



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

NUMERICAL SOLUTIONS FOR BURGERS' EQUATION IN THE STOCHASTIC AND DETERMINISTIC VERSION USING SPECTRAL METHODS

Alan Daniel Matzumiya Zazueta

Universidad de Sonora
Division de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Posgrado en Matematicas

18 Sep 2020

- Motivación y Objetivos. ► Ir

- Motivación y Objetivos. [► Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Determinista.

- Motivación y Objetivos. [► Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Determinista.

- Método de Fourier-Galerkin: Operador Proyección. [► Ir](#)
- Método de Fourier-Colocación: Operador Interpolación. [► Ir](#)

- Motivación y Objetivos. ► Ir
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Determinista.
 - Método de Fourier-Galerkin: Operador Proyección. ► Ir
 - Método de Fourier-Colocación: Operador Interpolación. Ir
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Estocástica.

- Motivación y Objetivos. [► Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Determinista.
 - Método de Fourier-Galerkin: Operador Proyección. [► Ir](#)
 - Método de Fourier-Colocación: Operador Interpolación. [► Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Estocástica.
 - Relación Entre la Ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). [► Ir](#)
 - Solución Numérica Asociada a la Ecuación de (FPK). [► Ir](#)

- Motivación y Objetivos. [▶ Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Determinista.
 - Método de Fourier-Galerkin: Operador Proyección. [▶ Ir](#)
 - Método de Fourier-Colocación: Operador Interpolación. [▶ Ir](#)
- Soluciones de la Ecuación de Burgers' Estocástica.
 - Relación Entre la Ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). [▶ Ir](#)
 - Solución Numérica Asociada a la Ecuación de (FPK). [▶ Ir](#)
- Discusión y Conclusiones. [▶ Ir](#)

Motivación

- La importancia de estudiar ecuaciones diferenciales.

Motivación

- La importancia de estudiar ecuaciones diferenciales.
- Contar con herramientas adecuadas para su estudio.

Motivación

- La importancia de estudiar ecuaciones diferenciales.
- Contar con herramientas adecuadas para su estudio.
- En dinámica de fluidos computacionales, los métodos espectrales son una alternativa viable.

Motivación

- La importancia de estudiar ecuaciones diferenciales.
- Contar con herramientas adecuadas para su estudio.
- En dinámica de fluidos computacionales, los métodos espectrales son una alternativa viable.
- Además, fáciles de implementar y poder profundizar el estudio de esta área.

Objetivos

- Comprender los fundamentos de los métodos espectrales.

Objetivos

- Comprender los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos en la ecuación de Burgers' Determinista.

Objetivos

- Comprender los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos en la ecuación de Burgers' Determinista.
- Hacer un análisis cualitativo detallado de las soluciones obtenidas.

Objetivos

- Comprender los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos en la ecuación de Burgers' Determinista.
- Hacer un análisis cualitativo detallado de las soluciones obtenidas.
- Resolver la versión estocástica usando un método espectral.

Objetivos

- Comprender los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos en la ecuación de Burgers' Determinista.
- Hacer un análisis cualitativo detallado de las soluciones obtenidas.
- Resolver la versión estocástica usando un método espectral.
- Evaluar y argumentar los resultados obtenidos con estos métodos.

Expansión de Fourier

$$F[u] \equiv \sum_{|n| \leq \infty} \hat{u}_n e^{inx}.$$

Expansión de Fourier

$$F[u] \equiv \sum_{|n| \leq \infty} \hat{u}_n e^{inx}.$$

Coeficientes de Fourier

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad u(x) \in L^2[0, 2\pi].$$

Expansión de Fourier

$$F[u] \equiv \sum_{|n| \leq \infty} \hat{u}_n e^{inx}.$$

Coeficientes de Fourier

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad u(x) \in L^2[0, 2\pi].$$

Expansión Truncada: Proyección

$$u_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n e^{inx}$$

Ecuación de Burgers'

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \alpha u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ecuación de Burgers'

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \alpha u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ecuación de Difusión

$$\begin{cases} \varphi_t - \alpha \varphi_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) = e^{-\int_0^x \frac{u_0(y)}{2\alpha} dy}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ecuación de Burgers'

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \alpha u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ecuación de Difusión

$$\begin{cases} \varphi_t - \alpha \varphi_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) = e^{-\int_0^x \frac{u_0(y)}{2\alpha} dy}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución Analítica: Transformación de Cole-Hopf

$$u(x, t) = -2\alpha \frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{t} \varphi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi}$$

Fourier-Galerkin

$$\left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(u_N^2)_x, e^{inx} \right\rangle = 0, \quad \forall |n| \leq N, \quad \forall t > 0$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}, e^{inx} \right\rangle = 0, \quad \forall |n| \leq N, \quad \forall t > 0$$

Fourier-Galerkin

$$\left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(u_N^2)_x, e^{inx} \right\rangle = 0, \quad \forall |n| \leq N, \quad \forall t > 0$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}, e^{inx} \right\rangle = 0, \quad \forall |n| \leq N, \quad \forall t > 0$$

Sistema de EDOs

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t) - p \hat{G}_n(t), \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$u_N(0) = \mathcal{P}_N u_0(x)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}_n(t)}{dt} = -\alpha P^2 n^2 \hat{\varphi}_n(t), \quad |n| \leq N$$

$$\varphi_N(0) = \mathcal{P}_N \varphi_0(x)$$

Solucion Numerica: Discretización Semi-Implícita

Para $\Delta t \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{N}$ fijos, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M$ definimos:

$$\begin{aligned}\hat{u}_n(t_{j+1}) &= \hat{u}_n(t_j) + \Delta t \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t_j) \\ &\quad - inp \Delta t \left(\sum_{|k| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n(t_{j+1}) \hat{u}_{n-k}(t_{j+1}) \right)\end{aligned}$$

Solucion Numerica: Discretización Semi-Implícita

Para $\Delta t \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{N}$ fijos, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M$ definimos:

$$\begin{aligned}\hat{u}_n(t_{j+1}) &= \hat{u}_n(t_j) + \Delta t \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t_j) \\ &\quad - i np \Delta t \left(\sum_{|k| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n(t_{j+1}) \hat{u}_{n-k}(t_{j+1}) \right)\end{aligned}$$

Solucion Analitica Aproximada

$$u_N(x, t) = -2\alpha \frac{\partial_x \varphi_N(x, t)}{\varphi_N(x, t)} = -2\alpha \frac{\sum_{|n| \leq N} in \hat{\varphi}_n(0) e^{-\lambda_n t} \phi_n(x)}{\sum_{|n| \leq N} \hat{\varphi}_n(0) e^{-\lambda_n t} \phi_n(x)}$$

Para los siguientes resultados numericos se considero lo siguiente

$$u_0(x) = e^{-0.05x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, 100].$$

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad x_0 = x - u_0(x_0)t, \quad t \in [0, T_c],$$

$$u_0(x) = e^{-0.005x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad T_c = \min_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{-1}{u'_0(x)} \right],$$

Puntos de Colocacion

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1} j, \quad j \in [0, \dots, N],$$

Puntos de Colocacion

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1}j, \quad j \in [0, \dots, N],$$

Aproximacion de Coeficientes: Regla del Trapecio

$$\hat{u}_n \approx \tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j}$$

Puntos de Colocacion

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1}j, \quad j \in [0, \dots, N],$$

Aproximacion de Coeficientes: Regla del Trapecio

$$\hat{u}_n \approx \tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j}$$

Interpolador

Para cada $j \in [0, \dots, N]$ satisface $\mathcal{J}_N u(x_j) = u(x_j)$, y

$$\mathcal{J}_N u(x) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \tilde{u}_n e^{inx}$$



Fourier-Colocacion

Para cada $j = 0, 1, \dots, 2N$, $t \geq 0$ configurarmos

$u_N(t) = [u_N(x_i, t), u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_{2N}, t)]^T$, $u_N(0) = u_0$, y
debe satisfacer,

$$\left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_N(u_N^2)_x, \phi \right\rangle_N = 0, \quad t > 0,$$

Equivalentemente,

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \alpha D_N^2 u_N(t) - \frac{1}{2} D_N u_N^2(t),$$

Fourier-Colocacion

Para cada $j = 0, 1, \dots, 2N$, $t \geq 0$ configurarmos

$u_N(t) = [u_N(x_i, t), u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_{2N}, t)]^T$, $u_N(0) = u_0$, y
debe satisfacer,

$$\left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_N(u_N^2)_x, \phi \right\rangle_N = 0, \quad t > 0,$$

Equivalentemente,

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \alpha D_N^2 u_N(t) - \frac{1}{2} D_N u_N^2(t),$$

Fourier-Colocacion

Para cada $j = 0, 1, \dots, 2N$, $t \geq 0$ configurarmos

$u_N(t) = [u_N(x_i, t), u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_{2N}, t)]^T$, $u_N(0) = u_0$, y debe satisfacer,

$$\left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_N(u_N^2)_x, \phi \right\rangle_N = 0, \quad t > 0,$$

Equivalentemente,

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \alpha D_N^2 u_N(t) - \frac{1}{2} D_N u_N^2(t),$$

Matriz de Diferenciacion

$$\tilde{D}_{ij} = -\delta_{ij} \frac{(-1)^{i+j}}{2} \left[\sin \left[\frac{x_i - x_j}{2} \right] \right]^{-2}, \quad D_N^2 = D_N \dot{D}_N$$



Solucion Numerica: Discretizacion Semi-Implicita

Para $\Delta t \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{N}$ fijos, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M$ definimos:

$$u_N(t_{i+1}) = \left[I_N + \frac{\Delta t}{2} u_0 \Lambda_N \right]^{-1} e^{-\Delta t \Lambda_N^0} \left[u_N(t_i) - \frac{\Delta t}{2} D_N u_N^2(t_i) \right]$$

Configuracion del Problema.

► Simulaciones

Para los siguientes resultados numericos se considero lo siguiente

$$u_0(x) = e^{-0.05x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, 100].$$

Ecuacion de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} Tr(QD^2u) + \langle Ax, Du \rangle_{\mathcal{H}} + \langle B(x), Du \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x \in D(A)$$

Ecuacion de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} Tr(QD^2u) + \langle Ax, Du \rangle_{\mathcal{H}} + \langle B(x), Du \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x \in D(A)$$

Ecuacion Estocastica. Ruido: Proceso de Wiener

$$\begin{aligned} dX &= [AX + B(X)]dt + dW_t \\ X(0) &= x, \quad x \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Ecuacion de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} Tr(QD^2u) + \langle Ax, Du \rangle_{\mathcal{H}} + \langle B(x), Du \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x \in D(A)$$

Ecuacion Estocastica. Ruido: Proceso de Wiener

$$\begin{aligned} dX &= [AX + B(X)]dt + dW_t \\ X(0) &= x, \quad x \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Solucion de Kolmogorov: Asociacion

$$u(x, t) = \mathbb{E} [u_0(X_t^x)],$$

La solucion espectral esta dada como

Expansion de Wiener-Chaos: Polnomios de Hermite

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathcal{J}} u_n(t) H_n(x), \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in [0, T],$$

La solucion espectral esta dada como

Expansion de Wiener-Chaos: Polnomios de Hermite

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathcal{J}} u_n(t) H_n(x), \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in [0, T],$$

substituyendo en la ecuacion de Kolmogorov

Aproximacion

$$\dot{u}_m(t) = -u_m(t)\lambda_m + \sum_{n \in \mathcal{J}} u_n(t) C_{n,m}, \quad n, m \in \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} = \{\alpha = (\alpha_i, i \geq 1) | \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |\alpha| := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i < \infty\}$$

Ecuacion de Burgers' Estocastica

$$dX(\xi, t) = \left[\alpha \partial_\xi^2 X(\xi, t) + \frac{1}{2} \partial_\xi (X^2(\xi, t)) \right] dt + dW_t(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

$$X(0, t) = X(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$X(\xi, 0) = x(\xi), \quad x \in \mathcal{H},$$

Ecuacion de Burgers' Estocastica

$$dX(\xi, t) = \left[\alpha \partial_\xi^2 X(\xi, t) + \frac{1}{2} \partial_\xi (X^2(\xi, t)) \right] dt + dW_t(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

$$X(0, t) = X(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$X(\xi, 0) = x(\xi), \quad x \in \mathcal{H},$$

Conjunto de Indices

$$J^{M,N} = \{\gamma = (\gamma_i, 1 \leq i \leq M) \mid \gamma_i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$$

Ecuacion de Burgers' Estocastica

$$dX(\xi, t) = \left[\alpha \partial_\xi^2 X(\xi, t) + \frac{1}{2} \partial_\xi (X^2(\xi, t)) \right] dt + dW_t(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

$$X(0, t) = X(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$X(\xi, 0) = x(\xi), \quad x \in \mathcal{H},$$

Conjunto de Indices

$$J^{M,N} = \{\gamma = (\gamma_i, 1 \leq i \leq M) \mid \gamma_i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$$

Expansion Truncada

$$\hat{u}_N(x, t) = \sum_{n \in J^{M,N}} u_n(t) H_n(x), \quad x \in \mathcal{H}, \quad , t \in [0, T].$$



Sistema de ODEs

$$\dot{u}_m(t) = -u_m(t)\lambda_m + \sum_{n \in S_N} u_n(t) \bar{C}_{n,m}, \quad n, m \in S_N$$

Forma Vectorial

$$U^M(t) = (u_{m_1}(t) \quad u_{m_2}(t) \quad \dots \quad u_{m_M}(t))^T$$

$$\dot{U}^M(t) = (\dot{u}_{m_1}(t) \quad \dot{u}_{m_2}(t) \quad \dots \quad \dot{u}_{m_M}(t))^T$$

Representacion matricial del sistema

$$\dot{U}^M(t) = [I_\lambda - \bar{C}] U^M(t) \implies U^M(t) = \sum_{j=1}^M c_j V_j e^{\eta_j t}$$

Eigenvectores y Eigenvalores: $V := \text{"Matriz"}$, $\eta := \text{"Vector"}$

$$V = a + ib = [V_1, V_2, \dots, V_{M-1}, V_M]$$

$$\eta = \beta + i\mu = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{M-1}, \eta_M]$$

Eigenvectores y Eigenvalores: $V := \text{"Matriz"}$, $\eta := \text{"Vector"}$

$$V = a + ib = [V_1, V_2, \dots, V_{M-1}, V_M]$$

$$\eta = \beta + i\mu = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{M-1}, \eta_M]$$

Solucion Completa del Sistema

$$U^M(t) = \sum_{j=1}^M c_j V_j e^{\eta_j t} = \sum_{j=1}^M V^{-1} U_M^T(0) V_j e^{\eta_j t}$$

Condicion Inicial, y su Aproximacion.

$$x(\xi) = \sin(\pi\xi), \quad y(\xi) = \sum_{k=0}^q c_k T_k(\xi),$$

Condicion Inicial, y su Aproximacion.

$$x(\xi) = \sin(\pi\xi), \quad y(\xi) = \sum_{k=0}^q c_k T_k(\xi),$$

- Discretizacion en Espacio:

$$p = 2048, \Delta\xi = \frac{1}{p}, \xi_i = i\Delta\xi, i = 0, \dots, p$$

- Discretizacion en Tiempo:

$$T = 10, L = 1024, \Delta t = \frac{T}{L}, t_j = j\Delta t, j = 0, \dots, L$$

- Parametros:

$$\alpha = 0.01, N = 5, M = 11, q = 3.$$

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.
- Lo anterior se debió a una discontinuidad o cambios excesivos en la función.

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.
- Lo anterior se debió a una discontinuidad o cambios excesivos en la función.
- De la misma manera con respecto a la versión estocástica de la ecuación de Burgers, y ademas son fáciles de implementar y desarrollar códigos computacionales muy eficientes.

Navegador

● ► Contenido

● Ec. Burgers' Determinista.

● Galerkin: ► Figuras ► Tablas

● ► Operador Proyeccion ► Galerkin ► Solucion-Galerkin

● C colocacion: ► Figuras ► Tablas

● ► Operador Interpolacion ► Colocacion ► Solucion-Colocacion

● ► Cero-Viscosidad ► Simulaciones

● Ec. Burgers' Estocastica.

● ► Fokker-Planck-Kolmogorov

● ► Figuras

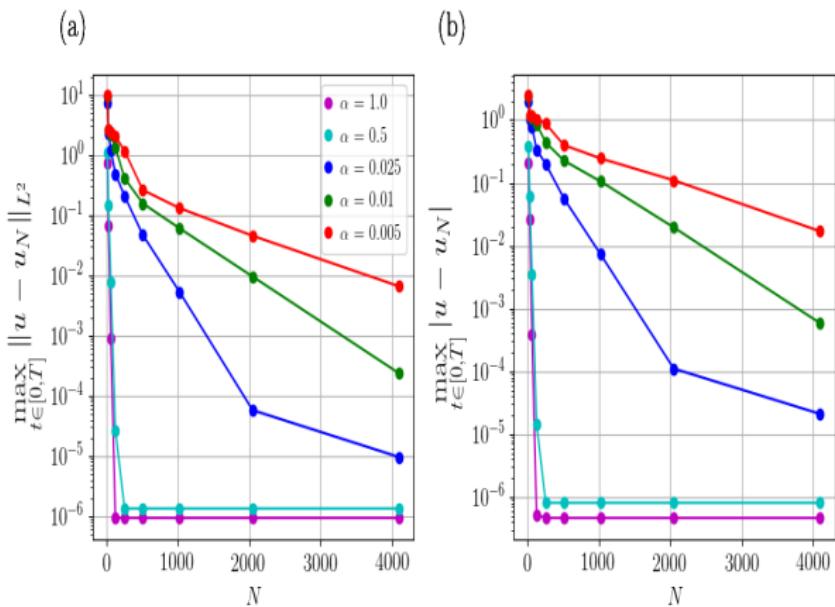


Figure: (a) $N = 2^m$, $m = 4, \dots, 12$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

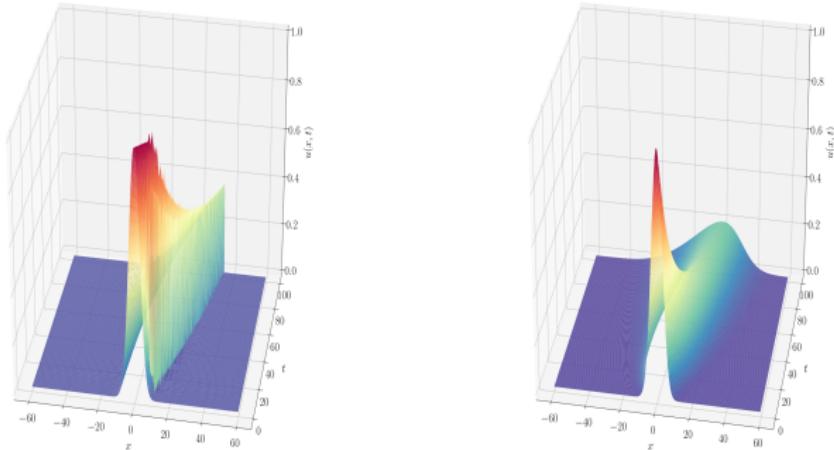


Figure: $\alpha = 0.005$; $N = 2048$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ (b) $\alpha = 1.0$; $N = 2048$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

Simulaciones: Fourier-Galerkin

► Navegador

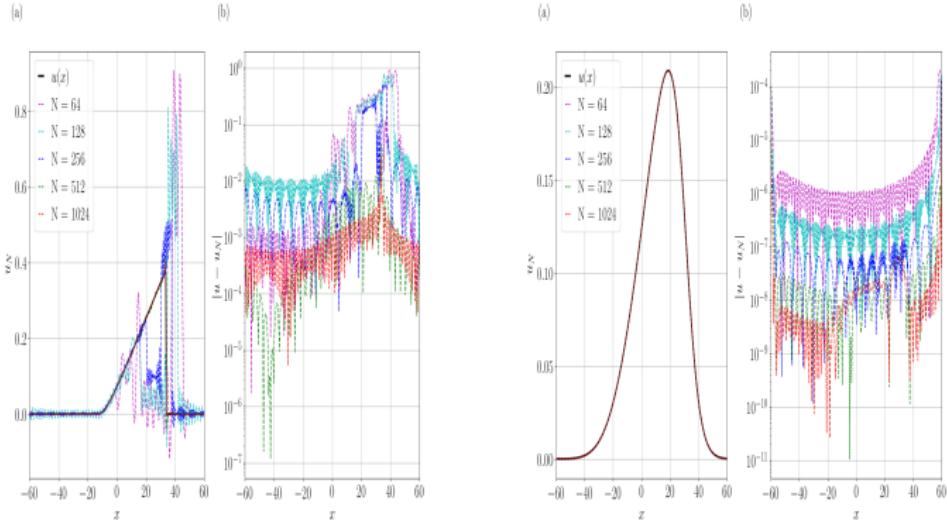


Figure: (a) $t = 100$; $\alpha = 0.005$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ (b) $t = 100$, $\alpha = 1.0$, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

N	Error		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-5}$
16	0.72504	0.72504	0.72504
32	6.88052×10^{-2}	6.87838×10^{-2}	6.87816×10^{-2}
64	8.85367×10^{-4}	8.80521×10^{-4}	8.80410×10^{-4}
128	9.41793×10^{-5}	9.41148×10^{-6}	9.41827×10^{-7}
256	9.41793×10^{-5}	9.41109×10^{-6}	9.36411×10^{-7}
512	9.41793×10^{-5}	9.41109×10^{-6}	9.36411×10^{-7}

Table: Error L_2

N	Error		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-5}$
16	9.91901	9.91597	9.91567
32	2.70558	2.70347	2.70326
64	2.45988	2.45543	2.45497
128	2.06992	2.05918	2.05795
256	1.19385	1.17602	1.17412
512	0.265843	0.262164	0.261805
1024	0.133743	0.131882	0.131699
2048	4.70602×10^{-2}	4.57371×10^{-2}	4.56090×10^{-2}
4096	7.26917×10^{-3}	6.64157×10^{-3}	6.60753×10^{-3}

Table: Error L_2

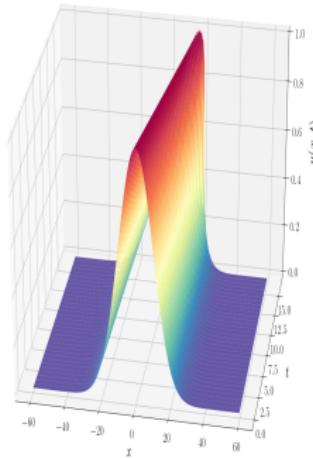
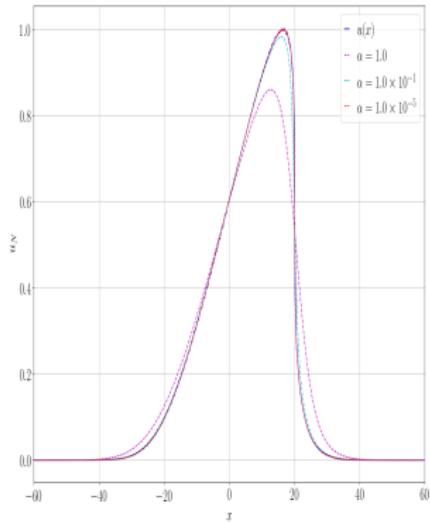
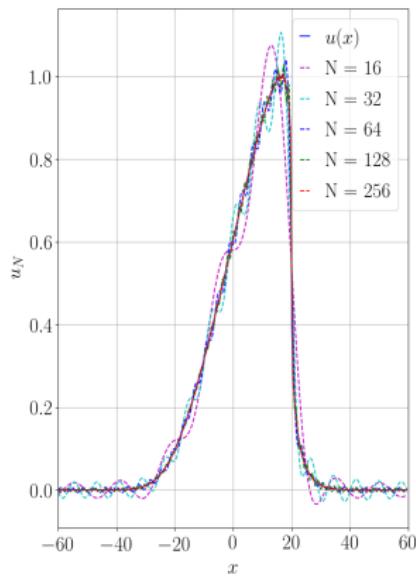


Figure: (a) $t = T_c, N = 256, \Delta t = 1., \times 10^{-3}$. (b)
 $\alpha = 1.0, \times 10^{-5}, N = 256, \Delta t = 1.0, \times 10^{-3}$.

(a)



(b)

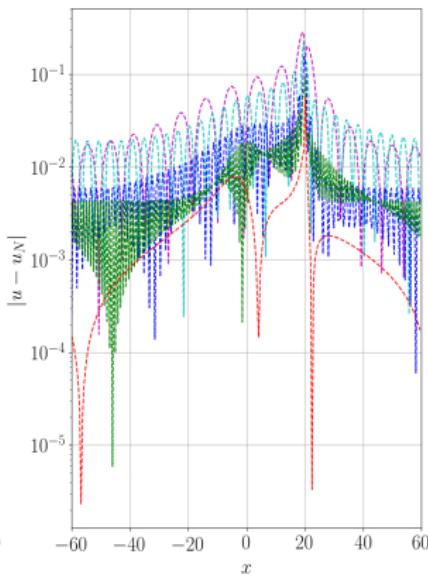
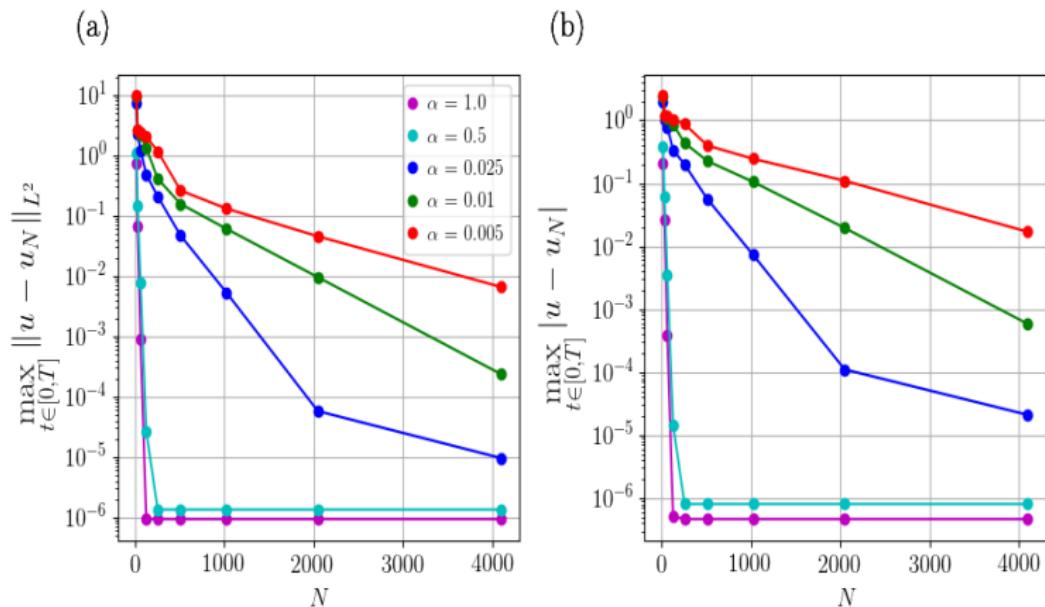


Figure: $t = T_c$; $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$

N	Distance		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$
16	0.285531	0.285732	0.285752
32	0.222737	0.223260	0.223312
64	0.160385	0.162782	0.163025
128	0.129297	0.133322	0.133733
256	0.083291	0.091449	0.092320

Table: Error L_2

Figure: $\alpha = 1.0$; $N = 2048$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

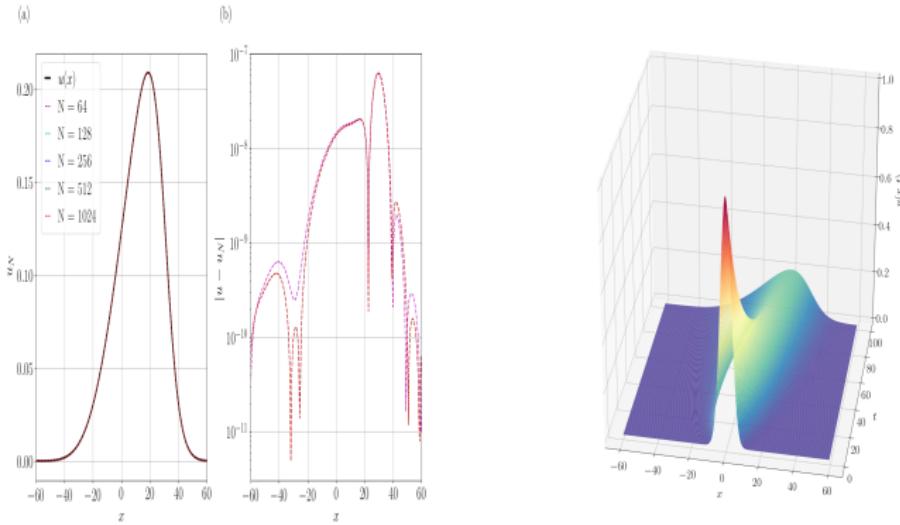


Figure: (a) $t = 100$, $\alpha = 1.0$, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$. (b) $\alpha = 1.0$; $N = 2048$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

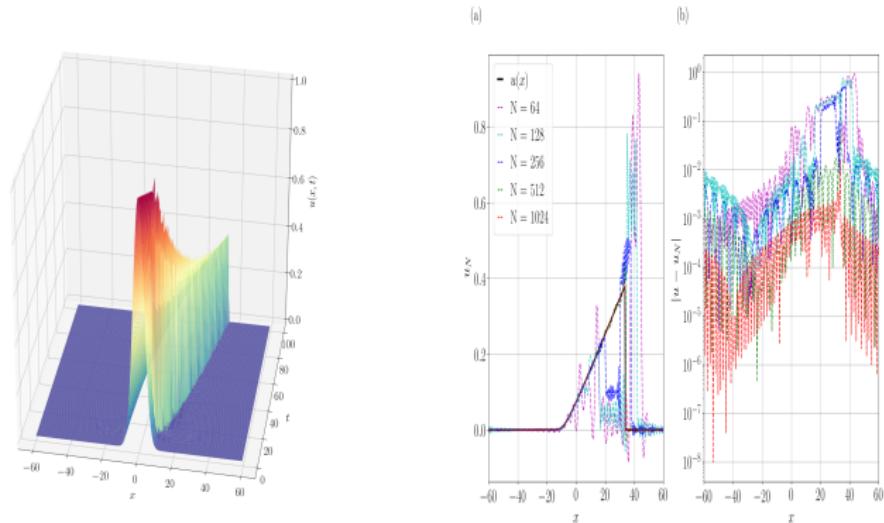


Figure: (a) $\alpha = 0.005$; $N = 2048$; $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ (b) $t = 100$, $\alpha = 0.005$, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$.

N	Error		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-5}$
16	0.721112	0.721112	0.721112
32	4.73004×10^{-2}	4.73015×10^{-2}	
64	7.35344×10^{-4}	7.27561×10^{-4}	7.27283×10^{-4}
128	1.75152×10^{-5}	1.74583×10^{-5}	1.74574×10^{-5}
256	1.15509×10^{-6}	1.14669×10^{-5}	1.14659×10^{-6}
512	9.41793×10^{-6}	7.78847×10^{-7}	7.78707×10^{-7}

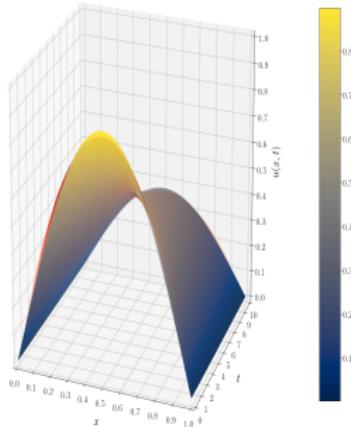
Table: Error L_2

N	Error		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-5}$
16	1.35883	1.35852	1.35849
32	2.65305	2.65078	2.65055
64	2.45855	2.45432	2.45387
128	2.0632	2.05589	2.05497
256	1.18393	1.16697	1.16532
512	0.304595	0.300865	0.300499
1024	0.140332	0.13803	0.137804
2048	4.63808×10^{-2}	4.49226×10^{-2}	4.47813×10^{-2}
4096	7.66246×10^{-3}	6.9909×10^{-3}	5.4578×10^{-3}

Table: L_2

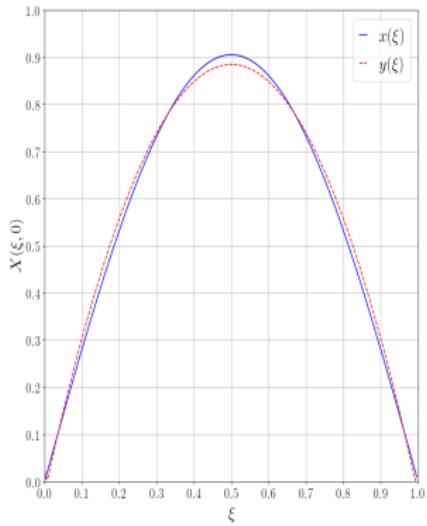
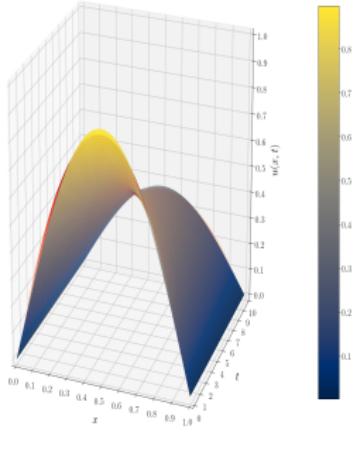
Simulaciones: Burgers' Estocastica

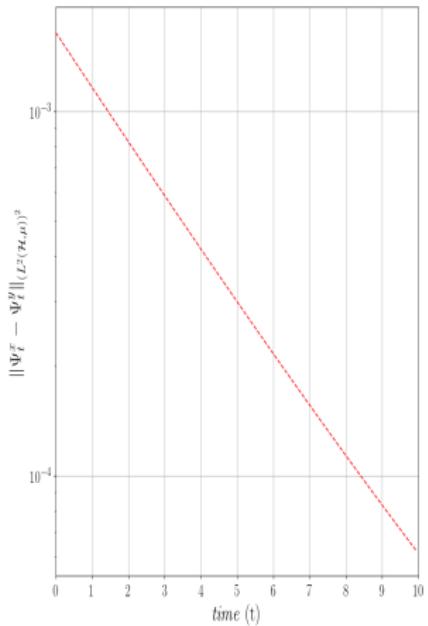
► Navegador



Simulaciones: Burgers' Estocastica

► Navegador





Simulaciones: Burgers' Estocastica

► Navegador

