1. Sea f una función medible en $[a,b]$, tal que $m(\{x \in [a,b] : f(x) = \pm\infty\}) < \varepsilon$. Entonces $\exists M > 0$ $\ni$ $|f(x)| \leq M$ para casi toda $x \in [a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$ y escojamos $N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $M/N < \varepsilon/2$, y consideremos el siguiente conjunto:

$E_K = \{x \in [a,b] : K\frac{M}{N} \leq f(x) < (K+1)\frac{M}{N}\}$ para cada $K \in \{-N, \ldots, N-1\}$ y sea φ la función simple definida como $\varphi(x) = \sum_{K=-N}^{N-1} K\left(\frac{M}{N}\right) \cdot \chi_{E_K}$ donde χ_{E_K} es la función característica.

Entonces si $x \in E_K$ para algún K, tenemos que

$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{M}{N} < \varepsilon/2 \Rightarrow m(\{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon/2$

$Q = \{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\}$

Ahora, sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y

$I_i = \{x \in [a,b] : |x - x_i| < \varepsilon/2(m+1)\}$, para cada $i = 0, 1, \ldots, m$

$\Rightarrow m(I_i) < \varepsilon/2(m+1)$. Supongamos que $E_K \subset \bigcup_{i=0}^{N_i} I_i$, $N_i < m$ pues cada E_K es medible.

Definamos h como la recta que linealiza a φ en cada I_i por lo tanto h es una función continua y como

$$m(\{x \in [a,b] : h(x) \neq \varphi(x)\}) \leq m\left(\bigcup_{i=0}^{m} I_i\right) \leq \sum_{i=0}^{m} m(I_i) < (m+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(m+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

pues $P = \{x \in [a,b] : h(x) \neq \varphi(x)\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} I_i$

Así, $|h(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ si $x \notin P$

$\Rightarrow |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - h(x)| < \varepsilon$

si $x \notin P \cup Q$ y $m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Def. Sea A un conjunto tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

Donde I_k son abiertos para $k \in \mathbb{N}$

Definimos la medida exterior como

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

y si $A \subset B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

- Supongamos que E es un conjunto lebesgue medible y sea $\varepsilon > 0$ entonces existen I_k abiertos contables tal que

$E \subset \bigcup I_k$, si $G = \bigcup I_k \Rightarrow G$ es abierto.

y $\sum m(I_k) < m^*(E) + \varepsilon/2$ (Por definición del ínfimo)

Si G es el conjunto que cumple con el inf de la def. de medida exterior, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} m^*(G \setminus E) &= m(G \setminus E) = m(G) - m(E) \quad \text{Pues } E \text{ es medible} \\ &= m^*\left(\bigcup I_k\right) - m^*(E) \\ &\leq \sum m(I_k) - m^*(E) < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Ahora, como E es medible $\Rightarrow E^c$ también lo es.

De igual manera existen S_k abiertos tales que $E^c \subset \bigcup S_k$

Sea $W = \bigcup S_k$ el conjunto que cumple con el inf de $m^*(E^c)$

Como W es abierto $\Rightarrow W^c$ es cerrado y compacto en este caso.

Si $K = W^c$ tenemos que $K \subset E$, pues $E^c \subset K^c$

Como $W \supseteq E^c \Rightarrow m^*(W \setminus E^c) = m^*(W \cap E) < \varepsilon/2$

Entonces $m^*(E \setminus K) = m^*(E \setminus W^c) = m^*(E \cap W) < \varepsilon/2$

Así, como $K \subset G$

$$\begin{aligned} m^*(G \sim K) = m^*(G \setminus K) &= [m(G) - m(E)] + [m(E) - m(K)] \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

3. FFT9.

Demostrar que $|\det T|\,\widehat{f(Tx)} = \hat{f}\left((T^{tr})^{-1}\cdot\varepsilon\right)$

Donde T es una matriz de $n\times n$ invertible y tr denota su transpuesta

Lema. Sea T una matriz de $n\times n$ invertible. Para alguna función $f\in\mathbb{R}^n$ tal que $f\circ T$ esta bien definida como $f\circ T(x) = f(T(x))$

a) si f es medible, entonces $f\circ T$ también es medible.

b) si $f\geq 0$ y f es medible entonces

$$\int f(x)\,dx = |\det T|\int f(T(x))\,dx$$

c) si $f\in L^1$, entonces $f\circ T\in L^1$

Dem (FFT9)

si definimos $f(y) = f(y)\cdot e^{-iT^{-1}y\cdot\varepsilon} \Rightarrow f\circ Tx = f(Tx)\cdot e^{-iT^{-1}\cdot Tx\cdot\varepsilon}$

y $Tx = y\in\mathbb{R}^n$ para algún y

$$\Rightarrow |\det T|\cdot\widehat{f(Tx)} = |\det T|\cdot\int f(Tx)\cdot e^{-ix\cdot\varepsilon}\,dx$$

$$= |\det T|\cdot\int f(Tx)\cdot e^{-iT^{-1}\cdot Tx\cdot\varepsilon}\,dx$$

Por el lema $\Rightarrow$ $= \int f(y)\cdot e^{-iT^{-1}\cdot y\cdot\varepsilon}\,dy$

Como $\langle T^{-1}y,\varepsilon\rangle = \langle y, (T^{-1})^{*}\cdot\varepsilon\rangle = \langle y, (T^{-1})^{tr}\cdot\varepsilon\rangle = y\cdot(T^{-1})^{tr}\cdot\varepsilon$

$$|\det T|\cdot\widehat{f(Tx)} = \int f(y)\cdot e^{-iy\cdot(T^{-1})^{tr}\cdot\varepsilon}\,dy$$

$$= \hat{f}\left((T^{-1})^{tr}\cdot\varepsilon\right) = \hat{f}\left((T^{tr})^{-1}\cdot\varepsilon\right)$$

pues $(T^{-1})^{tr} = (T^{tr})^{-1}$

4. Teorema (Plancherel). Existe un único operador $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\hat{\mathbb{R}})$ con las siguientes propiedades

(1) $\mathcal{F} f = \hat{f}$, $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$

(2) $\| \mathcal{F} f \|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \| f \|_{L^2(\mathbb{R})}$

Dem. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, como $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$

podemos aproximar a f con funciones de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$.

Ademas sabemos que las funciones en $C(\mathbb{R})$ con soporte compacto son densas en $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, con la norma $\| \|_{L^1(\mathbb{R})} + \| \|_{L^2(\mathbb{R})}$

Entonces podemos aproximar a f con elementos de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ y a los elementos de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ con elementos de $C(\mathbb{R})$

Definamos la norma en $L^2(\hat{\mathbb{R}})$ para $g \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$

$$\| g \|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int |g(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right)^{1/2} \quad y \quad \mathcal{F} f = \hat{f} \quad \text{(Trans. de Fourier)}$$

Si f es continua con soporte compacto, tenemos que por un lema:

$$\frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\varepsilon)|^2 d\varepsilon = \int |f(x)|^2 dx$$

$\Rightarrow \| \mathcal{F} f \|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \| f \|_{L^2(\mathbb{R})}$, por lo tanto tendríamos (2)

La unicidad del operador $\mathcal{F}$ se obtiene de la unicidad de los limites de funciones.

Hay que ver que el rango de $\mathcal{F}$ es todo $L^2(\hat{\mathbb{R}})$

Si $\hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$, entonces por la formula de inversión

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon x} d\varepsilon$$

$$|g(x)|^2 = |f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon x} d\varepsilon \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\varepsilon)| d\varepsilon \right) < \infty$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es la imagen de alguna $g \in L^2(\mathbb{R})$

Por lo tanto el rango de $\mathcal{F}$ es $L^2(\hat{\mathbb{R}})$

5. Teorema 1. (Paley-Wiener). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) f es la restricción de $\mathbb{R}$ de una función F holomorfa en la banda $\{z : |y| < a\}$ y satisface

$$\int |F(x+iy)|^2 dx \leq cte \qquad |y| < a$$

(2) $$e^{a|\varepsilon|} \cdot \hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}}).$$

Dem. $(2) \Rightarrow (1)$

Sea $F(z) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\varepsilon) e^{i\varepsilon z}$, si la restringimos a $\mathbb{R}$ tenemos que $F|_{\mathbb{R}} = f$. Por hipotesis tenemos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $e^{a|\varepsilon|} \hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$. Por lo tanto F es holomorfa en $\{z : |y| < a\}$, y por el Teo. de Plancherel tenemos que

$$\|F\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int |F(x+iy)^2| = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \int |\hat{f}(\varepsilon)|^2 |e^{2\varepsilon y}| d\varepsilon \leq \|\hat{f} \cdot e^{a|\varepsilon|}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} < \infty$$

Por lo tanto tenemos (1)

$(1) \Rightarrow (2)$. Sea $f_y = F(x+iy)$, es decir para y fijo

Como $F(x+iy) = f_y(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}_y(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon z} d\varepsilon \leq cte$, $|y| < a$

y $f \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que por plancherel

$$2\pi \int |f_y(x)|^2 = \int |\hat{f}_y(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon z}|^2 = \int |\hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon y}|^2 d\varepsilon$$

$$= \int |\hat{f}(\varepsilon)|^2 |e^{2\varepsilon y}| = \|\hat{f} \cdot e^{2\varepsilon y}\|^2_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} \leq cte, |y| < a$$

por lo tanto $e^{a|\varepsilon|} \cdot \hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$, pues $f \in L^2(\mathbb{R})$

Teorema 2. (Paley-Wiener). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) Existe una función F, holomorfa en $\{z : y > 0\}$ y satisface

$$\int |F(x+iy)|^2 dx < cte \qquad y > 0$$

y si $\lim_{y \to 0} \int |F(x+iy) - F(x)|^2 dx = 0$ (*)

(2) $\hat{f}(\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon < 0$.

Dem. (2) $\Rightarrow$ (1). Sea $F(x+iy) = F(z) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{i\varepsilon z} \cdot d\varepsilon$

con $y > 0$, F es holomorfa pues es la transformada inversa de Fourier de $e^{-\varepsilon y} \cdot \hat{f}$.

Por el Teo. de Plancherel tenemos que es una isometría, es decir:

$$\|F(x+iy)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f} \cdot e^{-\varepsilon y}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} \leq \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} \cdot \|e^{-\varepsilon y}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} \; ; \; \varepsilon \geq 0$$

$$\leq \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} < \infty$$

Por lo tanto obtemos (1), y además, como $F(x) = f(x)$

$$\|F(x+iy) - F(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|F(x+iy) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \|\hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{-\varepsilon y} - \hat{f}(\varepsilon)\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} \to 0 \text{ cuando } y \to 0$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $f_1(x) = F(x+i)$

por (1) tenemos que $\int |\hat{f}_1(\varepsilon)|^2 \cdot e^{-2\varepsilon} d\varepsilon \leq cte$

Con $\varepsilon < 0$, claramente se ve que $\hat{f}_1(\varepsilon) = 0$

Con $y' = y - 1$, $y \in (1, \infty)$ $\Rightarrow$ $y' > 0$

Así, la transformada inversa de $F(x+iy')$ es $\hat{f} \cdot e^{\varepsilon(1-y)}$

y la de $f_1(x) = F(x+2i)$ es $\hat{f}_1(\varepsilon) \cdot e^{-2\varepsilon}$

Por (*) tenemos que si $y \to 0 \Rightarrow \hat{f}(\varepsilon) \cdot e^{\varepsilon(1-y)} - \hat{f}_1(\varepsilon) \cdot e^{2\varepsilon} = 0$

$\Rightarrow \hat{f}(\varepsilon) = \hat{f}_1(\varepsilon) \cdot e^{\varepsilon}$, como $\hat{f}_1(\varepsilon) = 0$ si $\varepsilon < 0$

$\Rightarrow \hat{f}(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon < 0$.