

Numerical Solutions for Burgers' Equation in the Stochastic and Deterministic Version Using Spectral Methods.

Alan Daniel Matzumiya Zazueta

alan.matzumiya@gmail.com

Universidad de Sonora

4 de Septiembre de 2020

Motivación

- Encontrar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales muchas veces es complicado.

• Del NOMBRE

Motivación

- Encontrar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales muchas veces es complicado.
- Son necesarias para estudiar sistemas complejos.

Motivación

- Encontrar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales muchas veces es complicado.
- Son necesarias para estudiar sistemas complejos.
- Los métodos espectrales son una excelente alternativa para obtener aproximaciones de alta precisión.

Motivación

- Encontrar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales muchas veces es complicado.
- Son necesarias para estudiar sistemas complejos.
- Los métodos espectrales son una excelente alternativa para obtener aproximaciones de alta precisión.
- Ademas, son faciles de implementar.

Objetivos

- Estudiar los fundamentos de los métodos espectrales.

V.Del NOMINE

Objetivos

- Estudiar los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos a la ecuación de Burgers' en su versión determinista y estocástica.

Objetivos

- Estudiar los fundamentos de los métodos espectrales.
- Implementarlos a la ecuación de Burgers' en su versión determinista y estocástica.
- Hacer estudios numéricos para evaluar el comportamiento, y la precisión de estos métodos.

Contenido

Introducción

Métodos Espectrales

Ecuación de Burgers' Determinista

Galerkin

Colocacion

Bajos Coeficientes de Viscosidad

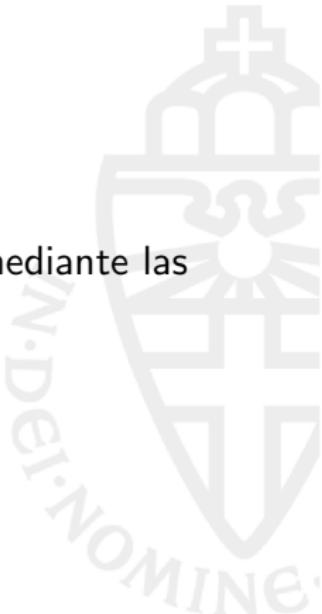
Ecuación de Burgers' Estocástica

Conclusiones



Introducción

La dinámica de los fluidos incompresibles es descrita mediante las siguientes ecuaciones:



Introducción

La dinámica de los fluidos incompresibles es descrita mediante las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \\ (\rho v)_t + (\nabla \cdot \rho v)v + \nabla p - \mu \nabla^2 v - \rho G = 0. \end{cases}$$

ρ = Densidad, p = Presión, v = Velocidad, μ = Viscosidad.

En este caso, G representa los efectos gravitacionales.

Definiendo $x \in I \subset \mathbb{R}$, y $\alpha = \frac{\mu}{\rho}$; considerando $\rho, p, \mu = \text{constantes}$.

Ecuación de Burgers' (Formulación Fuerte)

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \underbrace{v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}}_{\text{Convección}} - \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}}_{\text{Difusión}} - g(x, t) = 0.$$

Definiendo $x \in I \subset \mathbb{R}$, y $\alpha = \frac{\mu}{\rho}$; considerando $\rho, p, \mu = \text{constantes}$.

Ecuación de Burgers' (Formulación Fuerte)

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \underbrace{v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}}_{\text{Convección}} - \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}}_{\text{Difusión}} - g(x, t) = 0.$$

Solución Análitica ($g \equiv 0$)

$$v(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{t} \varphi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi}, \quad \varphi_0(\xi) = e^{-\int_0^{\xi} \frac{v_0(y)}{2\alpha} dy}$$

Condición inicial $v_0(x) = e^{-0.05x^2}$ y con $\alpha = 0.01$.

FIGURES/Galerkin/Graphics/eps=0.01/Exact_Solution

Simplificando notación:

$$F(t, v) = \frac{1}{2}(v^2)_x - g(x, t), \quad A(v) = -\alpha v_{xx},$$

W.DEL NOMINE

Simplificando notación:

$$F(t, v) = \frac{1}{2}(v^2)_x - g(x, t), \quad A(v) = -\alpha v_{xx},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) + F(t, v) = 0, \quad t > 0.$$



Simplificando notación:

$$F(t, v) = \frac{1}{2}(v^2)_x - g(x, t), \quad A(v) = -\alpha v_{xx},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) + F(t, v) = 0, \quad t > 0.$$

Con una adecuada elección de funciones de prueba $\phi \in X$,

Formulación Débil

$$\int_I \frac{\partial v}{\partial t} \phi dx + \int_I A(v) \phi dx + \int_I F(t, v) \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in X, \quad \forall t > 0.$$

Simplificando notación:

$$F(t, v) = \frac{1}{2}(v^2)_x - g(x, t), \quad A(v) = -\alpha v_{xx},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) + F(t, v) = 0, \quad t > 0.$$

Con una adecuada elección de funciones de prueba $\phi \in X$,

Formulación Débil

$$\int_I \frac{\partial v}{\partial t} \phi dx + \int_I A(v) \phi dx + \int_I F(t, v) \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in X, \quad \forall t > 0.$$

Formulación Débil (Compacta)

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + A(v) + F(t, v), \phi \right\rangle = 0, \quad \forall \phi \in X, \quad \forall t > 0.$$

Métodos Espectrales

Para la versión determinista de este estudio nos enfocamos en el siguiente conjunto:

$$\phi_n(x) = e^{inx}, \quad \int_0^{2\pi} \phi_k(x) \overline{\phi_l(x)} dx = 2\pi \delta kl.$$

Métodos Espectrales

Para la versión determinista de este estudio nos enfocamos en el siguiente conjunto:

$$\phi_n(x) = e^{inx}, \quad \int_0^{2\pi} \phi_k(x) \overline{\phi_l(x)} dx = 2\pi \delta_{kl}.$$

Coeficientes de Fourier

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad u(x) \in L^2[0, 2\pi].$$

Métodos Espectrales

Para la versión determinista de este estudio nos enfocamos en el siguiente conjunto:

$$\phi_n(x) = e^{inx}, \quad \int_0^{2\pi} \phi_k(x) \overline{\phi_l(x)} dx = 2\pi \delta_{kl}.$$

Coeficientes de Fourier

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad u(x) \in L^2[0, 2\pi].$$

Series de Fourier

$$F[u] \equiv \sum_{|n| \leq \infty} \hat{u}_n e^{inx}.$$

Definiendo

$$B = \text{span}\{e^{inx} : |n| \leq \infty\}$$



Definiendo

$$B = \text{span}\{e^{inx} : |n| \leq \infty\}$$

Operador de Proyección

$$\mathcal{P}_N u(x) \equiv \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n e^{inx}.$$

$$\hat{B}_N = \text{span} \left\{ e^{inx} : |n| \leq \frac{N}{2} \right\}, \quad \dim(\hat{B}_N) = N + 1.$$

Definiendo

$$B = \text{span}\{e^{inx} : |n| \leq \infty\}$$

Operador de Proyección

$$\mathcal{P}_N u(x) \equiv \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n e^{inx}.$$

$$\hat{B}_N = \text{span} \left\{ e^{inx} : |n| \leq \frac{N}{2} \right\}, \quad \dim(\hat{B}_N) = N + 1.$$

Usando este operador nos facilita obtener derivadas

$$\frac{d^q}{dx^q} \mathcal{P}_N u(x) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n \frac{d^q}{dx^q} e^{inx} = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} (in)^q \hat{u}_n e^{inx}.$$

Otro operador utilizado en este estudio es definido por

$$x_j = \frac{2\pi j}{N+1}, \quad j \in [0, \dots, N].$$



Otro operador utilizado en este estudio es definido por

$$x_j = \frac{2\pi j}{N+1}, \quad j \in [0, \dots, N].$$

Usando la regla de los trapecios

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j},$$



Otro operador utilizado en este estudio es definido por

$$x_j = \frac{2\pi j}{N+1}, \quad j \in [0, \dots, N].$$

Usando la regla de los trapecios

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j},$$

Operador de Interpolacion

$$\mathcal{J}_N u(x) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \tilde{u}_n e^{inx}.$$

La diferenciacion tambien es posible mediante

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}_N u(x) = \sum_{|n| \leq N/2} i n \tilde{u}_n e^{inx}, \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j}.$$

La diferenciacion tambien es posible mediante

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}_N u(x) = \sum_{|n| \leq N/2} i n \tilde{u}_n e^{inx}, \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j}.$$

Otra manera más práctica es reescribiendo el operador:

$$\mathcal{J}_N u(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) h_j(x), \quad h_j(x) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}(x - x_j))}{\sin(\frac{x-x_j}{2})}$$

La diferenciacion tambien es posible mediante

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}_N u(x) = \sum_{|n| \leq N/2} i n \tilde{u}_n e^{inx}, \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) e^{-inx_j}.$$

Otra manera más práctica es reescribiendo el operador:

$$\mathcal{J}_N u(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) h_j(x), \quad h_j(x) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}(x - x_j))}{\sin(\frac{x-x_j}{2})}$$

Matriz de Diferenciación

$$\widetilde{D}_{ij} = \begin{cases} -\frac{(-1)^{i+j}}{2} \left[\sin \left[\frac{x_i - x_j}{2} \right] \right]^{-2} & i \neq j, \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Ecuación de Burgers' Determinista

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [u(x, t)]^2}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

• Del NOMBRE •

Ecuación de Burgers' Determinista

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [u(x, t)]^2}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Usando el operador proyección

$$u_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n e^{inx}$$

Ecuación de Burgers' Determinista

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [u(x, t)]^2}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

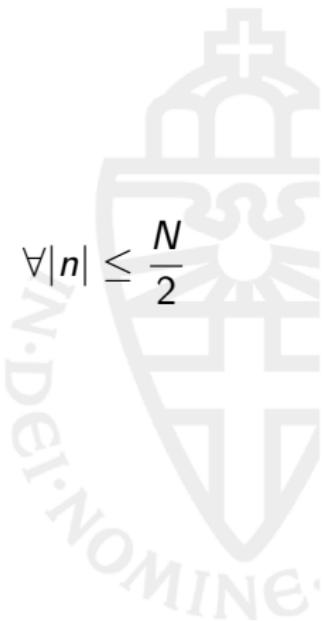
Usando el operador proyección

$$u_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n e^{inx}$$

Aproximación por Fourier-Galerkin

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N(t) : [0, T] \rightarrow V_N, \text{ t.q para cada } \phi \in V_N \\ \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_N^2)_x - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}, \phi \right) = 0 \\ u_N(0) = \mathcal{P}_N u_0(x) \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_N^2) - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right) e^{inx} dx = 0, \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_N^2) - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right) e^{inx} dx = 0, \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t) - p \hat{G}_n(t), \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_N^2) - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right) e^{inx} dx = 0, \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t) - p \hat{G}_n(t), \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

Discretizando la variable temporal t en el intervalo $[0, T]$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, T.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_N^2) - \alpha \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right) e^{inx} dx = 0, \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t) - p \hat{G}_n(t), \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

Discretizando la variable temporal t en el intervalo $[0, T]$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, T.$$

y para la variable espacial x en el intervalo $[x_L, x_R]$, definiendo

$$x_n = p z_n + x_L, \quad p = \frac{x_R - x_L}{2\pi},$$

$$z_n = \frac{2\pi n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Discretización Semi-Implícita

$$\hat{u}_n(t_{j+1}) = \hat{u}_n(t_j) + \Delta t \left[\alpha p^2 n^2 \hat{u}_n(t_j) - p \hat{G}_n(t_{j+1}) \right],$$

Donde \hat{G}_n

$$\hat{G}_n(t_{j+1}) = in \left[\sum_{|k| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n(t_{j+1}) \hat{u}_{n-k}(t_{j+1}) \right].$$

Finalmente es evaluada la solución numérica

$$u_N(x, t_j) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n(t_j) e^{inx}$$



Finalmente es evaluada la solución numérica

$$u_N(x, t_j) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n(t_j) e^{inx}$$

Para los siguientes resultados numéricos se consideró lo siguiente

$$u_0(x) = e^{-0.05x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, 100].$$

FIGURES/Galerkin/Graphics/alphas_Error_N.png

$$\alpha = 1.0; N = 2048; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Galerkin/Graphics/eps=1.0/Numerical_Soluti

$$t = 100, \alpha = 1.0, \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Galerkin/Graphics/eps=1.0/Numerical_Solution_alpha_1.0.t=100

N	Approximation			Error
	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	
16	0.72504	0.72504	0.72504	
32	6.90249×10^{-2}	6.88052×10^{-2}	6.87838×10^{-2}	
64	1.23827×10^{-3}	8.85367×10^{-4}	8.80521×10^{-4}	
128	9.43454×10^{-4}	9.41793×10^{-5}	9.41148×10^{-6}	
256	9.43454×10^{-4}	9.41793×10^{-5}	9.41109×10^{-6}	
512	9.43454×10^{-4}	9.41793×10^{-5}	9.41109×10^{-6}	
1024	*	9.41793×10^{-5}	9.41109×10^{-6}	
2048	*	*		9.41109×10^{-6}

$$\alpha = 0.005; N = 2048; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Galerkin/Graphics/eps=0.005/Numerical_Solu

$$t = 100; \alpha = 0.005; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Galerkin/Graphics/eps=0.005/Numerical_Solution_alpha_0.005.t=100

Approximation	Error		
N	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$
16	9.95328	9.91901	9.91597
32	2.72607	2.70558	2.70347
64	2.50343	2.45988	2.45543
128	2.16142	2.06992	2.05918
256	1.3658	1.19385	1.17602
512	0.339826	0.265843	0.262164
1024	0.161405	0.133743	0.131882
2048	6.50292×10^{-2}	4.70602×10^{-2}	4.57371×10^{-2}
4096	*	7.26917×10^{-3}	6.64157×10^{-3}

Aproximación por Fourier-Colocación

$$\begin{cases} u_N(t) : [0, T] \rightarrow V_N, \text{ t.q para cada } \phi \in V_N \\ \left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t}, \phi \right\rangle_N - \left\langle \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}, \phi \right\rangle_N + \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{J}_N(u_N^2)_x, \phi \right\rangle_N = 0, \quad t > 0, \quad x \in I \\ u_N(0) = \mathcal{J}_N u_0(x), \quad t = 0, \quad x \in I \end{cases}$$

$$R_N(x_j, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x_j, t) - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_j, t) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_N (u_N^2)_x(x_j, t) = 0$$

Aproximación por Fourier-Colocación

$$\begin{cases} u_N(t) : [0, T] \rightarrow V_N, \text{ t.q para cada } \phi \in V_N \\ \left\langle \frac{\partial u_N}{\partial t}, \phi \right\rangle_N - \left\langle \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}, \phi \right\rangle_N + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_N(u_N^2)_x, \phi \rangle_N = 0, \quad t > 0, \quad x \in I \\ u_N(0) = \mathcal{J}_N u_0(x), \quad t = 0, \quad x \in I \end{cases}$$

$$u_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \tilde{u}_n(t) e^{inx}, \quad x_j = \frac{2\pi j}{N+1}, \quad j \in [0, \dots, N].$$

$$R_N(x_j, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x_j, t) - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_j, t) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_N (u_N^2)_x(x_j, t) = 0$$

Necesitamos resolver las $N + 1$ ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $u_N(x_j, 0) = u_0(x_j)$, pero primeramente hacemos la siguiente notación:

$$u_N(t) = (u_N(x_0, t), u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_N, t))^T,$$

$$\frac{du_N(t)}{dt} + \frac{1}{2} D_N u_N^2(t) - D_N^2 u_N(t) = 0,$$

Necesitamos resolver las $N + 1$ ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $u_N(x_j, 0) = u_0(x_j)$, pero primeramente hacemos la siguiente notación:

$$u_N(t) = (u_N(x_0, t), u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_N, t))^T,$$

$$\frac{du_N(t)}{dt} + \frac{1}{2} D_N u_N^2(t) - D_N^2 u_N(t) = 0,$$

Discretización Semi-Implicita

$$u_N(t_{i+1}) = u_N(t_i) + \Delta t \left[p^2 D_N^2 u_N(t_i) - \frac{1}{2} p D_N u_N^2(t_{i+1}) \right].$$

Discretización de t en $[0, T]$

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, T,$$



Discretizacion de t en $[0, T]$

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, T,$$

Discretizacion espacial x en $[x_L, x_R]$, $x_j = pz_j + x_L$, $p = \frac{x_R - x_L}{2\pi}$

$$z_j = \frac{2\pi j}{2N+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Discretización de t en $[0, T]$

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, T,$$

Discretización espacial x en $[x_L, x_R]$, $x_j = pz_j + x_L$, $p = \frac{x_R - x_L}{2\pi}$

$$z_j = \frac{2\pi j}{2N + 1}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Finalmente, evaluamos la solución numérica

$$u_N(x, t_i) = \sum_{|n| \leq N} \hat{u}_n(t_i) e^{inx}$$

Discretización de t en $[0, T]$

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, T,$$

Discretización espacial x en $[x_L, x_R]$, $x_j = pz_j + x_L$, $p = \frac{x_R - x_L}{2\pi}$

$$z_j = \frac{2\pi j}{2N+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Finalmente, evaluamos la solución numérica

$$u_N(x, t_i) = \sum_{|n| \leq N} \hat{u}_n(t_i) e^{inx}$$

Como anteriormente, se consideró lo siguiente para los siguientes resultados numéricos

$$u_0(x) = e^{-0.05x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, 100].$$

$$N = 2^m, m = 4, \dots, 11; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Collocation/collocation_alpha_N.png

$$\alpha = 1.0; N = 2048; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Collocation/Graphics/eps=1.0/Numerical_Sol

$$t = 100, \alpha = 1.0, \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Collocation/Graphics/eps=1.0/Numerical_Solution_

N	Approximation			Error
	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	
16	0.721112	0.721112	0.721112	
32	4.71797×10^{-2}	4.72892×10^{-2}	4.73004×10^{-2}	
64	1.17954×10^{-3}	7.35344×10^{-4}	7.27561×10^{-4}	
128	9.43454×10^{-4}	1.75152×10^{-4}	1.74583×10^{-4}	
256	9.43454×10^{-4}	1.15509×10^{-4}	1.14669×10^{-4}	
512	9.43454×10^{-4}	9.41793×10^{-5}	7.78847×10^{-5}	
1024	0	9.41793×10^{-5}	5.32213×10^{-5}	
2048	0	0	3.56779×10^{-5}	
4096	0	0	2.24122×10^{-5}	

$$\alpha = 0.005; N = 2048; \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Collocation/Graphics/eps=0.005/Numerical_S

$$t = 100, \alpha = 1.0, \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}.$$

FIGURES/Collocation/Graphics/eps=0.005/Numerical_Solution

Approximation	Error		
N	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$
16	1.36189	1.35883	1.35852
32	2.67506	2.65305	2.65078
64	2.50365	2.45855	2.45432
128	2.15795	2.0632	2.05589
256	1.362	1.18393	1.16697
512	0.350775	0.304595	0.300865
1024	0.168462	0.140332	0.13803
2048	6.56161×10^{-2}	4.63808×10^{-2}	4.49226×10^{-2}
4096	0	7.66246×10^{-3}	6.9909×10^{-3}

Bajos Coeficientes de Viscosidad

Las siguientes soluciones, dadas por mediante Fourier-Galerkin, se considero

$$u_0(x) = e^{-0.005x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, T_c],$$

Bajos Coeficientes de Viscosidad

Las siguientes soluciones, dadas por mediante Fourier-Galerkin, se considero

$$u_0(x) = e^{-0.005x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, T_c],$$

donde

$$Tc = \min_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{-1}{u'_0(x)} \right],$$

Bajos Coeficientes de Viscosidad

Las siguientes soluciones, dadas por mediante Fourier-Galerkin, se considero

$$u_0(x) = e^{-0.005x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, T_c],$$

donde

$$T_c = \min_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{-1}{u'_0(x)} \right],$$

tiempo donde ocurre una discontinuidad de la ecuacion

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [u(x, t)]^2}{\partial x} = 0,$$

Bajos Coeficientes de Viscosidad

Las siguientes soluciones, dadas por mediante Fourier-Galerkin, se considero

$$u_0(x) = e^{-0.005x^2}, \quad x \in [-60, 60], \quad t \in [0, T_c],$$

donde

$$T_c = \min_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{-1}{u'_0(x)} \right],$$

tiempo donde ocurre una discontinuidad de la ecuacion

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial [u(x, t)]^2}{\partial x} = 0,$$

la cual tiene como solucion

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad x_0 = x - u_0(x_0)t,$$

$$t = T_c; N = 256; \Delta t = 1.0 \times 10^{-3}.$$

FIGURES/variros_alpha.png

$$\alpha = 1.0 \times 10^{-5}; N = 256; \Delta t = 1.0 \times 10^{-3}.$$

FIGURES/small_alpha.png

$$t = T_c; \alpha = 1.0 \times 10^{-5}; \Delta t = 1.0 \times 10^{-3}.$$

FIGURES/small_alpha_T.png

Approximation	Distance		
	$\Delta t = 1 \times 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$
16	0.285531	0.285732	0.285752
32	0.222737	0.223260	0.223312
64	0.160385	0.162782	0.163025
128	0.129297	0.133322	0.133733
256	0.083291	0.091449	0.092320

Ecuación de Burgers' Estocástica

$$dX(\xi, t) = \left[\alpha \partial_\xi^2 X(\xi, t) + \frac{1}{2} \partial_\xi (X^2(\xi, t)) \right] dt + dW_t(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

con las condiciones de frontera e iniciales

$$X(0, t) = X(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$X(\xi, 0) = x(\xi), \quad x \in \mathcal{H},$$

Ecuación de Burgers' Estocástica

$$dX(\xi, t) = \left[\alpha \partial_\xi^2 X(\xi, t) + \frac{1}{2} \partial_\xi (X^2(\xi, t)) \right] dt + dW_t(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

con las condiciones de frontera e iniciales

$$\begin{aligned} X(0, t) &= X(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ X(\xi, 0) &= x(\xi), \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

La ecuación anterior se asocia a la ecuación estocástica

$$\begin{aligned} dX &= [AX + B(X)]dt + dW_t \\ X(0) &= x, \quad x \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Primeramente para obtener la solución numérica, se define la función

$$u(x, t) = \mathbb{E} [u_0(X_t^x)],$$



Primeramente para obtener la solución numérica, se define la función

$$u(x, t) = \mathbb{E} [u_0(X_t^x)] ,$$

Ecuación de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(Q D^2 u) + \langle Ax, Du \rangle_{\mathcal{H}} + \langle B(x), Du \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x \in D(A)$$

La solución espectral está dada como

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathcal{J}} u_n(t) H_n(x), \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in [0, T],$$

substituyendo en la ecuación de Kolmogorov

$$\dot{u}_m(t) = -u_m(t)\lambda_m + \sum_{n \in \mathcal{J}} u_n(t) C_{n,m}, \quad n, m \in \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} = \{\alpha = (\alpha_i, i \geq 1) | \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |\alpha| := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i < \infty\}$$

Para las soluciones numéricas definimos

$$J^{M,N} = \{\gamma = (\gamma_i, 1 \leq i \leq M) \mid \gamma_i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$$

Entonces la solución truncada es

$$\hat{u}_N(x, t) = \sum_{n \in J^{M,N}} u_n(t) H_n(x), \quad x \in \mathcal{H}, \quad , t \in [0, T].$$

para obtener

$$\dot{u}_m(t) = -u_m(t)\lambda_m + \sum_{n \in S_N} u_n(t) \bar{C}_{n,m}, \quad n, m \in S_N$$

Reescribiendo el sistema

$$U^M(t) = (u_{m_1}(t) \quad u_{m_2}(t) \quad \dots \quad u_{m_M}(t))^T$$

$$\dot{U}^M(t) = (\dot{u}_{m_1}(t) \quad \dot{u}_{m_2}(t) \quad \dots \quad \dot{u}_{m_M}(t))^T$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + C_{1,1} & C_{2,1} & \dots & C_{M-1,1} \\ C_{1,2} & -\lambda_2 + C_{2,2} & \dots & C_{M-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,M-1} & C_{2,M-1} & \dots & -\lambda_{M-1} + C_{M-1,M-1} & C_{M,M-1} \\ C_{1,M} & C_{2,M} & \dots & C_{M-1,M} & -\lambda_M + C_{M,M} \end{pmatrix}$$

Representacion matricial del sistema

$$\dot{U}^M(t) = AU^M(t)$$

La cual tiene como solucion

$$U^M(t) = \sum_{j=1}^M c_j V_j e^{\eta_j t}$$

Eigenvectores y eigenvalores

$$V = a + ib$$

$$\eta = \beta + i\mu$$



$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_{M-1}(0) \\ u_M(0) \end{pmatrix} = (V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_{M-1} \quad V_M) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{M-1} \\ c_M \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{M-1} \\ c_M \end{pmatrix} = (V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_{M-1} \quad V_M)^{-1} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_{M-1}(0) \\ u_M(0) \end{pmatrix}$$

En los siguientes resultados se considero $x(\xi)$ como condicion inicial, y su expansion truncada de Chebyshev como una segunda condicion inicial

$$x(\xi) = \sin(\pi\xi), \quad y(\xi) = \sum_{k=0}^N c_k T_k(\xi),$$

Usando una discretizacion espacial ξ de 2048 puntos en el intervalo $[0, 1]$, 1024 puntos en la variable t sobre el intervalo $[0, 10]$, considerando los parametros $\alpha = 0.01$, $N = 5$, $M = 11$.

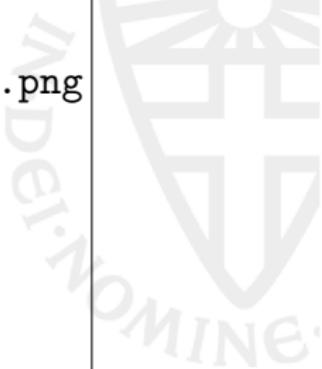
FIGURES/IC.png

W.DER
NOMINE





FIGURES/Numerical_Solution_Stochastic.png



FIGURES/norms.png



Conclusiones

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.

Conclusiones

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.

Conclusiones

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.
- Lo anterior se debió a una discontinuidad o cambios excesivos en la función.

Conclusiones

- Los métodos espectrales son una excelente opción para resolver problemas donde las soluciones se comportan bien o son suficientemente suaves.
- Pueden surgir desventajas en la práctica, como en los casos de coeficientes de viscosidad bajos, el orden de convergencia era menor.
- Lo anterior se debió a una discontinuidad o cambios excesivos en la función.
- De la misma manera con respecto a la versión estocástica de la ecuación de Burgers, y ademas son fáciles de implementar y desarrollar códigos computacionales muy eficientes.