

CAPÍTULO

11

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES Y PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA EN COORDENADAS RECTANGULARES

- 11.1 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales separables
- 11.2 Ecuaciones **clásicas** y problemas de valor en la frontera
- 11.3 Ecuación de transmisión de calor
- 11.4 Ecuación de onda
- 11.5 Ecuación de **Laplace**
- 11.6 Ecuaciones no homogéneas y condiciones en la frontera
- 11.7 Empleo de series de Fourier generalizadas
- 11.8 Problemas de valor en la frontera con series de Fourier en dos variables
- Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

En este capítulo veremos dos procedimientos para resolver ecuaciones en derivadas **parciales** que surgen con frecuencia en **problemas** donde **aparecen** vibraciones, potenciales y distribuciones de temperatura. Estos problemas se llaman problemas de valor en la frontera y se describen mediante ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, que son relativamente simples. Lo que se hace es hallar las soluciones particulares de una ecuación en derivadas parciales reduciéndola a dos o más ecuaciones diferenciales ordinarias.

Comenzaremos con el método de separación de variables para ecuaciones en derivadas parciales lineales. Su aplicación nos regresa a los importantes conceptos del capítulo 10, de los valores y funciones propios, y del desarrollo de una función en una serie infinita de funciones ortogonales.

11.1 ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES SEPARABLES

*EDP** lineal de segundo orden ■ Homogénea ■ No homogénea ■ Solución
 ■ Ecuaciones separables ■ Constante de separación ■ Principio de superposición
 ■ Clasificación de las EDP lineales de segundo orden

Ecuaciones lineales La forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP) con dos variables independientes, x y y , es

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

en que A, B, C, \dots, G son funciones de x y y . Cuando $G(x, y) = 0$, la ecuación se llama **homogénea**; en cualquier otro caso es **no homogénea**.

EJEMPLO 1 EDP lineal homogénea

La ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$ es homogénea, mientras que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$ es no homogénea. ■

Una **solución** de una ecuación en derivadas parciales con dos variables independientes x y y es una función $u(x, y)$ que posee todas las derivadas parciales que indica la ecuación y que la satisface en **alguna** región del plano xy .

Como dice la introducción a este capítulo, no pretendemos concentrarnos en los procedimientos de determinación de las soluciones generales de las ecuaciones en derivadas parciales. Desafortunadamente, para la mayor parte de las ecuaciones lineales de segundo orden -aun con las que tienen coeficientes **constantes**—no es **fácil** llegar a una solución. Sin embargo, las cosas no están tan mal como parecen porque casi siempre es posible, y bastante sencillo, hallar **soluciones particulares** de las ecuaciones lineales importantes que se originan en muchas aplicaciones.

Separación de variables Aunque hay varios métodos que pueden ensayarse para encontrar soluciones particulares (véase los problemas 28 y 29 de los ejercicios II. 1), **sólo** nos interesará **uno**: el **método de Separación de variables**. Cuando se busca una solución particular en forma de un producto de una función de x por una función de y , como

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

a veces es posible convertir una ecuación en derivadas parciales, lineal con dos variables en dos ecuaciones diferenciales **ordinarias**. Para hacerlo notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

y que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

donde la “prima” denota derivación ordinaria.

***Nota del editor:** “Ecuación diferencial en derivadas parciales” se abreviará en “ecuación en derivadas parciales” y ocasionalmente como **EDP**.

EJEMPLO 2 Separación de variables

Determine las soluciones producto de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}$. (1)

SOLUCIÓN Si $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la ecuación se transforma en

$$X''Y = 4xY'.$$

Dividimos ambos lados entre $4XY$, con lo cual separamos las variables:

$$\frac{X''}{4x} = \frac{Y'}{Y}.$$

Puesto que el lado izquierdo de esta ecuación es **independiente** de y e igual al **lado** derecho, que es independiente de x , llegamos a la **conclusión** que ambos lados son independientes **tanto** de x **como** de y . En otras palabras, cada lado de la ecuación debe ser una constante. En la práctica se acostumbra escribir esta constante **de separación** real como λ^2 o $-\lambda^2$. Distinguimos los tres casos siguientes.

CASO I Si $\lambda^2 > 0$, las dos igualdades

$$\frac{X''}{4x} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2$$

dan $X'' - 4\lambda^2 X = 0$ y $Y' - \lambda^2 Y = 0$.

Estas ecuaciones tienen las soluciones siguientes:

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x \text{ y } Y = c_3 e^{\lambda^2 y},$$

respectivamente. Así, una solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned} u &= XY \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x)(c_3 e^{\lambda^2 y}) \\ &= A_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + B_1 e^{\lambda^2 y} \sinh 2\lambda x, \end{aligned} \quad (2)$$

en que $A_1 = c_1 c_3$ y $B_1 = c_2 c_3$

CASO II Si $-\lambda^2 < 0$, las dos igualdades

$$\frac{X''}{4x} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda^2$$

equivalen a $X'' + 4\lambda^2 X = 0$ y $Y' + \lambda^2 Y = 0$

En vista de que las soluciones de estas ecuaciones son

$$X = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x \quad \text{y} \quad Y = c_6 e^{-\lambda^2 y},$$

respectivamente, otra solución particular es

$$u = A_2 e^{-\lambda^2 y} \cos 2\lambda x + B_2 e^{-\lambda^2 y} \sin 2\lambda x, \quad (3)$$

en donde $A_2 = c_4 c_6$ y $B_2 = c_5 c_6$.

CASO III Si $\lambda^2 = 0$, entonces

$$X'' = 0 \quad \text{y} \quad Y' = 0.$$

En este caso

$$X = c_7 x + c_8 \quad \text{y} \quad Y = c_9$$

y entonces

$$u = A_3 x + B_3, \quad (4)$$

en donde $A_3 = c_7 c_9$ y $B_3 = c_8 c_9$. ■

Se deja como ejercicio comprobar que las ecuaciones (2), (3) y (4) satisfacen la ecuación del ejemplo. (Véase el problema 30, en los ejercicios II. 1.)

La separación de variables no es un método general para hallar soluciones particulares; algunas ecuaciones diferenciales simplemente no son separables. El lector debe comprobar que la hipótesis $u = XY$ no conduce a una solución de $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial y = x$.

Principio de superposición El teorema siguiente es análogo al teorema 4.2 y se denomina **principio de superposición**.

TEOREMA 11.1 Principio de superposición

Si u_1, u_2, \dots, u_k son soluciones de una ecuación en derivadas parciales lineal homogénea, la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k,$$

en que las $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ son constantes, también es una solución.

En lo que resta del capítulo supondremos que siempre que haya un conjunto infinito

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

de soluciones de una ecuación lineal homogénea, se puede construir otra solución, u , formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

en que las $c_i, i = 1, 2, \dots$, son constantes.

Clasificación de las ecuaciones Una ecuación en derivadas parciales, lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes, puede pertenecer a uno de tres tipos generales. Esta clasificación sólo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Naturalmente, suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B y C no es cero.

DEFINICIÓN 11.1**Clasificación de las ecuaciones**

La ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

EJEMPLO 3**Clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden**

Clasifique las siguientes ecuaciones:

$$(a) \ 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (b) \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (c) \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

SOLUCIÓN a) Escribimos esta ecuación como

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e identificamos de esta forma los coeficientes: $A = 3, B = 0$ y $C = 0$. En vista de que $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica.

b) Rearreglamos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

y vemos que $A = 1, B = 0, C = -1$ y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Con $A = 1, B = 0, C = 1$, entonces $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$. La ecuación es elíptica. ■

La explicación detallada de por qué se **clasifican** las ecuaciones de segundo orden sale del propósito de este libro, pero la respuesta está en el hecho de que se desea resolver ecuaciones sujetas a ciertas **condiciones** que pueden ser de frontera o iniciales. El tipo de condiciones adecuadas para cierta ecuación depende de si es hiperbólica, parabólica o elíptica.

EJERCICIOS 11.1

Las respuestas a los problemas nones se encuentran en el apéndice de respuestas.

En los problemas 1 a 16 aplique la separación de variables para hallar, si es posible, soluciones producto para la ecuación diferencial respectiva.

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. $u_x + u_y = u$
4. $u_x = u_y + u$
5. $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}$
6. $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
8. $y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
9. $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$
10. $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$
11. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
12. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$
13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
14. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
15. $u_{xx} + u_{yy} = u$
16. $a^2 u_{xx} - g = u_{tt}, \quad g = \text{constante}$

En los problemas 17 a 26 clasifique la respectiva ecuación diferencial parcial como hiperbólica, parabólica o elíptica.

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
18. $3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
19. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
21. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$
22. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$
25. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
26. $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$

27. Demuestre que la ecuación

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

tiene la solución en forma de producto

$$u = e^{-k\lambda^2 t} (AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r)).$$

28. a) Demuestre que la ecuación

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

se puede escribir en la forma $\partial^2 u / \partial \eta \partial \xi = 0$ mediante las sustituciones $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

b) Demuestre que la solución de la ecuación es

$$u = F(x + at) + G(x - at),$$

en que F y G son funciones arbitrarias doblemente diferenciables.

29. Halle las soluciones de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ que tengan la forma $u = e^{mx+ny}$.

30. Compruebe que los productos en las ecuaciones (2), (3) y (4) satisfacen la ecuación (1).

31. La definición 11.1 se generaliza a las ecuaciones lineales con coeficientes función de x y y . Determine las regiones del plano xy para las cuales la ecuación

$$(xy + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + 2y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy^2 u = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica.

11.2

ECUACIONES CLÁSICAS Y PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA

- Ecuación de transmisión unidimensional de calor ■ El laplaciano
- Ecuación de Laplace con dos variables ■ Condiciones iniciales
- Tipos de condiciones en la frontera ■ Problemas de valor en la frontera
- Ecuaciones en derivadas parciales clásicas modificadas

Durante el resto de este capítulo nos ocuparemos principalmente en hallar soluciones en forma de producto de las ecuaciones en derivadas parciales

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \quad (1)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

o **pequeñas** variaciones de las mismas. A estas ecuaciones clásicas de la física matemática se les conoce, respectivamente, como **ecuación en una dimensión del calor**, **ecuación de onda unidimensional** y **ecuación de Laplace en dos dimensiones**. “En una dimensión” indica que x representa una dimensión espacial y que t representa al tiempo. La ecuación de Laplace se abrevia $\nabla^2 u = 0$, donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

es el **laplaciano en dos dimensiones** de la función u . En tres dimensiones, el laplaciano de u es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Obsérvese que la ecuación (1) de transmisión de calor es parabólica, la ecuación de onda (2) es hiperbólica y la ecuación de **Laplace** (3) es elíptica.

Ecuación de transmisión de calor La ecuación (1) se origina en la teoría del flujo de calor; esto es, el calor transferido por conducción en una varilla o alambre delgado. La función $u(x, t)$ es la temperatura. Los problemas de vibraciones mecánicas conducen con frecuencia a la ecuación de onda (2). Para los fines que se analizan **aquí**, una solución $u(x, t)$ de la ecuación (2) representa el desplazamiento de una cuerda ideal. Por último, una solución $u(x, y)$ de la ecuación (3) de **Laplace** se puede interpretar como la distribución de estado estable (esto es, independiente del tiempo) de la temperatura en una placa delgada y bidimensional.

Aun cuando debemos hacer muchas hipótesis simplificadoras ¿o no?, vale la pena ver cómo se originan ecuaciones como la (1) y la (2).

Supongamos que una varilla circular delgada de **longitud** L tiene una sección transversal de área A y que coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$ (Fig. 11. 1). También supongamos que

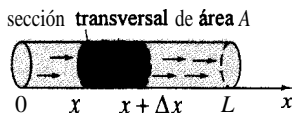


FIGURA 11. 1

- El flujo de calor dentro de la varilla **sólo** tiene la dirección x .
- La superficie lateral, o curva, de la varilla está aislada; esto es, no escapa calor de esa superficie.
- No se genera calor dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea —es decir, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El calor específico γ y la conductividad térmica del material de la varilla K son constantes.

Para derivar la ecuación **diferencial** parcial que satisface la temperatura $u(x, t)$, necesitamos dos leyes empíricas de la conducción de calor:

i) La cantidad de calor Q en un elemento de masa m es

$$Q = \gamma mu, \quad (4)$$

donde u es la temperatura del elemento.

ii) La tasa de flujo de calor Q_t a través de la sección transversal de la figura 11.1 es proporcional al área A de esa sección y a la derivada parcial de la temperatura con respecto a x :

$$Q_t = -K A u_x. \quad (5)$$

Puesto que el calor fluye en dirección de la temperatura decreciente se incluye el signo menos en la ecuación (5) a fin de asegurar que Q_t sea positivo para $u_x < 0$ (flujo de calor hacia la derecha) y negativo para $u_x > 0$ (flujo de calor hacia la izquierda). Si el corte circular de la varilla

(Fig. 11.1) entre x y $x + \Delta x$ es muy delgado, cabe suponer que $u(x, t)$ es la temperatura aproximada en todo punto del intervalo. Ahora bien, la masa del corte es $m = \rho(A \Delta x)$, de manera que, según la ecuación (4), la cantidad de calor en él es,

$$Q = \gamma \rho A \Delta x u. \quad (6)$$

Además, cuando el calor fluye hacia la dirección de las x positivas, vemos que, de acuerdo con la ecuación (5), ese calor se acumula en el corte con la razón neta

$$-K A u_x(x, t) - [-K A u_x(x + \Delta x, t)] = K A [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \quad (7)$$

Al diferenciar la ecuación (6) con respecto a t vemos que esa razón neta también está expresada por

$$Q_t = \gamma \rho A \Delta x u_t. \quad (8)$$

Igualemos (7) y (8), y de ello resulta

$$\frac{K}{\gamma \rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = u_t. \quad (9)$$

Tomamos el límite de esta ecuación cuando $\Delta x \rightarrow 0$, y llegamos a la ecuación (1) en la forma*

$$\frac{K}{\gamma \rho} u_{xx} = u_t.$$

Se acostumbra que $k = K/\gamma \rho$ y llamar **difusividad térmica** a esta constante positiva.

Ecuación de onda Se tiene una cuerda de longitud L , -como una cuerda de guitarra-, estirada entre dos puntos en el eje x : por ejemplo, $x = 0$ y $x = L$. Cuando comienza a vibrar, supongamos que el movimiento se lleva a cabo en el plano xy , de tal modo que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x (vibraciones transversales). Como vemos en la figura II .2(a), $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical de cualquier punto de la cuerda, medido a partir del eje x , cuando $t > 0$. Además se supone que:

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda es **homogénea** esto es, ρ , su masa por unidad de longitud, es constante.
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.
- La pendiente de la curva es pequeña en todos sus puntos.
- La tensión T actúa tangente a la cuerda y su magnitud T es la misma en todos los puntos.
- La tensión es considerable en comparación con la fuerza de gravedad.
- No hay otras fuerzas externas actuando **sobre** la cuerda.

En la figura II .2(b), las tensiones T_1 y T_2 son tangentes a los extremos de la curva en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para θ_1 y θ_2 pequeños, la fuerza vertical neta que actúa sobre el elemento Δs correspondiente de la cuerda es, por consiguiente,

*Recordamos, del cálculo **diferencial**, que $u_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(\frac{d u}{d x} \right)$

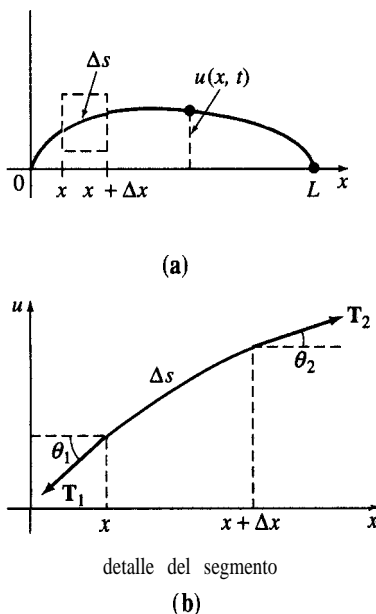


FIGURA II.2

$$T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1 \approx T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \\ = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)],^*$$

en donde $T = |\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$. Ahora, $\rho \Delta s \approx \rho \Delta x$ es la masa de la cuerda en $[x, x + \Delta x]$ y al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos

$$T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \rho \Delta x u_{tt} \\ \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}.$$

O sea

Si se toma el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, esta última ecuación se transforma en $u_{xx} = (\rho/T)u_{tt}$. Esto es la ecuación (2) en que $a^2 = T/\rho$.

Ecuación de Laplace Aunque no presentaremos su derivación, esta ecuación en dos o tres dimensiones surge en problemas independientes del tiempo que conciernen potenciales como el electrostático, el gravitacional y la velocidad en mecánica de fluidos. Además, una solución de la ecuación de Laplace se puede interpretar como la distribución de temperatura en un estado estable. Según la figura II.3, una solución $u(x, t)$ podría representar la temperatura que varía de un punto a otro -pero no con el tiempo- en una placa rectangular.

Con frecuencia hay que hallar las soluciones de las ecuaciones (1), (2) y (3) que satisfagan ciertas condiciones adicionales.

Condiciones iniciales Puesto que las soluciones de las ecuaciones (1) y (2) dependen del tiempo t , podemos indicar qué sucede cuando $t = 0$; esto es, podemos establecer las

* $\tan \theta_2 = u_x(x + \Delta x, t)$ y $\tan \theta_1 = u_x(x, t)$ son expresiones equivalentes para la pendiente.

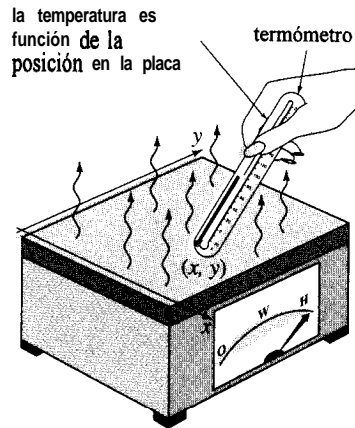


FIGURA II.3

condiciones iniciales (CI). Si $f(x)$ representa la **distribución inicial** de temperatura en la varilla de la figura II. 1, entonces una solución $u(x, t)$ de (1) debe satisfacer la condición inicial única $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$. Por otro lado, en el caso de una cuerda vibratoria es posible especificar su desplazamiento (o forma) **inicial** $f(x)$ y su velocidad inicial $g(x)$. En términos **matemáticos**, se busca una función $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación (2) y las dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (10)$$

Por ejemplo, la cuerda se puede tocar como muestra la **figura 11.4**, **soltándola** del reposo ($g(x) = 0$).

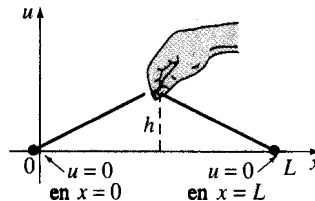


FIGURA II.4

Condiciones en la frontera La cuerda de la figura 11.4 está fija en el eje x en $x = 0$ y $x = L$. Esto lo traducimos en las dos **condiciones en la frontera (CF)** siguientes:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Nótese que en este contexto la **función f** es continua en la ecuación (10) y, en consecuencia, $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. En general hay tres tipos de condiciones en la frontera relacionadas con ecuaciones como la (1), (2) o (3). En una frontera podemos especificar los valores de una de las siguientes cantidades:

$$i) u, \quad ii) \frac{\partial u}{\partial n}, \quad \text{o bien} \quad iii) \frac{\partial u}{\partial n} + hu, \quad h \text{ constante.}$$

Aquí $\partial u / \partial n$ representa la derivada normal de u (la derivada direccional de u en la dirección perpendicular a la frontera). Una condición a la frontera del primer tipo, *i)*, se llama **condición de Dirichlet**; del segundo tipo, *ii)*, **condición de Neumann**, y del tercer tipo, *iii)*, **condición de Robin**. Por ejemplo, cuando $t > 0$, una condición frecuente en el extremo derecho de la varilla en la figura II. 1 puede ser

$$i)' \quad u(L, t) = u_0, \quad u_0 = \text{constante},$$

$$ii)' \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L}, \quad \text{o bien}$$

$$iii)' \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -h(u(L, t) - u_m), \quad h > 0 \text{ y } u_m \text{ constantes.}$$

La condición *i)'* tan sólo expresa que la frontera $x = L$ se mantiene a una temperatura u_0 constante en todo momento $t > 0$ por algún medio. La condición *ii)'* indica que la frontera $x = L$ está *aislada*. Según la ley empírica de la transmisión de calor, el flujo del mismo a través de una sección (esto es, la cantidad de calor por unidad de área y por unidad de tiempo que es conducida a través de la frontera) es proporcional al valor de la derivada normal $\partial u / \partial n$ de la temperatura u . Así, cuando la frontera $x = L$ está térmicamente aislada, no entra ni sale calor de la varilla y

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

Podemos interpretar que la condición *iii)'* representa el *calor que se pierde* del extremo derecho de la varilla al estar en contacto con un medio como aire o agua, que permanece a una temperatura constante. Según la ley de Newton del enfriamiento, el flujo del calor que sale de la varilla es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la misma $u(L, t)$ en el extremo y la temperatura u_m del medio que la rodea. Observamos que si se pierde calor del extremo izquierdo, la condición en la frontera es

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = h(u(0, t) - u_m).$$

El cambio de signo algebraico concuerda con la hipótesis de que la varilla tiene una temperatura mayor que el medio que rodea sus extremos; de manera que, $u(0, t) > u_m$ y $u(L, t) > u_m$. En $x = 0$ y $x = L$, las pendientes de $u_x(0, t)$ y $u_x(L, t)$ deben ser positiva y negativa, respectivamente.

Está claro que podemos especificar condiciones distintas al mismo tiempo en los extremos de la varilla; por ejemplo,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad u(L, t) = u_0, \quad t > 0.$$

Nótese que la condición en la frontera (CF) en *i)'* es homogénea si $u_0 = 0$; ahora bien, si $u_0 \neq 0$, es no homogénea. La condición en la frontera *ii)'* es homogénea y en *iii)'* es homogénea si $u_m = 0$ y no homogénea si $u_m \neq 0$.

Problemas de valor en la frontera Los problemas como

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver:} \quad & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
 \text{Sujeta a:} \quad & \text{(BC)} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\
 & \text{(IC)} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L
 \end{aligned} \tag{11}$$

Y

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver:} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\
 \text{Sujeta a:} \quad & \text{(BC)} \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, & 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = f(x), & 0 < x < a \end{cases}
 \end{aligned}$$

se llaman problemas de valor en la frontera.

Modificaciones Las ecuaciones diferenciales parciales (1), (2) y (3) se deben modificar para tener en cuenta los factores internos o externos que actúan sobre el sistema físico. Formas más generales de las ecuaciones de transmisión de calor y de onda en una dimensión son, respectivamente,

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t, u) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

Y

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Por ejemplo, si hay flujo de calor de la superficie lateral de una varilla hacia el medio que la rodea, y éste se mantiene a una temperatura constante u_m , la ecuación (13) de transmisión de calor es

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En la ecuación (14), la función F puede representar las fuerzas que actúan sobre la cuerda; por ejemplo, cuando se consideran las fuerzas externas de fricción y de restauración elástica, la ecuación (14) adopta la forma

$$\begin{aligned}
 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku.
 \end{aligned} \tag{15}$$

\uparrow
fuerza
externa

\uparrow
fuerza de
amortiguamiento

\uparrow
fuerza de
restauración

Observación

En el análisis de una gran variedad de fenómenos físicos se llega a ecuaciones como la (1), (2) o (3), o sus generalizaciones donde interviene una mayor cantidad de variables espaciales;

por ejemplo, en ocasiones la ecuación (1) se denomina **ecuación de difusión** porque la difusión de sustancias disueltas en una solución es análoga al **flujo** de calor en un sólido. En este caso, la función $u(x, t)$ que satisface la ecuación diferencial, representa la concentración de la sustancia disuelta. De igual forma, la ecuación (1) surge en el estudio del **flujo** de la electricidad por un cable largo o línea de transmisión. En este **contexto**, la ecuación (1) se llama **ecuación del telégrafo**. Se puede demostrar que, **bajo ciertas** hipótesis, la corriente y el voltaje en el conductor son funciones que **satisfacen** dos ecuaciones de forma idéntica a la de (1). La ecuación de onda (2) también aparece en la teoría de las líneas de transmisión con alta frecuencia, en mecánica de fluidos, acústica y elasticidad. La ecuación (3) de **Laplace**, se **maneja** en problemas técnicos de desplazamientos estáticos de membranas.

EJERCICIOS 11.2

Las respuestas a los problemas nones se encuentran en el apéndice de respuestas.

En los problemas 1 a 4, una varilla de longitud L coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Plantee el problema de valor en la frontera para la temperatura $u(x, t)$.

1. El extremo izquierdo **se** mantiene a la temperatura cero y el derecho esta aislado. La temperatura inicial en toda la varilla **es** $f(x)$.
2. El extremo izquierdo se mantiene a la temperatura u_0 y el derecho, a u_1 . La temperatura inicial es cero en toda la varilla.
3. El extremo izquierdo se mantiene a la temperatura 100 y hay transmisión de calor desde el extremo derecho hacia el ambiente, que se encuentra a la temperatura cero. La temperatura inicial en toda la varilla **es** $f(x)$.
4. Los extremos están aislados y hay flujo de calor de la superficie lateral hacia el medio que la rodea, el cual está a la temperatura 50. La temperatura inicial en toda la varilla es 100.

En los problemas 5 a 8, una cuerda de longitud L coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Plantee el problema de valor en la frontera para el desplazamiento $u(x, t)$.

5. Los extremos están fijos en el eje x . La cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $x(L - x)$.
6. Los extremos están fijos en el eje x . Al principio, la cuerda no está desplazada, pero tiene la velocidad inicial $\sin(\pi x/L)$.
7. El extremo izquierdo está fijo en el eje x , pero el derecho se mueve transversalmente de acuerdo con $\sin \pi t$. La cuerda parte del reposo desde un desplazamiento **inicial** $f(x)$. Para $t > 0$, las vibraciones transversales se amortiguan con una fuerza proporcional a la velocidad instantánea.
8. Los extremos están fijos en el eje x y la cuerda está inicialmente en reposo en ese eje. Una fuerza vertical externa, proporcional a la distancia horizontal al extremo izquierdo, actúa sobre la cuerda cuando $t > 0$.

En los problemas 9 y 10, plantee el problema de valor en la frontera para la temperatura $u(x, y)$ de estado estable.

9. Los lados de una placa rectangular delgada coinciden con los de la región definida por $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$. El lado izquierdo y la cara inferior de la placa están aislados. La cara superior se mantiene a la temperatura de cero y el lado derecho a la **temp.**, $f(y)$.

10. Los lados de una placa semiinfinita coinciden con los de la región definida por $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$. El lado izquierdo se mantiene a la temperatura e^{-y} , y el derecho a la temperatura 1 o 0 cuando $0 < y \leq 1$ y a cero cuando $y > 1$. La cara inferior permanece a la temperatura $f(x)$.

11.3 ECUACIÓN DE TRANSMISIÓN DE CALOR

- Solución de un problema de valor en la frontera por separación de variables
- Valores propios ■ Funciones propias

Una varilla delgada de longitud L tiene una temperatura inicial $f(x)$ y sus extremos se mantienen a la temperatura cero en todo momento $t > 0$. Si la varilla de la figura 11.5 satisface las hipótesis de la página 484, el problema de valor en la frontera establece su temperatura $u(x, t)$

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \quad (3)$$

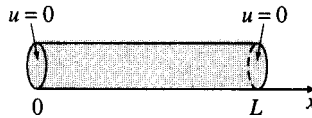


FIGURA 11.5

Con el producto $u = X(x)T(t)$ y la constante de separación $-\lambda^2$, llegamos a

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda^2 \quad (4)$$

y a

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ T' + k\lambda^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X &= c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \\ T &= c_3 e^{-k\lambda^2 t}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0) T(t) = 0 \\ u(L, t) &= X(L) T(t) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora bien, como

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0,$$

debemos tener $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Estas condiciones homogéneas en la frontera, junto con la ecuación homogénea (5), son un problema normal de Sturm-Liouville. Al aplicar la primera de estas condiciones a la ecuación (6) obtenemos $c_1 = 0$, de inmediato. En consecuencia

$$X = c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

La segunda condición en la frontera implica que

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Si $c_2 = 0$, entonces $X = 0$, de modo que $u = 0$. Para obtener una solución u no trivial, se debe cumplir $c_2 \neq 0$, y de este modo la última ecuación se satisface cuando

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Esto implica que $\lambda L = n\pi$, o sea $\lambda = n\pi/L$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Los valores

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

y las soluciones correspondientes

$$X = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

son los **valores propios (0 eigenvalores)** y las **funciones propias (0 eigenfunciones)** respectivamente, del problema.

Según la ecuación (7); $T = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$, por consiguiente

$$u_n = XT = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad (10)$$

en donde hemos reemplazado la constante $c_2 c_3$ por A_n . Los productos $u_n(x, t)$ satisfacen la ecuación en derivadas parciales (1) y las condiciones en la frontera (2) para todo valor del entero positivo n . Sin embargo, para que las funciones que aparecen en la ecuación (1) satisfagan la condición inicial (3), tendríamos que definir el coeficiente A_n de tal forma que

$$u_n(x, 0) = f(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \quad (11)$$

En general, no esperamos que la condición (11) se satisfaga con una elección arbitraria, aunque razonable, de f ; en consecuencia, tenemos que admitir que $u_n(x, t)$ **no es una solución del problema dado**. Ahora bien, por el principio de superposición, la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (12)$$

también debe satisfacer, aunque formalmente, la ecuación (1) y las condiciones (2). La sustitución de $t = 0$ en la ecuación (12) implica

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

*El lector debe comprobar que si la constante de separación se define como $\lambda^2 = 0$, o como $\lambda^2 > 0$, la única solución de (1) que satisface las condiciones (2) es $u = 0$.

Se advierte que esta última expresión es el desarrollo de f en una serie de senos de mitad de intervalo. Al identificar $A_n = b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces, de acuerdo con la ecuación (5) de la sección 10.3,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Concluimos que una solución del problema de valor en la frontera descrito en (1), (2) y (3) está dada por la serie infinita

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

En el caso especial en que $u(x, 0) = 100$, $L = \pi$ y $k = 1$, el lector debe comprobar que los coeficientes A_n están dados por

$$A_n = \frac{200}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right],$$

de modo que

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] e^{-n^2 t} \sin nx. \quad (13)$$

con ayuda de un sistema algebraico de computación (SAC), en la figura II.6 mostramos las gráficas de la solución $u(x, t)$ en el intervalo $[0, \pi]$ para varios valores del tiempo t . La gráfica confirma lo que es evidente en la ecuación (13), principalmente que $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

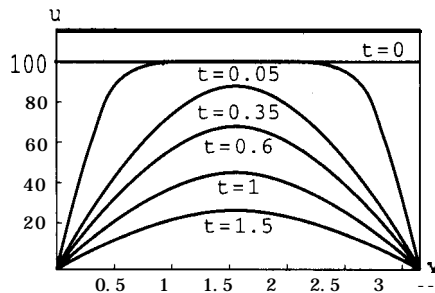


FIGURA II.6

EJERCICIOS 11.3

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

En los problemas 1 y 2 resuelva la ecuación de transmisión de calor (1) sujeta a las condiciones respectivas. Suponga una varilla de longitud L .

$$1. \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \qquad 2. \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases} \qquad u(x, 0) = x(L - x)$$

3. Halle la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de longitud L cuando la temperatura inicial en ella es $f(x)$ y los extremos, $x = 0$ y $x = L$, están aislados.

4. Resuelva el problema 3 para $L = 2$ y $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$.
5. Suponga que se pierde calor a través de la superficie lateral de una varilla delgada de longitud L , el cual pasa al medio ambiente que está a la temperatura cero. Si se aplica la ley lineal de transferencia de calor, la ecuación adopta la forma $k\partial^2 u/\partial x^2 - hu = \partial u/\partial t$, $0 < x < L$, $t > 0$, donde h es una constante. Halle la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial en toda la varilla es $f(x)$ y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados (Fig. II .7).
6. Resuelva el problema 5 cuando los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a la temperatura cero.

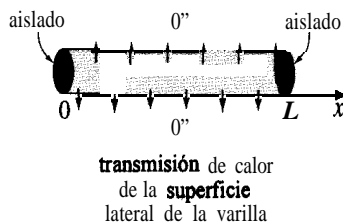


FIGURA II .7

11.4 ECUACIÓN, DE ONDA

- *Solución de un problema de valor en la frontera por separación de variables*
- *Ondas estacionarias* ■ *Modos normales* ■ *Primer modo normal*
- *Frecuencia fundamental* ■ *Armónicas*

Ya podemos resolver el problema (II) de valor en la frontera de la sección II .2. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de la cuerda vibratoria de longitud L se muestra en la figura 11.2a), y se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (3)$$

Separamos variables en (1) para obtener

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$$

de modo que

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{y} \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0,$$

en consecuencia

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sinh x$$

$$T = c_3 \cos \lambda a t + c_4 \sen \lambda a t.$$

Como antes, las condiciones (2) en la frontera se traducen en $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Así vemos que

$$c_1 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Esta última ecuación define los valores propios $\lambda = n\pi/L$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Las funciones propias respectivas son

$$X = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Las soluciones de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones en la frontera (2) son

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (4)$$

$$Y \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \quad (5)$$

Con $t = 0$ en (5) obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x,$$

que es un desarrollo de f en forma de **serie** de senos, de **mitad de intervalo**. Igual que cuando describimos la ecuación de transmisión de calor, podemos definir $A_n = b_n$:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \quad (6)$$

Para determinar B_n , derivamos la ecuación (5) con respecto a t e hacemos $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi a}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned}$$

Para que la última serie sea desarrollo de g en senos de **mitad de intervalo** en el intervalo, el coeficiente **total**, $B_n n\pi a/L$ debe estar en la forma de la ecuación (5) de la sección 10.3, o sea

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx,$$

de donde obtenemos

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \quad (7)$$

La solución del problema está formada por la serie (5), con A_n y B_n definidos por (6) y (7), respectivamente.

Obsérvese que cuando la cuerda se suelta partiendo **del reposo**, $g(x) = 0$ para toda x en $0 \leq x \leq L$, en consecuencia, $B_n = 0$.

Ondas estacionarias De la obtención de la ecuación de onda, en la sección 11.2, recordamos que la constante a que aparece en la solución del problema de valor en la frontera (1), (2) y (3), es $\sqrt{T/\rho}$, donde ρ es la masa por unidad de longitud y T la magnitud de la tensión de la cuerda. Cuando T es suficientemente grande, la cuerda vibratoria produce un sonido musical, originado por ondas estacionarias. La solución (5) es una superposición de soluciones producto, llamadas **ondas estacionarias o modos normales**:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \cdots$$

De acuerdo con las ecuaciones (6) y (7) de la sección 5.1, las soluciones producto (4) se pueden escribir en la forma

$$u_n(x, t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right) \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad (8)$$

en donde $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ y ϕ_n está definido por $\sin \phi_n = A_n/C_n$ y $\cos \phi_n = B_n/C_n$. Para $n = 1, 2, 3, \dots$ las ondas estacionarias son, en esencia, las gráficas de $\sin(n\pi x/L)$ con amplitud variable en el tiempo,

$$C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right).$$

En forma alternativa, de acuerdo con la ecuación (8), vemos que en un valor fijo de x , cada función producto $u_n(x, t)$, representa un movimiento armónico simple, cuya amplitud es $C_n|\sin(n\pi x/L)|$ y cuya frecuencia es $f_n = na/2L$. En otras palabras, cada punto en una onda estacionaria vibra con distinta amplitud, pero con la misma frecuencia. Cuando $n = 1$,

$$u_1(x, t) = C_1 \sin\left(\frac{\pi a}{L}t + \phi_1\right) \sin\frac{\pi}{L}x$$

y se llama **primera onda estacionaria, primer modo normal o modo fundamental de vibración**. En la figura 11.8 se presentan las primeras tres ondas estacionarias o modos normales. Las gráficas punteadas representan las ondas estacionarias en distintos valores del

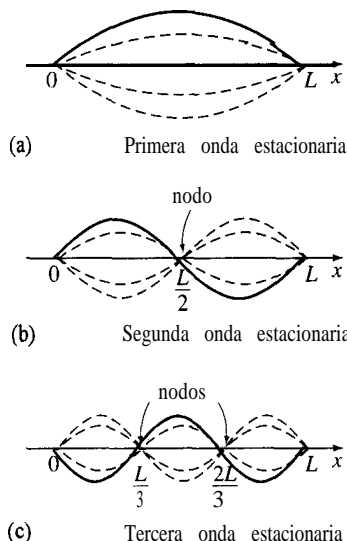


FIGURA 11.8

tiempo. Los puntos del intervalo $(0, L)$ para los que $\sin(n\pi x/L) = 0$, corresponden a puntos de una onda estacionaria en los que no hay movimiento. Estos puntos se denominan **odos**; por ejemplo, en las figuras 11.8b) y c) se ve que la segunda onda estacionaria tiene un nodo en $L/2$ y que la tercera tiene dos nodos, en $L/3$ y en $2L/3$. En general, el n -ésimo modo normal de vibración tiene $n - 1$ nodos.

La frecuencia

$$f_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

del primer modo normal se llama **frecuencia fundamental o primera armónica** y se relaciona directamente con la altura del sonido que produce un instrumento de cuerda. Mientras mayor es la tensión de la cuerda, más alto (agudo) será el sonido que produce. Las frecuencias f_n de los demás modos normales, que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, se llaman **armónicas o sobretonos**. La segunda armónica es el primer sobretono y así sucesivamente.

EJERCICIOS 11.4

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

Resuelva la ecuación de onda (1), sujeta a las condiciones citadas en los problemas 1 a 8.

$$\begin{aligned} 1. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \\ & u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \\ & u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = x(L - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \\ & u(x, 0), \text{ como se especifica en } \text{latigura 11.9} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 4. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \\ & u(x, 0) = \frac{1}{8}x(\pi^2 - x^2), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \\ & u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin x \end{aligned} \quad \begin{aligned} 6. \quad & u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \\ & u(x, 0) = 0.01 \sin 3\pi x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$7. \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L}, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

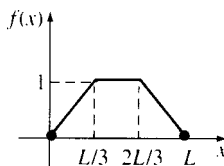


FIGURA 11.9

La constante h es positiva pero pequeña, en **comparación** con L ; esto se llama “problema de la cuerda rasgada”.

$$\begin{aligned} 8. \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \\ u(x, 0) &= x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Este problema podría describir el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una barra elástica vibratoria. Las condiciones en la frontera, para $x = 0$ y $x = L$, se llaman **condiciones del extremo libre** (Fig. 11.10).

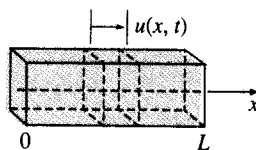


FIGURA 11.10

9. Una cuerda se tensa y se asegura en el eje x en $x = 0$ y en $x = \pi$ para $t > 0$. Si las vibraciones transversales se presentan en un medio con una resistencia proporcional al movimiento a la velocidad instantánea, la ecuación de onda toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Halle el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde un desplazamiento inicial $f(x)$.

10. Demuestre que una **solución** del problema de valor en la frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

es

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}(2k-1)x \cos \sqrt{(2k-1)^2 + 1} t.$$

11. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de una viga vibratoria de longitud L está determinado por una ecuación diferencial parcial de cuarto orden

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Si la viga **está simplemente apoyada** (Fig. II.11), las condiciones en la frontera (CF) y condiciones iniciales (CI) son

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t > 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Determine $u(x, t)$. [Sugerencia: por comodidad, use λ^4 en lugar de λ^2 al separar variables.]

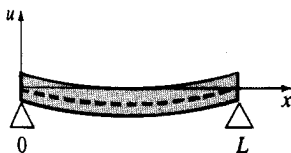


FIGURA II.11 Viga simplemente apoyada

12. ¿Cuáles son las condiciones en la frontera cuando los extremos de la viga del problema II están empotrados en $x = 0$ y $x = L$?
13. En el problema de valor en la frontera expresado en las ecuaciones (1), (2) y (3) de esta sección, si $g(x) = 0$ en $0 < x < L$, demuestre que la solución del problema se puede expresar en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)].$$

[Sugerencia: aplique la identidad $2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)$.]

14. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda infinitamente larga **está** determinado por el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x). \end{aligned}$$

el cual se puede resolver sin separar las variables.

- a) De acuerdo con el problema 28 de los ejercicios 11.1, la ecuación de onda se puede expresar en la forma $\partial^2 u / \partial \eta \partial \xi = 0$ con las sustituciones $\xi = x + at$ y $\eta = x - at$. Si integramos la última ecuación diferencial parcial con respecto a η y después con respecto a ξ , veremos que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ es una solución de la ecuación de onda, donde F y G son funciones arbitrarias dos veces derivables. Emplee esta solución y las condiciones iniciales dadas para demostrar que

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(s) ds + c$$

Y

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(s) ds - c,$$

en que x_0 es arbitraria y c es una constante de integración.

- b) Aplique los resultados de la parte a) para demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds. \quad (10)$$

Observe que cuando la velocidad inicial $g(x) = 0$, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)], \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta última solución se puede interpretar como superposición de dos **ondas viajeras**, una que se mueve hacia la derecha (esto es, $\frac{1}{2}f(x - at)$) y una hacia la izquierda ($\frac{1}{2}f(x + at)$). Ambas viajan con velocidad a y tienen la misma forma básica que la del desplazamiento inicial $f(x)$. La forma de $u(x, t)$ de la ecuación (10) se llama **solución de d'Alembert**.

En los problemas 15 a 17 emplee la solución de **d'Alembert**, ecuación (10), para resolver el mismo problema de valor inicial, pero sujeto a las respectivas condiciones iniciales.

15. $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$

16. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

17. $f(x) = 0$, $g(x) = \sin 2x$

18. Suponga que $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $g(x) = 0$ y $a = 1$ en el problema de valor inicial planteado como problema 14. Grafique la solución de **d'Alembert** para este caso, cuando el tiempo es $t = 0$, $t = 1$ y $t = 3$.

19. Un modelo de una cuerda infinitamente larga que inicialmente se sujeta en tres puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y a continuación se suelta simultáneamente de esos puntos cuando $t = 0$, es la ecuación (9) en que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{Y} \quad g(x) = 0.$$

- a) **Grafique** la posición inicial de la cuerda en el intervalo $[-6, 6]$.

- b) Con un sistema algebraico de computación grafique la solución de **d'Alembert**, ecuación (10), en $[-6, 6]$ cuando $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 25$.

- c) Con la función de animación del SAC tome una película de la solución. Describa el movimiento de la cuerda a través del tiempo.

20. Una cuerda infinitamente larga, que coincide con el eje x , es golpeada con un martinete en el origen; la bola del martillo tiene 0.2 pulgadas de diámetro. Un modelo del movimiento de la cuerda es la ecuación (9) en que

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0.1 \\ 0, & |x| > 0.1 \end{cases}$$

- a) Con un SAC grafique la solución de **d'Alembert**, ecuación (10), en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 25$.

- b) Emplee la función de animación del dicho sistema para tomar una película de la solución. Describa el movimiento de la cuerda a través del tiempo.

11.5 ECUACIÓN DE LAPLACE

- Solución de un problema de valor en la *frontera* por separación de variables
- Problema de *Dirichlet* ■ Principio de superposición

Supongamos que se trata de hallar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa rectangular con bordes aislados (Fig. II. 12). Cuando no escapa calor de los lados de la placa, se resuelve la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

sujeta a

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

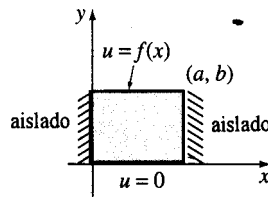


FIGURA II. 12

La separación de variables lleva a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad (1)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2)$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad (3)$$

y como $0 < y < b$ es intervalo finito, aplicamos la solución

$$Y = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y. \quad (4)$$

Las tres primeras condiciones en la frontera se traducen en $X'(0) = 0$, $X(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. Al derivar X y establecer $x = 0$, se hace que $c_2 = 0$ y en consecuencia, $X = c_1 \cos \lambda x$. Derivamos esta última expresión y con $x = a$, obtenemos $-c_1 \lambda \sin \lambda a = 0$. Esta condición se satisface cuando $\lambda = 0$ o cuando $\lambda a = n\pi$ o $\lambda = n\pi/a$, $n = 1, 2, \dots$. Obsérvese que $\lambda = 0$ significa que la ecuación (1) es $X'' = 0$. La solución general de esta ecuación es la función lineal dada por $X = c_1 + c_2 x$, y no por la ecuación (3). En este caso, las condiciones en la frontera $X'(0) = 0$, $X(a) = 0$ exigen que $X = c_1$. En este ejemplo, a diferencia de los dos anteriores, nos vemos forzados

a concluir que $\lambda = 0$ sí es un valor propio. Mediante la correspondencia $\lambda = 0$ con $n = 0$, se obtienen las funciones propias

$$x = c_1, \quad n = 0, \quad y \quad X = c_1 \cos \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por último, la condición $Y(0) = 0$ obliga a que $c_3 = 0$ en la ecuación (4) cuando $\lambda > 0$. Sin embargo, cuando $\lambda = 0$, la ecuación (2) se transforma en $Y'' = 0$, y en consecuencia la solución tiene la forma $Y = c_3 + c_4 y$, y no la de la ecuación (4). Pero $Y(0) = 0$ significa nuevamente que $c_3 = 0$, de modo que $Y = c_4 y$. Así, las soluciones producto de la ecuación que satisface las tres primeras condiciones en la frontera son

$$A_0 y, \quad n = 0, \quad y \quad A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Con el principio de superposición se obtiene otra solución:

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x. \quad (5)$$

Al sustituir $y = b$ en esta ecuación se obtiene

$$u(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sinh \frac{n\pi}{a} b \right) \cos \frac{n\pi}{a} x,$$

que en este caso es un desarrollo de f en serie de cosenos de mitad de intervalo. Al aplicar las definiciones $A_0 b = a_0/2$ y $A_n = \sinh(n\pi b/a) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ se obtiene, de acuerdo con las ecuaciones (2) y (3) de la sección 10.3,

$$2A_0 b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) dx$$

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx \quad (6)$$

$$y \quad A_n \sinh \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx. \quad (7)$$

La solución de este problema consiste en la serie de la ecuación (5), en que A_0 y A_n se definen con las igualdades (6) y (7), respectivamente.

Problema de Dirichlet Un problema de valor en la frontera en que se busca una solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico, como la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, dentro de una región tal que u adopte valores prescritos en el contorno total de esa región, se llama **problema de Dirichlet**.

Principio de superposición Un problema de Dirichlet para un rectángulo se puede resolver con facilidad separando variables cuando se especifican condiciones homogéneas para dos fronteras **paralelas**; sin embargo, el método de separación de variables no se aplica a un

problema de Dirichlet cuando las condiciones en la frontera en los cuatro lados del rectángulo son no homogéneas. Para salvar esta dificultad se descompone el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(0, y) &= F(y), \quad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (8)$$

en dos problemas, cada uno con condiciones homogéneas en la frontera, en lados paralelos:

Problema 1	Problema 2
$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$	$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$
$u_1(0, y) = 0, \quad u_1(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$	$u_2(0, y) = F(y), \quad u_2(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b$
$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_1(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a$	$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, b) = 0, \quad 0 < x < a$

Supongamos que u_1 y u_2 son las soluciones de los problemas 1 y 2, respectivamente. Si definimos $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, veremos que u satisface todas las condiciones en la frontera en el problema original (8); por ejemplo,

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u_1(0, y) + u_2(0, y) = 0 + F(y) = F(y) \\ u(x, b) &= u_1(x, b) + u_2(x, b) = g(x) + 0 = g(x) \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Además, u es una solución de la ecuación de Laplace, según el teorema 11.1. En otras palabras, al resolver los problemas 1 y 2 y sumar las soluciones, ya resolvimos el problema original. Esta propiedad aditiva de las soluciones se llama principio de superposición (Fig. 11.13).

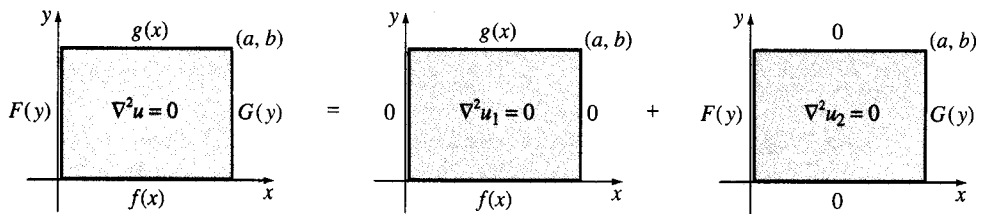


FIGURA 11.13 Solución u = Solución u_1 del problema 1 + Solución u_2 del problema 2

Dejaremos como ejercicio (véase los problemas 11 y 12 de los ejercicios 11.5) demostrar que una solución del problema 1 es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

en donde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \\ B_n &= \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \left(\frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx - A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \right) \end{aligned}$$

y que una solución del problema 2 es

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh \frac{n\pi}{b} x + B_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

en donde

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b F(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{b} a} \left(\frac{2}{b} \int_0^b G(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy - A_n \cosh \frac{n\pi}{b} a \right)$$

EJERCICIOS 11.5

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas

En los ejercicios 1 a 8 encuentre la temperatura de estado estable en una placa rectangular con las condiciones en la frontera dadas.

1. $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$
 $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = f(x)$

2. $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$
 $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$, $u(x, b) = f(x)$

3. $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$
 $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, b) = 0$

4. $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$
 $u(x, 0) = x$, $u(x, b) = 0$

5. $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 1 - y$
 $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0$

6. $u(0, y) = g(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$

7. $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(0, y)$, $u(\pi, y) = 1$
 $u(x, 0) = 0$, $u(x, \pi) = 0$

8. $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$
 $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = u(x, 0)$, $u(x, 1) = f(x)$

En los problemas 9 y 10 halle la temperatura de estado estable en la placa *semiinfinita* que se prolonga hacia la dirección de las y positivas. En cada caso suponga que $u(x, y)$ es acotada cuando $y \rightarrow \infty$.

9.

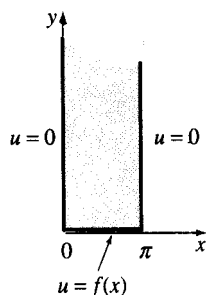


FIGURA 11.14

10.

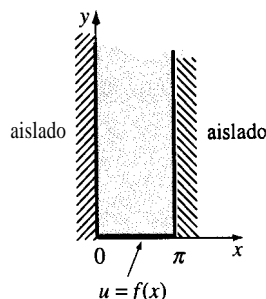


FIGURA 11.15

Encuentre la temperatura de estado estable en una placa rectangular cuyas condiciones en la frontera se especifican en los problemas 11 y 12.

$$\begin{aligned} 11. \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) \end{aligned} \quad \begin{aligned} 12. \quad u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y) \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0 \end{aligned}$$

En los problemas 13 y 14 aplique el principio de superposición para hallar la temperatura de estado estable en una placa cuadrada cuyas condiciones en la frontera se mencionan.

$$\begin{aligned} 13. \quad u(0, y) = 1, \quad u(\pi, y) = 1 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 1 \\ 14. \quad u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y(2 - y) \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

11.6

ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS Y CONDICIONES EN LA FRONTERA

■ Empleo de un cambio de variable dependiente ■ Solución de estado estable ■ Solución transitoria

Puede suceder que el método de separación de variables no sea aplicables a un problema de valor en la frontera, cuando la ecuación diferencial en derivadas parciales o las condiciones en la frontera sean no homogéneas; por ejemplo, cuando se genera calor a una tasa constante r en una varilla de longitud finita, la forma de la ecuación de transmisión de calor es

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

Esta ecuación es no homogénea, y se advierte con facilidad que no es separable. Por otro lado, supongamos que se desea resolver la ecuación acostumbrada de conducción de calor $ku_{xx} = u_t$, cuando las fronteras $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a las temperaturas k_1 y k_2 distintas de cero. Aun cuando la hipótesis $u(x, t) = X(x)T(t)$ separa la ecuación diferencial, llegamos rápidamente a un obstáculo en la determinación de los valores y las funciones propias porque no se pueden obtener conclusiones de $u(0, t) = X(0)T(t) = k_1$ y $u(L, t) = X(L)T(t) = k_2$.

Es posible resolver algunos problemas en que intervienen ecuaciones o condiciones en la frontera no **homogéneas** mediante un cambio de la variable dependiente:

$$u = v + \psi.$$

La idea básica es determinar ψ , una función de una variable, de tal modo que v , función de dos variables, pueda satisfacer una ecuación en derivadas parciales homogénea y condiciones homogéneas en la frontera. En el siguiente ejemplo exponemos el procedimiento.

EJEMPLO 1 Condición no homogénea en la frontera

Resuelva la ecuación (1) sujeta a

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Tanto la ecuación como la condición en la frontera son no homogéneas en $x = 1$. Si $u(x, t) = v(x, t) + \psi(t)$ entonces,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi'' \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k \psi'' + r = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2)$$

Ésta se reduce a una ecuación homogénea si hacemos que ψ satisfaga a

$$k \psi'' + r = 0 \quad \text{o sea} \quad \psi'' = -\frac{r}{k}.$$

Integramos dos veces la última ecuación y llegamos a

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + c_1x + c_2. \quad (3)$$

Además

$$u(0, t) = v(0, t) + \psi(0) = 0$$

$$u(1, t) = v(1, t) + \psi(1) = u_0.$$

Tenemos que $v(0, t) = 0$, y que $v(1, t) = 0$ siempre que

$$\psi(0) = 0 \quad \text{Y} \quad \psi(1) = u_0.$$

Al aplicar estas dos condiciones a la ecuación (3) obtenemos, $c_2 = 0$ y $c_1 = r/2k + u_0$, así que

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x.$$

Por último, la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) + \psi(x)$ entraña que $v(x, 0) = u(x, 0) - \psi(x) = f(x) - \psi(x)$. Entonces, para determinar $v(x, t)$, resolvemos el nuevo problema de valor en la frontera

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x \end{aligned}$$

por separación de variables. En la forma acostumbrada llegamos a

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$$

en donde

$$A_n = 2 \int_0^1 \left[f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x \right] \operatorname{sen} n\pi x \, dx. \quad (4)$$

Para terminar, obtenemos una solución al problema original sumando $\psi(x)$ y $v(x, t)$:

$$u(x, t) = -\frac{t}{\gamma_L} x^2 + \left(\frac{t}{\gamma_L} + u_0 \right) x + \sum A_n e^{-kn^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x, \quad (5)$$

en donde las A_n se definen en (4). ■

Obsérvese que $u(x, t) \rightarrow \psi(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$ en la ecuación (5). En el contexto de solución de la ecuación de transmisión de calor, ψ se llama **solución de estado estable**. Como $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, v se denomina **solución transitoria**.

La sustitución $u = v + \psi$ también es aplicable en problemas donde intervengan formas de la ecuación de onda, así como de la ecuación de Laplace.

EJERCICIOS 11.6

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

Resuelva la ecuación de transmisión de calor $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$, sujeta a las condiciones descritas en 1 y 2.

1. $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 100$
 $u(x, 0) = 0$

2. $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = 0$
 $u(x, 0) = f(x)$

Resuelva la ecuación en derivadas parciales (1) sujeta a las condiciones dadas en 3 y 4.

3. $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = u_0$
 $u(x, 0) = 0$

4. $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = u_1$
 $u(x, 0) = f(x)$

5. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-\beta x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \beta > 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

La ecuación diferencial es una forma de la ecuación de conducción de calor cuando se genera calor dentro de una varilla delgada, por ejemplo, por decaimiento radiactivo del material.

6. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

7. Halle una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

8. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ si la varilla del problema 7 es **semiinfinita**, se prolonga hacia la dirección positiva de las x e irradia de su superficie lateral hacia un medio de temperatura cero y si

$$u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0.$$

9. Al someter una cuerda vibratoria a una fuerza vertical externa, que varía en **función** de la distancia horizontal al extremo izquierdo, la ecuación de onda tiene la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ax = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Resuelva esta ecuación diferencial sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0 \quad 0 < x < 1.$$

10. Una cuerda está inicialmente en reposo sobre el eje x , asegurada en $x = 0$ y $x = 1$; se deja caer bajo su propio peso cuando $t > 0$ y el desplazamiento $u(x, t)$ satisface la ecuación

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

en que g es la aceleración de la gravedad. Obtenga $u(x, t)$.

11. Halle la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la placa semiinfinita de la figura 11.6. Suponga que la **temperatura** está acotada para $x \rightarrow \infty$. [Sugerencia: pruebe con $u(x, y) = v(x, y) + \psi(y)$.]

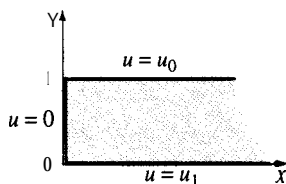


FIGURA 11.16

12. La ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h, \quad h > 0$$

se presenta en muchos problemas donde intervienen potenciales eléctricos. Resuélvala sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned}u(0, y) &= 0, & u(\pi, y) &= 1, & y > 0 \\u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi.\end{aligned}$$

11.7 EMPLEO DE SERIES DE **FOURIER** GENERALIZADAS

- Problemas de valor en la *frontera* que no conducen a series de Fourier
- Uso de las series de Fourier generalizadas

Para ciertos tipos de condiciones en la frontera, el método de separación de variables y el principio de superposición conducen al desarrollo de una función en forma de serie trigonométrica que no es serie de Fourier. Para resolver los problemas de esta sección utilizaremos el concepto de serie de **Fourier** generalizada (**Sec.** 10.1).

EJEMPLO 1 Empleo de la serie de Fourier generalizada

La temperatura en una varilla de longitud unitaria en que la transmisión de calor es de su extremo derecho hacia un ambiente a la temperatura constante cero, se determina a partir de

$$\begin{aligned}k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1, & t > 0 \\u(0, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=1} &= -hu(1, t), & h > 0, & t > 0 \\u(x, 0) &= 1, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

Determine $u(x, t)$.

SOLUCIÓN Con el método de separación de variables se obtiene

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + k\lambda^2 T = 0 \tag{1}$$

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad \text{y} \quad T(t) = c_3 e^{-k\lambda^2 t}.$$

Puesto que $u = XT$, las condiciones en la frontera son

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = -hX(1) \tag{2}$$

La primera condición en (2) da como resultado inmediato $c_1 = 0$. Al aplicar la segunda a $X(x) = c_2 \sin \lambda x$ se obtiene

$$\lambda \cos \lambda = -h \sin \lambda \quad \text{o sea} \quad \tan \lambda = -\frac{\lambda}{h}. \tag{3}$$

De acuerdo con el análisis del ejemplo 2 de la sección 10.4, sabemos que la última de las ecuaciones (3) tiene una cantidad infinita de raíces. Las raíces positivas consecutivas λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, son los valores propios del problema y sus funciones propias correspondientes son $X(x) = c_2 \sin \lambda_n x$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Por consiguiente

$$u_n = XT = A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x \quad \text{y} \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x.$$

Ahora bien, cuando $t = 0$, $u(x, 0) = 1$, $0 < x < 1$, así que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x. \quad (4)$$

La serie (4) no es de senos de Fourier, sino un desarrollo en términos de las funciones ortogonales que se producen en el problema normal de Sturm-Liouville que consiste en la primera ecuación diferencial en (1) y las condiciones (2) en la frontera. Por consiguiente, el conjunto de las funciones propias $\{\sin \lambda_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, en que las λ se definen mediante $\tan \lambda = -\lambda/h$, es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Con $f(x) = 1$ en la ecuación (8), sección 10.1, podemos escribir

$$A_n = \frac{\int_0^1 \sin \lambda_n x \, dx}{\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x \, dx} \quad (5)$$

Para evaluar la norma cuadrada de cada función propia recurrimos a una identidad trigonométrica:

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos 2\lambda_n x] \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n x \right]_0^1. \quad (6)$$

Con $\sin 2\lambda_n = 2 \sin \lambda_n \cos \lambda_n$ y $\lambda_n \cos \lambda_n = -h \sin \lambda_n$, simplificamos la ecuación (6) a la forma

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x \, dx = \frac{1}{2h} [h + \cos^2 \lambda_n].$$

También
$$\int_0^1 \sin \lambda_n x \, dx = -\frac{1}{\lambda_n} \cos \lambda_n x \Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda_n} [1 - \cos \lambda_n].$$

En consecuencia, la ecuación (5) se transforma en

$$A_n = \frac{2h(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n(h + \cos^2 \lambda_n)}.$$

Por último, una **solución** del problema de valor en la frontera es

$$u(x, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda_n}{\lambda_n(h + \cos^2 \lambda_n)} e^{-k\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Empleo de la serie de Fourier generalizada

El ángulo de torcimiento $\theta(x, t)$ de un eje de longitud unitaria que vibra torsionalmente se determina a partir de

$$\begin{aligned}
 a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0 \\
 \theta(0, t) &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, & \quad t > 0 \\
 \theta(x, 0) &= x, & \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, & \quad 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

La condición en la frontera, en $x = 1$, se llama condición de extremo libre. Determine $\theta(x, t)$.

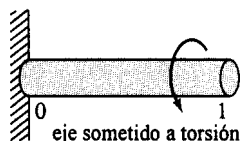


FIGURA 11.17

SOLUCIÓN Con $\theta = XT$ tenemos que

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \text{ entonces}$$

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad \text{y} \quad T(t) = c_3 \cos a \lambda t + c_4 \operatorname{sen} a \lambda t.$$

Las condiciones en la **frontera** $X(0) = 0$ y $X'(1) = 0$ dan $c_1 = 0$ y $c_2 \cos \lambda = 0$, respectivamente. Como la función coseno es cero en múltiplos impares de $\pi/2$, los valores propios del problema son $\lambda = (2n-1)(\pi/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. La condición inicial $T'(0) = 0$ da $c_4 = 0$, de modo que

$$\theta_n = XT = A_n \cos a \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi t \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x.$$

Para satisfacer la condición inicial restante, formamos

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos a \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi t \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x. \quad (7)$$

Cuando $t = 0$ se debe tener, para $0 < x < 1$,

$$\theta(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x. \quad (8)$$

Al igual que en el ejemplo 1, el conjunto de funciones propias $\left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x$ no es una serie de Fourier de senos porque el argumento del seno no es múltiplo entero de $\pi x/L$ ($L = 1$, en este caso). De nuevo, la serie es una serie de Fourier

generalizada; por consiguiente, de acuerdo con (8) de la sección 10.11, los coeficientes de la ecuación (7) son

$$A_n = \frac{\int_0^1 x \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x \, dx}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x \, dx}.$$

Al realizar las dos integraciones llegamos a

$$A_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2}.$$

Entonces, el ángulo de torcimiento es

$$\theta(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos a \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi t \operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi x. \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS 11.7

Las respuestas a los problemas nones se encuentran en el apéndice de respuestas.

1. En el ejemplo 1, indique la temperatura $u(x, t)$ cuando se aísla el extremo izquierdo de la varilla.
2. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = -h(u(1, t) - u_0), \quad h > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

3. Proporcione la temperatura de estado estable en una placa rectangular cuyas condiciones en la frontera son

$$u(0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = -hu(a, y), \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

4. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad x > 0$$

$$u(0, y) = u_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad 0 < y < 1$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = -hu(x, 1), \quad h > 0, \quad x > 0.$$

5. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de longitud L si la temperatura inicial es f , el extremo $x = 0$ se mantiene a la temperatura 0 y el extremo $x = L$ está aislado.
6. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad E \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=L} = F_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

La solución $u(x, t)$ representa el desplazamiento longitudinal de una barra elástica vibratoria anclada en su extremo izquierdo y sometida a una fuerza constante de magnitud F_0 en su extremo derecho (Fig. 11. 10). E es una constante que se llama módulo de elasticidad.

7. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0, \quad u(1, y) = u_0, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=1} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

8. La temperatura inicial en una varilla de longitud unitaria es $f(x)$. Hay flujo de calor en sus dos extremos, $x = 0$ y $x = 1$, que pasa al ambiente mantenido a la temperatura constante cero. Demuestre que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\lambda_n^2 t} (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

en que
$$A_n = \frac{2}{(\lambda_n^2 + 2h + h^2)} \int_0^1 f(x) (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \operatorname{sen} \lambda_n x) dx$$

y las $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$, son las raíces positivas consecutivas de $\tan \lambda = 2\lambda h/(\lambda^2 - h^2)$.

9. Una viga en voladizo (cantilíver) está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho ($x = 1$), que vibra (Fig. 11. 18). El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de la viga se define con el problema de valor en la frontera

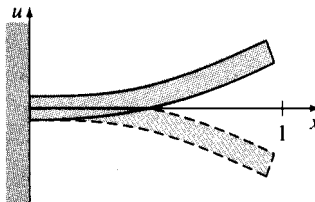


FIGURA 11.18

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad x > 0.$$

- a) Con la constante de separación λ^4 demuestre que los valores propios del problema se determinan mediante la ecuación $\cos \lambda \cosh \lambda = -1$.
- b) Con una calculadora o computadora dé aproximaciones a los dos primeros valores propios positivos.
10. a) Deduzca una ecuación que defina los valores propios cuando los extremos de la viga del problema 9 están empotrados en $x = 0$ y $x = 1$.
- b) Con una calculadora o computadora dé aproximaciones a los dos primeros valores propios positivos.

11.8

PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA CON SERIES DE **FOURIER** CON DOS VARIABLES

- Ecuación de transmisión de calor en dos dimensiones ■ Ecuación de onda en dos dimensiones
- Serie de senos con dos variables

Supóngase que la región rectangular en la figura 11.19 es una placa delgada en que la temperatura u es función del tiempo t y de la posición (x, y) . Entonces, en las condiciones adecuadas, se puede demostrar que $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación en dos dimensiones del calor**

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

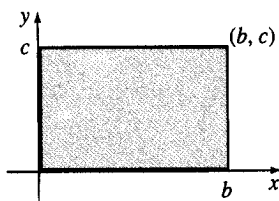


FIGURA 11.19

Por otro lado, la figura 11.20 representa un marco rectangular sobre el cual se ha estirado una membrana delgada y flexible (un tambor rectangular). Si la membrana se pone en movimiento, su desplazamiento u , medido a partir del plano xy (vibraciones transversales), **también** es

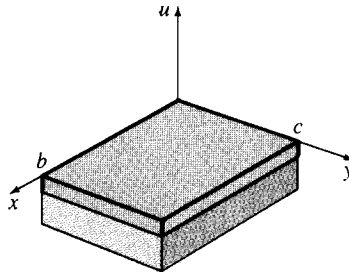


FIGURA 11.20

función del tiempo t y de la posición (x, y) . Cuando las vibraciones son **pequeñas**, libres y no amortiguadas, $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación en dos dimensiones de onda**

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Como se verá en el proximo ejemplo, las soluciones de problemas de valor en la frontera donde intervienen ecuaciones como la (1) y (2), con el método de separación de variables, conducen a la noción de series de Fourier con dos variables.

EJEMPLO 1 Ecuación del calor en dos dimensiones

Dé la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa que muestra la figura 11.19, si la temperatura inicial es $f(x, y)$ en toda ella y si los bordes se mantienen a la temperatura cero.

SOLUCIÓN Debemos resolver

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c, \quad t > 0$$

sujeta a

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0, \quad 0 < y < c, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c.$$

Para separar las variables en la ecuación en derivadas parciales contra variables independientes trataremos de hallar una solución producto, $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Al sustituir esta hipótesis se obtiene

$$k(X''YT + XY''T) = XYT'$$

o sea

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT}. \quad (3)$$

Dado que el lado izquierdo de la **ecuación** (3) sólo depende de x , y el derecho nada más de y y t , debemos igualar ambos lados a una constante: $-\lambda^2$.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda^2 \quad (4)$$

y así

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda^2. \quad (5)$$

Por las mismas razones, si ensayamos otra constante de separación $-\mu^2$ en la ecuación (5), entonces

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \quad \text{y} \quad \frac{T'}{kT} + \lambda^2 = -\mu^2$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \quad \text{y} \quad T' + k(\lambda^2 + \mu^2)T = 0. \quad (6)$$

Las soluciones de las ecuaciones en (4) y en (6) son, respectivamente,

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad (7)$$

$$Y(y) = c_3 \cos \mu y + c_4 \operatorname{sen} \mu y \quad (8)$$

$$T(t) = c_5 e^{-k(\lambda^2 + \mu^2)t}. \quad (9)$$

Pero las condiciones en la frontera

$$\left. \begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{implican} \quad \left\{ \begin{aligned} X(0) = 0, \quad X(b) = 0 \\ Y(0) = 0, \quad Y(c) = 0. \end{aligned} \right.$$

Al aplicar esas condiciones a las ecuaciones (7) y (8) se obtiene $c_1 = 0$, $c_3 = 0$ y $c_2 \operatorname{sen} \lambda b = 0$, $c_4 \operatorname{sen} \mu c = 0$. Estas últimas implican a su vez

$$\lambda = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad \mu = \frac{n\pi}{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Así, una solución producto de la ecuación del calor en dos dimensiones que satisface las condiciones en la frontera, es

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y,$$

en que A_{mn} es una constante arbitraria. Puesto que tenemos dos conjuntos independientes de valores propios, ensayaremos el principio de superposición en forma de una suma doble

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \quad (10)$$

Ahora bien, en $t = 0$ se debe cumplir

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \quad (11)$$

Los coeficientes A_{mn} se pueden hallar multiplicando la suma doble (11) por el producto $\operatorname{sen} (m\pi x/b) \operatorname{sen} (n\pi y/c)$ e integrando en el rectángulo $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$. Entonces

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy. \quad (12)$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor en la frontera consiste en la ecuación (1), en que A_{mn} se define con la ecuación (12). ■

La serie (II) con los coeficientes (12) se llama **serie de senos con dos variables o doble serie de senos** (véase el problema 52 de los ejercicios 10.3).

EJERCICIOS 11.8

Las respuestas a los problemas nones se encuentran en el apéndice de respuestas.

Resuelva la ecuación del calor (1) sujeta a las condiciones que se mencionan en los problemas 1 y 2.

$$\begin{aligned} 1. \quad & u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = 0 \\ & u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, \pi, t) = 0 \\ & u(x, y, 0) = u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=\pi} = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$u(x, y, 0) = xy$$

[Sugerencia: Vea el problema 53, ejercicios 10.3.]

En los problemas 3 y 4 resuelva la ecuación de onda (2) sujeta a las condiciones respectivas.

$$\begin{aligned} 3. \quad & u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = 0 \\ & u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, \pi, t) = 0 \\ & u(x, y, 0) = xy(x - \pi)(y - \pi) \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0 \\ & u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0 \\ & u(x, y, 0) = f(x, y) \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} = g(x, y) \end{aligned}$$

La temperatura $u(x, y, z)$ de estado estable del paralelepípedo rectangular de la figura 11.21 satisface la **ecuación de Laplace** en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (13)$$

5. Resuelva la ecuación (13) de **Laplace**. La cara superior ($z = c$) del paralelepípedo se mantiene a la **temperatura** $f(x, y)$ y las caras **restantes** a la temperatura cero.
6. Resuelva la **ecuación** (13) de **Laplace**. La cara inferior ($z = 0$) del paralelepípedo se mantiene a la **temperatura** $f(x, y)$ y las caras restantes, a la temperatura cero.

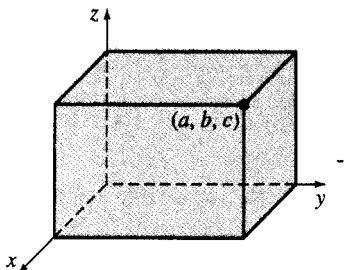


FIGURA 11.21

EJERCICIOS DE REPASO

Las respuestas a los problemas noes se encuentran en el apéndice de respuestas.

1. Mediante la separación de variables encuentre soluciones producto de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u.$$

2. Use la separación de variables para hallar soluciones producto de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

¿Es posible elegir una constante de separación tal que X y Y sean, a la vez, funciones oscilatorias?

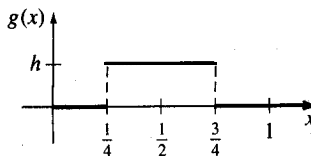
3. Dé una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = u(\pi, t) - u_1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

4. Proporcione una interpretación física de las condiciones en la frontera del problema 3.
5. Cuando $t = 0$, una cuerda de longitud unitaria se encuentra tensa sobre el eje de las x positivas. Sus extremos están asegurados en $x = 0$ y $x = 1$ cuando $t > 0$. Halle el desplazamiento $u(x, t)$ si la velocidad inicial es la que muestra la figura 11.22.



6. La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

es una forma de la **ecuación** de onda cuando se aplica a una cuerda una fuerza vertical externa, proporcional al cuadrado de la distancia horizontal al extremo izquierdo. La cuerda está asegurada en $x = 0$, una unidad arriba del eje x , y en $x = 1$, en el eje x , cuando $t > 0$. Halle el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde un **desplazamiento** $f(x)$.

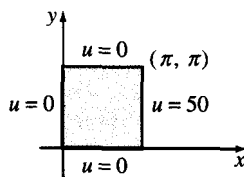


FIGURA 1.23

7. Dé la temperatura $u(x, y)$ de estado estable en la placa cuadrada de la figura 1.23.
8. Indique la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la placa semiinfinita de la figura 11.24.

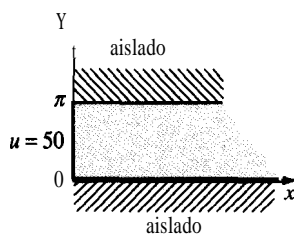


FIGURA 11.24

9. Resuelva el problema 8 cuando las fronteras $y = 0$ y $y = \pi$ se mantienen siempre a la temperatura cero.
 10. Halle la temperatura $u(x, t)$ en la placa infinita cuyo ancho es $2L$ (Fig. 11.25). La temperatura inicial en toda la placa es u_0 . [Sugerencia: $u(x, 0) = u_0$, $-L < x < L$ es función par de x .]
- II. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

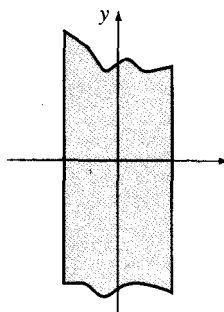


FIGURA 11.25

12. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} 2\pi x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1.$$

13. Halle una solución formal en serie para el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

No trate de evaluar los coeficientes de la serie.

14. La concentración $c(x, t)$ de una sustancia que se difunde y a la vez es arrastrada por corrientes de **convección** en el seno de un medio satisface la ecuación diferencial

$$k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + h \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t} = h - \text{constante}.$$

Resuelva esta ecuación, sujeta a

$$c(0, t) = 0, \quad c(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = c_0, \quad 0 < x < 1,$$

en donde c_0 es una constante.