HW1. Sampling Theorem. (J. R. Higgins, Five Short stories about the cardinal Series, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 45-89)

Si una función $f(t)$ no contiene frecuencias mayores que $W/2$ ciclos por segundo, está completamente determinada al dar sus ordenadas en una sucesión de puntos equiespaciados de tamaño $1/W$

Si $f(t)$ se define en el intervalo $[-\pi W, \pi W]$ con la forma

$$f(t) = \int_{-\pi W}^{\pi W} g(x)\, e^{ixt}\, dx \;;\; g(x) = \sum C_n e^{inx}$$

Entonces $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{W}\right) \frac{\operatorname{Sen}\pi(Wt-n)}{\pi(Wt-n)}$

Donde $f\left(\frac{n}{W}\right)$ es el conjunto de muestras

Además si $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad \dfrac{\operatorname{Sen}\pi(Wt-n)}{\pi(Wt-n)} = \begin{cases} 0, & t = m/W,\ m \neq n \\ 1, & t = n/W \end{cases}$

HW2. $\hat{u}'(k) = ik\,\hat{u}(k)$

Dem. $$\hat{u}'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u'(x)\, dx \qquad \left\{\begin{array}{l} w = e^{-ikx} \\ dw = -ik\,e^{-ikx}\, dx \\ dv = u'(x)\, dx \\ v = u(x) \end{array}\right\}$$

$$= u(x) \cdot e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)\, dx$$

$$= \quad '' \quad + ik \cdot \hat{u}(x)$$

Si $\quad u(x) \in L^2(\mathbb{R}) \implies u(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

y $\quad |e^{-ikx}| = 1$, por lo tanto $\quad u(x) \cdot e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

Así, $\quad \hat{u}'(k) = ik\,\hat{u}(k)$

HW3. $\delta_{j-m} = S_h(x - x_m)$

$$\hat{\delta}_{j-m}(k) = h\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ik\cdot x_{j-m}} \cdot \delta_{j-m} \quad ; \quad \delta_{j-m} = \begin{cases} 1 & si\ j = m \bmod (n) \\ 0 & si\ j \neq m \bmod (n) \end{cases}$$

Como: $x_{j-m} = x_j - x_m$ con m fijo

Entonces para $\forall x \in \mathbb{R}$ serán de la forma

$y = x - x_m$

Así, $$P(y) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky}\, dk = \frac{Sen\left(\frac{y\pi}{h}\right)}{\left(\frac{y\pi}{h}\right)}$$

$$= \frac{Sen\left(\frac{(x-x_m)\pi}{h}\right)}{\left(\frac{(x-x_m)\pi}{h}\right)} = S_h(x - x_m)$$

2.1

a) Linearity. $\mathcal{F}\{u+k\}(k) = \hat{u}(k) + \hat{v}(k)$; $\mathcal{F}\{cu\}(k) = c\hat{u}(k)$

$$\mathcal{F}\{u+k\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot (u(x) + v(x))\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot v(x)\, dx$$

$$= \hat{u}(k) + \hat{v}(k)$$

$$\mathcal{F}\{cu\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (c\, u(x))\, dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)\, dx$$

$$= c \cdot \hat{u}(k)$$

b) Translation, if $x_0 \in \mathbb{R}$, then $\mathcal{F}\{u(x+x_0)\}(k) = e^{ikx_0} \cdot \hat{u}(k)$

$$\mathcal{F}\{u(x+x_0)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x+x_0)\, dx \quad ; \text{ si } w = x + x_0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(w-x_0)} \cdot u(w)\, dw = e^{ikx_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikw} \cdot u(w)\, dw$$

$$= e^{ikx_0} \cdot \hat{u}(k)$$

c) Modulation. if $k_0 \in \mathbb{R}$, then $\mathcal{F}\{e^{ik_0x} \cdot u(x)\}(k) = \hat{u}(k-k_0)$

$$\mathcal{F}\{e^{ik_0x} \cdot u(x)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (e^{ik_0x} \cdot u(x))\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} \cdot u(x)\, dx =$$

$$= \hat{u}(k-k_0)$$

d) Dilation. if $c \in \mathbb{R}$ with $c \neq 0$, then

$\mathcal{F}\{u(cx)\}(k) = \hat{u}(k/c)/|c|$

$\mathcal{F}\{u(cx)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(cx)\,dx$, haciendo $w = cx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\left(\frac{w}{c}\right)} \cdot u(w)\,\frac{dw}{c} = \frac{1}{c}\,\hat{u}(k/c)$, si $c > 0$

si $c < 0 \Rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-ik\left(\frac{w}{c}\right)}}{c}\, u(w)\,dw = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\left(\frac{w}{c}\right)} \cdot u(w)\,dw$

$\therefore \quad \mathcal{F}\{u(cx)\}(k) = \frac{1}{|c|}\,\hat{u}\left(\frac{k}{c}\right)$

e) Conjugation. $\mathcal{F}\{\bar{u}\}(k) = \overline{\hat{u}(-k)}$

$\mathcal{F}\{\bar{u}\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot \overline{u(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{e^{-ikx}} \cdot u(x)\,dx}$

$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot u(x)\,dx} = \overline{\hat{u}(-k)}$

2.2.

a) $u(x)$ is even (odd) $\iff \hat{u}(k)$ is even (odd);

($\Rightarrow$) sea $u(x)$ tal que $u(-x) = u(x)$ caso Par $\forall x \in \mathbb{R}$

Entonces $\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)dx$ haciendo $y = -x$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} e^{-ik(-y)} \cdot u(-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-k)y} \cdot u(y)\,dy$$

$= \hat{u}(-k)$ Por lo $\hat{u}(k)$ es Par

($\Leftarrow$) Sea $\hat{u}(k) = \hat{u}(-k)$ Par $\forall k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k)dk$ haciendo $m = -k$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{i(-m)x} \cdot \hat{u}(-m)(-dm) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-m)x} \cdot \hat{u}(m)dm$$

$= u(-x)$ por lo tanto $u(x)$ es par.

Caso impar.

($\Rightarrow$) Supongamos que $u(-x) = -u(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\hat{u}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot u(x)\,dx$ haciendo $y = -x$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} e^{-iky} \cdot u(-y)(-dy) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \cdot u(y)\,dy$$

$= -\hat{u}(k)$ Por lo tanto $\hat{u}(k)$ es impar

($\Leftarrow$) Supongamos que $\hat{u}(-k) = -\hat{u}(k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot \hat{u}(k)\,dk$ haciendo $m = -k$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{imx} \cdot \hat{u}(-m)\cdot(-dm) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} - e^{imx} \cdot \hat{u}(m)\,dm$$

$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \cdot \hat{u}(m)dm = -u(x)$ por lo tanto $u(x)$ es impar

b) $u(x)$ is real (imaginary) $\Longleftrightarrow$ $\hat{u}(k)$ is hermitian (skew-hermitian)

($\Rightarrow$) Supongamos que $u(x)$ es real, entonces $\overline{u(x)} = u(x)$

$$\hat{u}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \overline{u(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-ikx} \cdot u(x)}\, dx$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)\, dx} = \overline{\hat{u}(k)}$$

Por lo tanto $\hat{u}(k)$ es hermitiana.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\hat{u}(-k) = \overline{\hat{u}(k)}$

$$\Rightarrow \overline{u(x)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \hat{u}(k)\, dk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{ikx} \cdot \hat{u}(k)}\, dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, \hat{u}(-k)\, dk \quad \text{haciendo } m = -k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{imx} \cdot \hat{u}(m)(-dm)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \cdot \hat{u}(m)\, dm = u(x)$$

Por lo tanto $u(x)$ es real

Ahora supongamos que $u(x) \in i\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, P.D. $\overline{\hat{u}(k)} = -\hat{u}(-k)$

Tenemos que $-u(x) = \overline{u(x)}$

$$\Rightarrow \overline{\hat{u}(k)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot u(x)\, dk} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \overline{u(x)}\, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot (-u(x))\, dk = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot u(x)\, dk = -\hat{u}(-k)$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\hat{u}(k)$ es skew-Hermitiana

Entonces $\hat{u}(-k) = -\overline{\hat{u}(k)}$

Para probar que $u(x) \in \mathbb{C}$ debemos verificar que $\overline{u(x)} = -u(x)$

FIRST CLASS

$$U(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \hat{u}(k)\, dk$$

$$\overline{U(x)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \hat{u}(k)\, dk} = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} -e^{-ikx} \cdot \hat{u}(-k)\, dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -e^{-ikx} \cdot \hat{u}(-k)\, dk \quad , \text{ si } m = -k$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \cdot \hat{u}(m)\, dm = -U(x) \quad \blacksquare$$

c) $u(x)$ is real and even $\Longleftrightarrow$ $\hat{u}(k)$ is real and even

($\Rightarrow$) Supongamos que $u(x)$ es real y par.

Entonces por a) tenemos que $\hat{u}(k)$ es par, es decir $\hat{u}(-k) = \hat{u}(k)$ y por b) tenemos que $\overline{\hat{u}(k)} = \hat{u}(-k)$

$\Rightarrow$ $\overline{\hat{u}(k)} = \hat{u}(k)$, es decir es real

($\Leftarrow$) Supongamos que $\hat{u}(k)$ es real y par

Por a) tenemos que $u(x) = u(-x)$ es par

Como $\hat{u}(k)$ es real $\Rightarrow$ $\overline{\hat{u}(k)} = \hat{u}(-k) = \hat{u}(k)$

es decir, $\hat{u}(k)$ es hermitica, y por b) tenemos que $u(x)$ es real.

d) $u(x)$ is real and odd $\Longleftrightarrow$ $\hat{u}(k)$ is imaginary and odd

($\Rightarrow$) Supongamos que $u(x)$ es real e impar, entonces por a) tenemos que $\hat{u}(k)$ es impar y por b) tenemos que $\hat{u}(k)$ es hermitiana

$\Rightarrow$ $\overline{\hat{u}(k)} = \hat{u}(-k) = -\hat{u}(k)$ $\Rightarrow$ $\hat{u}(k) \in i\mathbb{R}$ $\left(\overline{\hat{u}(k)} \neq \hat{u}(k)\right)$

d) $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\hat{U}(k) \in i\mathbb{R}$ $\forall k$ y que $\hat{U}(-k) = -\hat{U}(k)$

Por el inciso a) tenemos que $U(x)$ es impar

$$\Rightarrow -\overline{U(x)} = -\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot \hat{U}(k)\,dk} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot \overline{\hat{U}(k)}\,dk$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot (-\hat{U}(k))\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot \hat{U}(k)\,dk$$

$$= U(-x) = -U(x) \quad \text{por ser impar}$$

$$\Rightarrow \overline{U(x)} = U(x) \quad \therefore \quad U(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2.4. Derive 2.12 and 2.13

$$S'_h(x) = \begin{cases} 0 & , j = 0 \bmod(N) \\ \dfrac{(-1)^j}{jh} & , j \neq 0 \bmod(N) \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, N \qquad (2.12)$$

Habíamos obtenido que $S_h(x) = \dfrac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\frac{\pi x}{h}}$

$$S'_h(x) = \frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{x} - \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\frac{\pi x^2}{h}}$$

Evaluando en $x = x_j = j \cdot h$, $j = 0, 1, \ldots, N$

$$S'_h(x_j) = \frac{\operatorname{Cos}(\pi \cdot j)}{j \cdot h} - \frac{\operatorname{sen}(\pi \cdot j)}{\pi \cdot j^2 \cdot h} = \frac{\operatorname{Cos}(\pi j)}{j \cdot h}$$

si $j \neq 0$ tenemos que $S'_h(x) = \dfrac{(-1)^j}{jh}$

si $w_j = p'(x_j)$ y $\hat{w}(k) = ik\hat{v}(k)$, pero $\hat{v}(k) = \hat{\delta}(k) = h$

Entonces

$$S'_h(x_j) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\pi/h} ik \cdot e^{ikx_j}\, dk$$

si $j = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \cdot h = 0$

$$\Rightarrow S'_h(0) = \frac{hi}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\pi/h} k \cdot e^{ik(0)}\, dk = 0$$

Así, obtenemo 2.12.

Para obtener 2.13 $\quad p''(x_j) = ik\hat{v}'(k) = (ik)^2 \cdot \hat{v}(k) = (ik)^2 \cdot h$

$$S''_h(x) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} (ik)^2 \cdot e^{ikx}\, dk = -\frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} k^2 e^{ikx}\, dx$$

Si $x = 0 \Rightarrow S''_h(0) = -\dfrac{h}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/h}^{\pi/h} k^2\, dk = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{h}\right)^2$

Para $x \neq 0$ ó $x_j = jh$ con $j \neq 0$

$$S''_h(x) = \frac{d(S'_h(x))}{dx} = -\frac{\pi}{h}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{x^2} - \frac{\pi}{h}\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{x}$$

$$+ \frac{2h}{\pi}\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{x^3} - \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{x^2}$$

$$= -\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right) + \frac{2h}{\pi x^3}\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right) - \frac{\pi}{hx}\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$

si $x_j = j \cdot h$

$$\Rightarrow S''_h(x_j) = \frac{-2}{(jh)^2}(-1)^j + 0 + 0,$$

$$= \frac{2}{(jh)^2}(-1)^{j+1}.$$ Recorriendo j con $j = 0 \bmod(n)$

Así obtenemos que $$S''_h(x_j) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{3h^2} & \text{si } j = 0 \bmod(n) \\ 2\dfrac{(-1)^{j+1}}{(jh)^2} & \text{si } j \neq 0 \bmod(n) \end{cases}$$

2.6. $ik\hat{S}(k) = ik\cdot h$.

$$S'_h(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ikx_j}\cdot ik\hat{S}(k)\,dk = \frac{ih}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} k e^{ikx_j}\,dk$$

si $j=0 \Rightarrow x_j=0 \Rightarrow S'_h(0)=0$

si $j\neq 0 \Rightarrow x_j = j\cdot h$ y

$$\frac{ih}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} k e^{ikx_j}\,dk = \frac{ih}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ikjh}\,dk$$

$$= \frac{ih}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} k\left[\cancelto{0}{\cos(kjh)} + i\,\mathrm{sen}(kjh)\right]dk$$

La integral de $k\cos(kjh)$ es cero por ser función par sobre un intervalo simétrico.

La integral de $k\,\mathrm{sen}(kjh)$ es una funcion impar, y por lo tanto será dos veces la sig. integral:

$$S'_h(x_j) = \frac{2i^2\cdot h}{2\pi}\int_0^{\pi/h} k\,\mathrm{sen}(kjh)\,dk, \quad u=k,\ dv=\mathrm{sen}(kjh)dk,\ du=dk,\ v=-\frac{1}{jh}\cos(kjh)$$

$$= -\frac{h}{\pi}\left[-\frac{k}{jh}\cos(kjh) + \int\frac{1}{jh}\cos(kjh)\,dk\right]\Bigg|_0^{\pi/h}$$

$$= -\frac{h}{\pi}\left[-\frac{k}{jh}\cos(kjh) + \frac{1}{(jh)^2}\mathrm{sen}(kjh)\right]\Bigg|_0^{\pi/h}$$

$$= -\frac{h}{\pi}\left[-\frac{\pi}{jh^2}(-1)^j\right] = \frac{(-1)^j}{jh}$$

Así obtenemos que
$$S'_h(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \bmod (n) \\ \dfrac{(-1)^j}{jh} & \text{si } j \neq 0 \bmod (n) \end{cases}$$

$j = 0, 1, \ldots, n$