MATEMATICA I

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Avellaneda
Secretaria de Cultura y Extensión
Universitaria

Ing. Juan Carlos Colubi *Ing. Ruben Ricardo Fonte*

MATEMÁTICA

Unidad 1: Conjuntos
Noción de conjuntos. Inclusión. Subconjuntos. Conjuntos numéricos. Unión. Intersección. Complemento. Diferencia. Diferencia simétrica. Leyes de De Morgan. Problemas de conteo. Traducción de lenguaje coloquial a notación conjuntista.

Unidad 2 : Matrices
Matriz. Orden. Fila. Columna. Matrices cuadradas y rectangulares. Propiedades. Matriz traspuesta. Matriz simétrica. Rango de una matriz. Matriz inversa. Obtención por método de Gauss – Jordan.

Unidad 3 : Relaciones
Producto cartesiano. Relaciones binarias. Dominio. Imagen. Representación. Relaciones en un conjunto. Grafos dirigidos como representación de una relación. Camino. Matriz booleamas. Matriz asociada a una relación. Propiedades. Representación en computadoras de relaciones y grafos.
Propiedades de una relación. Clasificación. Relaciones de equivalencia y orden. Análisis de las propiedades según la matriz asociada a la relación y el dígrafo correspondiente. Diagrama de Hasse.

Unidad 4: Grafos y Árboles
Grafos no dirigidos. Camino, circuito, trayectoria. Árboles binarios. Recorrido en orden inicial, intermedio y final. Valor numérico.
Redes. Problemas de aplicación.

Unidad 5: Recta en el plano
Ecuación de la recta. Pendiente. Ordenada al origen. Rectas paralelas y perpendiculares. Cociente incremental. Representación gráfica. Inecuaciones. Representación en el plano. Problemas de aplicación.

Unidad 6: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales en el plano
Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución gráfica y analítica. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Análisis del posible conjunto solución y su relación con la gráfica. Método de Gauss – Jordan. Problemas de aplicación. Sistemas de inecuaciones. Representación en el plano.

Unidad 7: Sistemas de ecuaciones lineales de m x n
Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Teorema de Rouché – Frobenius. Resolución por método de Gauss – Jordan. Conjunto solución. Problemas de aplicación.

Unidad 8: Cálculo combinatorio
Principio de la multiplicación. Permutaciones simples y con repetición. Variaciones simples y con repetición. Combinaciones simples y con repetición. Ejercicios de aplicación.

Bibliografía:

Álgebra I . Armando Rojo . Editorial El Ateneo
Álgebra II . Armando Rojo . Editorial El Ateneo
Matemática discreta . Grassman . Editorial PRENTICE - HALL

TABLA DE SÍMBOLOS O NOTACIÓN

N	conjunto de números naturales
N_0	conjunto de números naturales incluido el cero
Z	conjunto de números enteros
Q	conjunto de números racionales
I	conjunto de números irracionales
R	conjunto de números reales
C	conjunto de números complejos
R^+	conjunto de números reales positivos
R^-	conjunto de números reales negativos
$R^+ \cup \{0\}$	conjunto de números reales positivos incluido el cero

$\subset$ se lee " está incluido estrictamente en " o " incluye estrictamente a "

$\subseteq$ se lee " está incluido ampliamente en " o " incluye ampliamente a "

$\not\subset$ se lee " no contenido o no incluido "

$\in$ se lee " pertenece "

$\notin$ se lee " no pertenece "

$\exists$ se lee " existe por lo menos uno "

$\exists^*$ se lee " existe uno y solo uno "

$\nexists$ se lee " no existe "

$\Rightarrow$ se lee " implica "

$\Leftrightarrow$ se lee " si y solo si "

$\forall$ se lee " para todo "

$|X|$ se lee " valor absoluto de X "

$\varnothing$ indica " conjunto vacio "

U indica " conjunto universal "

/ se lee " tal que "

$\vee$ se lee " o "

$\wedge$ se lee " y "

$<$ se lee " menor " estrictamente

$\leq$ se lee " menor o igual "

$>$ se lee " mayor " estrictamente

$\geq$ se lee " mayor o igual "

$\cong$ se lee " igual o semejante "

$\neq$ se lee " no es igual "

$\cup$ se lee " unión "

$\cap$ se lee " intersección "

$\equiv$ se lee " equivalente "

se lee " cardinal "

Unidad 1. Conjuntos.

PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN: Cuando decimos $A = \{ x / x$ tiene la propiedad " **p** " $\}$, cualquier elemento que tenga esa propiedad pertenece al conjunto. En símbolos es $x \in A$, en consecuencia ($\therefore$) la pertenencia es una relación de elemento a conjunto.

1) Sea $A = \{1, 2, 4, a, b, c\}$. Indicar cada uno de los siguientes casos como verdadero " **V** " o falso " **F** ".

a)	b)	c)	d)	e)
$2 \in A$	$3 \in A$	$c \notin A$	$\varnothing \in A$	$A \in A$
☐	☐	☐	☐	☐

DEFINICIÓN: Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro, se dice que está incluido. En consecuencia ($\therefore$) la inclusión es una relación de conjunto a conjunto.

$\subseteq$ se lee " está incluido ampliamente en " o " incluye ampliamente a "
Simbólicamente: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$

$\subset$ se lee " está incluido estrictamente en " o " incluye estrictamente a "
Simbólicamente: $A \subset B \Leftrightarrow \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \exists\ y \in B / y \notin A$

2) Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$

Completar con incluido: $\subset$ o no incluido: $\not\subset$, para dar un enunciado verdadero.

a) A ☐ B b) $\varnothing$ ☐ A c) B ☐ C d) C ☐ E e) D ☐ C f) B ☐ E

3) Escribir el conjunto de potencia de **B** , ($P_{(B)}$) , siendo el conjunto B = { C # ; JAVA ; VB.NET. }.

4) A) Considerando los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d\}$ con dominio $D = \{a, b, c, d, e\}$ y las formas proposicionales:

$p_{(x)}$ = **x pertenece al conjunto A** , $q_{(x)}$ = **x pertenece al conjunto B**

Definir por extensión el conjunto de verdad correspondiente a:

a) $p_{(x)} \wedge q_{(x)}$ b) $p_{(x)} \vee q_{(x)}$ c) $p_{(x)} \wedge - q_{(x)}$ d) $- p_{(x)} \wedge q_{(x)}$ e) $- p_{(x)}$

f) $- [\, p_{(x)} \wedge q_{(x)} \,]$ g) $- p_{(x)} \vee - q_{(x)}$ h) $- p_{(x)} \wedge - q_{(x)}$ i) $- [\, p_{(x)} \vee q_{(x)} \,]$

B) Sombrear en un diagrama de **Venn** el conjunto verdad correspondiente a cada uno de los casos anteriores, considerando dominio **D = U**

5) Considerando las formas proposicionales:

$p_{(x)}$ = **x pertenece al conjunto A** , $q_{(x)}$ = **x pertenece al conjunto B**

a) Escribir en lenguaje simbólico la siguiente proposición:
" Todos los elementos del dominio verifican que si pertenecen al conjunto A, entonces pertenecen al conjunto B".

b) Dar el valor de verdad siendo:

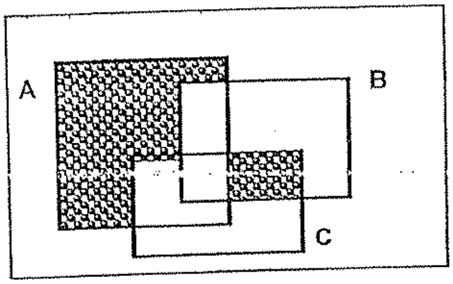
b_1) $A = \{1, 2, 3\} \wedge B = \{1, 2, 3, 4, 0\}$

b_2) $A = \{1, 2, 3, 4, 0\} \wedge B = \{3, 2, 1\}$

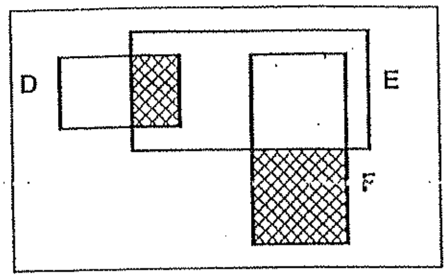
b_3) $A = \varnothing \wedge B = \{-1, 0, 1\}$

6) Escribir con notación conjuntista una operación que represente las regiones sombreadas en los siguientes diagramas

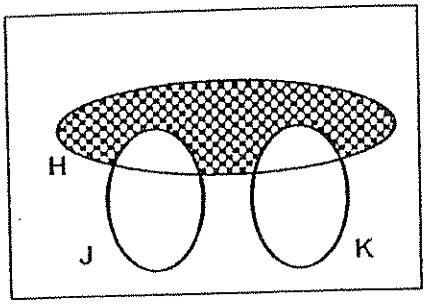
a)



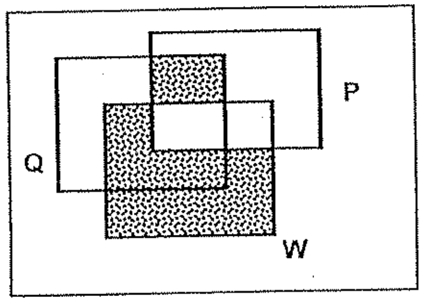
b)



c)



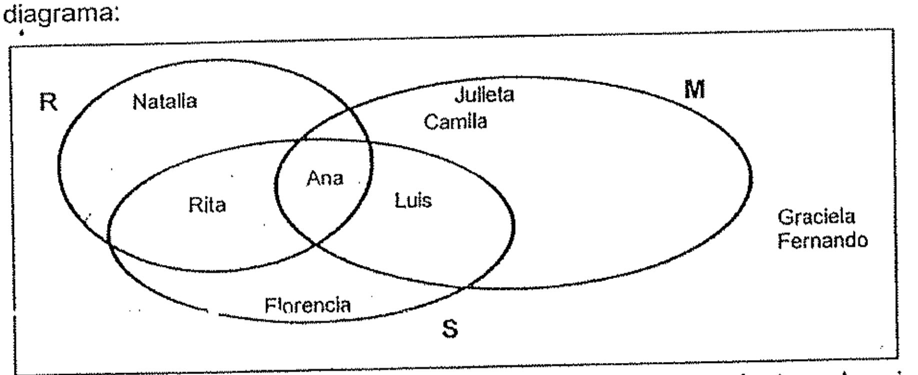
d)



7) Verificar mediante diagramas de **Venn** las leyes de **De Morgan** para tres conjuntos.

PROBLEMAS DE CONTEO

8) Dados los conjuntos:
R = personas de cabello rubio **M = personas con ojos marrones** **S =personas que miden menos de 1,70 m**
y el siguiente diagrama:



Definir por extensión y describir las características de los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos:

a) $R \cap \overline{M} \cap \overline{S}$ b) $R - M$ c) $\overline{R} \cap \overline{M} \cap \overline{S}$ d) $M \cap S \cap \overline{R}$ e) $R \cap \overline{S} \cap M$

9) Sombrear en un diagrama la región correspondiente a:

a) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ b) $A \cap B \cap \overline{C}$ c) $\overline{A \cup B \cup C}$ d) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

10) Dados tres conjuntos sombrear en un diagrama de **Venn** la región donde ubicarla a:

a) Los elementos que pertenecen **por lo menos a dos** de los conjuntos.
b) Los elementos que pertenecen **a sólo dos** de los conjuntos.
c) Los elementos que pertenecen **a lo sumo a uno** de los conjuntos.
d) Los elementos que pertenecen **exactamente a uno** de los conjuntos.

11) Sabiendo que:

$\#(A \cup B \cup C) = 65 \qquad \#(A \cap B \cap C) = 3 \qquad \#(A \cap B) = 20 \qquad \#A = \#B = 35$

$\#(B \cap C) = 10 \qquad \#[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)] = 32$

Calcular:

a) $\#[C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})]$

b) La cantidad de elementos que pertenecen **a sólo** un conjunto, escribirlo en notación conjuntista.

---

12) Se tienen tres conjuntos **A, B** y **C.** Sabiendo que:

$\#(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}) = 90 \qquad \#(A \cap B \cap \overline{C}) = 5 \qquad \#(B \cap C) = 16 \qquad \#[\overline{(A \cup B \cup C)}] = 20$

$\#A = 50 \qquad \#B = 30 \qquad \#[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 30 \qquad \#(A \cap B) = 17$

a) ¿Cuántos elementos hay **a lo sumo** en dos conjuntos?.
b) ¿Cuántos elementos hay **solamente** en dos conjuntos?.
c) ¿Cuántos elementos **tiene** el conjunto **C**?.

Nota: en los siguientes problemas realizar el diagrama de Venn correspondiente y expresar los datos y las respuestas en notación conjuntista.

---

13) En un atlas hay **97** mapas de **Argentina**, de los cuales **35** están **coloreados.**
El atlas **tiene** un total de **128** mapas **coloreados.** Hay **30** mapas que **no** tienen **color ni** son de **Argentina.**
a) ¿Cuántos mapas **tiene** el atlas?.
b) ¿Cuántos mapas son de **Argentina** pero **sin color**?.
c) ¿Cuántos mapas **coloreados no son de Argentina**?.

---

14) Sobre un total de **80** personas se sabe que:
44 se inscribieron en un curso de **Windows**
5 " " " " " " **Windows** y **DOS** solamente
16 en **DOS** y **Cobol**
17 en **Windows** y **DOS**
28 se inscribieron por lo menos en dos cursos
17 en ninguno de esos cursos
30 en **DOS**

Se pide
a) ¿Cuántos se anotaron en un **solo** curso?
b) ¿Cuántos se anotaron **a lo sumo** en dos cursos?
c) ¿Cuántos se anotaron **solamente** en dos cursos?

SOLUCIÓN: (no es única)

A partir de los datos podemos calcular los valores que necesitamos para completar el diagrama:

Primero:

$$D = (D \cap W \cap \overline{C}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (D \cap C \cap \overline{W}) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{W})$$

$$30 = 5 + 12 + 4 + \#(D \cap \overline{C} \cap \overline{W})$$

$$\#(D \cap \overline{C} \cap \overline{W}) = 9$$

Segundo:

$$U = \overline{(W \cup D \cup C)} \cup W \cup (D \cap C \cap \overline{W}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (C \cap \overline{D} \cap \overline{W})$$

$$80 = 17 + 44 + 4 + 9 + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W})$$

$$\#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) = 6$$

Tercero:

$$28 = \#(D \cap W \cap \overline{C}) + \#(D \cap C \cap \overline{W}) + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + \#(D \cap C \cap W)$$

$$28 = 5 + 4 + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + 12$$

$$\#(C \cap W \cap \overline{D}) = 7$$

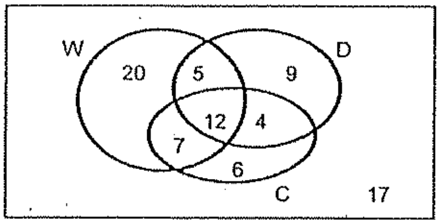
Cuarto:

$$W = \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap D \cap C) + \#(W \cap C \cap \overline{D}) + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$44 = 5 + 12 + 7 + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) = 20$$

El diagrama completo es:



a) Los que se anotan en **un solo** curso son:

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) =$$
$$\mathbf{20} + \mathbf{6} + \mathbf{9} = \mathbf{35}$$

b) Los que se anotaron a **lo sumo** en dos cursos son:

En ningún curso: $\#(\overline{W \cup D \cup C}) = \mathbf{17}$

En un curso: $\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = \mathbf{35}$

En dos cursos: $\#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = \mathbf{16}$

El total será: 17 + 35 + 16 = **68**

c) Los que se anotaron **solamente** en dos cursos son:

En dos cursos: $\#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = \mathbf{16}$

---

15) En una encuesta se supo que:

4 personas leen las revistas: **C**aras, **E**l **G**ráfico y **M**uy **I**nteresante.
6 leen solamente la revista **M I**
16 las revistas **M I** y **E G**
20 leen **C** pero no **M I**
12 leen **C** y **E G**
4 sólo leen **E G**
26 leen **C**
50 ninguna de las tres revista

Se desea saber:

a) ¿Cuántas personas leen alguna de las tres revistas?
b) ¿Cuántas leen una sola revista?
c) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
d) ¿Cuántas personas leen por lo menos dos revistas?

---

16) En el primer año de una carrera de computación se registró la siguiente estadística:
El 10% de los alumnos estudiaban **por lo menos** una de las siguientes materias: Matemática, Programación I e Ingles. Además 28 estudian Matemática, 22 Programación I, y 28 Ingles; **sólo 2** alumnos estudian las tres materias, 12 estudian Matemática e Ingles, 12 estudian Programación I e Ingles y **10 sólo** Matemática.
Se pide:

a) ¿Cuántos alumnos estudian **alguna** de las tres materias?
b) ¿Cuál es la cantidad **total** de alumnos?
c) ¿Cuántos estudian Matemática **y** Programación I pero **no** Ingles?
d) ¿Cuántos estudian **sólo 2** materias?

17) Un video club cuenta con **200** películas, de las cuales **125** son de cortometraje y **94** son de color. Además **38** de las películas de largometraje son de color.

a) ¿ Cuántas películas blanco y negro hay ?   b) ¿ Cuántas de las de cortometraje son de color ?

18) En una ciudad existen tres cadenas de supermercados: **A , B , C.**
Una encuesta indicó que el **70 %** de los habitantes compra en alguno de esos supermercados, el **30 %** compra en por lo menos dos de ellos, mientras que el **25 %** lo hace exactamente en dos de ellos.
Hay un **5 %** de habitantes que compra sólo en **B** y **C.**
Se sabe, además, que el porcentaje de personas que compra sólo en A y B es igual al que compra sólo en A y C.
La cadena A acapara el **40 %** del público al igual que la cadena B.

a) ¿Qué cantidad de personas compra **sólo** en la cadena B?.
b) ¿Qué porcentaje lo hace en una sola de las cadenas existentes?.

19) Los empleados de una gran empresa de insumos para computación, cuando asisten a Buenos Aires, pueden hospedarse en tres grandes hoteles: el **Sheraton**, el **Bauen** y el **Libertador**, o bien por su cuenta en algún otro.
Se sabe por experiencias anteriores, que el **80 %** elige uno de los tres hoteles citados. Además, el **20 %** se hospedó alguna vez en el **Sheraton** y el **Bauen,** el **15 %** en los tres hoteles, el **12 %** eligió sólo el **Bauen** y el **Libertador** y nadie eligió sólo el **Sheraton** y el **Libertador.**
Si los porcentajes de personas que prefieren sólo uno de los hoteles mencionados son iguales, se pide:

a) ¿Qué porcentaje de personas se aloja en **sólo uno** de los hoteles citados?.
b) ¿Qué porcentaje lo hace en **por lo menos dos** de ellos?.

20) Un video – club ofrece a sus socios tres estrenos: una película de **acción**, una de **terror** y una **comedia.**
Se sabe que **46** de los **100** socios que tiene el video aceptaron la propuesta, de los cuales **40** alquilaron por lo menos dos de las películas, **6** alquilaron las **3**,
30 alquilaron la película de **acción** y la de **terror**, mientras que **4** alquilaron sólo la película de **acción** y la **comedia**, **3** alquilaron sólo la **comedia** y la película de **acción** la alquilaron **37** personas.

El dueño del video quiere saber:

a) ¿Cuántas personas alquilaron **sólo** la película de **terror**?.
b) ¿Cuántas personas alquilaron **sólo dos** películas?.

21) En el museo de Bellas Artes hubo una muestra de tres pintores: **Joan Miró, Juan Gris** y **Kandinsky.**
Se sabe que el fin de semana fueron al museo **3540** personas de las cuales el **40 %** visitaron las muestras, el **30 %** visitaron por lo menos dos de las muestras, el **5 %** visitaron las tres muestras.
Las muestras de **Joan Miró** y **Juan Gris** la visitaron un **20 %,** un **3 %** fue sólo a la muestra de **Joan Miró** y **Kandinsky,** un **2 %** fueron sólo a la de **Kandinsky** y a la muestra de **Juan Gris** fue un **32 %.**

Se pide:

a) ¿Qué porcentaje visitó sólo la muestra de **Joan Miró**?.
b) ¿Qué porcentaje visitó la muestra de **Joan Miró** y **Juan Gris** pero no la de **Kandinsky**?.
c) ¿Cuántas personas no visitó ninguna de las tres muestras?.

22) Entre los 76 alumnos de primer año de un colegio, se efectuó un test de tres preguntas. Acerca de los resultados se tienen los siguientes datos:
44 alumnos respondieron bien la **segunda** pregunta y 28 bien la **tercera**; **12** alumnos respondieron bien la **primera** y la **segunda**, 2 la **primera** y la **tercera**, 10 alumnos respondieron bien sólo la **primera** pregunta, en tanto 18 respondieron bien la tercera pero no la **segunda**, ninguno respondió bien sólo la **primera** y la **tercera**.

a) ¿Cuántos alumnos no respondieron bien **ninguna** pregunta?.
b) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la **primer** pregunta?.
c) ¿Cuántos alumnos respondieron **por lo menos dos** preguntas?.

23) Se realiza una encuesta entre **50** alumnos de un aula preguntándoles que tipo de música les gustaba: **clásica, heavy** o **tecno.**
A **30** de los alumnos les agradaba la música **clásica**, pero a **10** de ellos les gustaba **sólo** la música **clásica**, **20** alumnos se inclinaron por **heavy** pero a **5** de ellos **sólo heavy y tecno**. Hubo **12** personas que admitieron no escuchar ningún tipo de música, **uno** dijo que escuchaba **sólo heavy** y **16** que escuchaban **tecno.**

a) ¿Cuántos alumnos escuchaban los tres tipos de música?.
b) ¿Cuántos alumnos escuchaban **sólo heavy y clásica**?.

24) En una cierta encuesta, se preguntó a **500** ejecutivos acerca de su lectura de los periódicos **Barricada, Lucha** y **Construcción.**
Las respuestas mostraron que
250 leían **Barricada**
270 leían **Construcción**
190 leían **Lucha**
70 leían **Barricada** y el **Construcción**
20 leían los tres periódicos.
50 leían el **Barricada** y el **Lucha**
110 leían **Lucha** y el **Construcción**

Calcular:
a) La cantidad de personas que leían **a lo sumo un** periódico.
b) La cantidad de personas que no leen ninguno de estos periódicos.

25) Se entrevistó a un universo de personas que solamente escuchan las siguientes radios (en AM):
La Voz de las Madres (530), **Cooperativa** (740) y **Nacional** (870), obteniéndose los siguientes datos:

140 escuchan **La Voz de las Madres** , 40 escuchan **La Voz de las Madres** y **Cooperativa,**
100 escuchan **Cooperativa**, 50 escuchan **La Vóz de las Madres** y **Nacional**, 60 escuchan **Nacional** .

Se sabe que nadie escucha las tres emisoras simultáneamente y no hay ningún oyente que escuche la emisora **Nacional** exclusivamente.

Calcular:
a) La cantidad de personas que escuchan **por lo menos una** radio.
b) La cantidad de personas que escuchan sólo **Cooperativa.**

26) De los **200** estudiantes a ingresar en una universidad, **98** son mujeres.
60 estudian comunicación.
60 son mujeres que no estudian comunicación.
¿ Cuántos hombres no estudian comunicación ?.

27) En una academia se realiza una encuesta a **120** jóvenes y se obtienen los siguientes datos:
80 quieren ser actores.
70 quieren ser cantantes.
50 quieren ser actores y cantantes.

Determinar:
a) no quieren ser cantantes.
b) no quieren ser actores.
c) quieren ser cantantes, pero no actores.
d) quieren ser actores, pero no cantantes.
e) no quieren ser actores ni cantantes.

28) De **200** profesores de una universidad, **115** son licenciados y **60** son investigadores.
De los licenciados **33** son investigadores.

Indique cuántos de estos profesores:
a) son licenciados o investigadores
b) no son licenciados ni investigadores.

29) En un concurso de baile hay **55** parejas.

38 son latinas.
27 bailan tango y **46** bailan salsa.
13 son latinas y bailan tango.
18 bailan tango y salsa.
Todas las latinas bailan salsa.
Todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores.

a) ¿ Cuántas tienen las **tres** características ?.
b) ¿ Cuántas tienen exactamente **dos** características ?.
c) ¿ Cuántas tienen exactamente **una** característica ?.

---

30) En una investigación hecha en un grupo de **100** estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

Español, **28.**	Español y alemán, **8.**	Los tres idiomas, **3.**
Alemán, **30.**	Español y francés, **10.**	
Francés, **42.**	Alemán y francés, **5.**	

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian **ningún** idioma ?.
b) ¿ Cuántos alumnos tenían al francés como **único** idioma de estudio ?.

---

31) En un análisis posterior sobre los **100** estudiantes (del ejercicio anterior) la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas resultaron ser:

Alemán únicamente, **18.**
Alemán pero no español, **23.**
Alemán y francés, 8.
Alemán, **26.**
Francés, **48.**
Francés y español, **8.**
Ningún idioma, **24.**

a) ¿Cuántos estudiantes aprendían el español ?.
b) ¿Cuántos estudiantes aprendían alemán y español pero no francés ?.

Unidad 1. Conjuntos. Respuestas.

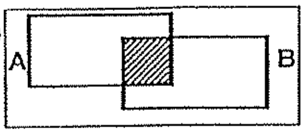
PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

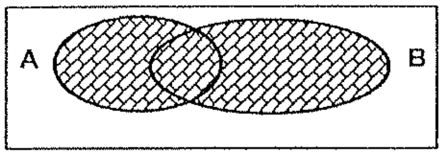
1) a) V b) F c) F d) F e) F

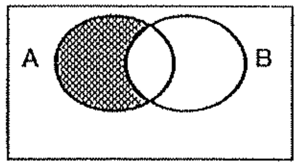
2) a) $A \subset B$ b) $\varnothing \subset A$ c) $B \not\subset C$ d) $C \subset E$ e) $D \not\subset C$ f) $B \subset E$

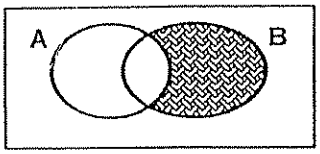
3) $P_{(B)}$ = { { C # ; JAVA ; VB.NET. } ; { C #, JAVA } ; { C #, VB.NET. } ; { JAVA , VB.NET. } ; { C # } ; { JAVA } ; { VB. NET. } ; $\varnothing$ }

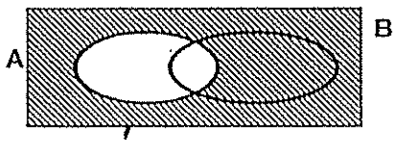
4) A)
a) Cv = { b , c } b) Cv = { a , b , c , d } c) Cv = { a } d) Cv = { d }
e) Cv = { d , e } f) Cv = { a , d , e } g) Cv = { a , d , e } h) Cv = { e } i) Cv = { e }

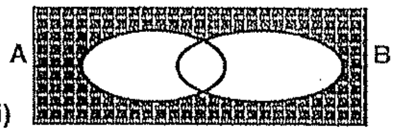
B)
a)


b)


c)


d)


e)




f) g)


h) i)

5) a) $\forall x / x \in p_{(x)} \Rightarrow x \in q_{(x)}$ b_1) $V_v = 1$ b_2) $V_v = 0$ b_3) $V_v = 0$

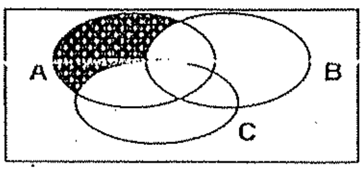
6) a) $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$ b) $(D \cap E) \cup (F - E)$

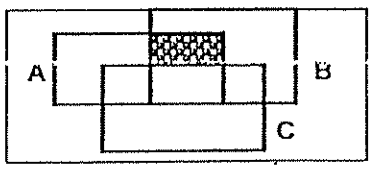
c) $H \cap \overline{J} \cap \overline{K}$ d) $(P \cap Q \cap \overline{W}) \cup (W - P)$

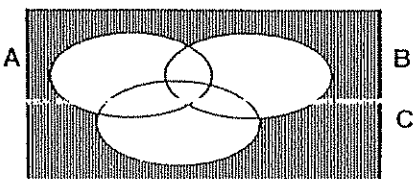
7) a) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ b) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

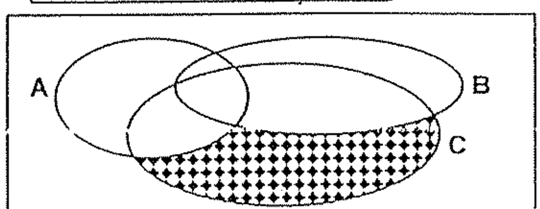
PROBLEMAS DE CONTEO

8) a) Natalia b) Natalia , Rita c) Graciela , Fernando d) Luis e) $\varnothing$

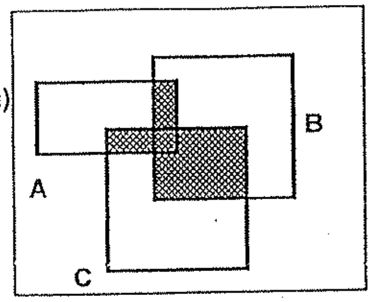
9)
a)


b)


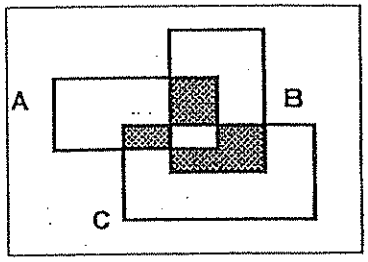
c)


d)


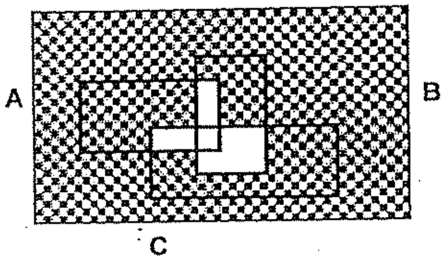
10) a)



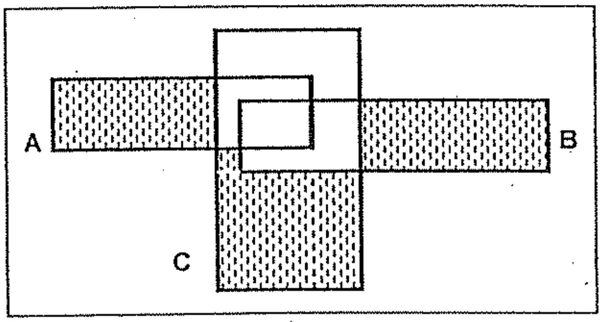
b)



c)



d)



11) a) 15 b) 30

12) a) 98 b) 18 c) 52

13) a) 220 b) 62 c) 93

14) a) , b) , c) está resuelto

15) a) 48 b) 22 c) 98 d) 26

16) a) 48 b) 480 c) 6 d) 26

17) a) 106 b) 56

18) a) 20 % b) 40 %

19) a) 48 % b) 32 %

20) a) 0 b) 34

21) a) 3 % b) 15 % c) 2124

22) a) 4 b) 22 c) 20

23) a) 3 b) 11

24) a) 310 b) 0

25) a) 200 b) 50

26) 80

27) a) 50 b) 40 c) 20 d) 30 e) 20

28) a) 142 b) 58

29) a) 13 b) 30 c) 12

30) a) 20 b) 30

31) a) 18 b) 0

Unidad 2. Matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos.
El elemento a_{ij} de la matriz **A** ocupa la fila **i** y la columna **j** del arreglo.
Se dice que una matriz con **m** filas y **n** columnas tiene el orden o el tamaño $m * n$

a) Una matriz **cuadrada** tiene $m = n$.
b) Un **vector fila** es una matriz con **un** renglón y **n** columnas.
c) Un **vector columna** es una matriz con **m** filas y **una** columna.

1) Escriba las siguientes matrices definidas en forma explicita:

a) $A \in R^{3*4} \,/\, a_{ij} = i + j$

b) $B \in R^{3*3} \,/\, b_{ij} = (-1)^{i+j}$

c) $C \in R^{4*4} \,/\, c_{ij} = 1$ (si $i + j$ es primo); $c_{ij} = 0$ (si $i + j$ no es primo)

d) $D \in R^{n*n} \,/\, d_{ij} = 1$ (si $i = j$); $d_{ij} = 0$ (si $i \neq j$)

SUMA DE MATRICES

La suma de matrices se define entre matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas (o sea del mismo tamaño: $m * n$). Matrices conformes.
Siendo:
$A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}]$ y la operación: $A + B = C$
Los elementos de la matriz **C** se obtienen haciendo:
$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+5 & -1+3 \\ 5+0 & 0+(-3) & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sean las matrices de R^{2*3}:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $2A - 3B$ d) $\sqrt{2}\, A + 0B$

3) Hallar $X \in R^{2*4} \,/\, A + X = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Calcular x, y, z para que las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ y & 5 & 2 \\ 4 & -4 & z \end{pmatrix}$$

5) Hallar A y B $\in R^{2*2}$ / verifiquen simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \qquad -2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

6) Expresar el vector: $\overline{V} = (7, -6, 0)$ como combinación lineal de los vectores: $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$

$\overline{P} = (2, 0, 1)$ $\quad$ $\overline{Q} = (0, 3, 0)$ $\quad$ $\overline{R} = (-1, 0, 3)$

7) Escribir la matriz: $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8) Analice si existe $K \in R$ para que la matriz dada (M) se pueda escribir como una combinación lineal de $A \wedge B$.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Planteamos la situación con los escalares α y β.

$$\begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{operando queda:} \quad \begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

Por igualación de matrices obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones:
$$\begin{cases} 3 = \alpha \\ K-1 = \beta \\ 2K+1 = \beta \\ 3K = \beta \end{cases}$$

De la 1ª es $\alpha = 3$

La 2ª y la 3ª tienen los segundos miembros iguales $\therefore$ las podemos igualar: $K-1 = 2K+1$

Obtenemos $K = -2$ y con este valor será $\beta = -3$

Reemplazamos en la 4° (para verificar):

$3K = \beta$

$3(-2) = -3$ esto nos da: $-6 = -3$ (no existe) $\therefore$ no se verifica

Conclusión:

No existe $K \in R$ y **M** no puede expresarce como combinación lineal de las matrices $A \wedge B$ propuestas.

9) Analice si existe $K \in R$ para que la matriz dada (M) se pueda escribir como una combinación lineal de **A, B, C,D.**

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & K \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: cuando planteamos la combinación lineal igualada a cero tendremos:
I) para que sea **dependencia** debe ser distinto de **cero algún** coeficiente.
II) para que sea **independencia** deben ser **cero todos** los coeficientes.

10) Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes subconjuntos de R^{2*2}.

a)

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

11) Dado el siguiente conjunto:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset R^{2*2}$$

a) Determinar los valores de **k** para los cuales **B** es una base de R^{2*2}.

b) Para **k = 0**, obtener las coordenadas de .... $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto de la base **B**.

PRODUCTO DE MATRICES

Condición de existencia de producto: $A \in R^{m*n} \wedge B \in R^{n*r}$

Si: (la cantidad de columnas de **A**) = (la cantidad de filas de **B**)

Existe: $A * B$ y su tamaño es: $A * B \in R^{m*r}$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix} .* \begin{pmatrix} 3/16 & 0 & -1/16 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\ 3/16 + 0\,(-1/2) + 4\,(-1/8) & 8\ 0 + 0\ 1 + 4\ 0 & 8\,(-1/16) + 0\,(-1/4) + 4\ 1/8 \\ 6\ 3/16 + 1\,(-1/2) + 5\,(-1/8) & 6\ 0 + 1\ 1 + 5\ 0 & 6\,(-1/16) + 1\,(-1/4) + 5\ 1/8 \\ 8\ 3/16 + 0\,(-1/2) + 12\,(-1/8) & 8\ 0 + 0\ 1 + 12\ 0 & 8\,(-1/16) + 0\,(-1/4) + 12\ 1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 - 1/2 & 0 & -1/2 + 1/2 \\ 9/8 - 4/8 - 5/8 & 1 & -3/8 - 2/8 + 5/8 \\ 3/2 - 3/2 & 0 & -1/2 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Efectuar, si es posible, los siguientes productos:

a)

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

13) Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^2 y A^3

b) Dado $P_{(x)} = x^2 - 3x + 2 * I$, compruebe que: $P_{(A)} = A^2 - 3A + 2 * I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

> **Matriz identidad (I):**
> se define con los elementos de la diagonal principal todos " **1** " y el resto " **0** "
> Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

14) Dado el conjunto: $S = \{ X \in R^{3*1} \ / \ A * X = N \}$

Siendo $A \in R^{2*3}$ una matriz de la forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar la base y la dimensión (S).

---

15) Dado el conjunto: $W = \{ X \in R^{2*2} \ / \ X * A = A * X \}$

Siendo $A \in R^{2*2}$ una matriz de la forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar la base y dimensión (W).

---

16) Hallar, si existe, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices mediante el método de **Gauss – Jordan**

> **Matriz inversa:**
> Dada una matriz **A**, si existe una matriz **B** que cumple con: $A * B = B * A = I$
> Esta matriz **B** se llama **inversa** de **A**, y se la simboliza con: A^{-1} o sea que $B = A^{-1}$

> **Determinante** de una matriz cuadrada: **det. A** ó $|A|$
> Una forma de cálcular del determinante (3 * 3) es la siguiente (menores complementarios):
> $|A| = a_{11}(a_{22}\ a_{33} - a_{23}\ a_{32}) - a_{12}(a_{21}\ a_{33} - a_{31}\ a_{23}) + a_{13}(a_{21}\ a_{32} - a_{22}\ a_{31})$

> Si el determinante de la matriz: $|A| = 0$, la matriz **inversa no existe.**
> Las matrices que no tienen inversa se llaman **singulares.**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

---

17) Dada la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix} \in R^{3*3}$$

a) Analizar para que valores de **k**, la matriz **P** es inversible.
b) Hallar P^{-1} para $k = 1$.

18) Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) $\forall\ A, B \in R^{n*n} : (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $\forall\ A, B \in R^{n*n} : A^2 - B^2 = (A+B)*(A-B)$

c) $\forall\ A, B \in R^{n*n} : A^2 - I = (A+I)*(A-I)$

Matriz transpuesta: Dada $A = [a_{ij}] \in R^{m*n}$ la matriz que se obtiene intercambiando renglones y columnas sera: $A^T = [a_{ij}]^T \in R^{n*m}$
o sea que: $[a_{ij}]^T = a_{ji}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

19) Dado el conjunto: $S = \{X \in R^{2*2} \ /\ X * A$ **es simétrica** $\}$

Siendo $A \in R^{2*2}$ una matriz de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hallar la base y dimensión (S).

Interpretación del conjunto dato:
El conjunto S es el de todas las matrices X que cuando se las multiplica por A dan por resultado una nueva matriz Y pero con la propiedad de ser **simétrica**:

$X * A = Y \quad ; \quad Y$ **: simétrica.**

Matriz simétrica: una matriz Y se llama **simétrica** cuando coincide con su **traspuesta:** $Y = Y^T$
o sea que: $a_{ij} = a_{ji}$

Solución:

Proponemos que la matriz sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ siendo $X \in R^{2*2}$

El producto $X * A = Y$ será:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0+b*1 & a*1+b*0 \\ c*0+d*1 & c*1+d*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Según la condición $Y = Y^T$ nos queda:

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}^T \therefore \begin{pmatrix} b & \mathbf{a} \\ \mathbf{d} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & c \end{pmatrix}$$

Esta última igualdad se produce cuando $\mathbf{a} = \mathbf{d}$ $\therefore$ la matriz X será: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$

A esta matriz X la podemos pensar como la suma de tres matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Esto lo podemos escribir de la siguiente forma: $X = a * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La **base** será:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La **dimensión** será: **S = 3**

---

20) Dado el conjunto: $\mathbf{S = \{ X \in R^{3*3} \ / \ X * A \text{ es antisimétrica} \}}$

Siendo $A \in R^{3*3}$ una matriz de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hallar la base y dimensión (S).

La diferencia con la definición del ejercicio **17)** es que: $\mathbf{X * A = Y}$; **Y: antisimétrica.**

Matriz antisimétrica: una matriz Y se llama antisimétrica cuando coincide con la opuesta a su **traspuesta** : $\mathbf{Y = -Y^T}$, o sea que: $a_{ij} = -a_{ji}$

El **rango** de una matriz está dado por el arreglo mas grande, de la matriz, con determinante no nulo.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Utilizando el método de **menores complementarios** (i + j = par ∴ va + , i + j = impar ∴ va –) y desarrollando por la 1° fila, el determinante será:

$$|A| = +a_{11} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +1(21-20) - 2(14-12) + 3(10-9) = 0$$

Un arreglo de 2 * 2 puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ el determinante será: $(3-4) = -1 \neq 0$ ∴ el **rango = 2**

---

21) ¿ Cuánto debe valer **k** para que el rango de la matriz **A** sea igual a **2** ?.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La **traza** de una matriz queda definida por: $tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$

O sea que es la suma de los elementos de la diagonal.

---

22) Dada la matriz:

$$A_{(i,j)} = \begin{cases} j^2 & \text{si } i < j \\ j - i & \text{si } i = j \\ 2j - 3i & \text{si } i > j \end{cases}$$

Hallar su traza, sin hallar A

---

23) Dado el conjunto: $\mathbf{S = \{ A \in R^{2*2} \ / \ A = A^T \wedge \text{traza}(A) = 0 \}}$

Hallar la base y dimensión (S).

Unidad 2. Matrices. Respuestas.

1) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

SUMA DE MATRICES

2) a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} - 1/2 \\ \sqrt{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{2} + 1/2 \\ -\sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2\sqrt{2} + 3/2 \\ -3\sqrt{2} & 9 & -2 \end{pmatrix}$ d) $2A + 0B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 4) $(x, y, z) = (-3, 0, 6)$

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\alpha = 3 \quad \beta = -2 \quad \gamma = -1$ 7) $M = 3A - 2B - C$

8) Está resuelto 9) no existe $K \in R$

10) a) Las matrices del conjunto **A** son linealmente **dependientes**.
b) Las matrices del conjunto **B** son linealmente **independientes**.

11) a) $k \neq -1$ b) $M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

PRODUCTO DE MATRICES

12) a) $\begin{pmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 16 \end{pmatrix}$ e) no existe

13) a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$ 14) $S = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $S = 1$

15) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $W = 2$

16) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ c) C^{-1} no existe

17) a) $k \in R - \{-3 \; ; 2\}$ b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 3/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

18) a) falsa b) falsa c) verdadera

19) Está resuelto

20) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ S = 3

21) $K = 3$ 22) $\operatorname{tr} A = 0$

23) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ S = 2

Jnidad 3. Relaciones.

) Encontrar x ó y de manera que el enunciado sea verdadero.

a) $(x, 3) = (4, 3)$ b) $(4x, 6) = (16, y)$ c) $(3x+1, 2) = (7, 2)$ d) $(x^2, 5) = (49, y)$

!) Siendo $A = \{p, q\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ hallar:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2 d) B^2

3) Un experimento de genética clasifica las moscas de la fruta de acuerdo con los dos siguientes criterios:

Género: masculino **(M)**, femenino **(F)**

Alas extendidas: cortas **(c)**, medianas **(m)**, largas **(l)**

a) ¿Cuántas categorías hay en este esquema de clasificación?.

b) Hacer una lista de todas las categorías de este esquema de clasificación.

4) Siendo **A = { a / a es un número real }** y **B = { 1 , 2 , 3 }**.

Hacer un esquema de cada uno de los siguientes casos en el plano cartesiano.

a) $A \times B$ b) $B \times A$

5) Siendo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $A_2 = \{5, 6, 7\}$ $A_3 = \{4, 5, 7, 9\}$ $A_4 = \{4, 8, 10\}$

$A_5 = \{8, 9, 10\}$ $A_6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$

Decir cuales de las siguientes son particiones de **A**. Justificar.

a) $\{A_1, A_2, A_5\}$ b) $\{A_1, A_3, A_5\}$ c) $\{A_3, A_6\}$ d) $\{A_2, A_3, A_4\}$

6) Utilizar los conjuntos:

$A = \{1, 2, 4\}$ $B = \{2, 5, 7\}$ $C = \{1, 3, 7\}$

Para analizar si se cumple la siguiente igualdad:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Investigue que pasa en la unión.

Explique sus conclusiones.

Relación; Dados dos conjuntos **A** y **B** y una propiedad **P**, se llama relación al conjunto:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \;/\; P_{(x,y)}\}$$

Interpretación: De todos los pares ordenados de $A \times B$, tomo sólo los que cumplen la propiedad.

7) Si **A** tiene **n** elementos y **B** tiene **m** elementos. ¿ Cuántas **relaciones diferentes** hay de **A** a **B**?.

8) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

Se definen las relaciones $R : A \to B$

I) $R_1 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3)\}$

II) $R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2)\}$

III) $R_3 = \{(a, 1); (b, 1); (c, 2); (d, 2)\}$

En cada caso indicar:

a) Dominio e imagen.

b) Su representación por tabla de doble entrada y diagramas de Venn.

c) Definir por extensión una relación $R : B \to A$ tal que el dominio de la misma coincida con el conjunto de partida y la imagen con el conjunto de llegada.

9) Determinar, en cada caso, dominio, imagen, matriz y cuando A = B el dígrafo de la relación R.

a) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

$$R: A \to B \;/\; R = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (c, 2); (d, 1)\}$$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 \;/\; x + y \leq 9\}$$

c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$R = \{(x, y) \in A \times B \, / \, y = x^2\}$

d) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$R = \{(a, b) \in A^2 \, / \, b < a\}$

e) $A = \{x \in N \, / \, x < 5\}$

$R = \{(x, y) \in A^2 \, / \, x - y < 0\}$

---

10) Una línea aérea da servicio a cinco ciudades: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. La tabla muestra el costo (en dólares) del viaje desde C_i a C_j.

Hasta:	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Desde:					
C_1		140	100	150	200
C_2	190		200	160	220
C_3	110	180		190	250
C_4	190	200	120		150

Se define la siguiente relación R sobre el conjunto de las cinco ciudades:

"C_i R C_j si y sólo si el costo de ir de C_i a C_j es menor o igual a 180 dólares"

Determinar la relación R por extensión.

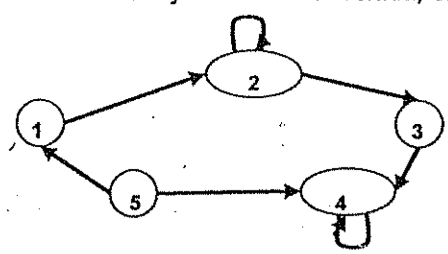
---

11) Dar por extensión la relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y su **dígrafo**, siendo su matriz asociada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

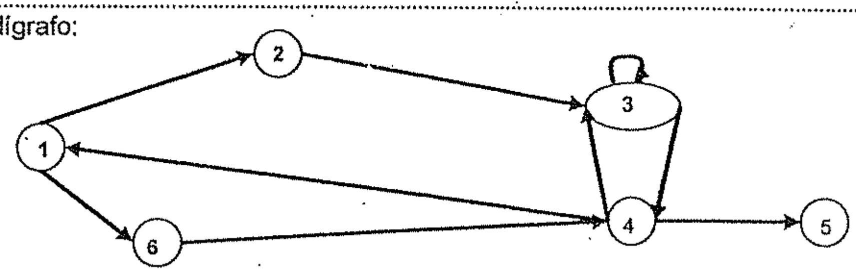
---

12) Dar por extensión la relación R y su **matriz** asociada, siendo su dígrafo:



---

13) Dado el siguiente dígrafo:



Indicar:

a) Todas las trayectorias de **longitud 2**, que inicien en el **vértice 2**.
b) Todas las trayectorias de **longitud 3**
c) Un **ciclo** que comience en el **vértice 6**
d) Todas las trayectorias de **longitud 1**

---

14) Dado el conjunto: $A = \{x \, / \, x \in Z : -3 < x \leq 2\}$ y la relación: $R = \{(x, y) \in A^2 \, / \, x^2 - y \geq 2\}$

a) Definir por extensión A y R. **b)** Determinar la matriz asociada y el dígrafo.

c) Indicar dos trayectorias de longitud **4** que inicie en el vértice – **2**. **d)** Indicar un ciclo que comience en el vértice – **1**.

15) Determinar en cada relación definida en A = { 1 , 2 , 3 , 4 } si es reflexiva, arreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

a) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (2 , 1) ; (2 , 2) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 3) ; (4 , 4) }

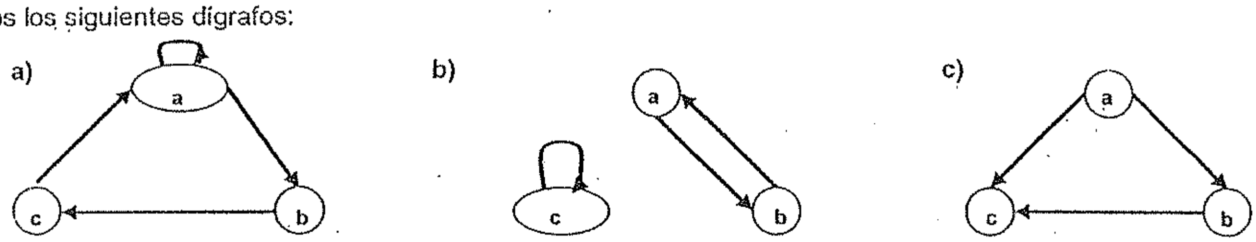
b) R = { (1 , 3) ; (1 , 1) ; (3 , 1) ; (1 , 2) ; (3 , 3) ; (4 , 4) }

c) R = { (1 , 2) ; (1 , 3) ; (3 , 1) ; (1 , 1) ; (3 , 3) ; (3 , 2) ; (1 , 4) ; (4 , 2) ; (3 , 4) }

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

(completar con **si** v **no** según corresponda)

16) Dados los siguientes dígrafos:



Analizar sus propiedades y clasificar si es posible.

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

(completar con **si** v **no** según corresponda)

17) **Para completar:** ¿ qué características deben observarse en la **matriz** ? asociada a una relación que sea:

a) reflexiva: ....

b) irrefexiva: ....

c) simétrica: ....

d) asimétrica: ....

e) antisimétrica: ....

f) transitiva: ....

18) **Para completar:** ¿ qué características deben observarse en el **dígrafo** ? asociado a una relación que sea:

a) reflexiva: ....

b) irrefexiva: ....

c) simétrica: ....

d) asimétrica: ....

e) antisimétrica: ....

f) transitiva: ....

19) Escribir la **matriz** o el **dígrafo** que represente a una relación que resulte:

a) Reflexiva pero no simétrica **b)** Sólo transitiva

c) Antisimétrica pero no reflexiva **d)** Simétrica y no transitiva

Explicar el razonamiento.

Relación de orden: establecen jerarquías entre los elementos de un conjunto, pueden compararse.

Cumplen con ser: **reflexiva – antisimétrica – transitiva**

Relación de equivalencia: permite agrupar los elementos de un conjunto A en subconjuntos no vacios del conjunto A , disjuntos , y tal que la unión resulta ser el conjunto A .
(Estos subconjuntos se llaman clases de equivalencia).

Cumplen con ser: **reflexiva – simétrica – transitiva**

20) Analizar las propiedades y clasificar, si es posible, las relaciones R cuyas matrices asociadas son:

a)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

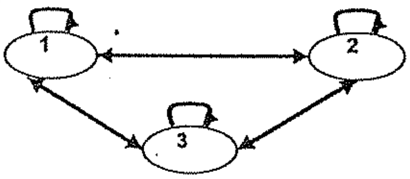
b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

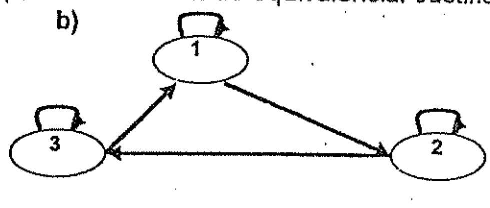
---

21) Determinar si la relación R , cuyo dígrafo se proporciona, es una **relación de** equivalencia. Justificar.

a)



b)



---

22) Siendo $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$ una partición del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
Determinar la relación de equivalencia correspondiente R.

---

23) Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) analizar las propiedades de la relación:

b) clasificar la relación si es posible

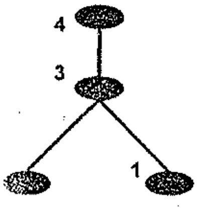
$$R = \{(1,1); (1,2); (2,2); (2,4); (1,3); (3,3); (3,4); (1,4); (4,4)\}$$

En caso de que resulte de orden parcial, determinar el **diagrama de Hasse.**

---

24) Escribir los pares ordenados en la relación determinada por el **diagrama de Hasse** sobre el conjunto A.

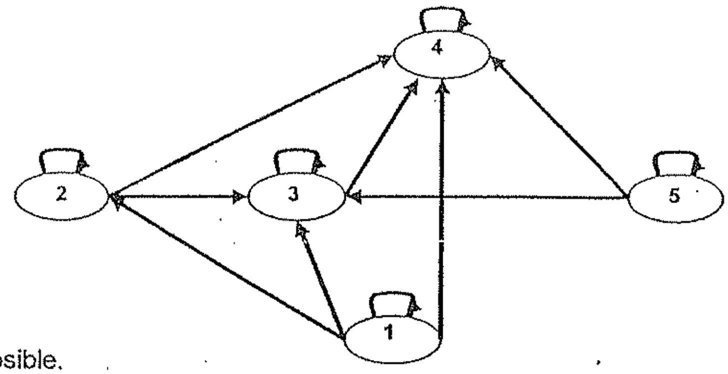
a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$



b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

---

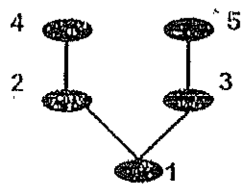
25) Dado el siguiente dígrafo:



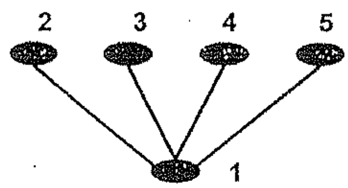
a) Definir por extensión la relación.
b) Hallar su matriz asociada.
c) Analizar sus propiedades y clasificarla.
d) Realizar el diagrama de Hasse, si es posible.

26) Determinar, en cada caso, las matrices de orden parcial con los diagramas de Hasse dados.

a)



b)



PROBLEMAS

27) Sea (A , R)

Siendo A = **{ serpiente , pollito , canario , gato , león , hormiga , araña }**

Siendo R : **" tiene menos patas que o es el mismo animal que "**

Hacer el diagrama de Hasse.

28) Sea (B , R)

Siendo B = **{ Laura , Karina , Juan , Sebastián , Ariel }**

ALUMNO	**Laura**	**Karina**	**Juan**	**Sebastián**	**Ariel**
NOTA	**7**	**9**	**8**	**7**	**10**

Siendo R : **x R y** $\Leftrightarrow$ **" x sacó mayor nota que y "** $\vee$ **x = y**

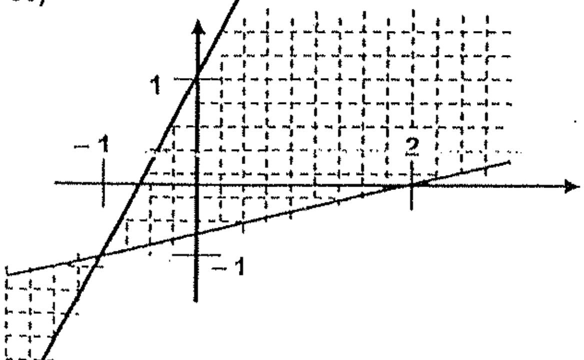
Hacer el diagrama de Hasse.

29) Sea $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$

Se tiene en A la siguiente relación $R = \{(1,1), (2,2), (4,2), (2,9), (9,9)\}$

Se pide agregar a R la menor cantidad posible de pares ordenados para que resulte una relación de equivalencia en A .

30)



Si se considera la siguiente relación definida en R a través de su gráfica, decir si resulta:

reflexiva
simétrica
antisimétrica
transitiva

(se sugiere utilizar argumentos de tipo gráfico)

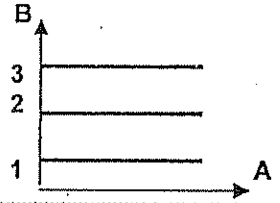
Unidad 3. Relaciones. Respuestas.

1) a) $x = 4$ b) $x = 4$, $y = 6$ c) $x = 2$ d) $x = 7 \vee x = -7 \wedge y = 5$

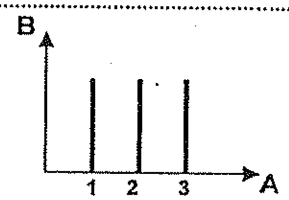
2) a) $(p,4);(p,5);(p,6);(q,4);(q,5);(q,6)$
b) $(4,p);(4,q);(5,p);(5,q);(6,p);(6,q)$
c) $(p,p);(p,q);(q,p);(q,q)$
d) $(4,4);(4,5);(4,6);(5,4);(5,5);(5,6);(6,4);(6,5),(6,6)$

3) a) 6 categorías b) $G \times A = \{(M,c);(M,m);(M,l);(F,c);(F,m);(F,l)\}$

4) a)



b)



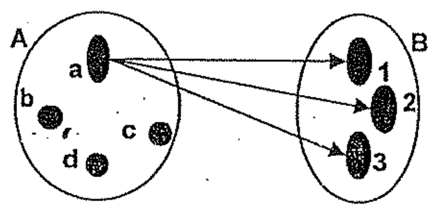
5) a) si b) no c) si d) no

6) Conclusión: el producto cartesiano es distributivo en la unión y en la intersección 7) 2^{nm}

8) I) a) $D_R = \{a\}$ $I_R = \{1;2;3\}$

b)

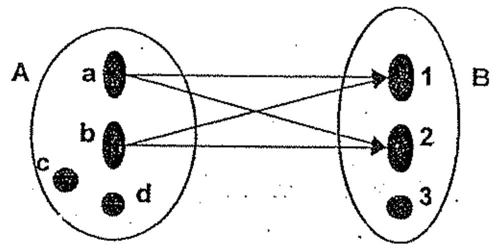
A \ B	1	2	3
a	1	1	1
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	0	0



II) a) $D_R = \{a;b\}$ $I_R = \{1;2\}$

b)

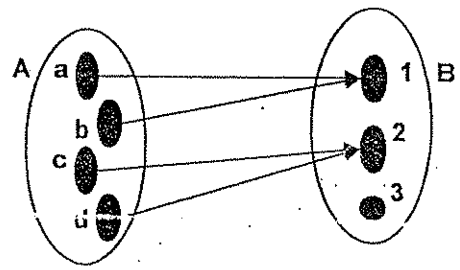
A \ B	1	2	3
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	0	0
d	0	0	0



III) a) $D_R = \{a;b;c;d\}$ $I_R = \{1;2\}$

b)

A \ B	1	2	3
a	1	0	0
b	1	0	0
c	0	1	0
d	0	1	0

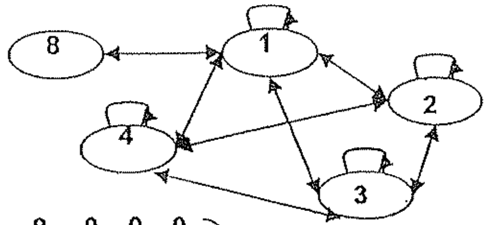


9) a)

$D_R = \{a;b;c;d\}$ $I_R = \{1;2\}$ $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$D_R = I_R = \{1;2;3;4;8\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

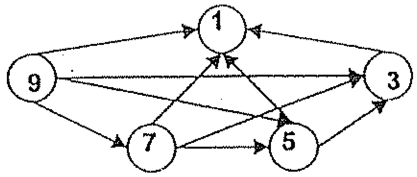


c)

$D_R = \{1;2;3\}$ $\quad I_R = \{1;4;9\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

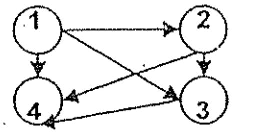
d)

$D_R = \{3;5;7;9\}$
$I_R = \{1;3;5;7\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



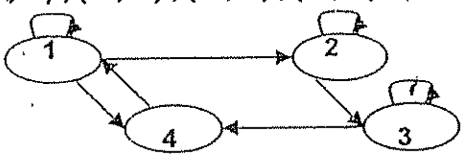
e)

$D_R = \{1;2;3\}$ $\quad I_R = \{2;3;4\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



10) $R = \{(C_1, C_2); (C_1, C_3); (C_1, C_4); (C_2, C_4); (C_3, C_1); (C_3, C_2); (C_4, C_3); (C_4, C_5)\}$

11) $R = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,2); (2,3); (3,3); (3,4); (4,1)\}$



12) $R = \{(1,2); (2,2); (2,3); (3,4); (4,4); (5,1); (5,4)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13)a) $2 \to 3 \to 3$ $\qquad 2 \to 3 \to 4$

b)

1 – 2 – 3 – 3	2 – 3 – 3 – 3	3 – 3 – 3 – 3	4 – 1 – 2 – 3	6 – 4 – 1 – 2
1 – 2 – 3 – 4	2 – 3 – 3 – 4	3 – 3 – 3 – 4	4 – 1 – 6 – 4	6 – 4 – 1 – 6
1 – 6 – 4 – 1	2 – 3 – 4 – 1	3 – 3 – 4 – 1	4 – 3 – 3 – 3	6 – 4 – 3 – 3
1 – 6 – 4 – 3	2 – 3 – 4 – 3	3 – 3 – 4 – 3	4 – 3 – 3 – 4	6 – 4 – 3 – 4
1 – 6 – 4 – 5	2 – 3 – 4 – 5	3 – 3 – 4 – 5	4 – 3 – 4 – 1	
		3 – 4 – 1 – 2	4 – 3 – 4 – 3	
		3 – 4 – 1 – 6	4 – 3 – 4 – 5	
		3 – 4 – 3 – 3		
		3 – 4 – 3 – 4		

c) $6 \to 4 \to 1 \to 6$

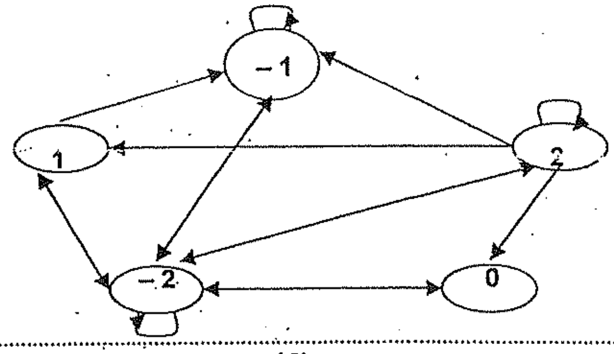
d)

1 – 2	2 – 3	3 – 3	4 – 1	6 – 4
1 – 6		3 – 4	4 – 3	
			4 – 5	

14) a) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

$R=\{(-2,-2);(-2,-1);(-2,0);(-2,1);(-2,2);(-1,-2);(-1,-1);(0,-2);(1,-2);(1,-1);(2,-2);(2,-1);(2,0);(2,1);(2,2)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



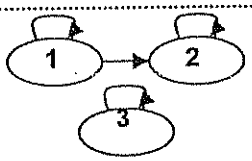
c) $-2,-2,-1,-1,-2$—
$-2,1,-2,0,-2$

d) $-1,-2,-1$

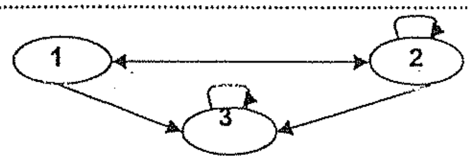
	15) a)	15) b)	15) c)	16) a)	16) b)	16) c)
Reflexiva	si	no	no	no	no	no
Arreflexiva	no	no	no	no	no	si
Simétrica	si	no	no	no	si	no
Asimétrica	no	no	no	no	no	si
Antisimétrica	no	no	no	si	no	si
Transitiva	si	no	si	no	no	si

17) $\wedge$ 18) Ver teoría

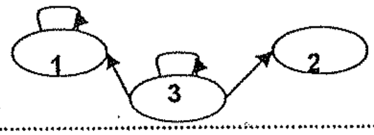
19) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



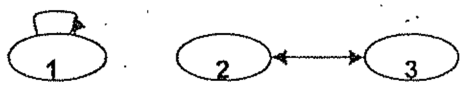
b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



20)

	a)	b)	clasificación
Reflexiva	no	si	equivalencia
Arreflexiva	si	no	
Simétrica	si	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	no	no	
Transitiva	no	si	

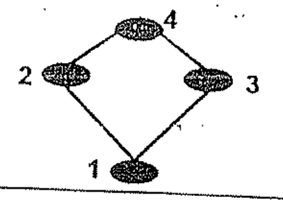
21)

	b)	a)	clasificación
Reflexiva	si	si	equivalencia
Arreflexiva	no	no	
Simétrica	no	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	si	no	
Transitiva	no	si	

22) $R=\{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c);(d,d);(d,e);(d,f);(e,d);(e,e);(e,f);(f,d);(f,e);(f,f)\}$

23)

propiedades		clasificación	Hasse
Reflexiva	sí	orden parcial	
Arreflexiva	no		
Simétrica	no		
Asimétrica	no		
Antisimétrica	sí		
Transitiva	sí		



24) a) R = { (1 , 1) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) }

b) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) }

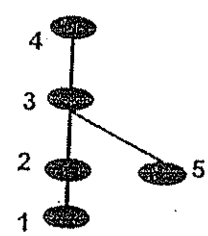
25) a) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) ; (5 , 3) ; (5 , 4) ; (5 , 5) }

b) matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

	c) propiedades	clasificación
Reflexiva	sí	orden parcial
Arreflexiva	no	
Simétrica	no	
Asimétrica	no	
Antisimétrica	sí	
Transitiva	sí	

d) Hasse



26)

a)

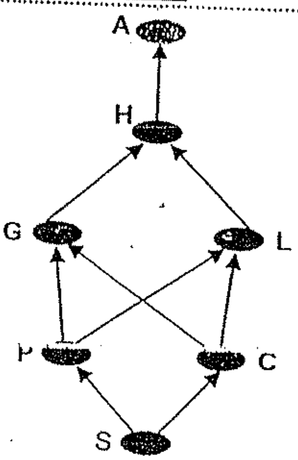
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

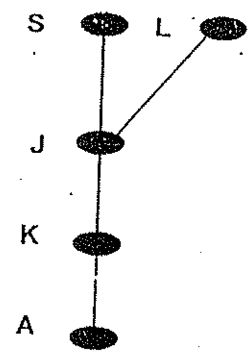
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

27)



28)



29) R = { (1 , 1) , (2 , 2) , (4 , 2) , (9 , 9) , (2 , 9) , (9 , 9) , (4 , 4) , (5 , 5) , (2 , 4) , (9 , 2) , (4 , 9) , (9 , 4) }

30) Reflexiva (sí) Simétrica (no) Antisimétrica (no) Transitiva (no)

Unidad 4. Grafos y árboles.

EJEMPLO – DEFINICIONES

Red: conjunto de nodos y conjunto de arcos

Red dirigida: la que tiene todos los arcos dirigidos

Ruta: secuencia de arcos distintos que unen dos nodos (no importa la dirección del flujo de cada arco)

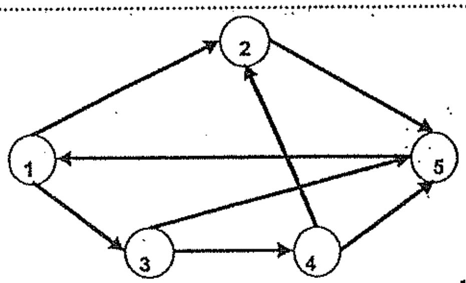
Lazo o ciclo: ruta que conecta un nodo con si mismo (circulo)

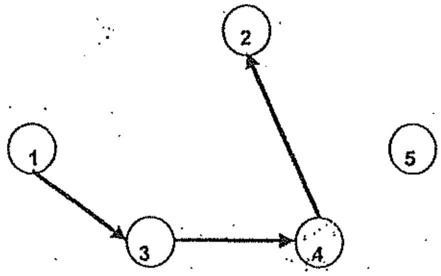
Lazo dirigido o circuito: circulo en el que todos los arcos están orientados en la misma dirección

Red conectada: dos nodos distintos están unidos por lo menos por una ruta

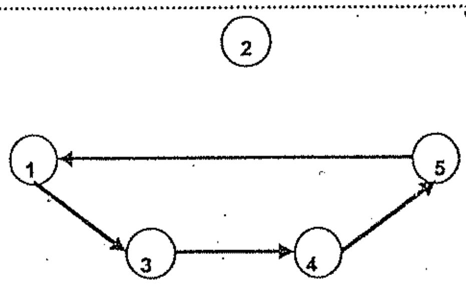
Árbol: red conectada que puede incluir sólo un subconjunto de todos los nodos de la red

Árbol de expansión: une todos los nodos de la red sin permitir ningún lazo

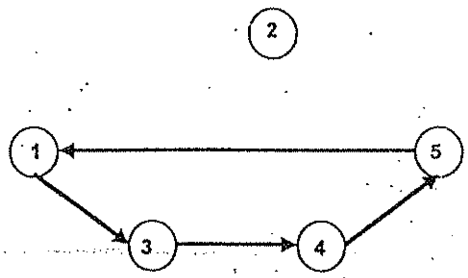




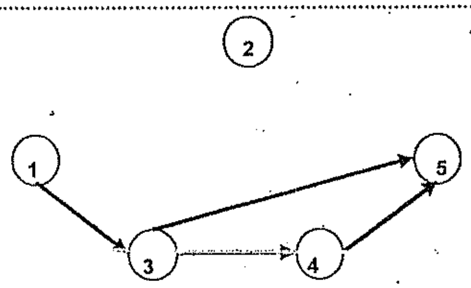
Ruta: 1 – 3 – 4 – 2



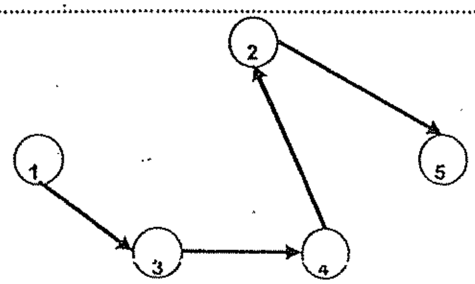
Lazo: 1 – 5 – 4 – 3 – 1



Lazo dirigido (circuito): 1 – 3 – 4 – 5 – 1



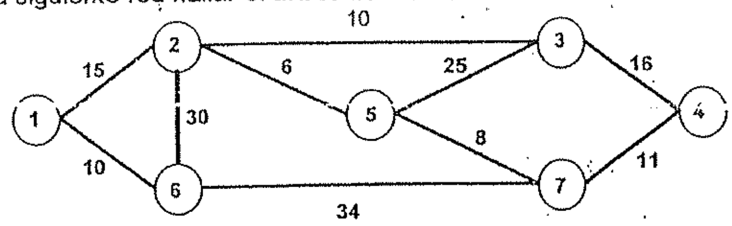
Árbol: { 1 – 3 , 3 – 4 , 3 – 5 , 4 – 5 }



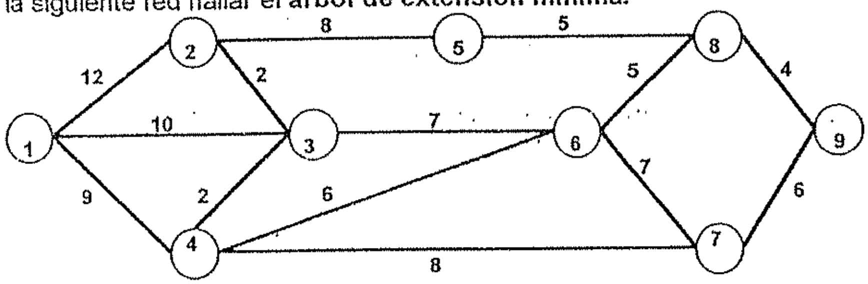
Árbol de expansión: { 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 2 , 2 – 5 }

REDES – Arbol de extensión mínima

1) Para la siguiente red hallar el **árbol de extensión mínima.**



2) Para la siguiente red hallar el **árbol de extensión mínima.**



3) Una zona de 7 chacras debe ser conectada mediante una **ruta** asfaltada al **menor costo** posible.
Los datos indican en Km. las distancias entre chacras, considerando el índice de la fila y de la columna el número de la chacra.
Se da una matriz simétrica, por lo que sólo se escribió el triángulo superior.

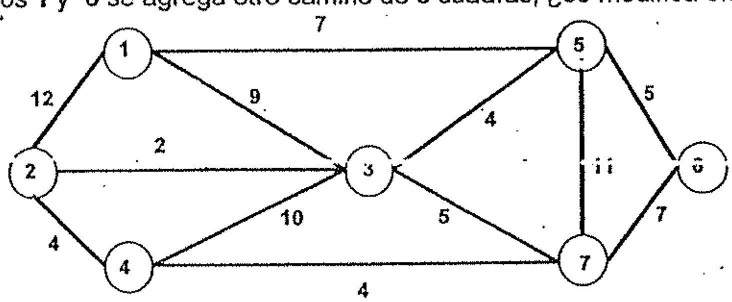
$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ & & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & 4 & 7 \\ & & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Es necesario pavimentar el tramo **1 – 2** ya que en el medio se halla la estación de bomberos y se sabe que la ruta entre las chacras **6 – 7** ya está pavimentada.
Determinar el costo de la **ruta de extensión mínima** que vincule todas las chacras con las condiciones dadas, sabiendo que el costo del Km. es de **$ 100.000**

4) Cablevisión acaba de obtener la aprobación para ofrecer su servicio al barrio de Versalles.
Los nodos representan los puntos de distribución que deben llevar las líneas primarias de cables de la compañía.
Los arcos indican las cuadras que hay entre los puntos de distribución.

a) Determinar la solución que permitirá a Cablevisión llegar a todos los puntos de distribución con una **longitud mínima** de la línea de cable primario.

b) Si entre los nodos **1** y **6** se agrega otro camino de **8** cuadras, ¿se modifica en algo la respuesta?.



5) Ocho chacras de las cercanías de Mar del Plata se hallan conectadas por calles de tierra.
El intendente desea pavimentar la **menor cantidad** de calles de tal modo que se enlacen todas las chacras, pero desea que la calle **E – H** sea una de las asfaltadas, ya que allí se encuentra una sala de primeros auxilios.
¿Cuál sería el trayecto de pavimento?.
Distancias:

A – B = 11 Km	B – C = 13 Km	A – D = 12 Km	A – E = 14 Km	B – D = 9 Km
C – D = 18 Km	D – G = 17 Km	C – G = 12 Km	E – F = 10 Km	F – G = 11 Km
G – H = 8 Km	F – H = 10 Km	**E – H = 22 Km**		

6) La zona cercana a la desembocadura del Salado tiene ocho esteros que deben ser comunicados mediante canales. Suponiendo que todos los canales tienen la misma sección, **3 m** de ancho y **2 m** de profundidad, Determinar que **cantidad mínima** de tierra se debe mover para que los esteros queden comunicados.
Distancias:

A – B = 11 Km	B – C = 13 Km	A – D = 12 Km	A – E = 14 Km	B – D = 9 Km
C – D = 18 Km	D – G = 17 Km	C – G = 12 Km	E – F = 10 Km	F – G = 11 Km
G – H = 8 Km	F – H = 10 Km	E – H = 22 Km		

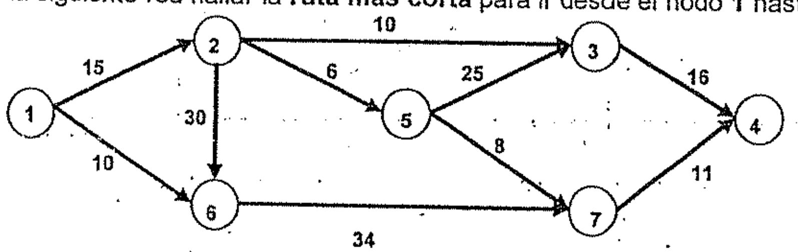
7) La siguiente tabla muestra la distancia entre cada dos ciudades:

	Bloom	Evans	Fort	Gary	Indian	Southb
Evans	**119**					
Fort	**174**	**290**				
Gary			**132**			
Indian	**51**			**153**		
Southb		**303**	**79**	**58**	**140**	
Haute	**58**	**113**			**71**	**196**

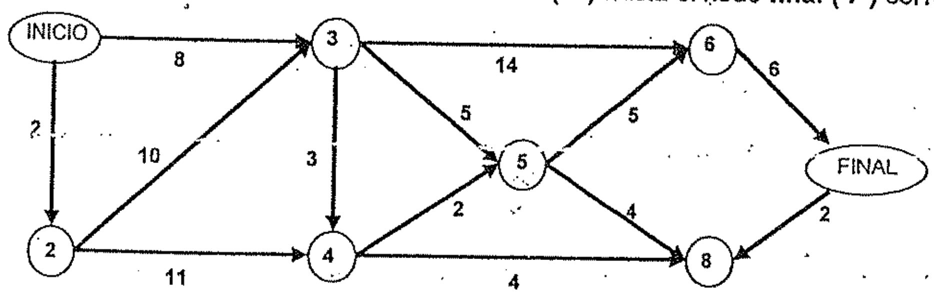
Se piensa construir un sistema de carreteras que comunique las siete ciudades.
Determinar que carreteras deben construirse para que el **costo** de construcción sea **mínimo**.
(Se supone que el costo de un Km. es el mínimo sin importar cuales son las ciudades).

REDES – Ruta mas corta

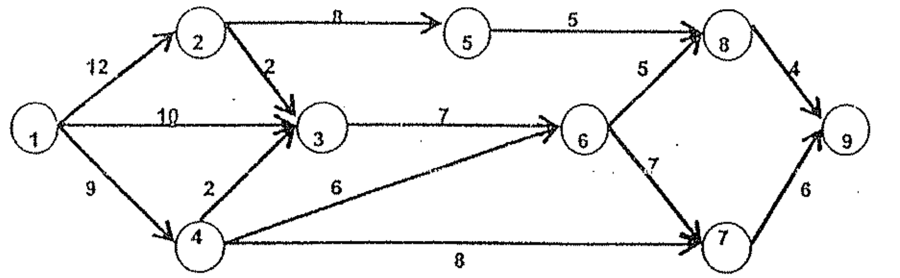
8) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo **4**.



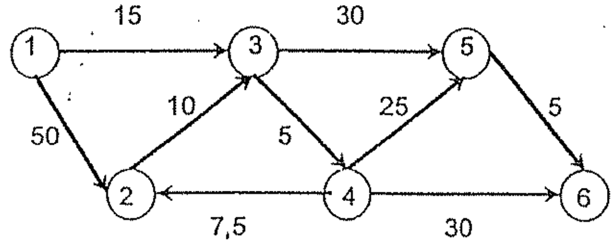
9) Encontrar la **ruta más corta** desde el nodo **inicio (1)** hasta el nodo **final (7)** correspondiente a la siguiente red.



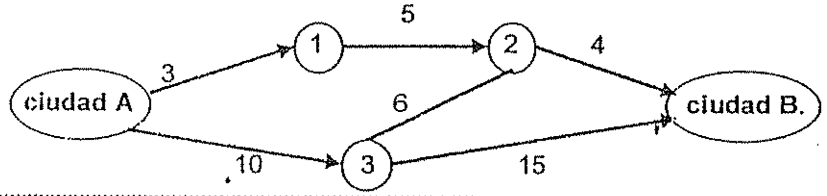
10) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo 7.



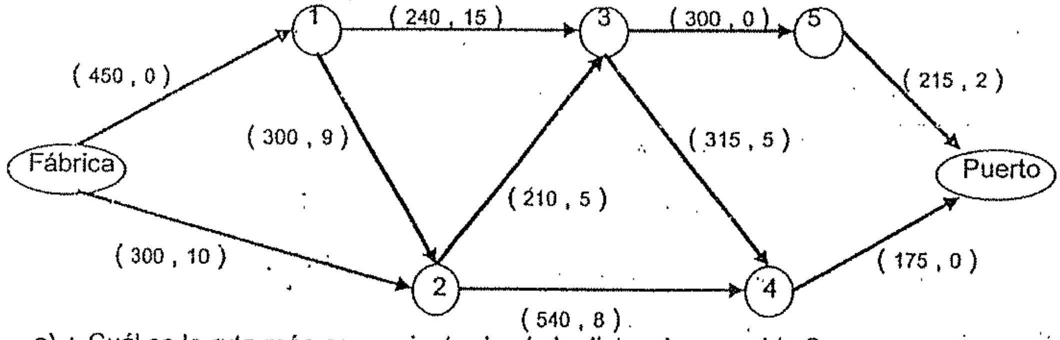
11) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo **6**. ¿ Es ruta única ?.



12) Para la red de la figura encuentre la **ruta mas corta** entre la **ciudad A** y la **ciudad B**.
Las distancias están dadas en kilómetros.
El arco **(2 , 3)** es bi direccional.



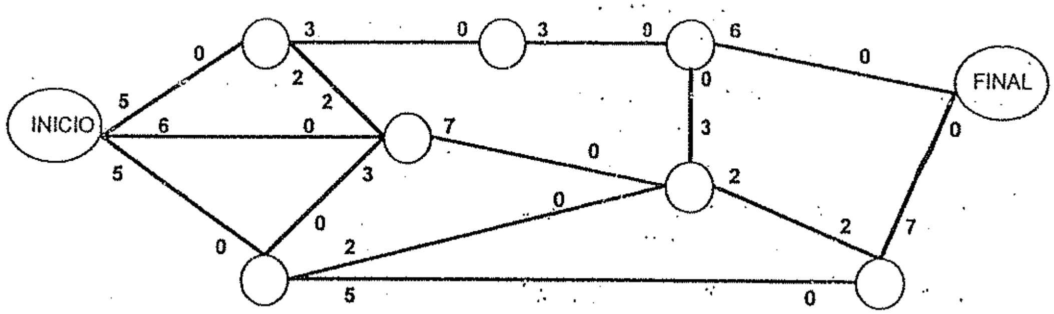
13) La división transporte, de una fábrica, desea saber que ruta le conviene usar para llevar sus productos al puerto donde van ha ser embarcados.
Para tomar la decisión se construye una red de los posibles caminos, en kilómetros, conjuntamente con el valor del peaje en cada tramo, en pesos; o sea que en cada arco de la red está indicado como par ordenado:
(distancia , costo del peaje).



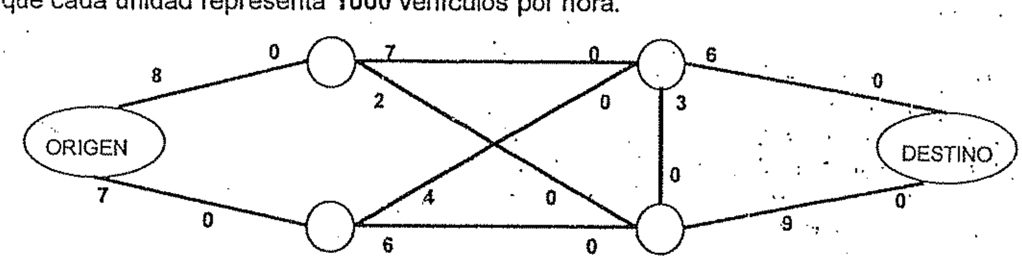
a) ¿ Cuál es la ruta más conveniente desde la distancia recorrida ?.
b) ¿ Cuál es la ruta más conveniente desde el costo del peaje ?.
c) Dar el par ordenado en cada caso.
d) Si usted tuviera que decidir ¿ qué opción elige ?.

REDES – Flujo máximo

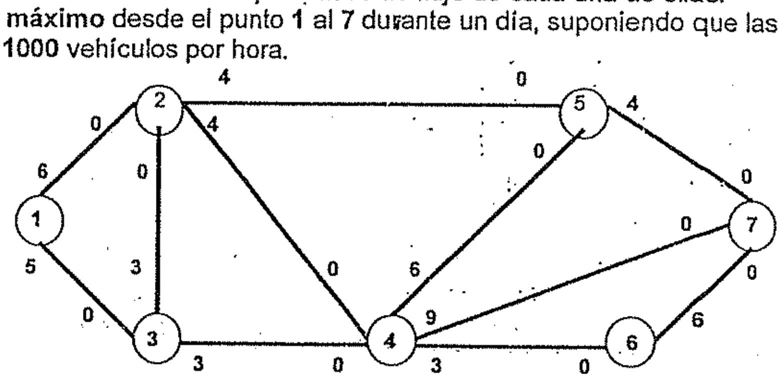
14) Encontrar el **flujo máximo** desde el nodo **INICIO** hasta el nodo **FINAL** en la siguiente red:



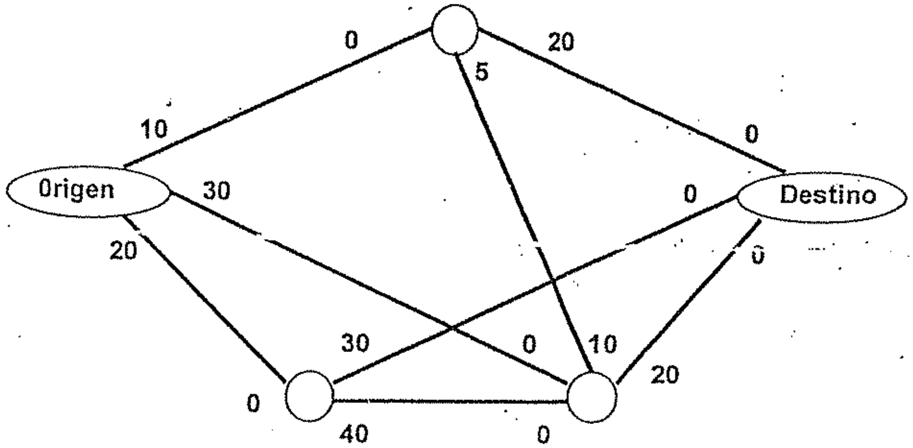
15) Para el sistema de red de carreteras que se muestra en la figura determinar el **flujo máximo** de vehículos por hora. Se sabe que cada unidad representa **1000** vehículos por hora.



16) La siguiente red representa una serie de autopistas interconectadas.
En la misma se muestran las distintas capacidades de flujo de cada una de ellas.
Determinar el **flujo máximo** desde el punto **1** al **7** durante un día, suponiendo que las unidades detalladas marcan un flujo de **1000** vehículos por hora.



17) Encontrar el **flujo máximo** desde el nodo **Origen** hasta el nodo **Destino** en la siguiente red:

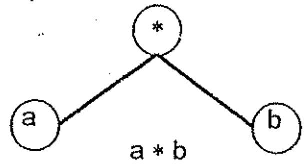


ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

Cada operación binaria es representada por un subárbol, cuya raíz contiene la operación aritmética (operador), a izquierda y derecha están los operandos.

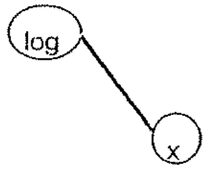
Ejemplos:

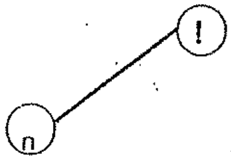
a + b



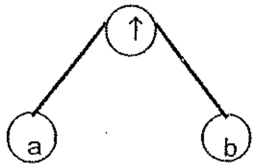
a ∗ b

log x

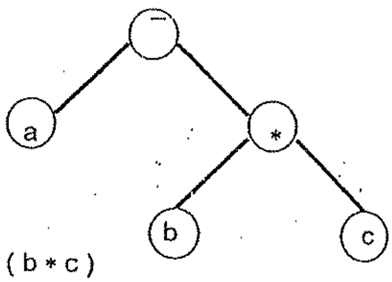




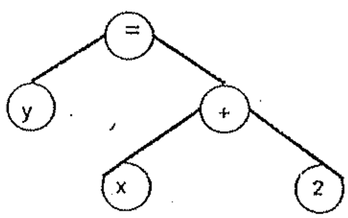
n !



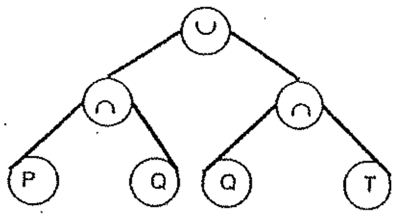
$a^b \equiv a \uparrow b$



a – (b ∗ c)



y = x + 2



(P ∩ Q) ∪ (Q ∩ T)

1) Representar en un árbol binario las siguientes expresiones algebraicas:

a) $(x+1)^4 * (y - \ln 2)$

b) $[-A + B^2] - [C*(A-B)^2 + 2A]$

c) $\{[(A+B)/C] - (C+B)\} * [A*(B-C)]$

d) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

e) $a^2 - b^2 = (a+b)*(a-b)$

f) $\cos(x+2)^5 * \log(2x-3)^3$

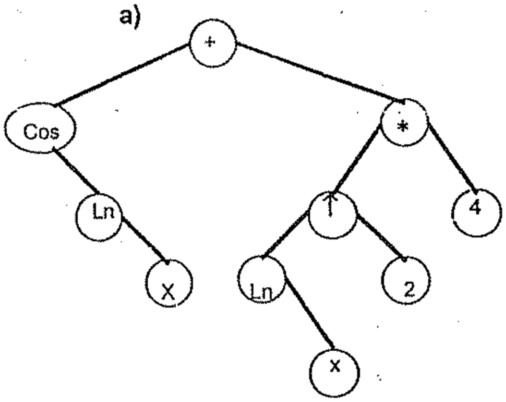
g) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

h) $x = 4 \;\wedge\; x = -1/2$

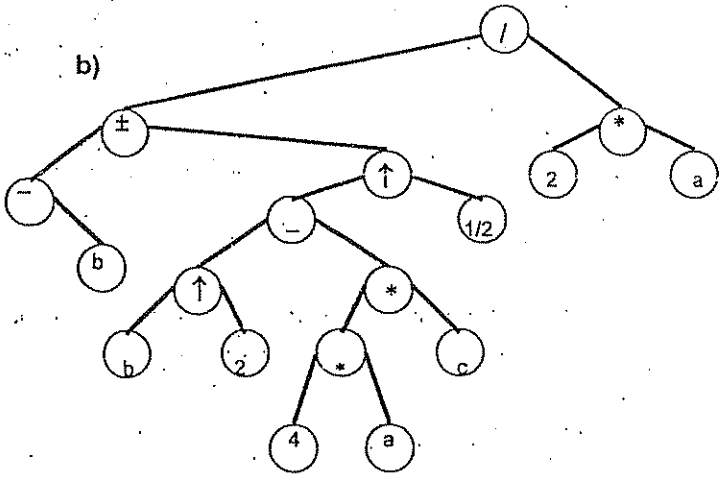
i) $\begin{cases} 5*x + 5*y = 9 \\ -5*x + 9*y = -9 \end{cases}$

2) Dados los siguientes árboles binarios escribir la **expresión algebraica** correspondiente:

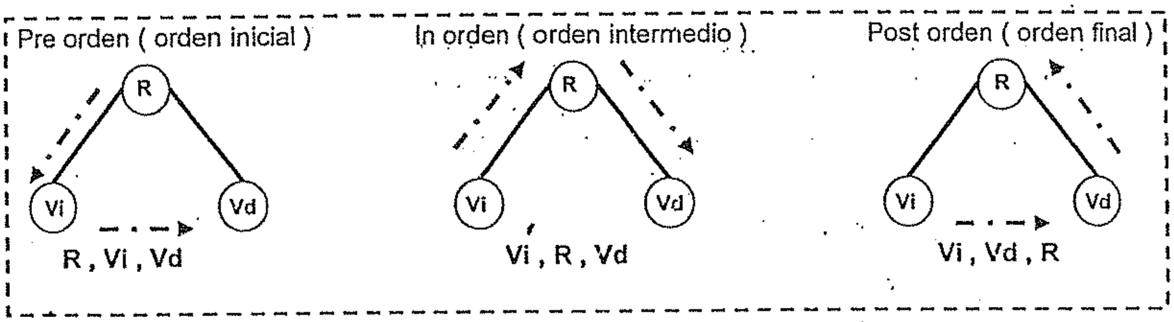
a)



b)



ÁRBOLES – Recorrido



3) Efectuar los recorridos (**pre orden** , **in orden** , **post orden**) de los árboles binarios obtenidos a partir de las expresiones algebraicas del ejercicio **1)**.

4) Siendo: **A = 1 , B = 2 , C = 3 , D = 4**

Calcular el **valor numérico** de las siguientes expresiones dadas en **post orden**.

a) A B + C –

b) A B C + –

c) A D B C D * – + *

d) A B A B * + * D *

e) A B C * * A B C + + –

f) A B + C D * A A / – – B *

5) Dada la siguiente escritura de un árbol según **post orden**:

3 x 2 – 5 ↑ * x 1 + ! *

Se pide dibujar el árbol en cuestión y luego dar su escritura según **in orden**.

ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda

condiciones
- todo elemento en el subárbol izquierdo es < que el elemento raíz
- " " " " " derecho " > " " " "
- cada subárbol izquierdo y derecho es un árbol de búsqueda

6) El código de ciertos artículos está expresado en el siguiente conjunto de datos:

{ 30 , 25 , 98 , 67 , 31 , 4 , 22 , 90 , 100 }

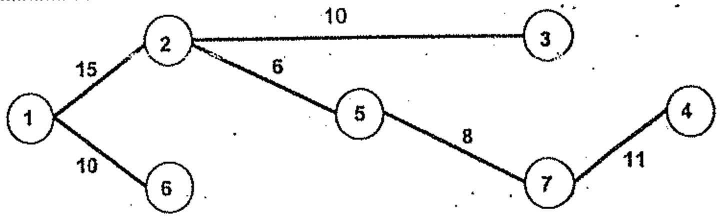
a) construir el árbol binario de búsqueda.
b) ¿como insertaría en el árbol el código: **45** ?.
c) recorrer el árbol en las tres formas canónicas (preorden – inorden – postorden).
d) ¿cuál es el recorrido conveniente para mostrar en pantalla los códigos ordenados en forma creciente?.

7) Para ingeniosos ó ingeniosas
Ordenar alfabéticamente el siguiente conjunto de mujeres utilizando el árbol de búsqueda.
Mujeres = { Elena , Beatriz , Ana , Hilda , Graciela , Daniela ; Carla ; Florencia }.

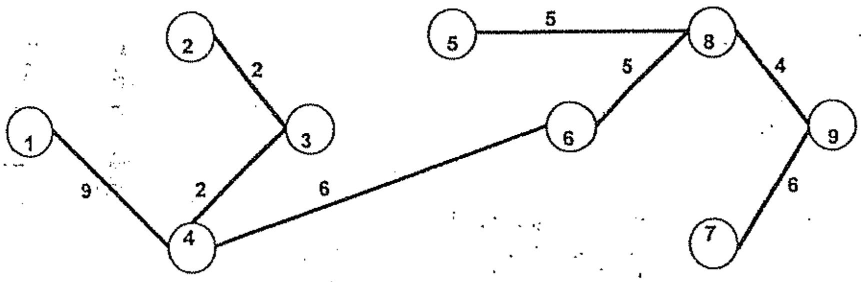
Unidad 4. Grafos y árboles. Respuestas.

REDES – Arbol de extensión mínima

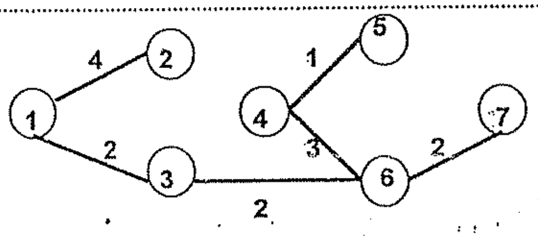
1)



2)

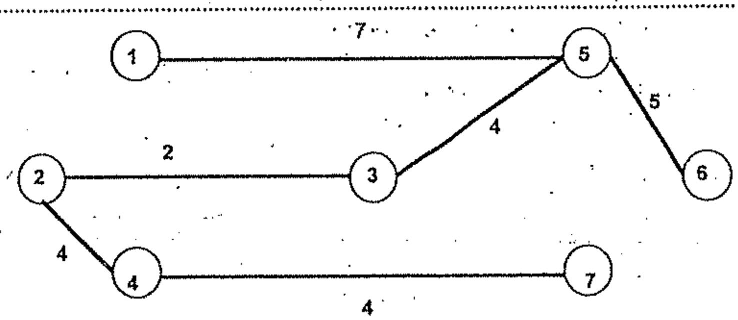


3)



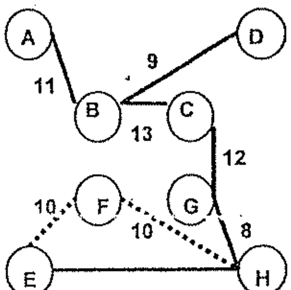
Costo = $ 1 200 000

4)

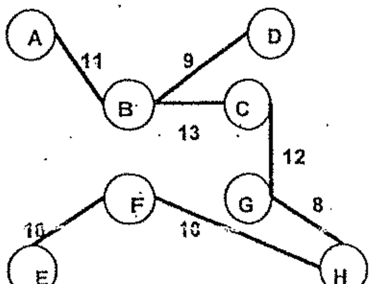


a) Longitud = 26
b) No modifica

5)

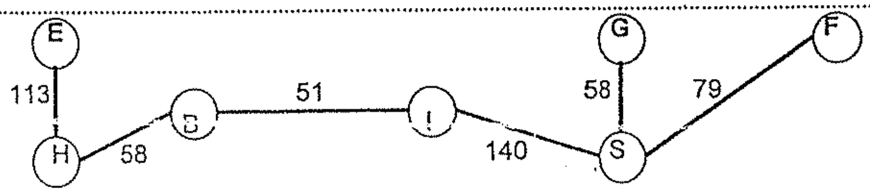


6)



Volumen de tierra = 438 000 m^3

7)



REDES – Ruta mas corta

8) 1 – 2 – 5 – 7 – 4 = 40 9) Inicio – 3 – 4 – 5 – 6 – Final = 24 v Inicio – 3 – 5 – 6 – Final = 24

10) 1 – 4 – 7 = 17 11) 50 . No es ruta única. 12) ciudad A – 1 – 2 – ciudad B distancia: 12 Km.

13) a) F – 2 – 3 – 4 – P b) F – 1 – 2 – 3 – 5 – P c) (1000Km , $ 20) (1475 Km , $ 16)

REDES – Flujo máximo

14) Flujo máximo = 13 15) Flujo máximo de vehículos / hora = 15.000 vehículos

16) Flujo máximo / día = 264.000 vehículos 17) Flujo máximo = 60

ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

1) a) b) c) d) e) f) g) h) i)

2)

a) [cos ln (x)] + [$\ln^2$ (x) * 4] b) $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ / 2a

ÁRBOLES – Recorrido

3)

	pre orden	in orden	post orden
a)	* ↑ + x 1 4 – y ln 2	x + 1 ↑ 4 y – ln 2	x 1 + 4 ↑ y 2 ln – *
b)	– + – A ↑ B 2 + * C ↑ – A B 2 * 2 A	– A + B ↑ 2 – C * A – B ↑ 2 + 2 * A	A – B 2 ↑ + C A B – 2 ↑ * 2 A * + –
c)	* – / + A B C + C B * A – B C	A + B / C – C + B * A * B – C	A B + C / C B + – A B C – * *
d)			
e)			
f)			
g)			
h)			
i)			

4) a) 0 b) – 4 c) – 6 d) 16 e) 0 f) – 16

5) la lectura en in orden es: 3 (x – 2)^5 * (x + 1) !

ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda

6)

c) preorden: 30 , 25 , 4 , 22 , 98 , 67 , 31 , 45 , 90 , 100
inorden: 4 , 22 , 25 , 30 , 31 , 45 , 67 , 90 , 98 , 100
postorden: 22 , 4 , 25 , 45 , 31 , 90 , 67 , 100 , 98 , 30

d) inorden

7) Mujeres = { Ana , Beatriz , Carla , Daniela , Elena , Florencia , Graciela , Hilda }.

Unidad 5. Recta en el plano.

Ecuaciones:

implícita	explícita	segmentaria
$A x + B y + C = 0$	$y = m x + b$	$x / p + y / q = 1$

1) ¿Los puntos que se indican pertenecen a la recta señalada en cada caso? :
a) $M(2, -1)$; $N(5, 3)$; $4x - 7y - 1 = 0$ b) $R(-5, -3)$; $S(-2, 8)$; $4x + y = 0$

2) Escribir las ecuaciones explícita y segmentaria de las siguientes rectas:
a) r_1: $5x + y - 2 = 0$ b) r_2: $2x + 9y - 5 = 0$ c) r_3: $8x - 7 = 0$ d) r_4: $5x + 3y = 0$

3) Representar gráficamente las rectas del ejercicio 2)

4) Hallar la intersección , $I_{(x, y)}$, de las rectas: r_1 : $-3x + 2y = 7$; r_2 : $x + 3y = 5$

Ángulo entre rectas ($r_1 \wedge r_2$) : α

$$\operatorname{tg} \alpha = (m_2 - m_1) / (1 + m_2 m_1)$$

Tabla de valores necesarios:

Ángulo en º	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Ángulo en radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Valor de tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

5) Hallar el ángulo menor que forman las rectas:
a) r_1 : $2x + y - 7 = 0$ $\wedge$ r_2 : $3x - y + 5 = 0$
b) r_1: $(1 - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} + 1)y - 1 = 0$ $\wedge$ r_2 : $x - y - 1 = 0$

Condiciones:

paralelismo	perpendicularidad
$m_2 = m_1$	$m_2 = -1 / m_1$

6) De las rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación, decir cuáles son perpendiculares y cuáles son paralelas.
r_1: $3x - 2y - 5 = 0$ r_2: $-6x + 4y - 3 = 0$ r_3: $2x + 3y - 7 = 0$
r_4: $6x + 9y - 4 = 0$ r_5: $5x - 2y - 1 = 0$ r_6: $2x + 5y - 8 = 0$

7) Dada la recta r_1 : $4y - 3x - 8 = 0$, hallar:
a) la recta (r_2) paralela a la dada que pasa por el punto $M(1, 2)$
b) la recta (r_3) perpendicular a la dada que pasa por el mismo punto
c) graficar.

8) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r_1: $x - 7y - 11 = 0$ que pase por la intersección , $I_{(x, y)}$, de r_1: $x - 7y - 11 = 0$ con r_2: $3x + 5y - 7 = 0$

9) Hallar el valor de k para que:
la recta r_1: $3x - ky - 8 = 0$ forme un ángulo de 45º con la recta r_2: $2x + 5y - 17 = 0$.

10) a) Hallar k , tal que, r_1: $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta r_2: $4x + 3y + 7 = 0$
b) escribir la ecuación resultante en forma segmentaria.

11) Hallar el punto de intersección $I_{(x,y)}$ entre $r_1 \wedge r_2$
Siendo r_1 la recta que pasa por el origen , y es perpendicular a la recta: $x - 12y + 8 = 0$
Además la recta r_2 corta a los ejes x e y en -2 y 5 respectivamente.

12) Para que valores de k la recta $r: (k^2 - 4)x + (k - 3)y + k^2 - 3k - 4 = 0$
a) pasa por el origen de coordenadas.
b) es paralela al eje de abscisas
c) es paralela al eje de ordenadas.

13) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R(2, 3)$ y $S(4, 8)$.
Escribirla en forma implícita, explicita y segmentaria.

14) Determinar para que valor de " t " las rectas : $r_1: (t-1)x + ty - 5 = 0 \quad \wedge \quad r_2: tx + (2t-1)y + 7 = 0$
se cortan en un punto situado en el:
a) eje de abscisas (? , 0) **b)** eje de ordenadas (0 , ?)

PROBLEMAS

15) En una fábrica se coloca una cinta transportadora desde una altura ubicada a **12 m** de altura en un edificio hasta otra abertura ubicada a **7 m** de altura en otro edificio que está separado del anterior por una calle de **8 m** de ancho.
¿ Qué pendiente tendrá la cinta ?.

16) Desde un punto ubicado a **2 m** de altura se quiere colocar una rampa hasta el piso que debe tener una pendiente de **0,25**.
¿ A cuántos metros del punto inicial se encontrará el final de la rampa ?.

17) Un psicólogo toma un test de rapidez mental para el ingresó a una universidad.
El test consiste en entregarle a cada individuo una lámina que tiene algunas imágenes que debe recordar.
La siguiente formula nos dice (a partir de una lámina de x imágenes) cuántas imágenes recuerda, en promedio.

$$f_{(x)} = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ (1/5)x + 4 & \text{si } 5 < x \leq 15 \\ 8 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Si la lámina tenía **15** imágenes, ¿ cuántas recuerda el postulante ?.
b) Si el postulante recuerda **6** imágenes, ¿ cuántas tenía la lámina ?.
c) Grafique la situación planteada y verifique los puntos anteriores en el gráfico.

18) En algunos países (como E.E.U.U. e Inglaterra) se utiliza para la medición de temperaturas un sistema cuya unidad es el grado Fahrenheit.
Obtenga la ecuación lineal que permite pasar de grados centígrados a grados Fahrenheit, sabiendo que:
10° C = 50° F y 60° C = 140° F.

19) El gasto en una factura de Edesur está formado por **cargo fijo** por medidor más el costo por cada Kwh consumido.
El **cargo fijo** para clientes de Tarifa 1 es de **$ 4,44** por medidor y el **cargo variable** es de **$ 0,082** por cada Kwh consumido.
Luego al resultado de esta suma se le aplican diversas cargas impositivas que suman un **27,983 %.**
a) Exprese la fórmula que nos permita calcular lo que debe pagar cualquier cliente de Tarifa 1.
b) Indique lo que deberá pagar un cliente que consumió **248 Kwh.**

Unidad 5. Recta en el plano. Respuestas.

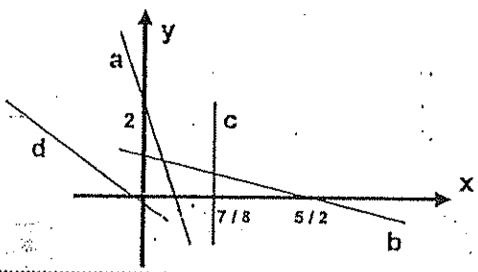
1) a) M : $\notin$ N : $\notin$ b) R : $\notin$ S : $\in$

2)

explícita:
- a) $y = -5x + 2$
- b) $y = -(2/9)\,x + (5/9)$
- c) no existe
- d) $y = -(5/3)\,x$

segmentaria:
- a) $x / (2/5) + y/2 = 1$
- b) $x / (5/2) + y / (5/9) = 1$
- c) no existe
- d) no existe

3)



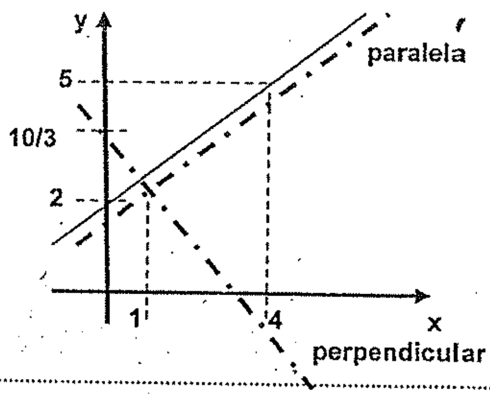
4) Punto intersección $(-1, 2)$

5) a) $45° \vee \pi/4$ b) $30° \vee \pi/6$

6) $r_1 \parallel r_2 \wedge r_3 \parallel r_4$

$r_5 \perp r_6 \wedge r_3 \perp r_2 \wedge r_4 \perp r_2 \wedge r_3 \perp r_1 \wedge r_4 \perp r_1$

7) a) $y = (3/4)\,x + (5/4)$ b) $y = -(4/3)\,x + (10/3)$



8) $y = -7x + 27$

9) $k = -9/7 \vee k = 7$

10) a) $k = 4$ b) $y/6 + x/(9/2) = 1$

11) Punto intersección $(-10/29, 120/29) = (-0{,}3 , 4)$

12) a) $k = -1 \vee k = 4$ b) $k = -2 \vee k = 2$ c) $k = 3$

13) $5x - 2y - 4 = 0$ $y = (5/2)\,x - 2$ $x/(4/5) + y/(-2) = 1$

14) a) $t = 7/12$ b) $t = 5/17$

PROBLEMAS

15) $m = -5/8$

16) 8 m del punto inicial

17) a) 7 recuerdos b) 10 imágenes c) graficar

18) $F = 9/5\ C + 32$

19) a) $G = (C_F + C_V) + 0{,}27983 * (C_F + C_V)$ b) $ 31,709

Unidad 6. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones en el plano.

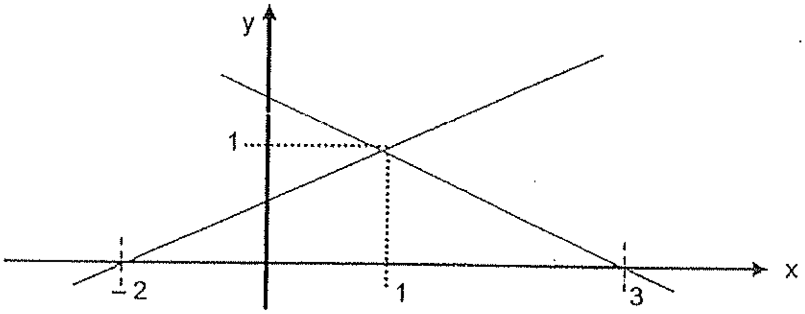
SISTEMAS DE ECUACIONES

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones e interpretar geométricamente:

a) $\begin{cases} 5x + 5y = 9 \\ -5x + 9y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 10 \\ 3x_1 + 6x_2 = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4u - 2v = 5 \\ -6u + 3v = 1 \end{cases}$

En cada caso verifique la solución hallada.

2) Proporcione un sistema de ecuaciones cuya representación gráfica sea la siguiente.

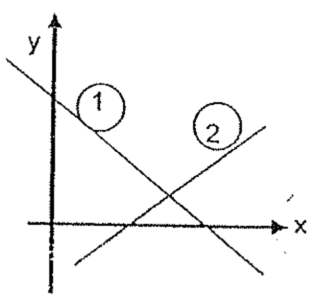


3) En el siguiente sistema lineal

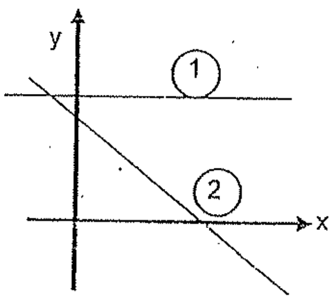
$$\begin{cases} ax + b = y & (1) \\ cx + d = y & (2) \end{cases}$$

siendo **a** y **d** no negativos, **b** y **c** no positivos, ¿cuál de las siguientes gráficas se podría aceptar como solución?.

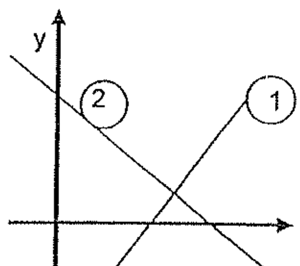
a)



b)



c)



Justifique la respuesta.

4) Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ (2x + y)/3 = y - 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 - x \\ x = 1 - 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x - 1{,}5y) = 0 \\ x/(3/2) = y + (5/6) \end{cases}$

Condiciones:

$$\text{Variable} = \frac{\text{Numerador (N)}}{\text{Denominador (D)}} \quad \begin{cases} \nearrow \text{S.C.D.} \longrightarrow D \neq 0 \\ \longrightarrow \text{S.C.I.} \longrightarrow D = 0 \wedge N = 0 \\ \searrow \text{S.I.} \longrightarrow D = 0 \wedge N \neq 0 \end{cases}$$

5) Determine para qué valores de **k**, el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución: $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + kx_2 = 1 \end{cases}$

6) Halle los valores de **a** y **b** (reales) de forma que el sistema sea compatible determinado (**SCD**), sistema compatible indeterminado (**SCI**), ó sistema incompatible (**SI**).

a) $\begin{cases} x + a\,y = a \\ \quad -b\,y = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} a\,x - y = 0 \\ x - a\,y = b \end{cases}$ c) $\begin{cases} a\,x + y = 0 \\ a\,x - b\,y = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN del **b)**:

Planteamos el Gauss – Jordan

x	y	I
a	-1	0
1	$-a$	b
0	a^2-1	$-ab$
1	$-a$	b

$\longrightarrow \boxed{y = \dfrac{-ab}{a^2-1}}$

S.C.D. $\longrightarrow$ $D \neq 0$ el denominador distinto de cero es: $a^2 - 1 \neq 0 \ \therefore\ a^2 \neq 1 \ \therefore\ |a| \neq 1$ esto nos dá:
$(a \neq 1 \wedge a \neq -1) \ \wedge$ b (no tiene restricción) $\therefore\ b \in R$

S.C.I. $\longrightarrow$ $D = 0 \wedge N = 0$
- El denominador igualado a cero es: $a^2 - 1 = 0 \ \therefore\ (a = 1 \vee a = -1)$
- y ($\wedge$)
- El numerador igualado a cero es: $-a\,b = 0$ (por ser $a \neq 0$ debe ser $b = 0$)

S.I. $\longrightarrow$ $D = 0 \wedge N \neq 0$
- El denominador igualado a cero es: $a^2 - 1 = 0 \ \therefore\ (a = 1 \vee a = -1)$
- y ($\wedge$)
- El numerador distinto de cero es: $-a\,b \neq 0$ (por ser $a \neq 0$ debe ser $b \neq 0$)

PROBLEMAS DE SISTEMA DE ECUACIONES

7) En las elecciones para intendente el candidato **A** recibió **5919** votos más que el candidato **B**.
El total de votos fue **18653**.
¿Cuántos ciudadanos votaron al ganador?.

8) La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo.
¿Cuál es la edad actual de cada uno?.

9) Antonio tiene **$4** en monedas de **5** centavos y de **20** centavos. Si en total tiene **29** monedas.
¿Cuántas son de 5 centavos y cuántas de 20 centavos?.

10) En un número de **2** cifras la cifra de las decenas excede en **5** a la cifra de las unidades.
Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da **121**.
Determine el número.

11) Determine los ángulos de un paralelogramo, que tiene la propiedad de que dos ángulos consecutivos difieren en 20°

12) La suma de dos números es **111**, y al dividir el mayor por el menor, se obtiene cociente **5** y resto **9**.
¿Cuáles son los números?

13) Cuando se agrega un disco duro a una computadora personal, el sistema nuevo cuesta **$ 2325**.
Se sabe que **1/3** del valor de la computadora más **1/5** del valor del disco duro dan un total de **$ 745**.
¿Cuál es el costo del disco duro?.

14) Los precios por unidad de **2** sustancias son **$ 6** y **$ 10**.
Averiguar qué cantidad de cada sustancia debe mezclarse para obtener **50** unidades de mezcla a **$7,60** cada una.

15) Una compañía médica produce **2** tipos de válvulas para el corazón; la **estándar** y la de **lujo**.
Para hacer una válvula **estándar** son necesarios **5 minutos** en el torno y **10** en la prensa taladradora.
Para la válvula de **lujo** son necesarios **9 minutos** en el torno y **15** en la prensa.
Cierto día el torno estará disponible **4** horas y la prensa **7** horas.
¿Cuántas válvulas de cada tipo deben hacerse para utilizar las dos máquinas todo el tiempo posible?.

16) El día del parcial de matemática se había previsto utilizar un cierto número de aulas.
Al repartir **35** alumnos por aula quedaron **28** alumnos sin asiento.
Entonces se ubicaron **38** alumnos en cada aula y quedaron **2** bancos libres.
¿Cuántos alumnos se presentaron al examen y cuántas aulas se utilizaron?.

17) Se desea mezclar café colombiano que vale **2,50 $** por kg con uno brasilero que vale **1,80 $** por kg.
¿ Cuántos kilogramos de cada uno se deben usar para obtener **30 kg** de una mezcla que valga **2 $** por kg ?.

18) Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno.
Si usa un material que cuesta **2,40 $** por metro para el frente del lote y un material que cuesta **2,10 $** por metro para los otros tres lados, la cerca le cuesta **589,50 $**.
Si usa el material mas caro para los cuatro lados, la cerca le cuesta **648 $**.
Determine las dimensiones del lote.

SISTEMAS DE INECUACIONES

19) Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones, en R^2.

a) $y - x < 2$ b) $y \geq -2$ c) $y \geq x$ d) $x < 1$ e) $2x - 3 < 2y$

20) Representar gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x < 4 \\ y < 2x + 1 \\ y > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y < x + 1 \\ y > (1/2)\,x + (3/2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq 4x + 2 \\ y > -x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \leq 3x + 4 \\ y \geq 2x - 5 \\ y > -x - 2 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$

21) Representar gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones, solamente en el 1° cuadrante ($x_1 \geq 0 \ \wedge \ x_2 \geq 0$).

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ x_1 + 5x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$

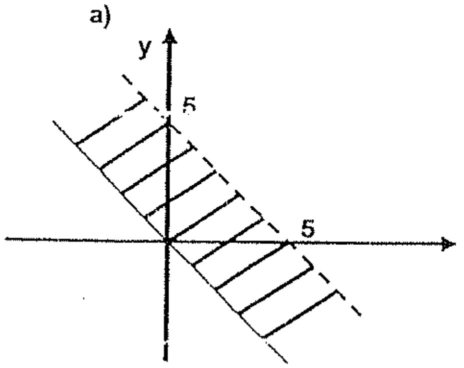
b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10 \geq 0 \end{cases}$

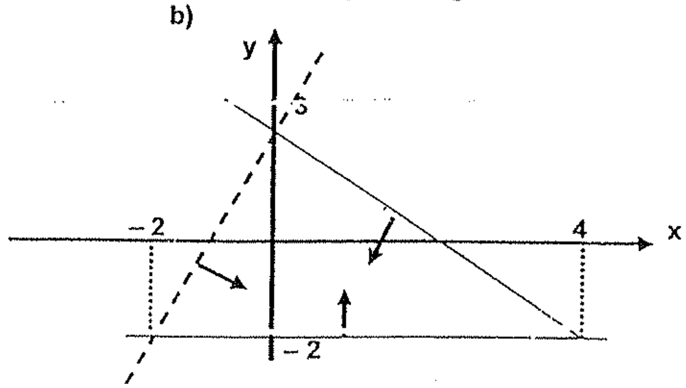
d) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \end{cases}$

22) Exprese mediante un sistema de inecuaciones las regiones marcadas en las siguientes gráficas.

a)



b)



23) Represente el conjunto solución (intersección de los cinco semiespacios) a partir de los datos de un problema que tiene:

condiciones de vínculo $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 15000 \\ 10x_1 + 20x_2 \le 20000 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 6000 \end{cases}$ condiciones de no negatividad $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE INECUACIONES

24) Un transporte escolar tiene capacidad para **60** personas. Lleva el doble de niños que de niñas.
Mostrar en una gráfica las distintas posibilidades.

25) Se mezclan dos tipos de naftas **A** y **B**. La mezcla debe contener a lo sumo **40%** del tipo **A**.
Representar gráficamente los posibles porcentajes de nafta A y B que pueden mezclarse.

26) Para abrir un curso sobre enseñanza de computación se exige un mínimo de **15** inscriptos y un máximo de **60**.
Sólo pueden inscribirse docentes o técnicos en computación.
Los organizadores han decidido no aceptar más de **20** técnicos.
Plantear las inecuaciones y representar la situación en una gráfica.

27) En un taller se fabrican 2 tipos de piezas **A** y **B** , que deben seguir tres tipos de procesos: moldeado, pintura y horneado.
En el moldeado se emplean **6 horas** para las piezas **A** y **16 horas** para las **B**.
En la pintura se emplean **12 horas** para las piezas **A** y **6 horas** para las **B**.
En el horneado se emplean **9 horas** para las piezas **A** y **9 horas** para las **B**.
El tiempo disponible en cada semana es de **48 horas** para moldeado, **42 horas** para pintura y **36 horas** para horneado.
¿Cuál es el par ordenado (A , B) intersección de las ecuaciones de: pintura $\wedge$ horneado ?.

28) Una compañía minera explota dos minas, extrayendo dos minerales **M** y **N** de cada una de ellas, siendo la pureza de las mismas tal que de la primara puede extraer **50 Kg.** de **M** y **100 Kg.** de **N** por cada tonelada de material bruto, mientras que de la segunda, las respectivas cantidades son **100** y **25**.
La compañía debe obtener una producción mínima de **1 ½ Tn.** de mineral **M** y **1 ¼ Tn.** de material **N**.
¿Cuál es el par ordenado intersección de las dos ecuaciones ?.

29) Los requerimientos de un tratamiento medicinal son tales que deben cubrir una dosis de al menos **200 unidades curativas** y no puede superar las **120 unidades toxicas.**
Se dispone de una combinación de medicamentos y radiación, proporcionando los primeros **50 unidades curativas** y **40 unidades tóxicas** por cada miligramo, mientras que cada minuto de radiación produce **100 unidades curativas** y **40 unidades tóxicas.**
Analizar gráficamente qué ocurre si la cantidad de miligramos de medicamento es nula.

INECUACIONES CUADRÁTICAS

30) Hallar los números reales para los cuales se verifica: $5x^2 - 5x - 30 \ge 0$

31) Calcular los números reales para los cuales $4x^2 - 4x + 4$ es positivo.

SISTEMAS DE INECUACIONES CUADRÁTICAS

32) Indicar los región del plano que satisfacen los sistemas de inecuaciones :

a) $\begin{cases} y > x^2 - x - 2 \\ y < x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > x^2 + 4 \\ y < x - 6 \end{cases}$

Unidad 6. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones en el plano. Respuestas.

SISTEMAS DE ECUACIONES

1) a) $S. = \{(9/5 ; 0)\}$ b) $S. = \{(x_1 ; x_2) \in R^2 / (x_1 ; x_2) = (5 - 2t ; t) \wedge t \in R\}$ c) $S. = \varnothing$

2) $y = -(1/2)x + (3/2) \quad \wedge \quad y = (1/3)x + (2/3)$

3) 1 $(m > 0 ; b < 0) \quad \wedge$ 2 $(m < 0 ; b > 0)$

4) a) $S. = \{(-4 ; 5)\}$ b) $S. = \{(x ; y) \in R^2 / (x ; y) = (1 - 2t ; t) \wedge t \in R\}$ c) $S. = \varnothing$

5) una solución: $k \neq 1 \wedge k \neq -1$ infinitas soluciones: $k = 1$ ninguna solución: $k = -1$

6)

a) $\begin{cases} SCD : & b \neq 0 \wedge a \in R \\ SCI : & b = 0 \wedge a \in R \\ SI : & \text{no existe} \end{cases}$

b) $\begin{cases} SCD : & a \neq 1 \wedge a \neq -1 \wedge b \in R \\ SCI : & (a = 1 \wedge b = 0) \vee (a = -1 \wedge b = 0) \\ SI : & (a = 1 \wedge b \neq 0) \vee (a = -1 \wedge b \neq 0) \end{cases}$

c) $\begin{cases} SCD : & b \neq -1 \wedge a \neq 0 \\ SCI : & b = -1 \vee a = 0 \\ SI : & \text{no existe} \end{cases}$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

7) votos a ganador 12286

8) edad del padre 48, edad del hijo 12

9) 12 monedas de 5 centavos, 17 monedas de 20 centavos

10) número = 83

11) ángulos de 80° y 100°

12) el mayor es 94, el menor es 17

13) costo del disco: $ 225

14) de una sustancia son 30 **unidades** y de la otra son 20 **unidades.**

15) estándar son 12 y de lujo son 20.

16) se presentaron 378 **alumnos** y se utilizaron 10 **aulas.**

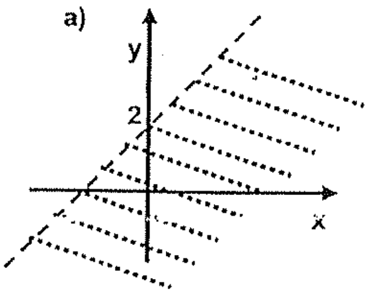
17) C = 8,57 Kg B = 21,43 Kg

18) x = 75 m y = 60 m

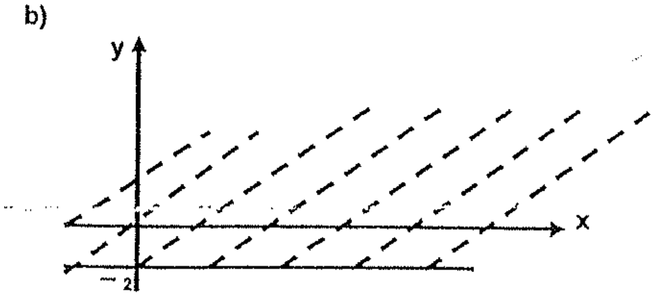
SISTEMAS DE INECUACIONES

19)

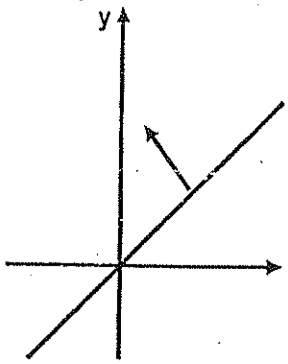
a)



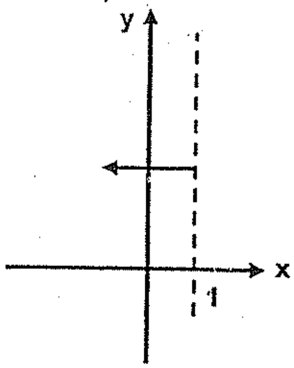
b)



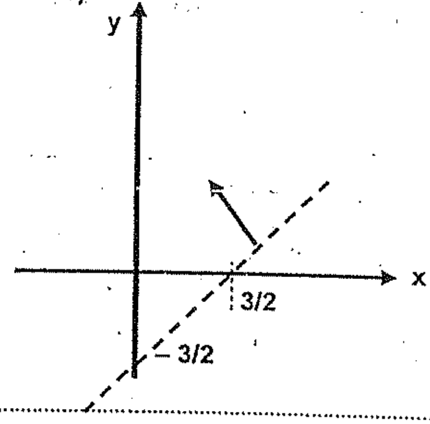
c)



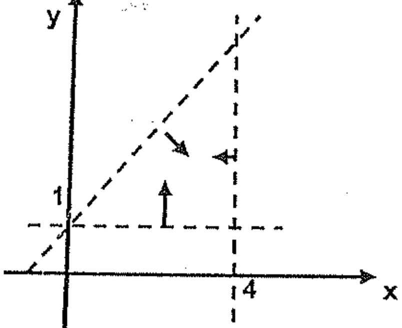
d)



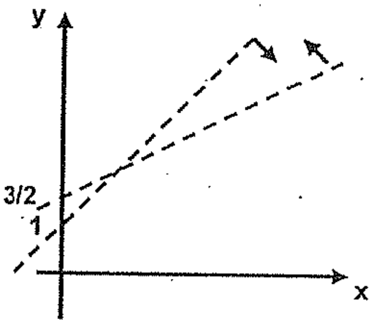
e)



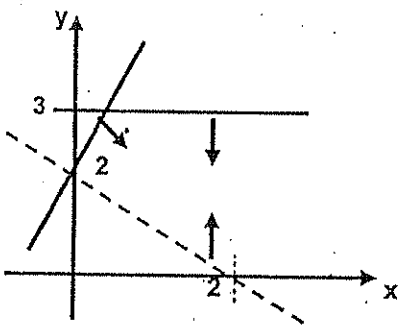
20) a)



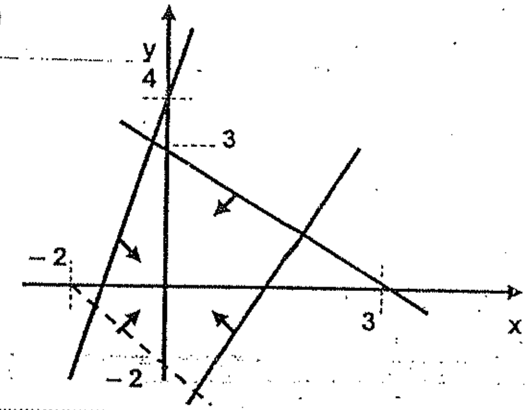
b)



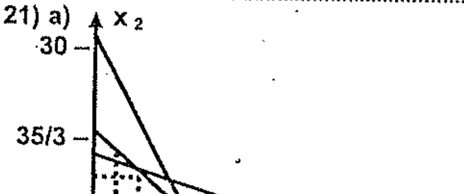
c)



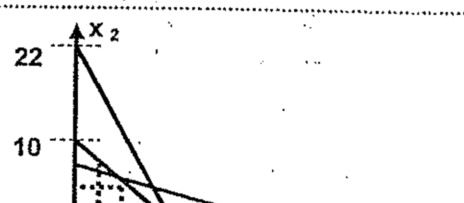
d)



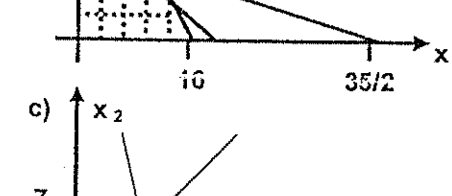
21) a)



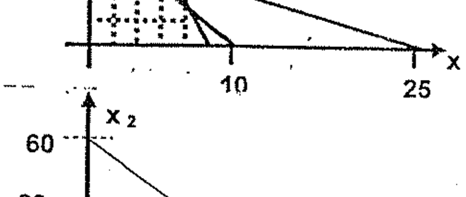
b)



c)



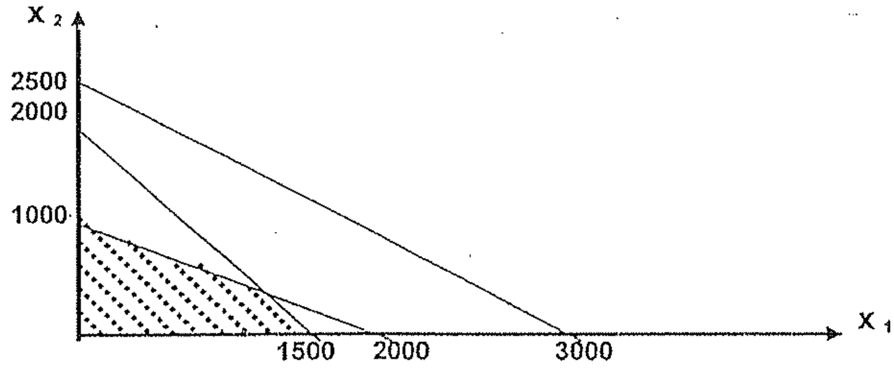
d)



22) a)
$$\begin{cases} y \geq -x \\ y < -x + 5 \end{cases}$$

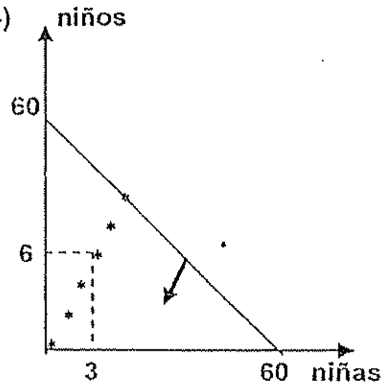
b)
$$\begin{cases} y \geq -2 \\ y < (5/2)\,x + 3 \\ y \leq -(5/4)\,x + 3 \end{cases}$$

23)

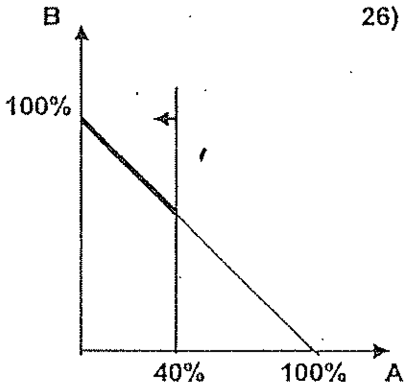


PROBLEMAS DE SISTEMAS DE INECUACIONES

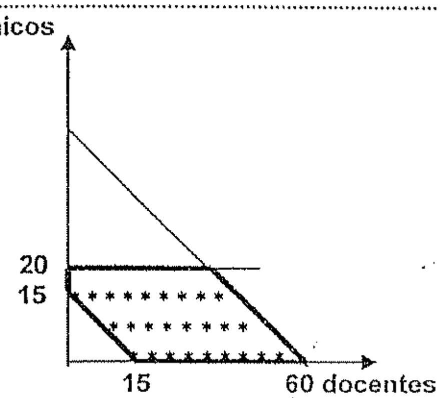
24)



25)



26)



27) (A , B) = (3 , 1) **3** piezas del tipo **A** $\wedge$ **1** piezas del tipo **B**

28) (10 , 10) Extraer **10** Tn. de cada mina

29) La radiación está en un intervalo: **[2 , 3]**, con unidad: **minutos.**

INECUACIONES CUADRÁTICAS

30) Sol. = $\{ x \in R / x \leq -2 \ \vee \ x \geq 3 \} = (-\infty , -2] \cup [3, +\infty)$

31) Sol. = R

SISTEMAS DE INECUACIONES CUADRÁTICAS

32) a) Sol. = $\{ (x, y) \in R \ / \ y > x^2 - x - 2 \ \wedge \ y < x + 1 \}$

b) Sol. = $\varnothing$

Unidad 7. Sistema de ecuaciones lineales m x n

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

1) Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \\ -x + 6z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x - y = -4 \end{cases}$

2) Indicar los valores de **k** (reales) tales que el sistema sea:

Sistema compatible determinado **(SCD)**.
Sistema compatible indeterminado **(SCI)**.
Sistema incompatible **(SI)**.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ kx + y = -2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = k \\ -x + y + kz = 3 \\ ky + z = 5 \end{cases}$

Solución del ejercicio **2) a)**

Primero

Con los coeficientes construimos la tabla de Gauss – Jordan:

x	y	z	I
2	−1	3	3
k	1	0	−2
2	1	1	1
2 + k	0	3	1
K	1	0	−2
2 − k	0	1	3
2 + k − 3 (2 − k)	0	0	−8
k	1	0	−2
2 − k	0	1	3

Segundo

Con los coficientes de la última iteración construímos el sistema equivalente al dado:

$$\begin{cases} 4(k-1)*x + 0*y + 0*z = -8 \\ k*x + 1*y + 0*z = -2 \\ (2-k)*x + 0*y + 1*z = 3 \end{cases}$$

Simplificando la escritura quedaría:

$$\begin{cases} 4(k-1)*x = -8 \\ k*x + y = -2 \\ (2-k)*x + z = 3 \end{cases}$$

Este sistema equivalente es de resolución inmediata

Tercero

Trabajamos sobre la 1° ecuación por tener una sola variable:

$$4(k-1)*x = -8 \therefore (k-1)*x = -2 \therefore \boxed{x = \frac{-2}{k-1}}$$

Cuarto

A este cociente le aplicamos las condiciones necesarias (recordando que denominador = D y numerador = N):

S.C.D. debe ser : $D \neq 0 \therefore k-1 \neq 0 \therefore k \neq 1$

S.C.I. debe ser : $D = 0 \wedge N = 0 \therefore k-1 = 0 \wedge -2 = 0$ (no existe) $\therefore$ k: no existe

S.I. debe ser : $D = 0 \wedge N \neq 0 \therefore k-1 = 0 \wedge -2 \neq 0 \therefore k = 1$

3) Hallar la condición que deben cumplir "**a**" y "**b**" para que el siguiente sistema sea compatible.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - 3z = a \\ x + 2y = b \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sistemas Homogéneos $\begin{cases} \textbf{DETERMINADOS} \text{ (única solución la trivial)} \\ \textbf{INDETERMINADOS} \text{ (infinitas soluciones además de la trivial)} \end{cases}$

Solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4) Resolver los siguientes sistema, clasificarlos como determinado o indeterminado según corresponda:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

5) Indicar los valores de **k** (reales) tales que el sistema sea **SCD, SCI, SI.**

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ 2x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

6) A partir del conjunto solución del ejercicio **1) b)**.
- **a)** obtener dos soluciones particulares: $S_1 \wedge S_2$ para valores del parámetro $t = 0 \wedge t = -1$.
- **b)** plantear el sistema homogéneo asociado.
- **c)** utilizando las soluciones halladas en **a)**, encontrar una solución particular del sistema homogéneo asociado, sabiendo que en general un sistema en forma matricial queda expresado por: $A * X = B$.
- **d)** ¿ la solución es única ?.
- **e)** comprobar si verifica el sistema planteado en **b)**.

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS

I) Un sistema de ecuaciones lineales es **compatible** si y solo si la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen el **mismo rango.**

II) Un sistema de ecuaciones lineales es **incompatible** si y solo si los **rangos** de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, son **distintos.**

Rango
- $=$ **S. C.**
  - Rango $=$ Nº variables **S. C. D.**
  - Rango $\neq$ Nº variables **S. C. I.**
- $\neq$ **S. I.**

7) Sea $A * X = B$ un sistema lineal compatible. ¿Qué relación existe entre el rango y el conjunto solución?.

8) Comprobar el teorema de Rouche Frobénius **I)** y **II)** con el ejercicio **1 a), 1 b), 1 c).**

PROBLEMAS DE SISTEMA DE ECUACIONES

9) Se dispone de tres tipos de fertilizantes con las composiciones indicadas en la siguiente tabla:

TIPO	FOSFATO	POTASIO	NITRÓGENO
A	10 %	30 %	60 %
B	20 %	40 %	40 %
C	20 %	30 %	50 %

(no a los trangénicos)

Un análisis de suelo muestra que los requerimientos de fertilizante para un determinado campo son **19 %** de **fosfato, 34 %** de **potasio y 47 %** de **nitrogeno.**

¿Puede obtener la mezcla correcta utilizando los tres tipos?

Si es así, ¿ cuántos kilogramos de cada uno deben mezclarse para obtener **100 Kg** de la calidad deseada?.

10). Un turista que fue a Europa gastó **€ 30** al día por hospedaje en Inglaterra, **€ 20** al día en Francia y **€ 20** al día en España. En cuanto a alimentos, el turista gastó **€ 20** diarios en Inglaterra, **€ 30** diarios en Francia y **€ 20** diarios En España. Además, por conceptos diarios el turista gastó **€ 10** diarios en cada uno de los países mencionados,
A su regreso, el registro de gastos del viajero indicaba un total de **€ 440** por hospedaje, **€ 320** por alimentos y **€ 140** por gastos varios.
Calcule el número de días que el viajero estuvo en cada uno de los tres países o bien muestre que el registro es incorrecto ya que las cantidades gastadas son incompatibles unas con otras.

---

11) Un espía sabe que en cierto aeropuerto secreto hay estacionados **60 aviones**, entre **cazas** y **bombarderos**.
El espía desea determinar cuántos de los **60 aviones** son **cazas** y cuántos son **bombarderos**.
Hay un tipo de cohete que es transportado por ambas clases de aviones; el **caza** porta **6** de estos cohetes y el **bombardero** sólo **2**.
El agente sabe que con **250** cohetes quedan pertrechados por completo todos los aviones que se hallan en el aeropuerto.
Además, se entera que en esa base el número de aviones **caza** es el doble del número de **bombarderos**.

a) Muestre que la información del agente es incorrecta.
b) Si el agente sabe que con **280** cohetes quedan pertrechados por completo todos los aviones del aeropuerto, ¿cuál es el número de aviones **caza** y **bombarderos** que hay en dicho aeropuerto secreto?. (no a la guerra).

---

12) En un taller hay tres máquinas trabajando: **A** , **B** , **C**.
Cuando trabajan juntas pueden confeccionar **5700** prendas por semana, cuando sólo trababan **A** y **B** se producen **3400** por semana, en cambio cuando lo hacen sólo **B** y **C** se producen **4200** prendas por semana.
¿ Cuántas prendas pueden producir cada máquina por semana ?.

---

13) En ciertas situaciones lo que ocurre en un tiempo de observación depende sólo de lo que ocurre en el tiempo de observación inmediatamente anterior.
Por ejemplo: en un circuito eléctrico la falla intermitente de un componente puede tener el comportamiento sig.:
i) Si un componente funciona un tiempo " **t** ", entonces funcionará en el siguiente tiempo de observación el 99 % de las veces.
ll) Si el componente falla en el tiempo " **t** ", entonces fallará en el siguiente tiempo de observación el **5 %** de las veces.
Este método (llamado cadenas de Markov) puede utilizarse para mostrar que (en promedio) la probabilidad de operación exitosa $\mathbf{x_1}$ y la probabilidad de falla $\mathbf{x_2}$ deben satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0.99\,x_1 + 0.95\,x_2 = x_1 \\ 0.01\,x_1 + 0.05\,x_2 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Halle la probabilidad de falla y de funcionamiento (en promedio) del componente.

---

14) La edad de **Juan** es la suma de las edades de **Carlos** y **Diego**. La edad de **Carlos** es **2** años más que la suma de las edades de **Diego** y **María**, la edad de **Diego** es **4** veces la de **María**, la suma de las cuatro edades es **42**.
¿Qué edad tiene cada uno?.

---

15) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2/x + 2/y - 3/z = 3 \\ 1/x - 2/y - 3/z = 9 \\ 7/x - 2/y + 9/z = -39 \end{cases}$$

a) decir si el sistema es lineal b) encontrar el conjunto solución

---

16) Luis fue a una ferretería y compró **1 kg** de cada uno de los tres tamaños diferentes de clavos: pequeños, medianos y grandes.

Después de haber realizado cierta parte de su trabajo observó que había subestimado la cantidad de clavos pequeños y grandes que necesitaba.

Así, compró otra vez la misma cantidad de clavos pequeños y el doble de lo que había comprado de los grandes.

Luego de haber avanzado un poco mas en su trabajo le volvieron a faltar clavos por lo que necesitó comprar otro kilogramo de clavos pequeños y de medianos respectivamente.

Cuando vió la factura de la ferretería observó que le habían cobrado **60 $** la primera vez, **65 $** la segunda y **35 $** la tercera.

Los precios de los clavos varían de acuerdo con su tamaño. Encuentre dichos precios.

17) La superficie total disponible de un estacionamiento es **1000 m^2**.

Un automóvil ocupa **8 m^2**, una camioneta necesita una superficie de **10 m^2** y un camión **15 m^2**.

La tarifa diaria es: **12 $** por automóvil, **15 $** por camioneta y **20 $** por camión.

Durante cierto día ingresaron **100** vehículos obteniéndose una recaudación de **1450 $**.

¿ Cuántos vehículos de cada tipo había ?.

18) En un número natural de tres cifras la cifra de las centenas es el duplo de la cifra de las unidades.

La cifra de las unidades excede en **1** a la de las decenas.

Si del número se resta **297** se obtiene otro número con las mismas cifras en orden inverso.

¿ Cuál es el número ?.

19) Una parte de un capital de **20.000 $** está invertido al **3 %**, otra parte al **4 %** y otra parte al **5 %**, lo que produce en total un interés de **750 $**.

Las inversiones al **4 %** y al **5 %** producen entre ambas **210 $** más que la inversión al **3 %**.

¿ A cuánto ascienden las cantidades invertidas al **3 %, 4 %** y **5 %** respectivamente ?.

Unidad 7. Sistema de ecuaciones lineales m x n .Respuestas.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

1) a) Sol.= $(-15\ ;\ 8\ ;-1)$ b) Sol.= $\{(x\ ;y\ ;z)\in R^3\ /\ (x=2+9t\ ;\ y=1-4t\ ;\ z=t)\wedge t\in R\}$ c) Sol. = $\varnothing$

2) a) SCD: $k\neq 1$ SCI: no existe k SI: $k=1$

b) SCD: $k\neq -1\wedge k\neq 2$ SCI: $k=2$ SI: $k=-1$

3) $a+b=9$

SISTEMAS HOMOGENEOS

4) a) Sol. = $\{(0\ ;0)\}$ sist. determinado

b) Sol. = $\{(x\ ;y\ ;z)\in R^3\ /\ (x\ ;y\ ;z)=(5/9\,t\ ;\ t\ ;\ 2/9\,t)\wedge t\in R\}$ sist. indeterminado

5) SCD: $k\neq 1$ SCI: $k=1$ SI: no existe k

6) a) $S_1=(2,1,0)\wedge S_2=(-7,5,-1)$ b) los 2º miembros igualados a cero.

c) $(9,-4,1)\wedge(-9,4,-1)$ d) no es única. e) verifica.

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS

7) Ver cuadro de definición

8) a) Rango = 3 $\wedge$ Nº variables = 3 (Sis. Compatible determinado)

b) Rango = 2 $\wedge$ Nº variables = 3 (Sist. compatible indeterminado)

c) Rango = 2. $\wedge$ Rango = 3 (Sis. incompatible)

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

9) A = 10 Kg , B = 40 Kg C = 50 Kg

10) Inglaterra = 16 días Francia = 4 días España = -6 días ($\notin N$) $\therefore$ Registro incorrecto

11) I) $0 * x=-30 \Rightarrow$ (x no existe) $\therefore$ información incorrecta II) Sol. = { 40 cazas ; 20 bombarderos }

12) A = 1500 B = 1900 C = 2300

13) Porcentaje de operación exitosa = 98.95 %. Porcentaje de operación defectuosa = 1.04 %.

14) Juan = 20 años , Carlos = 12 años , Diego = 8 años , María = 2 años

15) a) no es un sistema lineal b) Sol. = $\{(-1/2\ ;\ -1\ ;\ -1/3)\}$

16) p = 15 m = 20 g = 25

17) x = 50 autos y = 30 camionetas z = 20 camiones

18) c = 6 d = 2 u = 3

19) x = $ 9000 y = $ 7000 z = $ 4000

Unidad 8. Cálculo combinatorio

Factorial de un número: n!

Es el producto de todos los números naturales desde **1** hasta n.
Siendo **n** un número natural.

$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) \ldots\ldots\ 3 * 2 * 1$

Nota: por convención es $0! = 1$

Interesa el orden: se cuenta el número de secuencias o **permutaciones**

Pueden repetirse elementos de la secuencia: n^r

Los elementos de la secuencia deben ser distintos: ${}_nP_r = n! \,/\, (n-r)!$

Repeticiones limitadas o permutaciones distinguibles: ${}_nP^{K_1 K_2 \ldots\ldots K_t} = n! \,/\, K_1!\, K_2! \ldots\ K_t!$

No interesa el orden: se cuenta el número de subconjuntos o **combinaciones**

${}_nC_r = n! \,/\, r!\,(n-r)!$

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos

1) En una computadora hay **8** posiciones para individualizar un código en sistema binario.
¿ Cuántos símbolos distintos pueden crearse ?.

2) ¿ Cuántos pronósticos posibles tiene una fecha de los **13 partidos** del PRODE si se puede apostar a **local**, **empate** o **visitante** ?.

3) ¿ Cuántos números de **5** dígitos pueden formarse con: **1 , 2 , 3 , 4** ?.

4) ¿ Cuántos números de **5** dígitos pueden formarse con: **0 ,1 , 2 , 3 , 4** ?.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con n = r

5) ¿ De cuántas maneras distintas pueden sentarse **3 varones** y **2 mujeres** en un banco ? si:
a) no hay restricciones.
b) los varones se sientan juntos y las mujeres también.
c) sólo las mujeres se deben sentar juntas.

6) **a)** ¿ De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra **CUATRO** ?.
b) ¿ Cuántas comienzan con **A** ?.
c) ¿ Cuántas comienzan con **A** y terminan con **T** ?.

7) ¿ En cuántas formas pueden sentarse en una fila **4 africanos**, **3 europeos** y **5 asiáticos** de manera que las personas de un mismo continente queden juntas ?.

8) ¿ De cuántas maneras se pueden colocar **12** libros en un estante, si **3** de ellos deben estar juntos ?.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con $n \neq r$

9) Los **100.000** números de una lotería han sido numerados del **00000** al **99999** .
¿ Cuántos billetes tienen las **5** cifras diferentes ?.

10) ¿ Cuántos números, entre el **2000** y el **6000** pueden formarse con los dígitos: **0** , **1** , **3** , **5** , **7**, sin repetir ?.

11) ¿ Cuántas patentes de automóvil pueden fabricarse si cada placa contiene **2** letras diferentes entre **26** elegibles, seguidas por **3** dígitos diferentes entre los **10** posibles ?.

12) ¿ En cuántas formas pueden ocupar **10** personas, **15** juegos individuales, en un parque de diversiones ?.

13) ¿ Cuántas banderas diferentes de **tres** bandas horizontales pueden formarse con **cinco** colores, si dos bandas consecutivas **no** tienen el mismo color ?.

14) ¿ Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares ?.

15) Una asamblea de **14** personas desea elegir entre sus miembros **un** presidente, **un** vicepresidente y **un** secretario de actas. ¿ De cuántas maneras puede realizarse la elección ?.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos con limitación

16) ¿ De cuántas maneras puede ordenarse las letras de la palabra **MATEMÁTICA** ?

17) ¿ Cuántos números distintos de **7** dígitos pueden formarse con: un **1** , dos **3** , cuatro **5** ?.

18) Un equipo de fútbol juega **19** partidos en un campeonato.
¿ De cuántas formas puede terminar con: **10** victorias , **5** empates , **4** derrotas ?.

NO INTERESA EL ORDEN

19) Se dispone de un billete de **$ 50**, uno de **$ 100**, uno de **$ 500**, uno de **$ 1000** y uno de **$ 5000**.
¿Cuántas sumas diferentes de dinero pueden lograrse? si:
a) se utilizan **3** billetes.
b) se utilizan por lo menos **3** billetes.

20) Un estudiante debe contestar, entre **10** preguntas, **8** correctamente.
a) ¿ de cuántas maneras puede elegir las respuestas ?.
b) ¿ de cuántas, si las **3** primeras son obligatorias ?.

21) En un grupo de **8 niños** y **7 niñas**, ¿ cuántas maneras distintas existen de elegir **12** personas ? si:
a) deben haber **6 niñas**.
b) deben haber como mínimo **6 niños**.

22) ¿De cuántas maneras pueden elegirse **2** números del conjunto $A = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\}$ si su **suma** debe ser un número **par**?.

23) ¿ Cuántas tarjetas distintas pueden jugarse al QUINI 6 ?.

24) ¿ De cuántas maneras pueden extraerse **3 cartas** de un mazo de **40** ? si:
a) debe salir **sólo un as**
b) debe salir **a lo sumo un as**
c) debe salir **como mínimo un as**

25) En un mazo de 52 cartas de póker (13 de cada palo) se extraen 5, sin reposición.
¿Cuántos grupos pueden formarse?, de tal manera que resulten:
a) grupos con **por lo menos 4 diamantes**
b) grupos con **a lo sumo 3 corazones**
c) incluidos el **3 de corazones** y el **2 de diamantes** en todos los grupos

26) Los 8 participantes de un conferencia se saludan, dándose la mano.
Si cada uno saluda a todos los demás.
¿ Cuántos apretones de manos se dan en total ?.

27) Para un cumpleaños infantil compré **60 juguetes** de cotillón diferentes.
Quiero hacer **12 bolsitas** de igual número de juguetes cada una:
a) ¿de cuántas formas diferentes puedo armar la **primera bolsita**?.
b) una vez armadas las bolsitas, ¿de cuántas **formas distintas** las puedo entregar?.

PROBLEMAS COMBINADOS

28) El testigo de un accidente de transito es llamado a declarar porque dice haber visto la patente del vehiculo que huyó del lugar. Al llegar a la comisaría declaró que recordaba que la patente comenzaba con A.
¿ Cuántas patentes se tendrán que verificar ?.

29) ¿Cuántas piezas tiene un juego de dominó, si en cada pieza figuran 2 **símbolos** elegidos entre:
blanco, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 y 6 ?.

30) En dos clavos tenemos **156** posibilidades de colgar **n** cuadros.
¿ Cuántos cuadros hay ?.

31) En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes.
Si en total se juegan 45 partidas. **¿ Cuántos jugadores son ?.**

32) Hallar $x \in \mathbf{N}$ en: $_{x}C_{2} = 55$

33) Hallar $x \in \mathbf{N}$ en: $_{x}P_{4} = 6 * {}_{x}P_{2}$

34) ¿ Cuántos números, de 4 dígitos, múltiplos de 5 pueden formarse con: **0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5** sin repetirlos ?.

35) ¿ Cuántos números, de 4 dígitos, pueden formarse con: **0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5** que sean mayores que **1527** y menores que **4512** ?.

36) Dadas dos rectas paralelas y **n** puntos distintos sobre una y **m** puntos distintos sobre la otra.
¿ Cuántos triángulos pueden determinarse con vértices en esos puntos ?.

37) Determinar el orden de ubicación del número **537128** al ordenar en forma creciente los números obtenidos permutando los dígitos: **1 , 2 , 3 , 5 , 7 , 8** sin repetir las cifras.

38) Considerando todos los números de **5** cifras que se obtienen permutando los dígitos de **17283**.
a) ¿ Cuántos de ellos son impares ?.
b) De menor a mayor, ¿ qué lugar ocupa el número 23178 ?.

39) Un menú turístico permite seleccionar una entrada entre **cuatro**, una comida caliente entre **tres**, y un postre entre **cinco**.
a) ¿ De cuántas formas puede elegir su menú un turista ?.
b) ¿ De cuántas formas podrá hacerlo si desea que el salpicón de ave y la suprema de pollo no aparezcan en el mismo menú ?.

40) Con **10 consonantes** distintas y las **5 vocales**, ¿ cuántas palabras de **8 letras** se pueden formar, sin repetir ninguna letra, de modo que contengan **a lo sumo una vocal** ?.

Unidad 8. Cálculo combinatorio. Respuestas

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos

1) Se pueden crear **256** símbolos distintos (por ejemplo el ASCII extendido)

2) El PRODE tiene **1.594.323** pronósticos posibles

3) Pueden formarse **1024** números.

4) Pueden formarse **2500** números.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con n = r

5) a) De **120** maneras distintas si no hay restricciones
   b) De **24** maneras distintas
   c) De **48** maneras distintas si sólo las mujeres se sientan juntas

6) a) Se pueden ordenar de **720** maneras
   b) Las palabras que empiezan con **A** son **120**
   c) Las palabras que empiezan con **A** y terminan con **T** son **24**

7) Se pueden sentar de **103.680** formas

8) Los **12** libros se pueden colocar de **21.772.800** maneras

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con n ≠ r

9) Son **30.240** billetes con cifras diferentes

10) Se pueden formar **48** números

11) Se pueden fabricar **468.000** patentes   **12) 10.897.286.400** formas distintas

13) Se pueden hacer **80** banderas   **14) 60**   **15) 2184**

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos con limitación

16) Se puede ordenar de **151.200** maneras   **17) 105** números distintos   **18) 11.639.628**

NO INTERESA EL ORDEN

19) a) Se logran **10** sumas diferentes si se utilizan **3** billetes
   b) Se logran **16** sumas diferentes si se utilizan **3** billetes por lo menos

20) a) Puede elegir las respuestas de **45** maneras
   b) De **21** maneras distintas si las **3** primeras son obligatorias

21) a) Si deben haber **6 niñas** son **196** maneras distintas
   b) Si como mínimo hay **6 niños** son **395** maneras distintas

22) Se pueden elegir de **9** maneras

23) Al QUINI 6 se pueden jugar **9.366.819** tarjetas diferentes

24) a) Son **2.520** maneras diferentes si debe salir **sólo un as**
    b) Son **9.660** maneras diferentes si debe salir **a lo sumo un as**
    c) Son **2.740** maneras diferentes si debe salir **como mínimo un as**

25) a) Si son **por lo menos 4 diamantes** se forman **29.172** grupos
    b) Si son **a lo sumo 3 corazones** se forman **2.569.788** grupos
    c) Con el **3 de corazones** y el **2 de diamante** incluidos, se forman **19.600**

26) En total se dan **28** apretones de manos

27) a) La **primer bolsita** se puede armar de **5.461.512** maneras
    b) Las puedo entregar de **479.001.600 formas distintas**

PROBLEMAS COMBINADOS

28) Se tendrán que verificar **729.000** patentes

29) El juego de dominó tiene **28** fichas

30) Hay **13** cuadros

31) Los jugadores son **10**

32) $x = 11$

33) $x = 5$

34) Pueden formarse **108** números

35) Pueden formarse **638** números

36) Si $n = 1 \wedge m \geq 2$ es: $m\,(m-1)/2$
    Si $m = 1 \wedge n \geq 2$ es: $n\,(n-1)/2$
    Si $m \geq 2 \wedge n \geq 2$ es: $(m * n / 2)\,(m + n - 2)$

37) El orden de ubicación es el **421**

38) a) **72** b) **31**

39) a) **60** b) **55**

40) **26.006.400**

rrfonte@datafull.com
Ing. Rubén Fonte

jccolubi@hotmail.com
Ing. Juan Carlos Colubi