,

$$A_1 = \theta \frac{a_2}{2} B_\Delta.$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx &= \frac{\varepsilon}{\beta_1} A_1 \psi(\Phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta_1} \frac{a_2}{2} \theta B_\Delta \psi(\Phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta_2} \frac{a_2}{2} B_\Delta \psi(\Phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Por otra parte, si en el segundo término de la ecuación (5.44) se hace el cambio $\eta_2 = \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon}$ se obtendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \frac{a_2}{2} B_\Delta \psi(\Phi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \frac{a_2}{2} B_\Delta \left\{ \begin{array}{c} \psi(\Phi_1) \\ \psi(\Phi_2) \end{array} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

En el sentido de distribuciones:

$$\left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \frac{a_2}{2} B_\Delta \left\{ \begin{array}{c} \delta(x - \Phi_1) \\ \delta(x - \Phi_2) \end{array} \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).$$

Como

$$B_\Delta := \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} F[S_1\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma) + \omega(S_2\eta)] - F[S_1\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)] - F[\omega(S_2\eta)]d\eta \quad (5.49)$$

es de Schwartz, finalmente obtenemos:

$$\left[F(u) - \sum_{i=1}^2 F(\omega_i) \right] \psi(x) dx = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \frac{a_2}{2} B_\Delta \delta(x - x^*) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (5.50)$$

Sustituyendo (5.47) y (5.50) en (5.44) obtenemos:

$$F(u) = \frac{\varepsilon a_2}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta'(x - \Phi_i) + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \delta'(x - x^*) \right] + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2),$$

de donde se sigue que,

$$\frac{\partial}{\partial x}[2F(u)] = \varepsilon a_2 \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta'(x - \Phi_i) + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \delta(x - x^*) \right] + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2).$$

Obsérvese que de las propiedades $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$, $F(z+1) = F(z) = F(z-1)$ y $F(-z) = F(z)$ se deduce que

$$\begin{aligned} B_\Delta &:= \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma) - \omega(\eta)] - F[\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)] - F[\omega(\eta)] d\eta \\ &:= \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega(\eta) - \omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)] - F[\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)] - F[\omega(\eta)] d\eta. \end{aligned}$$

Entre otras cosas, calculando las asintóticas débiles para los términos del lado izquierdo de la ecuación (5.7), obtenemos algunas convoluciones. Introduzcamos la siguiente notación:

$$\lambda_2(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma) d\eta, \quad \bar{\lambda}_2(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0\left(\frac{\eta - \beta_1\sigma}{\theta}\right) d\eta, \quad (5.51)$$

$$B_\Delta(\sigma) = \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\omega(\eta) - \omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)) - F(\omega(\eta)) - F(\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma))\} d\eta. \quad (5.52)$$

Lema 5.2. (Propiedades de las convoluciones.) *Bajo las hipótesis A-D las convoluciones (5.23), (5.51) y (5.52) existen y tienen las siguientes propiedades cuando $\sigma \rightarrow \pm\infty$:*

$$|\sigma^2 \lambda_1(\sigma)| \leq \text{cte.}, \quad |\sigma \lambda_2(\sigma)| \leq \text{cte.}, \quad |\sigma^2 B_\Delta(\sigma)| \leq \text{cte.} \quad (5.53)$$

Más aún, $B_\Delta < 0$ para $|\sigma|$ suficientemente grande y

$$\bar{\lambda}_2(\sigma) = \theta (\beta_1 \sigma \lambda_1(\sigma) + \theta \lambda_2(\sigma)).$$

DEMOSTRACIÓN: La existencia de las convoluciones es clara, ya que ω_0 satisface la estimación:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx &= \varepsilon \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\beta_i \xi) \psi(\Phi_i + \varepsilon \xi) d\xi \\ &\quad - 2\varepsilon \beta_1 \beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\beta_2 \xi) \omega_0(\beta_1 \xi + \beta_1 \sigma) \psi(\Phi_2 + \varepsilon \xi) d\xi \end{aligned}$$

y se anula con rapidez no menor a $\frac{1}{\eta^2}$. Luego, cuando $k = 1$ en la hipótesis **B**), la función ω_0 tiene una rapidez exponencial de anulación. Lo mismo es válido para las convoluciones.

Consideremos el caso $k = 3$ y, consecuentemente, ω_0 se anula cuando $|\eta|^{-2}$.

Para nuestro objetivo será suficiente estimar la convolución:

$$\lambda_{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^n \omega_0(\eta) \omega_0(\eta + \sigma) d\eta \quad \sigma \gg 1,$$

donde $n = 1$ o 2 .

Reescribamos $\lambda_{(n)}$ como la suma de integrales:

$$\lambda_{(n)} = \left\{ \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma}{2}} + \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\infty} \right\} \eta^n \omega_0(\eta) \omega_0(\eta + \sigma) d\eta$$

para estimar la última integral utilizamos la siguiente desigualdad:

$$|\eta|^n \omega_0(\eta + \sigma) \leq C \sigma^{-2+n} \frac{|z|^n}{(1+z)^2} \Big|_{z=\frac{\eta}{\sigma}} \leq C \sigma^{-2+n} \quad \text{para} \quad z \geq -\frac{1}{2}, \quad (5.54)$$

donde C es una constante, pues el máximo absoluto de la función $z \rightarrow \frac{|z|^n}{(1+z)^2}$ en $z \geq -1/2$ es menor que 1. Para la primera integral cambiamos la variable $\eta' = \eta + \sigma$ y estimamos como sigue:

$$\frac{1}{n} \left| \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma}{2}} \eta^n \omega_0(\eta) \omega_0(\eta + \sigma) d\eta \right| \leq \int_{-\infty}^{\frac{\sigma}{2}} |\eta|^n \omega_0(\eta) \omega_0(\eta - \sigma) d\eta + \sigma^n \int_{-\infty}^{\frac{\sigma}{2}} \omega_0(\eta) \omega_0(\eta - \sigma) d\eta.$$

Ahora, es claro que es suficiente usar una desigualdad similar a (5.54) para la primera integral y la desigualdad $\omega_0(\sigma - \eta) \leq C \sigma^{-2}$, $\eta \leq \frac{\sigma}{2}$, para la segunda.

Para probar el último resultado del lema es suficiente utilizar la periodicidad de F y las desigualdades:

$$\omega(\eta) = 1 + v(\eta) \quad \text{cuando} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad \omega(\eta) = v(\eta) \quad \text{cuando} \quad \eta \rightarrow -\infty,$$

donde $v(\eta)$ es una función que se anula exponencialmente en el caso $k = 1$ y $|v(\eta)| \leq \frac{cte}{|\eta|}$ cuando $k = 3$. ■

Ahora, podemos resumir los resultados obtenidos al calcular las asintóticas débiles en el siguiente lema:

Lema 5.3. *Supongamos que **A**)-**D**) y (5.16) se satisfacen. Entonces, las siguientes relaciones son válidas:*

$$(\varepsilon u_t)^2 = \varepsilon a_2 v^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + K_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (5.55)$$

$$F(u) = \varepsilon \frac{a_2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^2 u_t u_x) &= -a_2 \nu^2 \frac{dK_2}{d\tau} \delta(x - x^*) + \varepsilon a_2 \nu^2 \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi_{i1} + W \right) \delta'(x - x^*) \\ &+ \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Aquí y en lo que sigue:

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{i=1}^2 \beta_i \varphi'_{i1} (2b_i + \varphi'_{i1}) - 2\beta_i \lambda_1 \dot{\Phi}_{1t} \dot{\Phi}_{2t}, \\ K_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \beta_i \varphi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \dot{\Phi}_{i1} \right\}, \\ W &= K_2 \chi_2 + \beta_1 \varphi'_{11} (\chi_1 - \chi_2) - \theta \lambda_2 \sum_{i=1}^2 \dot{\Phi}_{i1}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\dot{\Phi}_{i1} = b_i + \varphi'_{i1}, \quad \varphi'_{i1} := \frac{d\varphi_{i1}}{d\tau}. \quad (5.59)$$

Usando las fórmulas (5.28) y (5.55)-(5.59) obtenemos que el lado izquierdo de (5.9) es una combinación lineal de las funciones $\delta(x - x^*)$, $\delta'(x - x^*)$ y $\delta'(x - \Phi_i)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left[-\beta_i + \nu^2 \beta_i b_i^2 + \frac{1}{\beta_i} \right] \delta'(x - \Phi_i) + \left(\frac{dK_2}{d\tau} \right) \delta(x - x^*) + \\ \left[2\beta_1 \lambda_1 - \nu^2 K_1 + \nu^2 \frac{dK_3}{d\tau} + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \right] \delta'(x - x^*) = \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde $K_3 = \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi'_{i1} + W$.

Como estas funciones son linealmente independientes, los coeficientes de las funciones δ y δ' tienen que ser cero. Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dK_2}{d\tau} = 0, \quad (5.61)$$

$$\beta_i \left(b_i^2 - \frac{1}{\nu^2} \right) + \frac{1}{\beta_i \nu^2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.62)$$

$$\left[2 \frac{dW}{d\tau} + 2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi'_{i1} \right] = K_1 - \frac{1}{\nu^2} \left(2\beta_1 \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \right). \quad (5.63)$$

De las igualdades (5.62) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_i \left(b_i^2 - \frac{1}{\nu^2} \right) + \frac{1}{\beta_i \nu^2} = \beta_i + \nu^2 b_i^2 \beta_i \\ &= \beta_i \left[\beta_i + \nu^2 b_i^2 \beta_i + \frac{1}{\beta_i} \right] = \beta_i^2 + \nu^2 b_i^2 \beta_i^2 + 1 \\ &= \beta_i^2 (1 + \nu^2 b_i^2) + 1, \end{aligned}$$

de aquí que $\beta_i^2 = \frac{-1}{1 + \nu^2 b_i^2}$, entonces $\beta_i^2 = \frac{1}{1 - \nu^2 b_i^2} = \frac{1}{1 - V_i^2}$. Es decir, $\beta_i^2 = \frac{1}{1 - V_i^2}$.

Tomando en cuenta la condición $\varphi'_{i1} \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$ e integrando (5.61), obtenemos la igualdad:

$$\sum_{i=1}^2 \left\{ \beta_i \varphi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \dot{\Phi}_{i1} \right\} = 0 \quad (5.64)$$

Esto y la definición (5.21) de la función $\sigma = \sigma(\tau)$ nos ayudan a reescribir φ'_{i1} en términos de $\sigma'_\tau = \frac{d\sigma}{d\tau}$. Claramente de (5.21) tenemos:

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{d\tau} = 1 + \varphi'_{21} - \varphi'_{11} \quad (5.65)$$

Ahora, resolvamos el sistema (5.64), (5.65) con respecto a φ'_{11} , φ'_{21} :

Por la primera ecuación en (5.59) tenemos que (5.64) es:

$$\beta_1 \varphi'_{11} - \beta_1 \lambda_1 (b_1 + \varphi'_{11}) + \beta_2 \varphi'_{21} - \beta_1 \lambda_1 (b_2 + \varphi'_{21}) = 0$$

utilizando la igualdad $b_2 - b_1 = 1$ se sigue que:

$$\beta_1 \varphi'_{11} - \beta_1 \lambda_1 (b_1 + \varphi'_{11}) + \beta_2 \varphi'_{21} - \beta_1 \lambda_1 [1 + b_1 + \varphi'_{21}] = 0$$

Factorizando φ'_{11} y φ'_{21} :

$$\varphi'_{11} [\lambda_1 - \beta_1 \lambda_1] - \beta_1 \lambda_1 b_1 + \varphi'_{21} [\beta_2 - \beta_1 \lambda_1] - \beta_1 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_1 b_1 = 0$$

Despejando φ'_{11} y utilizando el valor que obtenemos para φ'_{21} de la ecuación (5.65), se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi'_{11} &= \frac{2\beta_1 \lambda_1 b_1 + \beta_1 \lambda_1 - \varphi'_{21} [\beta_2 - \beta_1 \lambda_1]}{\beta_1 - \beta_1 \lambda_1} \\ &= \frac{2\beta_1 \lambda_1 b_1 + \beta_1 \lambda_1 - [\sigma' - 1] [\beta_2 - \beta_1 \lambda_1] - \varphi'_{11} [\beta_2 - \beta_1 \lambda_1]}{\beta_1 - \beta_1 \lambda_1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\varphi'_{11} [\beta_1 - \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 - \beta_1 \lambda_1] = 2\beta_1 \lambda_1 b_1 + \beta_1 \lambda_1 - \sigma' \beta_2 + \sigma' \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 - \beta_1 \lambda_1,$$

así,

$$\varphi'_{11} = \frac{(\theta \lambda_1 - 1) \sigma' + 1 + 2\theta \lambda_1 b_1}{1 + \theta - 2\theta \lambda_1}$$

y despejando φ'_{21} y sustituyendo el valor que obtenemos para φ'_{11} de la ecuación (5.65) se sigue que

$$\varphi'_{21} = \frac{2\beta_1 \lambda_1 b_1 + 2\beta_1 \lambda_1 - \beta_1 + \beta_1 \sigma' - \beta_1 \lambda_1 \sigma'}{\beta_2 + \beta_1 - 2\beta_1 \lambda_1},$$

de aquí que:

$$\varphi'_{21} = \frac{2\theta \lambda_1 b_2 - \theta + \sigma'(\theta - \theta \lambda_1)}{1 + \theta - 2\theta \lambda_1}.$$

Así, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\varphi_{11}}{d\tau} = -\mathcal{F}G_1, \quad \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} = \theta \mathcal{F}G_2, \quad (5.66)$$

donde

$$\mathcal{F} = (1 + \theta - 2\theta \lambda_1)^{-1}, \quad G_1 = (1 - \theta \lambda_1) \sigma' - 1 - 2\theta b_1 \lambda_1 \quad y \quad G_2 = (1 - \lambda_1) \sigma' - 1 + 2b_2 \lambda_1 \quad (5.67)$$

Note que el lado derecho de las ecuaciones (5.66) dependen de σ la cual trataremos ahora como una función desconocida. Para completar el sistema tenemos que usar la última igualdad en el sistema (5.61)-(5.63). Para simplificarlo, primeramente notemos que las igualdades (5.64) y (5.66) nos ayudan a reescribir la expresión para W definida en (5.58) de la siguiente manera:

$$W = (\beta_1\sigma + \theta\lambda_2)\mathcal{F}G_1 - \theta^2\lambda_2\mathcal{F}G_2 - \theta(b_1 + b_2)\lambda_2,$$

donde hemos usado la igualdad $\sum_{i=1}^2 -\beta_1\lambda_1(b_i + \varphi'_{i1}) = -\sum_{i=1}^2 \beta_i\varphi'_{i1}$, la cual se sigue de la ecuación (5.64) y después aplicar las ecuaciones dadas en (5.66).

Manipulaciones algebraicas simples nos llevan a la igualdad:

$$\frac{W}{\mathcal{F}} = L \frac{d\sigma}{d\tau} - \beta_1\sigma - 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2), \quad (5.68)$$

donde,

$$L = \beta_1\sigma + \theta\lambda_2 - \bar{\lambda}_2. \quad (5.69)$$

Despejando $\frac{d\sigma}{d\tau}$ de (5.68) y $\frac{dW}{d\tau}$ de (5.63) obtenemos el sistema autónomo de primer orden

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = Q, \quad \frac{dW}{d\tau} = P, \quad (5.70)$$

donde

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \beta_1\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) \right\}, \\ P &= \frac{\mathcal{F}\beta_1}{2} \left\{ (1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2[1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)]Q + 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) \right\} \\ &\quad - \frac{\beta_1}{\nu^2} \left(\lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right), \end{aligned}$$

De hecho, de (5.68) tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \beta_1\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) \right\};$$

además, (5.63) se puede escribir como

$$\frac{dK_3}{d\tau} = \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi'_{i1} + \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[K_1 + \frac{2}{\nu^2} \left(-\beta_1\lambda_1 - \frac{1}{2\beta_2} B_\Delta \right) \right]$$

y así,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[K_1 + \frac{2}{\nu^2} \left(-\beta_1\lambda_1 - \frac{1}{2\beta_2} B_\Delta \right) \right] - \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi'_{i1} \\ &= \frac{1}{2} \left[K_1 - 2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi'_{i1} \right] + \frac{1}{\nu^2} \left(-\beta_1\lambda_1 - \frac{1}{2\beta_2} B_\Delta \right). \end{aligned}$$

Definamos condiciones iniciales para el sistema (5.70).

De (5.68) tenemos que

$$W = \mathcal{F} \left\{ L \frac{d\sigma}{d\tau} - \beta_1 \sigma - 2(b_1 \bar{\lambda}_2 + \theta b_2 \lambda_2) \right\}$$

La primera hipótesis en (5.16) y la definición de σ dada en (5.21) implican que $\sigma \rightarrow \tau$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$, luego $\frac{d\sigma}{d\tau} \rightarrow 1$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$. Además, $\lambda_2(\sigma) \rightarrow 0$ y $\bar{\lambda}_2(\sigma) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$. Más aún, $L = \beta_1 \sigma + \theta \lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \rightarrow \beta_1 \sigma$ cuando $\sigma \rightarrow -\infty$. Finalmente, $\mathcal{F} = (1 + \theta - 2\theta \lambda_1(\sigma))^{-1} \rightarrow \frac{1}{1+\theta}$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, $W \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$.

Por lo que tenemos la condición inicial:

$$\frac{\sigma}{\tau} \rightarrow 1, \quad W \rightarrow 0 \text{ cuando } \tau \rightarrow -\infty \quad (5.71)$$

La segunda suposición en (5.16) y (5.21), (5.68) implican que σ y W necesitan tener los mismos valores límites (5.71) cuando $\tau \rightarrow \infty$. Así, la validez de nuestras hipótesis es equivalente a la existencia de una trayectoria $\gamma_s = (\sigma = \sigma_s(\tau), W = W_s(\tau))$ que satisface la condición (5.71) y

$$\frac{\sigma_s}{\tau} \rightarrow 1, \quad W_s \rightarrow 0 \text{ cuando } |\tau| \rightarrow \infty$$

5.4 Análisis del sistema dinámico básico.

Pasando a las variables $\tau' = \beta_1 \tau$, $\sigma' = \beta_1 \sigma$ y omitiendo las primas, reescribimos el sistema (5.70) en la misma forma pero con los lados derechos más sencillos:

$$Q = \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \sigma + 2(b_1 \bar{\lambda}_2 + \theta b_2 \lambda_2) \right\}, \quad (5.72)$$

$$P = \frac{\mathcal{F}}{2} \left\{ (1 - \theta \lambda_1^2) Q^2 - 2[1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)] Q + 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) \right\} - \frac{1}{\nu^2} \left(\lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right). \quad (5.73)$$

Aquí, L , F y las convoluciones tienen la forma:

$$L = \sigma + \theta \lambda_2 - \bar{\lambda}_2, \quad \mathcal{F} = (1 + \theta - 2\theta \lambda_1)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \lambda_i(\sigma) &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^{i-1} \omega_0(\sigma + \theta \eta) \omega_0(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2 \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0\left(\frac{\eta - \sigma}{\theta}\right) d\eta = \theta(\sigma \lambda_1 + \theta \lambda_2) \\ B_\Delta &= \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega(\theta \eta + \sigma) - \omega(\eta)) - F(\omega(\theta \eta + \sigma)) - F(\omega(\eta))] d\eta. \end{aligned}$$

Para realizar un análisis más detallado, usamos las propiedades de las convoluciones que se enuncian a continuación:

Lema 5.4. *Bajo las hipótesis del Lema 1 las siguientes relaciones son válidas:*

$$\begin{aligned} \lambda_1(-\sigma) &= \lambda_1(\sigma) > 0, & \lambda_1(\sigma) &= \lambda_1^0 + \mathcal{O}(\sigma^2) \text{ cuando } \sigma \rightarrow 0 \\ \operatorname{sgn}(\sigma \lambda_2(\sigma)) &= -1, & \operatorname{sgn}(\sigma \bar{\lambda}_2(\sigma)) &= 1 \\ \lambda_2(-\sigma) &= -\lambda_2(\sigma), & \bar{\lambda}_2(-\sigma) &= -\bar{\lambda}_2(\sigma), \\ \lambda_2(\sigma) &= \sigma \lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3), & \bar{\lambda}_2(\sigma) &= \sigma \bar{\lambda}_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3) \text{ cuando } \sigma \rightarrow 0, \\ B_\Delta(-\sigma) &= B_\Delta(\sigma), & B_\Delta(\sigma) &= B_\Delta^0 + \mathcal{O}(\sigma^2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= \lambda_1(0), & B_\Delta^0 &= B_\Delta(0), \\ \lambda_2^1 &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \frac{d\omega_0(z)}{dz} \Big|_{z=\theta\eta} d\eta < 0, & \bar{\lambda}_2^1 &= -\frac{1}{a_2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \frac{d\omega_0(z)}{dz} \Big|_{z=\frac{\eta}{\theta}} d\eta > 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Indicaremos únicamente la prueba de la relación $\lambda_2(\sigma) = \sigma \lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3)$.

Usando la fórmula de Taylor de primer orden y tomando en cuenta que ω_0 es par, obtenemos:

$$\lambda_2(\sigma) = \sigma \lambda_2^1 + \sigma^3 \frac{\beta_1^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0'''(\theta\eta + \xi\beta_1\sigma) d\eta, \quad (5.74)$$

donde $\xi \in [0, 1]$. Reescribimos la última integral como la siguiente suma:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \right\} \eta \omega_0(\eta) \omega_0'''(\theta\eta + \xi\beta_1\sigma) d\eta, \quad (5.75)$$

La segunda integral es acotada por una constante. Para la última integral tomamos en cuenta que

$$\theta\eta + \xi\beta_1\sigma \geq \text{cte} \cdot \eta \quad \text{para } |\sigma| \ll 1,$$

uniformemente en $\xi \in [0, 1]$.

Consideraciones similares para la primera integral en (5.75) implican que el residuo en (5.74) es del orden $\mathcal{O}(\sigma^3)$. ■

Estas propiedades y las fórmulas (5.67), (5.69), (5.72), (5.73) implican los siguientes resultados:

Corolario 5.1. *El sistema (5.70) es invariante con respecto al cambio de variables*

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad \sigma \rightarrow -\sigma, \quad W \rightarrow -W.$$

Corolario 5.2. *Bajo las hipótesis del lema 5.2:*

$$L \Big|_{\sigma=0} = 0 \quad (5.76)$$

y las siguientes estimaciones son válidas uniformemente en σ

$$(1 + \theta)^{-1} \leq \mathcal{F} \leq (1 + \theta - 2\theta\lambda_1^0)^{-1} = \mathcal{F}_0 \leq (1 - \sqrt{\theta})^{-2}. \quad (5.77)$$

Por el Lema 5.4 sabemos que $\lambda_2(\sigma)$ es impar, entonces

$$\begin{aligned}\lambda_2(\sigma) &= \lambda_2(0) + \frac{d\lambda_2}{d\sigma}(\sigma)\Big|_{\sigma=0}(\sigma) \\ &= \lambda_2^1\sigma + \lambda_2^3\sigma^3 + \lambda_2^5\sigma^5 + \dots \\ &= \lambda_2^1\sigma + \mathcal{O}(\sigma^3);\end{aligned}$$

como $\lambda_2(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma) d\eta$, de aquí que

$$\frac{d\lambda_2}{d\sigma} = \frac{\beta_1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \frac{\omega_0(z)}{dz} \Big|_{\theta\eta} d\eta,$$

entonces

$$\lambda_2^1 = \frac{\beta_1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \frac{d\omega_0(\theta\eta)}{dz} d\eta.$$

Similarmente, para $\bar{\lambda}_2$.

La igualdad (5.76) muestra que el sistema (5.70),(5.72),(5.73) tiene una singularidad en la recta $(0, W)$ en el plano (σ, W) . Asumiremos que esta singularidad es de tipo $\frac{1}{\sigma}$ y que no hay otros puntos de singularidad. Por lo tanto, elegimos la hipótesis adicional:

E1) Sean la función F y el número $\theta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ tales que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$L(\sigma) > 0 \text{ para } \sigma > 0, \quad L_1 = \frac{dL}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} > 0.$$

Notemos que la última condición implica en particular la desigualdad

$$\theta \neq 1 \tag{5.78}$$

Recíprocamente, bajo la condición (5.78) las estimaciones (5.77) garantizan que $\mathcal{F} \leq cte$ uniformemente en σ .

Así, la singularidad de Q es de tipo $\frac{1}{\sigma}$. De hecho, para $\theta = 1$ las singularidades de Q y P son de tipo $\frac{1}{\sigma}$ nuevamente. Sin embargo, este caso necesita considerarse separadamente y aquí supondremos la validez de la condición (5.78).

Hacemos la observación de que la hipótesis **E1)** se puede verificar para cualquier F no lineal y para cualquier θ definido por los datos iniciales. Más aún, esta hipótesis es realizable.

Ahora investiguemos cuando una trayectoria puede pasar del semi-plano izquierdo al derecho. Obviamente, esto puede pasar únicamente a través del punto $(0, 0)$, pues todo el eje W es una singularidad del sistema.

Consideremos una vecindad pequeña del origen de coordenadas. El Lema 5.4 implica que el sistema dinámico tiene la siguiente representación para $|\sigma| \leq 1$:

Primero, nótese que

$$\begin{aligned}
 L &= \sigma + \mathcal{O}\lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \\
 &= \sigma + \theta\sigma\lambda_2^1 - \sigma\bar{\lambda}_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3) \text{ cuando } \sigma \rightarrow 0 \\
 &= \sigma[1 + \theta\lambda_2^1 - \bar{\lambda}_2^1] + \mathcal{O}(\sigma^3) \\
 &= \sigma L_1 + \mathcal{O}(\sigma^3) \\
 &= \sigma[L_1 + \mathcal{O}(\sigma^2)] \text{ cuando } \sigma \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

donde $L_1 = [1 + \theta\lambda_2^1 - \bar{\lambda}_2^1]$. También nótese que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathcal{F}} &= 1 + \theta - 2\theta\lambda_1 \\
 &= 1 + \theta - 2\theta(\lambda_1^0 + \mathcal{O}(\sigma^2)) \text{ por el Lema 5.4} \\
 &= 1 + \theta - 2\theta\lambda_1^0 + \mathcal{O}(\sigma^2) \text{ cuando } \sigma \rightarrow 0 \\
 &= \mathcal{F}_0^{-1} + \mathcal{O}(\sigma^2).
 \end{aligned}$$

Así, la primera ecuación del sistema es:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\tau} &= \frac{1}{L} \left(\frac{W}{\mathcal{F}} + \sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma[L_1 + \mathcal{O}(\sigma^2)]} \left[\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0} + \mathcal{O}(\sigma^2) \right) W + \sigma + 2\sigma(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1) + \mathcal{O}(\sigma^3) \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma[L_1 + \mathcal{O}(\sigma^2)]} \left[\frac{W}{\mathcal{F}_0} + \sigma + 2\sigma(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1) + \mathcal{O}(\sigma^2)W + \mathcal{O}(\sigma^3) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{\sigma[L_1 + \mathcal{O}(\sigma^2)]} \left[\frac{1}{\mathcal{F}_0} \frac{W}{\sigma} + 1 + 2(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1) + \mathcal{O}(\sigma)W + \mathcal{O}(\sigma^2) \right],
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{L_1} \left[\frac{1}{\mathcal{F}_0} \frac{W}{\sigma} + 1 + 2(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1) \right] + \mathcal{O}(\sigma)W + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

de $\frac{1}{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(\sigma^2) = \frac{1+\mathcal{O}(\sigma^2)}{\mathcal{O}_0}$ se sigue que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \frac{1}{1+\mathcal{O}(\sigma^2)} = \mathcal{F}_0(1 - \mathcal{O}(\sigma^4) + \dots)$.

En $\frac{dW}{d\tau}$, tomando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{d\tau} &= \frac{\mathcal{F}}{2} \{ (1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2[1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)]Q + 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) \} \\
 &\quad - \frac{1}{\nu^2} \left(\lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{F}_0}{2} \{ (1 - \theta(\lambda_1^0)^2)Q^2 - 2[1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)]Q + R \} + \mathcal{O}(\sigma^2),
 \end{aligned}$$

con $R = 1 - 2\lambda_1^0(\theta b_1^2 + b_2^2) - \frac{2}{\mathcal{F}_0\nu^2} \left(\lambda_1^0 + \frac{B_\Delta^0}{2\beta_1\beta_2} \right)$.

Entonces, para $|\sigma| \leq 1$, el sistema es,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} &= \frac{1}{L_1} \left[\frac{1}{\mathcal{F}_0} \frac{W}{\sigma} + 1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1) \right] + \mathcal{O}(\sigma)W + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ \frac{dW}{d\tau} &= \frac{\mathcal{F}_0}{2} \left[(1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 - 2(1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)) \frac{d\sigma}{d\tau} + R \right] + \mathcal{O}(\sigma^2). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Ahora, podemos transformar el sistema (5.79) de la siguiente manera, despejando W de la primera ecuación en (5.79) tenemos:

$$W = \mathcal{F}_0 \sigma \left[L_1 \frac{d\sigma}{d\tau} - 1 - 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1) \right] + \mathcal{O}(\sigma^2 W + \sigma^3) \quad (5.80)$$

y derivando con respecto a τ :

$$\frac{dW}{d\tau} = \mathcal{F}_0 L_1 \frac{d}{d\tau} \left(\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right) - [1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1)] \mathcal{F}_0 \frac{d\sigma}{d\tau} + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right),$$

sustituyendo en la segunda ecuación de (5.79):

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 L_1 \frac{d}{d\tau} \left(\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right) - \mathcal{F}_0 [1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1)] \frac{d\sigma}{d\tau} + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\mathcal{F}_0}{2} \left[(1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 - 2(1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)) \frac{d\sigma}{d\tau} + R \right] + \mathcal{O}(\sigma^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &2L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) - 2[1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1)] \frac{d\sigma}{d\tau} + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right) \\ &= (1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 - 2(1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)) \frac{d\sigma}{d\tau} + R + \mathcal{O}(\sigma^2), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) &= (1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + [-2(1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)) + 2(1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1))] \frac{d\sigma}{d\tau} \\ &+ R + \mathcal{O}(\sigma^2) + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right), \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) &= (1 + \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + [2\lambda_1^0(b_2 - \theta b_1) + 4(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1)] \frac{d\sigma}{d\tau} \\ &+ R + \mathcal{O}(\sigma^2) + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\bar{\lambda}_2 = \theta(\sigma\lambda_1 + \theta\lambda_2)$ encontramos que

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_2^1 &= \frac{\bar{\lambda}_2}{\sigma} + \mathcal{O}(\sigma^2) = \frac{\theta(\sigma\lambda_1 + \theta\lambda_2)}{\sigma} + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= \theta\lambda_1(\sigma) + \theta^2 \frac{\lambda_2(\sigma)}{\sigma} + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= \theta\lambda_1(\sigma) + \theta^2\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= \theta\lambda_1^0 + \theta^2\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= \theta(\lambda_1^0 + \theta\lambda_2^1) + \mathcal{O}(\sigma^2)\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}2\lambda_1^0(b_2 - \theta b_1) + 4(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1) &= 2\lambda_1^0(b_2 - \theta b_1) + 4b_1\theta(\lambda_1^0 + \theta\lambda_2^1) + 4\theta b_2\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= 2b_2\lambda_1^0 - 2\theta b_1\lambda_1^0 + 4\theta b_1\lambda_1^0 + 4\theta^2 b_1\lambda_2^1 + 4\theta b_2\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= 2b_2\lambda_1^0 + 2\theta b_1\lambda_1^0 + 4\theta^2 b_1\lambda_2^1 + 4\theta b_2\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= 2(\lambda_1^0 + 2\theta\lambda_2^1)(b_2 + \theta b_1) + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= 2N + \mathcal{O}(\sigma^2).\end{aligned}$$

donde, se toma

$$N = (\lambda_1^0 + 2\theta\lambda_2^1)(b_2 + \theta b_1). \quad (5.81)$$

De aquí que,

$$L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) = (1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + 2N \frac{d\sigma}{d\tau} + R + \mathcal{O}(\sigma^2) + \mathcal{O} \left(\sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right). \quad (5.82)$$

Ahora, aplicando el método de Cauchy-Kovalevskaya y tomando en cuenta que $\sigma = \sigma(\tau)$ es impar, escribimos:

$$\sigma = a_1\tau + a_3\tau^3 + a_5\tau^5 + \dots \quad (5.83)$$

con coeficientes arbitrarios a_i .

El método de Cauchy-Kovalevskaya es un método por medio del cual podemos encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial numéricamente.

Para nuestro problema, primeramente escribimos la ecuación (5.82) de la siguiente manera:

$$L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) - (1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 - 2N \frac{d\sigma}{d\tau} - R = 0$$

Entonces, para orden de τ^0 :

$$(2L_1 - 1 + \theta(\lambda_1^0)^2)a_1^2 - 2Na_1 - R = 0.$$

Denotemos como $M = 2L_1 - 1 + \theta(\lambda_1^0)^2$.

La ecuación obtenida para orden de τ^0 tiene solución si y sólo si $N^2 + MR \geq 0$. Supongamos que esto se satisface.

En orden τ^2 :

$$[2L_1 + M]a - Na_3 = 0.$$

En orden τ^4 :

$$(4L_1 + M)a_1 - Na_5 = \frac{1}{10}[9(1 - \theta(\lambda_1^0)^2) - 30L_1]a_3^2 = f_5(a_1, a_3).$$

En orden τ^6 :

$$[6L_1 + M]a_1 - Na_7 = \frac{1}{14}a_3a_5[30(1 - \theta(\lambda_1^0)^2) - 112L_1] = f_7(a_1, a_3, a_5).$$

En orden τ^{2n} :

$$\{[2nL_1 + M]a_1 - N\} a_{2n+1} = f_{2n+1}(a_1, a_2, a_5, \dots, a_{2n-1})$$

De este procedimiento se sigue que la ecuación (5.82) y algebra simple implican las siguientes ecuaciones:

$$Ma_1^2 - 2Na_1 - R = 0 \quad (5.84)$$

$$[(M + 2nL_1)a_1 - N] a_{2n+1} = f_{2n+1}(a_1, \dots, a_{2n-1}), \quad n \geq 1, \quad (5.85)$$

donde

$$M = 2L_1 - (1 - \theta(\lambda_1^0)^2). \quad (5.86)$$

Si $M \neq 0$, para a_1 obtenemos dos raíces

$$a_1^\pm = \frac{1}{M} \left(N \pm \sqrt{N^2 + MR} \right) \quad (5.87)$$

Consecuentemente, la función $\sigma(\tau)$ tiene la representación (5.83) únicamente bajo las condiciones

$$N^2 + MR > 0, \text{ y } (M + 2nL_1)a_1^\pm - N \neq 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (5.88)$$

La primera desigualdad en la ecuación (5.88) garantiza la existencia de las raíces y la segunda de no ser válida los coeficientes a_i en (5.85) se anularían.

Sin embargo, M puede ser arbitraria (incluyendo el caso $M = 0$ ya que $\theta(\lambda_1^0)^2 < 1$ para $\theta < 1$ y $\theta(\lambda_1^0)^2 > 1$ para $\theta > 1$) y tenemos que investigar todas las posibles situaciones.

Sea $M > 0$. Entonces,

$$a_1^- < 0, \quad a_1^+ > 0 \quad \text{y} \quad Ma_1^- < N < Ma_1^+$$

Sea $R > 0$. Entonces ambas condiciones (5.88) se satisfacen ya que

$$(M + 2nL_1^0)a_1^+ - N > 2nL_1^0a_1^+ > 0 \quad \text{y} \quad (M + 2nL_1^0)a_1^- - N < 2nL_1^0a_1^- < 0$$

Luego, si $R < 0$, entonces necesitamos suponer la validez de la primera condición en (5.88). Más aún, la segunda condición (5.88) puede ser transformada a la siguiente forma:

$$N \neq \sqrt{N^2 + MR}(1 + q_n) \text{ para toda } n = 1, 2, \dots, \quad (5.89)$$

donde los números q_n definidos de la siguiente manera,

$$q_n := \frac{M}{2nL_1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1 - \theta(\lambda_1^0)^2}{2L_1} \right),$$

son positivos. Para $M > 0$ y $R < 0$ ambas raíces a_1^\pm son positivas si y sólo si $N > 0$, pues de lo contrario, de (5.87) $N^2 + MR > 0$ lo cual implica que $0 < N^2 + MR < N^2$ entonces $\sqrt{N^2 + MR} < \sqrt{N^2} = N$. Así, si $M > 0$, $R < 0$ y $N < 0$ entonces $a_1^+ < 0$ y $a_1^- < 0$. Si $R = 0$ entonces existen $a_1^+ > 0$ si y sólo si $N > 0$.

Considerando de la misma manera el caso $M < 0$ obtenemos la condición:

E2) Sea $M \neq 0$. Más aún, sean la función F y las velocidades V_i tales que las siguientes hipótesis se valen:

E2a) Si $M > 0$ entonces $R > 0$ o $R < 0$ y se satisfacen las condiciones (5.89), $N > 0$ y

$$N^2 + MR > 0, \quad (5.90)$$

o $R = 0$ y $N > 0$.

E2b) Si $M < 0$ entonces $R < 0$ y se satisface (5.89) o $R > 0$ y se satisfacen (5.89), (5.90) y $N < 0$ o $R = 0$ y $N < 0$ y

$$1 - \theta(\lambda_1^0) \neq 2L_1(1 + 2n) \text{ para toda } n = 1, 2, \dots$$

Observación 5.2. Teóricamente, también existe un caso específico cuando $M = 0$. Sin embargo, en este trabajo no lo consideraremos.

Calculando la coordenada W de las trayectorias en la forma similar a (5.83), esto es

$$W = \omega_1\tau + \omega_3\tau^3 + \dots, \quad (5.91)$$

pasamos al siguiente resultado:

Lema 5.5. Supongamos que las hipótesis **A-E2** se satisfacen. Entonces, existe al menos una trayectoria $\gamma_s = \{(\sigma = \sigma_s(\tau), W = W_s(\tau))\}$ del sistema (5.70), (5.72), (5.73) la cual pasa del semiplano izquierdo (W, σ) al semiplano derecho cuando τ crece desde $-\tau_0$ hasta τ_0 , para τ_0 suficientemente pequeña.

Observemos lo siguiente:

1. a_1^- y a_2^+ significa que hay dos posibles curvas en el diagrama de flujo las cuales pueden ser ambas positivas.

2. ω_i y a_i nos dan las pendientes de cada una de tales curvas, $m = \frac{\omega_i}{a_i}$.

El siguiente paso en el análisis es la consideración del sistema (5.70), (5.72), (5.73) para $\sigma \rightarrow \pm\infty$. Ya que las convoluciones se anulan cuando $\sigma \rightarrow \pm\infty$, tenemos:

$$Q = 1 + (1 + \theta)\frac{W}{\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(1 + \frac{W}{\sigma}\right)\right), \quad P = \frac{1}{2(1 + \theta)}(Q - 1)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \quad (5.92)$$

Ahora, procedemos a resolver el sistema (5.70), (5.92) en sus términos principales para $|\sigma|$ grande. Resolveremos el sistema (5.70) por separación de variables se sigue que:

De lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dW} &= \frac{2(1 + \theta)[\sigma + (1 + \theta)W]}{\sigma[(1 + \theta)^2\left(\frac{W}{\sigma}\right)^2]} \\ &= \frac{2\sigma[\sigma + (1 + \theta)W]}{(1 + \theta)^2W^2} \\ &= \frac{2\sigma^2}{(1 + \theta)W^2} + \frac{2\sigma}{W} \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea. Ahora, haciendo el cambio de variables $\sigma = uW$ se sigue que $d\sigma = u dW + W du$ dividiendo esta igualdad por dW tenemos que $\frac{u dW + W du}{dW} = \frac{2}{(1 + \theta)}u^2 + 2u$ entonces $u dW + W du = \left[\frac{2}{(1 + \theta)u^2 + 2u}\right] dW$, así $W du = \left(\frac{2}{(1 + \theta)}u^2 + u\right) dW$. Luego,

$$\frac{du}{\frac{2}{(1 + \theta)}u^2 + u} = \frac{dW}{W},$$

denotemos por $\kappa = \frac{2}{1 + \theta}$ entonces $\frac{du}{\kappa u^2 + u} = \frac{dW}{W}$.

Ahora, integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\kappa u^2 + u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{W}.$$

Utilizaremos el método de integración en fracciones parciales:

$$\frac{1}{\kappa u^2 + u} = \frac{1}{u(\kappa u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{\kappa u + 1} = \frac{A(\kappa u + 1) + Bu}{u(\kappa u + 1)} = \frac{(A\kappa + B)u + A}{\kappa u^2 + u},$$

entonces $1 \equiv (A\kappa + B)u + A$. Así, $A\kappa + B \equiv 0$ y $A = 1$ entonces $B \equiv -\kappa$.

De aquí que,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\kappa u^2 + u} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{\kappa}{\kappa u + 1} \right) du = \ln(u) - \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\kappa u + 1} \\ &= \ln(u) - \ln(\kappa u + 1) = \ln\left(\frac{u}{\kappa u + 1}\right), \end{aligned}$$

donde hicimos uso del cambio de variables, $x = \kappa u + 1$.

Ahora, $\ln(\frac{u}{\kappa u + 1}) = \ln(W) + \ln(\alpha)$, donde $\ln(\alpha)$ es una constante, de aquí que $\frac{u}{\kappa u + 1} = \alpha W$.

Luego, de $\sigma = uW$ tenemos $u = \frac{\sigma}{W}$. Así,

$$\frac{\frac{\sigma}{W}}{\kappa \frac{\sigma}{W} + 1} = \alpha W, \quad (5.93)$$

entonces $\sigma = \frac{\alpha W^2}{1 - \alpha \kappa W}$.

Buscamos la solución que pase por el punto (σ_0, W_0) ; así de (5.93) se sigue que $\alpha = \frac{\sigma_0}{W_0(\kappa \sigma_0 + W_0)}$. Luego,

$$\sigma = \frac{\alpha W^2}{1 - \alpha \kappa W} = \frac{W^2}{\rho - \kappa W} = \frac{W^2}{\rho - \frac{2}{1+\theta} W} = \frac{W^2}{\frac{2}{1+\theta} [\frac{1+\theta}{2} \rho - W]} = \frac{1+\theta}{2} \frac{W^2}{C - W}, \quad (5.94)$$

de aquí que $\sigma = \frac{1+\theta}{2} \frac{W^2}{C - W}$; en estas igualdades se denotaron como $\rho = \frac{1}{\alpha}$ y por $C = \frac{1+\theta}{2} \rho$, de donde

$$C = W_0 \left(1 + \frac{1+\theta}{2} \frac{W_0}{\sigma_0} \right). \quad (5.95)$$

Como σ es grande concluimos que $\frac{1}{\sigma}$ es pequeño, $\frac{1}{\sigma} = \frac{2}{1+\theta} \frac{C-W}{W^2}$. Así, si $|\sigma| \gg 1$ entonces $W \approx C$. En otro caso, si W es muy grande es un caso que no nos preocupa ya que buscamos que $W \rightarrow 0$.

De este procedimiento concluimos que la solución del sistema (5.70), (5.92) esta dada por las ecuaciones (5.94) y (5.95), donde $W_0 = W|_{\sigma=\sigma_0}$. Por lo tanto,

$$W = C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right) \text{ cuando } |\sigma| \gg 1.$$

Más aún,

$$W = C - \frac{1+\theta}{2\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right).$$

La última fórmula, implica la estabilización de las coordenadas W de cualquier trayectoria para $\tau \rightarrow \pm\infty$, si $|W_0| = |W(\tau_0)|$ es acotada por una constante y $|\sigma_0| = |\sigma(\tau_0)|$ es suficientemente grande.

De aquí se sigue que la curva γ_s buscada no existe, pues hemos mostrado que las hipótesis ya establecidas en (5.71) no se satisfacen.

El último paso del análisis del sistema (5.70), (5.72), (5.73) es la consideración de las isoclinas.

Recordemos que las isoclinas se obtienen haciendo $Q \equiv 0$ y $P \equiv 0$ es decir, $\frac{d\sigma}{d\tau} = 0$ y $\frac{dW}{d\tau} = 0$; luego la pendiente en el plano $\sigma - W$ es $\frac{dW}{d\sigma} = \frac{P}{Q}$. Si $P = 0$ obtenemos la curva en el plano $\sigma - W$ que es atravesada por las trayectorias en forma horizontal. Si $Q = 0$ entonces $\frac{dW}{d\sigma} = \infty$ así Q es

la curva en el plano $\sigma - W$ que es atravesada por las trayectorias en el sistema dinámico en forma vertical. Es otras palabras, las isoclinas son curvas que son atravesadas por las trayectorias del retrato fase con una pendiente constante.

La isoclina $\gamma_Q = \{(\sigma, W), Q(\sigma, W) = 0\}$ es la curva

$$W_Q = -\mathcal{F}(\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2)),$$

la cual para $|\sigma|$ suficientemente grande es la recta $W_Q^\infty = W_Q = -\frac{\sigma}{1+\theta}$ cuando $|\sigma| \rightarrow \infty$. Hacemos hincapié en que la curva $W_Q = W_Q(\sigma)$ intersecta a la trayectoria γ_s en el origen. De hecho, si W_s denota a γ_s como la función $W_s(\sigma)$, entonces de (5.80) tenemos

$$W_s = \mathcal{F}_0\sigma \left\{ L_1 \frac{d\sigma}{d\tau} - \alpha \right\},$$

con $\alpha = 1 + 2(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1)$. Así que

$$\begin{aligned} \frac{dW_s}{d\sigma} &= \mathcal{F}_0 L_1 \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right) - \mathcal{F}_0 \alpha \\ &= \mathcal{F}_0 L_1 \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma(a_1 + 3a_3\tau^2 + \dots) \right) - \mathcal{F}_0 \alpha \\ &= \mathcal{F}_0 L_1 a_1 \sigma - \mathcal{F}_0 \alpha, \end{aligned}$$

pues $|\tau| \ll 1$ si $|\sigma| \ll 1$.

Ahora, si $|\sigma| \ll 1$, por el lema 5.4 tenemos que

$$W_Q = -\mathcal{F}\sigma(1 + 2(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1)) = -\mathcal{F}\sigma\alpha.$$

De modo que

$$\left\{ \frac{dW_s}{d\sigma} - \frac{dW_Q}{d\sigma} \right\} \Big|_{\sigma=0} = \mathcal{F}_0 L_1 a_1 > 0.$$

Para encontrar la isoclina $\gamma_P = \{(\sigma, W), P(\sigma, W) = 0\}$ necesitamos resolver primeramente la ecuación

$$(1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2D_1Q + D_2 = 0, \quad (5.96)$$

donde

$$D_1 = 1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1), \quad D_2 = 1 - 2\lambda_1(b_2^2 + \theta b_1^2) - \frac{2}{\nu^2 \mathcal{F}} \left(\lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right).$$

Denotemos por $Q_\pm(\sigma)$ a las raíces de (5.96).

$$Q^\pm = \frac{D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - (1 - \theta\lambda_1^2)D_2}}{(1 - \theta\lambda_1^2)},$$

(5.96) tiene soluciones si y sólo si el discriminante

$$\begin{aligned} D &= D_1^2 - (1 - \theta\lambda_1^2)D_2 \\ &= [1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)]^2 - (1 - \theta\lambda_1^2) \left[1 - 2\lambda_1(b_2^2 + \theta b_1^2) - \frac{1}{\mathcal{F}\nu^2} \left(\lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right) \right] \end{aligned}$$

es positivo.

Entonces, obtenemos las siguientes expresiones para $W_P^\pm = W_P^\pm(\sigma)$ de la isoclina γ_P :

$$W_P^\pm = \mathcal{F}(LQ^\pm(\sigma) - \sigma - 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2)).$$

Para $|\sigma|$ suficientemente grande (5.96) tiene como única raíz $Q^\pm = 1$, pues cuando $|\sigma| \rightarrow \pm\infty$ sabemos que $\lambda_i \rightarrow 0$ y $B_\Delta \rightarrow 0$.

Un análisis asintótico de las convoluciones implica el siguiente resultado (ver [12]):

Lema 5.6. *Bajo las hipótesis A)-D)*

$$D_P \rightarrow +0 \quad \text{cuando} \quad |\sigma| \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado

Corolario 5.3. *La isoclina γ_P consiste en dos ramas W_P^\pm los cuales están definidos al menos para $|\sigma|$ suficientemente grande y tienden a juntarse cuando $|\sigma| \rightarrow \infty$. Si $D_P \geq 0$ para toda $\sigma \in \mathbb{R}$, entonces los brazos W_P^\pm pasan a través del punto $(0, 0)$.*

La figura 5.9 muestra las isoclinas que hemos calculado anteriormente para $\sigma = 0$, y $N = 100$ las cuales obtuvimos por medio de un programa de simulación en Maple.

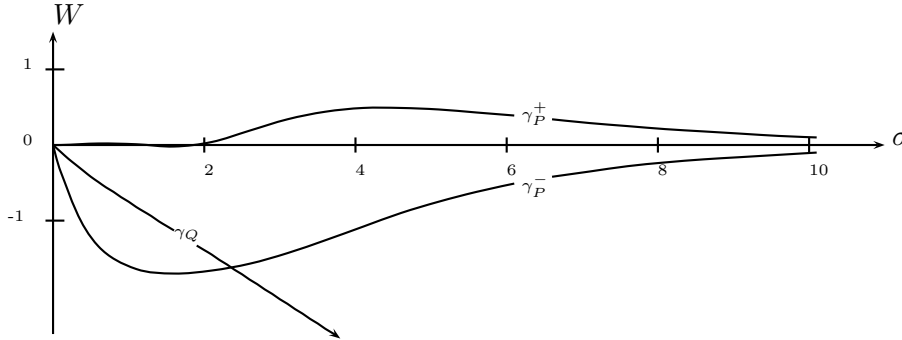


Figura 5.9: Gráfica de las isoclinas del γ_P^\pm y γ_Q con $\sigma = 0$, $\Delta\sigma = 0.1$, $N = 100$.

Como un resultado de este análisis obtenemos el siguiente:

Lema 5.7. *Supongamos que las hipótesis A)-E2) se satisfacen. Entonces el sistema dinámico (5.70), (5.72), (5.73) tiene al menos una trayectoria γ_s la cual se encuentra en la franja $\{\sigma \in \mathbb{R}, |W| \leq cte\}$ y pasa del semiplano $(-W_s^\infty, -\infty)$ al semiplano (W_s^∞, ∞) a través del punto $(0, 0)$.*

5.5 Consideraciones gráficas

Ilustraremos todo esto con el ejemplo que presentamos a continuación.

Las figuras 5.10 y 5.11 representan resultados de la simulación numérica para la ecuación de

sine-Gordon $F(z) = \frac{1-\cos(2\pi z)}{4\pi^2}$, $\omega = \frac{2}{\pi} \arctan(e^\eta)$, ya mencionada anteriormente en (5.4) en el caso $V_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, y $V_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Como se mencionó anteriormente, existen dos curvas para este problema cuyas pendientes están dadas por $\frac{dW}{d\sigma} = m^\pm = \frac{\omega_i}{a_i}$; para el caso en que $\sigma = .1$, $a_1^+ = 1.088$ y $m^+ = .041$ se sigue que $W = \sigma m^+ = .0041$ con $L_1 = 0.1754$. Para estas condiciones iniciales, este resultado es representado por la figura 5.10. Esta figura confirma todos los resultados mencionados

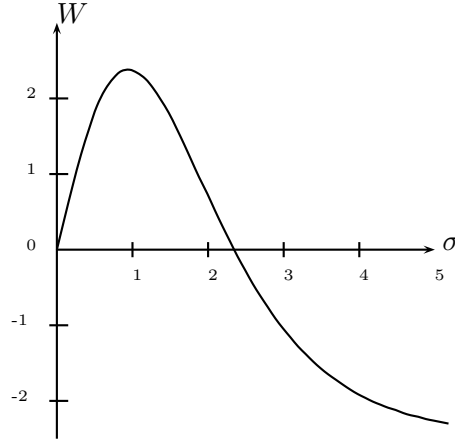


Figura 5.10: La curva (5.83), (5.91) obtenida con el método de Cauchy-Kovalevskaya para $\sigma = .1$, $W = \sigma m^+ = .0041$, donde $m^+ = .041$

anteriormente, pues para el caso en que $\theta = 1$ la figura corta el eje σ como era de esperarse.

Ahora para el caso en que $a_1^- = -.300$, $m^- = 0.7008$ para los mismos valores de σ y L_1 se sigue que $W = \sigma m^- = .07008$ y obtenemos la figura 5.11. Con estas simulaciones mostramos

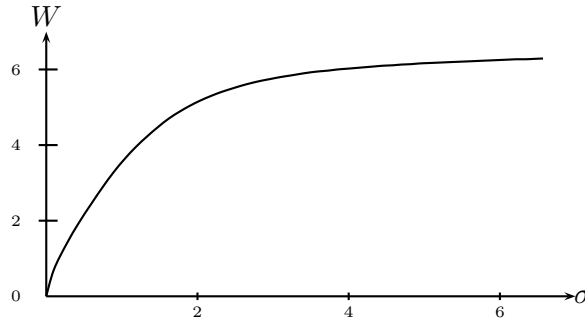


Figura 5.11: La curva (5.83), (5.91) obtenida con el método de Cauchy-Kovalevskaya para $\sigma = .1$, $W = \sigma m^- = .7008$, donde $m^- = .07008$

nuevamente que las trayectorias que atraviesan del semiplano izquierdo al derecho se estabilizan en una constante, con lo que confirmamos una vez más que la curva γ_s que hemos buscado no existe.

Como $R < 0$ para las velocidades analizadas en el ejemplo anterior aparecen dos puntos sillar los cuales son aproximadamente $(\sigma_*^\pm, W_*^\pm) = (\pm 1.19, \mp 0.84)$.

Apliquemos ahora los resultados obtenidos para los cálculos de los cambios de fases φ_{i1} . Pasando a $\pm\infty$ a lo largo de las trayectorias γ_s^\pm y usando las formulas (5.66), (5.67), (5.70), (5.72) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}}{d\tau} &= -\left[\frac{G_1}{\theta G_2} \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} \right] = -\frac{\sigma'_\tau - 1}{\theta(\sigma'_\tau - 1)} \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} \\ &= -\frac{1}{\theta} \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} = -\frac{W_s^\infty}{\sigma_s} \end{aligned}$$

cuando $|\tau| \gg 1$.

Sea $W_s^\infty \neq 0$. Como $\sigma_s(\tau) = \tau + \mathcal{O}(1)$ para tal τ , esto implica un comportamiento tipo logarítmico para φ_{i1} cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Obviamente, obtenemos una contradicción con la segunda hipótesis (5.16). Por otro lado, el término principal en (5.14) de la solución asintótica no contiene ningún parámetro para cambiar el valor de W_s^∞ .

La gráfica 5.12 nos muestra el retrato fase del sistema para la ecuación de sine-Gordon.

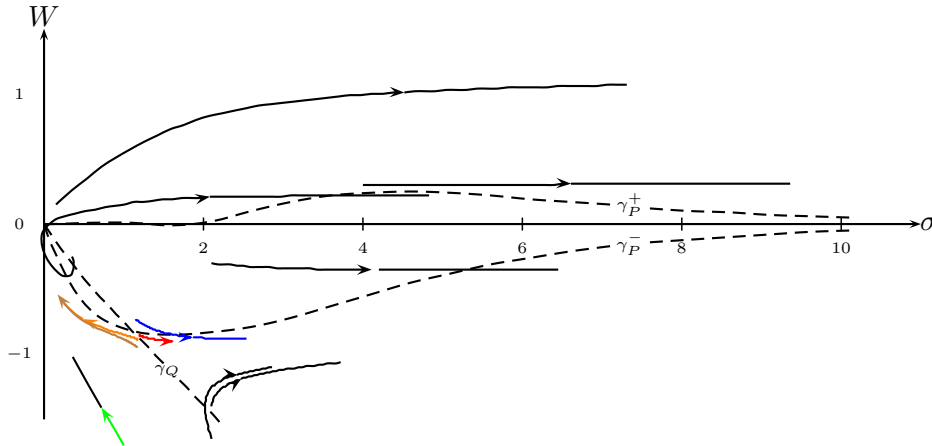


Figura 5.12: Retrato fase del sistema, para la ecuación de sine-Gordon. Las curvas punteadas son las isoclinas y las restantes son trayectorias, dadas condiciones iniciales. Las flechas muestran la dirección del movimiento de las trayectorias.

De hecho, en el vemos que las trayectorias efectivamente cortan a las asíntotas de forma vertical en el caso de γ_Q y de forma horizontal en el caso de γ_P como se mencionó anteriormente.

Para el caso de la función $F(z) = \sin^4(\pi z)$, con $\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot}(-\sqrt{2}\pi\eta)$, encontramos que la isoclina γ_P existe para valores grandes de σ , pero no existe para el caso en que σ es pequeña, pues el discriminante $D_1^2 - (1 - \theta\lambda_1^2)^2 D_2^2$ es negativo.

Por lo tanto, necesitamos cambiar el anzatz.

5.6 El anzatz modificado

En lo que sigue escribiremos τ y σ en vez de $\beta_1\tau$ y $\beta_1\sigma$, para simplificar las fórmulas.

Como escribimos en la sección 5.1, la idea principal es la corrección del anzatz con el objetivo de rotar las trayectorias fase cerca del origen de tal manera que los valores límites W_s^∞ sean los que se requieren. Para hacer esto agregamos al término principal (5.14) una corrección pequeña, localizada cerca del origen. La construcción de la corrección depende del signo del coeficiente M en la ecuación (5.85). Consideraremos el caso en el que la trayectoria $\gamma_s = \{W = W_s(\sigma)\}$ satisface $\left. \frac{dW_s}{d\sigma} \right|_{\sigma \rightarrow -\infty} > 0$. Entonces necesitamos rotar γ_s en la dirección del sentido del reloj.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Lema 5.8. *Bajo las hipótesis del lema 5.7 existen correcciones del término principal de la ecuación 5.14 tal que ambas condiciones 5.16 se satisfacen.*

DEMOSTRACIÓN: Buscamos una solución asintótica de la siguiente forma:

$$u = \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega \left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \frac{A_i}{\sqrt{a'_2}} U \left(S_i \mu \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\}. \quad (5.97)$$

Aquí las funciones ω , Φ_i y la notación τ , σ , S_i son los mismos que para la ecuación (5.14), $A_i = A_i(\mu \beta_i \tau)$, donde $A_i(z) \in C^\infty$ son funciones que se anulan exponencialmente cuando $|z| \rightarrow \infty$, μ es un parámetro suficientemente pequeño, $\varepsilon < \mu < 1$, y

$$U(\eta) = \frac{d^m U_0(\eta)}{d\eta^m}, \quad a'_2 = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} (U(\eta))^2 d\eta,$$

donde $m \geq 1$ es un número arbitrario y $U_0(\eta) \in C^\infty$ es una función que se anula suficientemente rápido cuando $\eta \rightarrow \infty$. Más aún, asumiremos que $U(\eta)$ es una función impar.

En el sentido de C la función U es del orden de $\mathcal{O}(1)$. Sin embargo, es arbitrariamente pequeña en el sentido de \mathcal{D}' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U \left(\mu \beta \frac{x - \Phi}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \left(-\frac{\varepsilon}{\mu \beta} \right)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_0 \left(\mu \beta \frac{x - \Phi}{\varepsilon} \right) \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right\} dx = \mathcal{O} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^m \right).$$

Analicemos que evidentemente el nuevo anzatz nos da correcciones cerca del origen para la solución del problema.

En el instante de tiempo inicial $t = 0$ obtenemos que las correcciones $\Phi_i = \varphi_{i0}(t) + \varepsilon \varphi_{i1}(\tau)$, que incluimos en el anzatz viejo y que ahora nuevamente consideramos para las nuevas correcciones, nos da la siguiente información:

Ya que $\tau = \frac{\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)}{\varepsilon}$ en $t = 0$ es $\tau = \frac{x_2^* - x_1^*}{\varepsilon} \gg 1$, esto es $\varphi_{i1}(\tau) \approx \varphi_{i1}^\infty$ por la segunda hipótesis en (5.16).

De aquí que $\Phi_i \approx \varphi_{i0}(0) + \varepsilon \varphi_{i1}^\infty = x_i^0$.

Así, $\frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \gg 1$ luego $\mu \tau \ll 1$, esto es $U(S_i \beta_i \mu \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon}) \ll 1$ y $A_i \ll 1$.

Por lo tanto, hemos visto que el comportamiento de la solución sigue siendo una onda de choque. Las hipótesis de estas nuevas funciones que anexamos al anzatz nos garantizan que la curva γ_s que buscamos tiende a cero cuando $\sigma \rightarrow \pm\infty$, lo cual mostraremos más adelante.

Iniciemos ahora con la prueba de este lema:

Para probar el lema necesitamos construir nuevamente la solución asintótica. Sin embargo, aparecen obstáculos técnicos no triviales al calcular los términos de la relación (5.9) para el anzatz (5.97), ya que el término principal de la expansión asintótica tiene una estructura algebraica extremadamente grande. Debido a estas complicaciones y a lo difícil del análisis de las ecuaciones que van surgiendo, se propone considerar términos con precisión $\mathcal{O}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu)$. Nos limitaremos a mostrar sólo los resultados principales y a comentar cómo éstos se utilizan para alcanzar el objetivo deseado. Los detalles se pueden consultar en [12].

Para calcular los términos de la ecuación (5.9) tomamos en cuenta las siguientes relaciones:

$$\omega_{0i}U_j \approx \omega_{0i}U'_j = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \text{ considerando que } \omega_{0i}U_j \approx \omega_{0i}U'_j \text{ y } U_iU_j \approx U_iU'_j = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon\mu^{-1}), \quad i \neq j.$$

El término $(\varepsilon u_x)^2$ tiene la misma forma que (5.28), mod $\mathcal{O}(\varepsilon\mu)$.

Para el término $F(u)$ se tiene

$$2F(u) = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{1}{\beta_2} B_{\Delta A} \delta(x - x^*) \right\}, \quad B_{\Delta A} = \frac{1}{\mu} (B + \mu B_{\Delta}), \quad (5.98)$$

donde B_{Δ} esta definido en (5.52) y

$$B = \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} F \left(\omega \left(\frac{\theta}{\mu} \eta + \sigma \right) - \omega \left(\frac{\eta}{\mu} \right) + \frac{A_1}{\sqrt{a'_2}} U(\theta\eta + \mu\sigma) - \frac{A_2}{\sqrt{a'_2}} U(\eta) \right) - F \left(\omega \left(\frac{\theta}{\mu} \eta + \sigma \right) - \omega \left(\frac{\eta}{\mu} \right) \right) d\eta.$$

Además

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_t)^2 &= (\varepsilon u_t)^2 \Big|_{A_i=0} + a_2 \nu^2 \frac{\varepsilon}{\mu} \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i A_i'^2 - 2\beta_1 A_1' A_2' \Lambda_1 \right\} (1 + \mathcal{O}(\mu)) \delta(x - x^*), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^2 u_t u_x) &= -a_2 \nu^2 \frac{dK_2}{d\tau} \delta(x - x^*) + \varepsilon a_2 \nu^2 \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \varphi_{i1} + W_A \right) \delta'(x - x^*) \\ &\quad + \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_i' &= \frac{dA_i(z)}{dz} \Big|_{z=\frac{\beta_i \tau}{\beta_1}}, \quad K_{2A} = K_2 + r_0, \\ W_A &= \chi_2 K_{2A} + W - \chi_2 K_2 + \frac{r_1}{\mu} + r_{11} - r_2 \sum_{i=1}^2 \Phi_{it}, \end{aligned}$$

las funciones K_2 , W están definidas en, (5.58),

$$r_0 = A'_2(\Lambda_{01} + A_1\Lambda_3) + A'_1(\Lambda_{02} + A_2\Lambda_4), \quad r_{11} = \theta(A'_2\bar{\Lambda}_{01} + A'_1\bar{\Lambda}_{02}) - \alpha \sum_{i=1}^2 A'_i,$$

$$r_1 = \theta(A_1A'_2\bar{\Lambda}_3 + A_2A'_1\bar{\Lambda}_4) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 A_iA'_i, \quad r_2 = a_3\theta A_1A_2\bar{\Lambda}_2.$$

Aquí se está usando la siguiente notación

$$\Lambda_1 = \frac{1}{a_2a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta)U(\theta\eta + \mu\sigma)d\eta, \quad \Lambda_3 = \frac{1}{a_2a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta)U'(\theta\eta + \mu\sigma)d\eta,$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{a_2a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U'(\eta)U(\theta\eta + \mu\sigma)d\eta, \quad \bar{\Lambda}_2 = \frac{1}{a_2a'_2a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \eta U'(\eta)U'(\theta\eta + \mu\sigma)d\eta,$$

$$\Lambda_{01} = \frac{1}{a_2\sqrt{a'_2}a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \sigma)U(\mu\eta)d\eta,$$

$$\Lambda_{02} = \frac{1}{a_2\sqrt{a'_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta)U(\mu(\theta\eta + \sigma))d\eta,$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} (U'(\eta))^2d\eta, \quad \alpha = \frac{1}{a_2\sqrt{a'_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta\omega_0(\eta)U(\mu\eta)d\eta,$$

y $\bar{\Lambda}_3$, $\bar{\Lambda}_4$, $\bar{\Lambda}_{0i}$ denotan convoluciones similares a Λ_3 , Λ_4 , Λ_{0i} respectivamente pero con el factor adicional η en el integrando.

Sustituyendo estas asintóticas en (5.7) obtenemos las relaciones (5.62) y las siguientes ecuaciones análogas a (5.66), (5.70):

$$\frac{d\varphi_{11}}{d\tau} = -\mathcal{F}G_{1A}, \quad \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} = \theta\mathcal{F}G_{2A}, \quad (5.99)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = Q_A, \quad \frac{dW}{d\tau} = P_A, \quad (5.100)$$

donde

$$G_{1A} = G_1 + \theta r_0, \quad G_{2A} = G_2 - r_0, \quad L_A = L + (1 - \theta)r_2,$$

$$Q_A = \frac{1}{L_A} \left\{ \frac{W + r_1}{\mathcal{F}} + \sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) - \theta r_0(\sigma + 2\theta\lambda_2) - 2r_2(b_2 + \theta b_1 - \theta r_0) \right\},$$

$$P_A = \frac{\mathcal{F}}{2} \{ (1 - \theta\lambda_1^2)Q_A^2 - 2l_1Q_A + l_0 \} + \frac{1}{2\mu} \left\{ A_2'^2 + \frac{1}{\theta}A_2'^2 - 2A_1'A_2'\Lambda_1 \right\} - \frac{1}{\nu^2} \left(\lambda_1 + \frac{B_{\Delta A}}{2\beta_1\beta_2} \right)$$

y

$$l_1 = 1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1) + (1 - \theta\lambda_1)A_2'\Lambda_{01} - \theta(1 - \theta\lambda_1)A_1'\Lambda_{02},$$

$$l_0 = 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) + \theta r_0^2 + (b_2 + \theta b_1 - \theta r_0)(A_2'\Lambda_{01} + A_1'\Lambda_{02}).$$

Elijamos el signo de los coeficientes A_i . Denotemos por z_0 la primera raíz positiva de la ecuación $\Lambda_2(z)\big|_{\mu=1} = 0$ y sea τ_0 tal que $\sigma(\tau_0) = \frac{z_0}{\mu}$. Supongamos que

$$(1 - \theta) A_1(\tau) A_2(\tau) \bar{\Lambda}_2(\sigma(\tau)) > 0 \text{ para } 0 < \tau < \tau_0. \quad (5.101)$$

Como $\tau = \mathcal{O}(\sigma)$ para $|\sigma| \gg 1$ y A_i se anula con razón exponencial, $r_2 = \mathcal{O}(\mu^\infty)$ para $\tau \geq \tau_0$. Así, bajo la hipótesis **E1**), $L_A > 0$ para $\sigma > 0$ y $L'_A := \frac{dL_A}{d\sigma}\big|_{\tau=\sigma=0} > 0$

Bajo la hipótesis adicional

$$A'_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.102)$$

existen isoclinas γ_Q, γ_P que pasan a través del punto $(0, 0)$.

El último paso es la construcción de la trayectoria γ_s . Para $|\sigma|$ obtenemos nuevamente la ecuación de la forma (5.84), esto es,

$$M_A a_1^2 - N_A a_1 - R_A, \quad (5.103)$$

donde M_A y N_A coinciden mod $O(\mu)$ con M y N en (5.86), (5.81) y con la siguiente R_A :

$$R_A = R - \frac{2\theta}{\mu \mathcal{F}_0} (\zeta_A + \zeta_B),$$

donde

$$\zeta_A = \left\{ A_1 A_2'' \bar{\Lambda}_3 + A_1'' A_2 \bar{\Lambda}_4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 A_i A_i'' \right\} \bigg|_{\tau=\sigma=0}, \quad \zeta_B = \frac{B}{\nu^2 \beta_2} \bigg|_{\sigma=0}.$$

La elección de las amplitudes $A_i(\tau)$ depende del signo del coeficiente M en (5.84). Sea $M > 0$, la hipótesis $\zeta_A + \zeta_B < 0$ implica la existencia de la solución real

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\sqrt{\frac{2\theta}{M \mathcal{F}_0} |\zeta_A + \zeta_B| + \mathcal{O}(\sqrt{\mu})} \right),$$

de (5.103). Más aún, la condición (5.88) se satisface para cualquier n .

Finalmente, la segunda ecuación en (5.100) nos ayuda a definir la coordenada W de la trayectoria γ_s . Álgebra simple implica la siguiente fórmula para el término principal de la expansión (5.91):

$$\omega_1 = -\frac{\theta}{\mu M} \left\{ (M_A + (1 - \theta(\lambda_1^0)^2)) \zeta_B + (1 - \theta(\lambda_1^0)^2) \zeta_A + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \right\}.$$

ω_1 será negativa bajo alguna elección especial de ζ_A, ζ_B únicamente. Como aparece una segunda hipótesis para las derivadas de segundo orden de A_i , necesitamos resumir ambas de ellas:

$$\zeta_B < |\zeta_A| < q \zeta_B, \quad \text{donde} \quad q = \frac{M_A + 1 - \theta(\lambda_1^0)^2}{1 - \theta(\lambda_1^0)^2}. \quad (5.104)$$

Notemos que la igualdad $M > 0$ implica que $q > 1$. Así, la validez de las condiciones (5.101), (5.102) y (5.104) se puede verificar fácilmente.

Por lo tanto, la derivada

$$\left. \frac{dW_s}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{\omega_1}{a_1} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} f(A_1(0), A_2(0)), \quad f > 0,$$

puede ser un valor arbitrario. La variación de las amplitudes $A_i(0)$ y del parámetro μ implica la variación de los valores límites $W_s^\infty = \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} W_s(\sigma)$ del número positivo $W_s^\infty \Big|_{A_i(0)=0}$ a cualquier número negativo. Esto y la estructura del retrato fase implican la existencia de tales valores de $A_i(0)$ y μ tal que $W_s^\infty = 0$.

Sea $M < 0$, entonces la hipótesis $\zeta_A + \zeta_B > 0$ implica la existencia de la solución real

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\sqrt{\frac{2\theta}{|M| \mathcal{F}_0}} (\zeta_A + \zeta_B) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \right).$$

de (5.103). Por lo tanto,

$$\omega_1 = -\frac{\theta}{\mu q_1} \{((q_1 - 1)\zeta_B - \zeta_A) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu})\},$$

donde

$$q_1 = \frac{|M|}{1 - \theta(\lambda_1^0)^2} > 0.$$

Así, en vez de (5.104) obtenemos las siguientes hipótesis

$$-\zeta_B < \zeta_A < (q_1 - 1)\zeta_B. \quad (5.105)$$

Como $q_1 > 0$, la validez de las condiciones (5.101), (5.102) y (5.105) se cumple. En consecuencia, existen tales valores de $A_i(0)$ y μ tal que $W_s^\infty = 0$.

Esto nos lleva a considerar los valores límites de φ_{i1} . Elijamos $\sigma = \sigma_s(\tau)$ y $W = W_s(\tau)$. Entonces $|\frac{W}{\sigma}| = o\left(\frac{1}{|\tau|}\right)$ cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Luego, sea $M < 0$. Entonces, integrando las ecuaciones de la forma (5.99), obtenemos que φ_{i1}^∞ son acotadas por una constante para cualquier elección del parámetro $\mu \in [0, 1)$. Sea $M > 0$. Entonces los lados derechos de las igualdades (5.99) contienen los términos de tipo $A_1(\tau)A_2'(\frac{\tau}{\theta})\Lambda_3(\mu\sigma)$. Sin embargo, A_i se anula cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$ con razón exponencial. Por lo tanto, la integral de este término es acotado por una constante uniformemente en $\mu \geq 0$. Esto implica la validez de la hipótesis (5.16) y completamos la prueba del Lema 5.8. ■

En consecuencia obtenemos nuestro resultado principal:

Teorema 5.2. *Sean las hipótesis **A**)-**E2**) validas. Entonces el kink y el antikink preservan su forma después de la interacción mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$. La solución asintótica débil del problema (5.1), (5.13) tiene la forma (5.97) con la elección especial de las amplitudes A_i y del parámetro μ .*

Finalmente, deseamos presentar un resultado el cual muestra que nuestra definición de las soluciones débiles para el problema (5.1), (5.13) es equivalente a la validez de la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x dx = 0 \quad (5.106)$$

y la relación de la energía

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x \varepsilon^2 u_t u_x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u) \right\} dx = 0. \quad (5.107)$$

Teorema 5.3. *Sean las hipótesis del Teorema 5.2. Entonces la función (5.97) es la solución asintótica mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ del problema (5.1), (5.13) si y sólo si las relaciones (5.106), (5.107) se satisfacen.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar este resultado es suficiente sustituir el ansatz (5.97) en las leyes de balance (5.106) y (5.107).

Por simplicidad calcularemos el producto $u_t u_x$ para la función de la forma (5.14). Integrando esta expresión sobre x y cambiando variables $\beta_1(x - \Phi_1) = \varepsilon \eta$ o $\beta_2(x - \Phi_2) = \varepsilon \eta$ obtenemos la fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x dx = -a_2 \frac{\nu}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \{ \beta_i - \beta_1 \lambda_1 \} (b_i + \varphi'_{i1}) = -a_2 \frac{\nu}{\varepsilon} \left(K_2 + \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \right), \quad (5.108)$$

donde se utiliza la notación dada en las ecuaciones (5.23), (5.58) y (5.59). Como el lado derecho en (5.108) es una función de argumento τ únicamente, volvemos a calcular la derivada con respecto del tiempo usando la fórmula $\frac{d}{dt} = \varepsilon^{-1} \nu \frac{d}{d\tau}$.

Ahora, es claro que la ley de conservación (5.106) es precisamente la ecuación (5.61). Cálculos similares pero más complicados demuestran que la relación de la energía (5.107) implica las igualdades (5.62) y (5.63) para el ansatz (5.13). Recíprocamente, reescribiendo las ecuaciones (5.61)-(5.63) en términos de u_t , u_x , $F(u)$ para u de la forma (5.14), tenemos las relaciones de energía (5.106) y (5.107). Calculando los lados izquierdos de (5.106), (5.107) para el ansatz (5.97), llegamos nuevamente a las igualdades similares a (5.61)-(5.63). ■

Conclusiones

El objetivo de la primera mitad de este trabajo de tesis es el de establecer las bases necesarias para discutir en el último capítulo una aplicación interesante a ecuaciones diferenciales parciales, cuyas propiedades son válidas en el sentido de distribuciones.

La idea de una distribución es la de generalizar la noción de función que conocemos en \mathbb{R}^n y discutir sus principales propiedades, pues científicos como Heaviside encontraron soluciones a ciertos problemas utilizando δ , $H(x)$ entre otras, las cuales sólo pueden ser entendidas con gran detalle mediante la *Teoría de Distribuciones* establecida por Schwartz en 1950.

Mostramos como podemos llegar a la definición de los operadores de Distribuciones una vez que conocemos su definición en el sentido clásico.

Estos resultados los llevamos a la práctica resolviendo cierto tipo de problemas y principalmente en el capítulo 5 el cual es la parte central de esta tesis.

En el capítulo 5 abordamos un problema de interacción de Ondas donde la forma de las soluciones de tipo kink (5.2) de la onda semilineal (5.1) es similar a una onda de choque, pero tienen distintas propiedades, por lo que requieren un *ansatz* especial en el término principal relacionado con la no linealidad. Dicho *ansatz* esta compuesto de algunas correcciones especiales cerca del origen en la suma del kink y el antikink ya que la ecuación de sine-Gordon es más sensitiva que otras y requiere de aproximar la solución real mucho mejor que simplemente con la suma de kinks.

Si la función F de (5.1) satisface las condiciones **A)**, **B)** existe una solución $u(x, t, \varepsilon)$ en la forma (5.2) y tiende a los valores límites suficientemente rápido. Impusimos la condición de periodicidad **D)** para considerar la superposición de las ondas con distancias grandes entre sus frentes.

Iniciamos este estudio conociendo que los kinks de la ecuación de sine-Gordon siguen el escenario anteriormente mencionado y la pregunta inicial fue ¿Es la ecuación de sine-Gordon la única de la clase (5.1) para la cual tal escenario es válido? en caso de no ser la única nuestro objetivo fue encontrar condiciones en F bajo las cuales los kinks y los antikinks de (5.1) colapsen siguiendo el escenario de sine-Gordon.

Nos encontramos con problemas como el siguiente: No podemos usar los métodos tradi-

cionales para describir el escenario de colisión de ondas ya que la ecuación de sine-Gordon es la única de la clase (5.1) que puede ser integrada exactamente. Por lo que construimos una solución asintótica con un parámetro pequeño ε . Además las asintóticas tradicionales no responden esta pregunta por existir problemas aún no resueltos. Por tales dificultades utilizamos el *método asintótico débil*, cuya ventaja principal es: reducir el problema de describir la interacción de ondas no lineales a un análisis cualitativo de alguna ecuación diferencial ordinaria.

Por la propiedad que tienen las soluciones de este tipo de problemas es natural usar \mathcal{D}' para una definición de una solución asintótica como en (5.6) pero esta definición presenta una inconsistencia, pues analizamos que el lado izquierdo de (5.6) es $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ mientras que el lado derecho es 0.

Por tal razón utilizamos funciones de prueba que son rápidamente variantes donde la solución varía rápidamente, obteniendo así una definición de solución asintótica débil mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ en (5.7) la cual no presenta irregularidades, además nos garantiza la existencia de la primera corrección y nos ayuda a encontrar una ecuación para el movimiento distorcido de frentes de kinks.

Presentamos el término principal de la solución asintótica débil para el problema (5.1), (5.13) en la ecuación (5.14) en el cual intervienen algunas correcciones las cuales nos garantizan que los kinks no pierden su forma durante la interacción.

Para la construcción de la solución asintótica débil, calculamos asintóticas débiles con discrepancia $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$ para las expresiones que aparecen en el lado izquierdo de (5.7), para lo cual hacemos uso de los conceptos establecidos en los capítulos anteriores sobre teoría de distribuciones tales como la definición de distribución δ , funciones de Schwartz, convoluciones, diferenciación; también utilizamos el Lema 5.1, la fórmula de Taylor de primer orden y algunos cambios de variables para llevar las asintóticas a su expresión más simplificada en el sentido débil; obteniendo con ello las expresiones presentadas en (5.28), (5.55)-(5.59); las cuales satisfacen las condiciones **A)-D)** y (5.16).

Calculando las asintóticas débiles para los términos del lado izquierdo de (5.7) obtuvimos algunas convoluciones que presentamos en (5.23), (5.51), (5.52) las cuales existen bajo las hipótesis **A)-D)** y cumplen las propiedades de ser funciones de Schwartz.

Utilizando las fórmulas (5.28) y (5.55)-(5.59) el lado izquierdo de (5.9) es una combinación lineal de $\delta(x - x^*)$, $\delta'(x - x^*)$ y $\delta'(x - \Phi_i)$ las cuales son linealmente independientes entonces sus coeficientes son cero, obteniendo con esto un sistema de ecuaciones que presentamos en (5.61)-(5.63), el cual por medio de algunas manipulaciones algebraicas lo llevamos al sistema autónomo en (5.70) con condición inicial (5.71).

Para un análisis del sistema dinámico utilizamos las propiedades de las convoluciones presentadas en el Lema 5.4 obteniendo con ello que nuestro sistema (5.70) es invariante con respecto al cambio de variables presentado en el Corolario 5.1 y bajo las hipótesis del Lema 5.2 mostramos que el sistema (5.70), (5.72), (5.73) tiene una singularidad en la recta $(0, W)$ en el plano (σ, W) de tipo $\frac{1}{\sigma}$, razón por la cual elegimos la hipótesis **E1)**.

Esta singularidad nos llevó a investigar cuando una trayectoria puede pasar del semi-plano izquierdo al derecho y como todo el eje W es una singularidad del sistema esto únicamente puede

pasar a través del punto $(0,0)$, por lo que consideramos una vecindad pequeña del origen de coordenadas.

De esta manera para $|\sigma| \leq 1$ por el Lema 5.4 el sistema está dado por (5.79) el cual mediante algunos cálculos técnicos lo llevamos a la expresión dada en (5.82).

Aplicando el método de Cauchy-Kovalevskaya, tomando en cuenta que $\sigma = \sigma(\tau)$ es impar, después de simples cálculos algebraicos obtenemos las ecuaciones (5.84), (5.85) para M, N y R . Encontramos que σ tiene la representación (5.83) únicamente bajo las condiciones (5.88) las cuales garantizan la existencia de las raíces en (5.87) y la no anulación de los coeficientes a_i en (5.85). Ya que M puede ser arbitraria estudiamos las posibles situaciones y obtenemos la condición **E2**). Calculando las W coordenadas de las trayectorias en la forma similar a (5.83), encontramos que existe al menos una trayectoria $\gamma_s = \{(\sigma = \sigma_s(\tau), W = W_s(\tau))\}$ del sistema (5.70), (5.72), (5.73) la cual pasa del semiplano izquierdo al derecho cuando τ crece desde $-\tau_0$ hasta τ_0 , para τ_0 suficientemente pequeña.

Por (5.84) observamos que hay dos posibles curvas en el diagrama de flujo las cuales pueden ser ambas positivas y que las pendientes están dadas por $m = \frac{\omega_i}{a_i}$.

El siguiente paso fue la consideración del sistema (5.70), (5.72), (5.73) para $\sigma \rightarrow \pm\infty$. Resolviendo el sistema (5.70), (5.92) en sus términos principales para $|\sigma|$ grande y buscando que la solución pase por el punto (σ_0, W_0) tenemos la expresión (5.94) para σ y (5.95) para C que nos dan la solución del sistema. Concluyendo que

$$W = C - \frac{1+\theta}{2\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right)$$

lo que implica la estabilización de las coordenadas W de cualquier trayectoria para $\tau \rightarrow \pm\infty$, si $|W_0| = |W(\tau_0)|$ es acotada por una constante y $|\sigma_0| = |\sigma(\tau_0)|$ es suficientemente grande. De aquí se sigue que la curva γ_s buscada no existe, pues las hipótesis establecidas en (5.71) no se satisfacen.

Como último paso del análisis del sistema se considero a las isoclinas. La isoclina γ_Q es $W_Q = -\mathcal{F}(\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2))$. Para $\gamma_P = \{(\sigma, W), P(\sigma, W) = 0\}$ resolvimos (5.96) cuyas raíces están dadas por $Q_{\pm}(\sigma)$. La ecuación (5.90) tiene soluciones si y sólo si el discriminante en $Q_{\pm}(\sigma)$ es positivo, obteniendo así las expresiones

$$W_P^{\pm} = \mathcal{F}(LQ^{\pm}(\sigma) - \sigma - 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2)).$$

Mediante un análisis asintótico de las convoluciones obtuvimos el Lema 5.6 el cual implica que la isoclina γ_P consiste en dos brazos W_P^{\pm} los cuales están definidos al menos para $|\sigma|$ suficientemente grande y tienden a juntarse cuando $|\sigma| \rightarrow \infty$. Si el discriminante es no negativo para toda $\sigma \in \mathbb{R}$, entonces los brazos W_P^{\pm} pasan a través del punto $(0,0)$.

De esta manera bajo las hipótesis **A)-E2**) el sistema dinámico (5.70), (5.72), (5.73) tiene al menos una trayectoria γ_s la cual se encuentra en la franja $\{\sigma \in \mathbb{R}, |W| \leq cte\}$ y pasa del semiplano $(-W_s^{\infty}, -\infty)$ al semiplano (W_s^{∞}, ∞) a través del punto $(0,0)$.

En la sección 5.5 presentamos los resultados gráficamente mediante programas realizados en Maple para los resultados anteriormente descritos.

En la última sección presentamos el anzatz modificado (5.97), la idea es la corrección del anzatz con el objetivo de rotar las trayectorias fase cerca del origen de tal manera que los valores límites W_s^∞ sean los que se requieren. Para hacer esto agregamos al término principal (5.14) una corrección pequeña localizada cerca del origen.

El resultado referente a esta corrección lo presentamos en el Lema 5.8 cuya demostración se basa nuevamente en el cálculo para las asintóticas débiles, en donde encontramos obstáculos técnicos no triviales ya que el término principal de la expresión tiene una estructura algebraica extremadamente grande. Obteniendo después de esto, los resultados análogos a los ya discutidos para el primer anzatz.

Finalmente, ya que los términos A_i que aparecen en el nuevo anzatz (5.97) se anulan cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$ con razón exponencial. La integral de los términos de la forma $A_1(\tau)A_2'(\frac{\tau}{\theta})\Lambda_3(\mu\sigma)$ es acotado por una constante uniformemente en $\mu \geq 0$. Lo que implica la validez de (5.16).

Obteniendo así el resultado principal siguiente bajo las hipótesis **A)-E2)**: el kink y el antikink preservan su forma después de la interacción mod $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$. La solución asintótica débil del problema (5.1), (5.13) tiene la forma (5.97) con la elección especial de las amplitudes A_i y del parámetro μ .

Por último, presentamos un resultado el cual muestra que nuestra definición de las soluciones débiles para el problema (5.1), (5.13) es equivalente a la validez de la ley de conservación y la relación de la energía.

Bibliografía

- [1] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*, Courier Dover Publications, 2000.
- [2] M. Balanzat *Lecciones Sobre Teoría de Distribuciones*, Impreso en Portugal por la Tipografía Matemática, Lda., Lisboa, Noviembre de 1966.
- [3] J. Barros-Neto *An Introduction to the Theory of Distributions*, Robert E. Krieger Publishing Company Malabar, Florida, 1981.
- [4] V. G. Danilov, G. A. Omel'yanov, V. M. Shelkovich, *Weak Asymptotics Method and Interaction of Nonlinear Waves*, Asymptotic methods for wave and quantum problems, (M. V. Karasev ed.), AMS Trans., Ser 2, v. 208, AMS, Providence, R. I., 2003, 33-164.
- [5] W. F. Donoghue, Jr. *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, USA, 1969.
- [6] R. Flores E., M. G. García, G. A. Omel'yanov *Differential Equations of Mathematical Physics, Theory and Numerical Simulations*, Editorial UniSon, México, 2004.
- [7] R. Flores E., G. A. Omel'yanov, *Asymptotic Behavior for the Centered Rarefaction Appearance Problem*, Electron. J. Diff. Eqns., 2005, **148**, 1-25.
- [8] R. Flores E., G. A. Omel'yanov, *Weak Asymptotics for the Problem of Interaction of Two Shock Waves*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2005, **8**, No. 4, 331-341.
- [9] G. B. Folland *Real Analysis Modern Techniques and their Applications*, 2nd. edition, Wiley Interscience, USA, 1999.
- [10] G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to The Theory of Distributions*, 2nd. edition, Cambridge University Press, 1998.
- [11] M. G. García, R. Flores E., G. A. Omel'yanov, *Interaction of Shock Waves in Gas Dynamics. Uniform in Time Asymptotics*, International Journal of Math. and Mathematical Sci., 2005, **2005:19**, 3111-3126.
- [12] M. G. García A., G. A. Omel'yanov, *Kink-Antikink Interaction for Semilinear Wave Equations with a Small Parameter*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 45, pp. 1-26.

- [13] L. R. Gouyon, *Integración y Distribuciones*, Reverté, España, 1979.
- [14] R. Haberman *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*, 3ra. edición, Prentice Hall, España, 2003.
- [15] R. P. Kanwal, *Generalized Functions; Theory and Applications*, 3rd. edition, Birkhäuser, USA, 2004.
- [16] D. A. Kulagin, G. A. Omel'yanov, *Asymptotics of Kink-Kink Interaction for Equations of sine-Gordon Type*, Mat. Zametki **75** (2004), no. 3-4, 563-567.
- [17] D. A. Kulagin, G. A. Omel'yanov, *Interaction of Kinks for Semilinear Wave Equations with a Small Parameter*, Nonlinear Analysis, 2006, **65**, No. 2, 347-378.
- [18] J. Marsden, M. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, 1996.
- [19] M. Renardy, R. C. Rogers *An Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd. edition, Ed. Springer, USA, 2004.
- [20] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

Indice

Antikink vi, 83, 84, 128, 130, 133
 Ansatz vi, 89, 90, 123, 124, 129, 130, 133
 modificado 123
 viejo 124
 Aproximaciones asintóticas 85
 Asintóticas 89, 126, 131
 débiles 90, 105, 106, 131, 133
 tradicionales 131
 Asociatividad
 del producto directo
 de distribuciones 71,
 de convolución de distribuciones 75

B

Breather 84

C

Conmutatividad
 de la convolución de distribuciones 75
 de los productos directos 71, 75
 Continuidad 58
 de la de delta de dirac 25
 de una distribución 20, 50, 58, 59, 69, 70
 de los funcionales 71
 lineales 19
 de $\mathcal{P}^{\frac{1}{x}}$ 28
 de la transformada de Fourier 65
 de la convolución
 de distribuciones 76
 Convergencia 18, 24
 clásica 49
 de distribuciones 29, 35, 48
 de las funciones de prueba 48

débil 49, 50, 61
 en \mathcal{D}' 61
 en S' 61
 distribucional v, 49
 en \mathcal{D} 58
 en $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ 19
 en S 55, 57, 58
 en S' 61
 de series de distribuciones 49
 uniforme 18, 56, 58
 Convolución 78, 105
 de funciones 74
 localmente integrables 77
 de distribuciones 53, 74, 75, 76
 temperadas o de lento crecimiento 77

D

Definición débil 86
 Delta de Dirac v, 1, 2, 4, 7, 9, 15, 31, 38
 Derivada 9, 128, 129
 acotada 5, 16, 40, 62
 clásica 36, 40
 continua 5, 17
 del producto de una distribución
 y una función continua 37
 de la delta de Dirac 9
 de la distribución de Heaviside 38
 de la función x_+ 38
 de la función $|x|$ 39
 de la transformada de Fourier 63
 de una función de prueba 35, 61
 de una distribución 35

regular 42
 distribucional 85
 generalizada 35
 Diferenciación 12, 50, 69, 131
 de distribuciones 35, 37
 del producto directo de distribuciones 71
 de la convolución de distribuciones 76
 Distribución 1, 10, 19, 20, 21, 27, 44, 45, 53, 58, 130, 131
 continua 20, 66
 de lento crecimiento 57
 delta de Dirac 25, 31, 32, 42, 72
 de Heaviside 25
 de masa unitaria 31
 de orden finito 42
 $|x|$ 46
 $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ 28
 homogénea 32
 impar 32
 par 32
 regular 20, 21, 25, 27, 30, 35, 42, 69, 74
 singular 20, 30
 temperada v, 57, 65, 66
 Distribuciones v, 48, 53, 61, 76
 temperadas 57, 58, 65, 67, 68
 en S' 59
 en \mathcal{D}' 61
 en \mathcal{D}^{m+n} 71
 en \mathcal{D}'^{m+n} 71
 de Heisenberg 28
 de lento crecimiento 77
 de soporte compacto 55
 regulares 19
 singulares 28

E

Ecuaciones semilineales vi
 Encolado de trozos 42
 Escenario de sine-Gordon v, 84, 86, 130
 Espacio 15
 \mathcal{C}^∞ 15
 \mathcal{D} 15, 55
 \mathcal{D}' 21, 84
 \mathcal{D}^0 15

\mathcal{D}^m 15
 \mathcal{D} de funciones de prueba 19, 21
 \mathbb{R}^n 45
 S 55
 de Schwartz 55, 104
 de funciones de prueba 19
 con soporte compacto 68
 dual 21, 48, 58

Expansión

asintótica 124
 escalar 31

F

Fluxones vi, 81
 Frente 83
 del kink o del antikink 82, 89
 de kinks 85, 130
 de onda v
 no perturbados 87
 Función
 de prueba 18, 19, 30, 48, 53, 69, 70, 71, 73, 76, 85, 86
 de rápido decaimiento 61
 de rápido decaimiento 56
 de Schwartz 95, 103
 de Sobolev iv
 entera 54
 generalizada 10, 15, 35, 44, 71, 79, 80
 impar 91, 123
 impulso 1
 infinitamente diferenciable 15, 33
 integrable 13, 27
 lentamente creciente 94
 localmente integrable 13, 42, 58, 69
 monótonamente decreciente 47
 no integrable 14
 ordinaria 7
 par 91
 suave 46, 84, 85
 Funcional 27, 46, 47, 71, 72,
 lineal 19, 25, 28, 58
 continuo 19, 26, 57, 58, 69, 72

I

Interacción 133
 de dos kinks 86
 de las ondas de choque 87
 de Ondas 130
 kink-antikink v, 83, 87
 Para Ecuaciones de Onda Semilineales
 con un Parámetro Pequeño 82
 no lineal v
 Inverse Scattering Transform 83
 Isoclina 119, 120, 122, 131

K

Kink vi, 81, 82, 83, 85, 127, 129, 132,

L

Laurent Schwartz v, 1, 2, 42, 55
 Lema C^∞ de Urysohn 23, 26
 Ley de conservación 132
 Leyes de balance 128

M

Método
 asintótico débil v, 84, 130
 de Cauchy-Kovalevskaya 114, 121, 131
 de integración en fracciones parciales 118
 Medida 13, 26
 concentrada en 26
 de Dirac 39
 de masa 40
 Movimiento 89
 de las trayectorias 122
 distorsionado de frentes de kinks 130

O

Oliver Heaviside 1, 2, 130
 Onda
 de choque 123, 129
 suave v
 no lineal vi
 semilineal 129
 ondas v, vi
 Ondas
 de luz vi
 de sonido vi

lineales vi
 no interactivas 88
 no lineales vii
 no interactuantes 90
 solitarias vi, 89
 sonoras vi
 viajeras 90

Operador 12, 33, 78
 continuo 76
 de traslación 31
 diferencial 76, 78
 lineal 78
 ordinario 12
 parcial 12, 13

Operadores
 algebraicos 30
 de distribuciones 29
 lineales v, 66
 Orden de una distribución 42

P

Partición de la unidad 22
 Pequeñez en el sentido débil 85
 Principio de superposición vi
 Producto directo v, 68, 69, 71, 72, 73, 75
 de distribuciones 53, 69
 temperadas 72, 73, 77,
 de la distribución delta 72

R

Rapidez 89, 104
 exponencial de anulación 105
 Regla de Stokes 80
 Regularización v, 27
 Regularizaciones 67
 Retrato fase 88, 93, 119, 127

S

Seminormas 56
 Sergei Sobolev iv, 1
 Serie de distribuciones 49
 Solitones v, vi
 Solución 82, 84, 85, 129, 131
 asintótica 84, 122, 124, 130

- débil 85, 89, 127, 132
- autosimilar 81
- débil 84, vi
- de ondas solitaria 85
- de tipo kink v
- de una ecuación diferencial parcial 114
- del sistema 118
- fundamental 78
- kink exacta 85
- real 126, 129
- Soporte v, 14, 17, 18, 19, 27, 42, 43, 45, 71, 75, 76
 - acotado 54, 55, 70
 - compacto 14, 15, 26, 36, 55, 68, 70, 75
 - singular 46
 - de la delta de Dirac 45
 - de la función de prueba 28
 - de las distribuciones 76
 - de una distribución 29, 35, 42, 44, 75
 - de una función 14
 - singular v, 46
 - de una distribución 29, 42
 - nula 18, 58, 70
- Sucesiones delta v, 4
- de una distribución 65
- de una distribución temperada 63
- inversa 62, 66, 77
- Transformada inversa 61, 62
- Traslación 32, 63, 72
 - de la transformada de Fourier 63
 - de una distribución 32
 - por $y \in \mathbb{R}^n$ 31

V

- Valor principal de Cauchy 28

T

- Teorema
 - de Bolzano-Weierstrass 70
 - de cambio de variables 34
 - de convergencia dominada
- de Lebesgue 26
 - de Fubini 37, 53
 - de Hahn-Banach 26
 - del encolado de trozos 42, 43, 44
 - del valor medio 28
 - del valor medio par integrales 5
 - de integración por partes 37
- Transformada de Fourier v, 53, 54, 55, 62, 63, 64, 66, 67, 73
 - de convoluciones 77, 80
 - de Distribuciones Temperadas 65
 - de funciones de prueba 61
 - de la convolución 77
 - de la delta Dirac 67

