Elementos de Programación y Lógica.
Unidad 2 - Clase 4.

Lógica.

Lógica de Predicados.

.

Sección 1. Lógica de Predicados

Parte 1. Limitaciones de la lógica proposicional

Índice

[currentsection,currentsubsection].

Limitaciones de la lógica proposicional.

Intentemos analizar el siguiente razonamiento:
Todos los perros son animales.
Firularis es un perro.

Firulais es un animal.
Suena lógico, ¿verdad? Pareciera que esto debería ser cierto, que el razonamiento y las premisas desde las cual partimos, son verdaderas.

Limitaciones de la lógica proposicional.

Intentemos formalizar el razonamiento. Cada oración es independiente, y no contiene conectivas. Cada una es una única proposición. Por lo tanto, tenemos:
p = *Todos los perros son animales*
q = *Firulais es un perro*
r = *Firulais es un animal*

Donde p y q son nuestras premisas y r sería la conclusión. Quedando:
$p, q \vdash r$
Como ya vimos, como la conclusión es independiente de las premisas, esta puede ser VERDADEROo FALSO, y por tanto, el razonamiento es inválido.

Limitaciones de la lógica proposicional.

¿Cuál es el problema en nuestro razonamiento? ¿Será que el razonamiento

es realmente inválido y que nuestra intuición nos miente?
La problemática radica en que las proposiciones hablan de una condición que se da en el universo, pero no dicen nada acerca de la estructura interna de esa condición.
En este caso, parte de las cosas que dice p se usa en q y otra parte en r, el mismo individuo (Firulais) es mencionado tanto en q como en r, y sin embargo la lógica proposicional no dice nada acerca de estos hechos.

Lógica de predicados al rescate.

Por eso, necesitamos un nuevo tipo de lógica, la **lógica de predicados**, o también llamada **lógica de orden uno** o **lógica de primer orden**.
La lógica de primer orden nos va a permitir formalizar oraciones que hablan sobre individuos, sobre las propiedades de esos individuos, y sobre como esos individuos se relacionan entre si.
La lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional se puede formalizar en lógica de predicados, pero no al revés.

Parte 2. Individuos y Propiedades

Individuos.

La lógica de predicados va a hablar sobre **individuos**.
Un individuo es un elemento único e irrepetible del universo. Por ejemplo, una persona (Juan, Luis, María, etc.) un animal (Firulais, Michifus, etc.), o un elemento más abstracto (un número, un color, etc.)
Lo importante para que algo sea un individuo es que sea identificable de forma inequívoca. Por ejemplo, si hablamos de "Juan", solo hay un "Juan", podemos saber quien es y señalarlo con el dedo. Si hubiera dos personas con el nombre "Juan" deberíamos desambiguar para saber claramente sobre quien estamos hablando.

Universo de discurso.

Como llamamos a nuestros individuos va a depender del contexto. Es decir, depende de lo que estemos hablando. Por ejemplo, si estamos hablando de un grupo de amigos, "Juan" será un individuo puntual al cual podremos identificar. Sin embargo, si estamos hablando de todos los alumnos de la universidad, deberemos ser mucho más específicos acerca de qué "Juan" se trata.
Pero "Juan" es solo el nombre, y uno no es solo su nombre, uno es lo que es. Lo que importa no es el nombre sino el individuo en si.

Mismo individuo, muchos nombres.

Los números por ejemplo, son elementos que son únicos e irrepetibles. *Cinco es cinco*, siempre.

Sin embargo, podemos decir **"cinco"**, pero si habláramos en otro idioma diríamos por ejemplo **"cinq"**, **"cinque"**, **"five"**, **"fem"**, etc.
Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro idioma, tenemos símbolos que representan al mismo individuo como "5", o "V" (en números romanos).
Más aún, si escribimos "3+2" o "4+1", ¿Qué representan?. Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco.
Lo que importa no es como lo escribimos, sino lo que estamos queriendo representar, el individuo en si. Suena filosófico, pero es así...al fin de cuentas, la lógica nace en la filosofía.

Propiedades.

Nos va a interesar hablar de ciertas cosas de esos individuos. Por ejemplo, vamos a querer decir cosas como *"Juan es grande"*, *"Firulais es un perro"*, o *"Cinco es un número primo"*.
Vamos a decir entonces que los individuos tienen **propiedades**.
Una propiedad es una cualidad o atributo que puede o no aplicarse a un individuo.

Propiedades - Cont.

La idea es que vamos a pensar en una propiedad como algo que, dado un individuo, la misma puede o no aplicar a ese individuo. Si aplicamos la propiedad al individuo, la podemos tratar como una proposición. Es decir, es algo de lo que vamos a decir que es VERDADEROo FALSO.
Por ejemplo, si la propiedad es *"Ser grande"*, vamos a **aplicar** a *"Juan"* esa propiedad para obtener *"Juan es grande"*. Esto como vemos es una proposición tradicional, es algo de lo que podemos decir que es VERDADEROo FALSO.
Si en cambio aplicamos a *"Luis"* la misma propiedad, obtenemos la proposición *"Luis es grande"* la cual tiene también un valor de verdad, no necesariamente igual a aplicar la propiedad a Juan.

Propiedades Ejemplo.

Con la lógica de predicados vamos a intentar describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa del universo.
Supongamos entonces que queremos hablar de una escuela a la que solo asisten cuatro alumnos, dos chicos (Juan y Luis), y dos chicas (María y Ana).
Juan, Luis, María y Ana van a ser los individuos sobre los que vamos a hablar.
Una posible propiedad sobre ellos será *"Es hombre"*.

Propiedades Ejemplo - Cont.

Podemos representar las propiedades como una tabla de doble entrada, con los individuos como filas y las propiedades como columnas.

	Es hombre
Juan	
Luis	
María	
Ana	

La tabla podremos completarla con VERDADEROo FALSO, dependiendo del valor que toma la propiedad de la columna aplicada al individuo en esa fila.

Propiedades Ejemplo - Cont.

	Es hombre
Juan	V
Luis	V
María	F
Ana	F

Vemos entonces como la propiedad "Es hombre" se aplica a "Juan", quedando *"Juan es hombre"* y teniendo esa proposición el valor de verdad VERDADERO. Lo mismo sucede en el caso de Luis. Por otro lado, cuando aplicamos la propiedad a "María" y a "Ana", la proposición tiene valor FALSO.

Propiedades que dependen de otras propiedades.

Agreguemos ahora una segunda propiedad a nuestro ejemplo, la propiedad *"Es mujer"*.
Sabemos (intuitivamente) que la propiedad "Es mujer" se aplica a "Juan", quedando *"Juan es mujer"* y teniendo esa proposición el valor de verdad FALSO. Lo mismo ocurre con Luis.
También sabemos que para los casos de "María" y de "Ana", la propiedad aplicada a ellas tiene valor VERDADERO.

Veamos ambas propiedades en la tabla.

	Es hombre	Es mujer
Juan	V	F
Luis	V	F
María	F	V
Ana	F	V

Propiedades que dependen de otras propiedades.

Si bien podemos tratar a ambas propiedades como independientes, hay una clara relación entre *"Es hombre"* y *"Es mujer"*.
En particular, si alguien es hombre, entonces seguro no es mujer. Y si es mujer, entonces seguro no es hombre. Es decir, ambas son complementarias.
Ya conocemos una conectiva que representa el concepto de complemento, la negación. Podemos reformular la propiedad *"Es mujer"* en términos de *"Es hombre"*.
$Es\ mujer = \neg\ Es\ hombre$

Así, vemos como podemos tener propiedades que son dependientes de otras propiedades.

Propiedades que dependen de otras propiedades.

Asumamos ahora que conocemos dos nuevas propiedades que aplican en nuestro ejemplo, *"Usa zapatos"* y *"Usa corbata"*.
Podemos crear nuevas propiedades a partir de las que conocemos. Podemos decir por ejemplo, que si un hombre usa zapatos y corbata, entonces es elegante.
Es elegante = *Es hombre* $\wedge$ *Usa zapatos* $\wedge$ *Usa corbata*

Propiedades que dependen de otras propiedades.

¿Qué significa entonces aplicar la propiedad *"Es elegante"* a *"Juan"*?
Significa que Juan debe cumplir con ser hombre, con usar zapatos y con usar corbata. Es decir que debemos aplicar a Juan cada una de las propiedades que componen a ser elegante, y que en todos los casos el resultado debe ser VERDADERO.
Juan es elegante = *Juan es hombre* $\wedge$ *Juan usa zapatos* $\wedge$ *Juan usa corbata*

Parte 3. Relaciones simples

Índice

[currentsection,currentsubsection].

¿Propiedades que incluyen individuos?.

Pensemos ahora en una frase un poco más compleja, y tratemos de formalizarla: *"Juan está enamorado de María"*.
Sencillo, podríamos tener una propiedad que sea *"Estar enamorado de María"*, y nos basta con aplicar la propiedad a Juan para obtener la oración anterior.
Pero ¿Qué pasa si ahora queremos escribir *"Ana está enamorada de Luis"*?
Necesitamos otra propiedad *"Estar enamorada de Luis"* y aplicar la misma a Ana.
Sin embargo, vemos que hay una relación entre ambas frases, ambas hablan de lo mismo, de estar enamorado de alguien más.

Relaciones.

Cuando vemos que en nuestra propiedad estamos mencionando a un individuo (Por ejemplo a María en "Estar enamorado de María"), lo que queremos en realidad es expresar una relación entre dos individuos (en este caso, Juan a quien será aplicada la propiedad y María, que forma parte de la propiedad). Lo que buscamos es una **relación**.

Una relación es similar a una propiedad, en el sentido que se aplica sobre individuos, pero en lugar de aplicar sobre un solo individuo, aplica sobre dos.
Así, nuestra relación será *"Está enamorado de"*, y si lo aplicamos a *"Juan"* y a *"María"* obtenemos la frase *"Juan está enamorado de María"*.
Una relación vincula dos individuos a través de una caracteristica.

Dirección de las relaciones.

El hecho de que Juan esté enamorado de María no hace que María necesariamente le corresponda. Por lo que las relaciones son dirigidas.
Es decir, aplicar *"Está enamorado de"* a *"Juan"* y luego a *"María"* representa *"Juan está enamorado de María"*. Pero aplicar *"Está enamorado de"* primero a *"María"* y en segundo lugar a *"Juan"* nos dará *"María está enamorada de Juan"*.
El valor de verdad de ambas proposiciones formadas no es necesariamente idéntico.
El orden en el que aplicamos la relación a los distintos individuos da como resultado diferentes proposiciones con diferente valor de verdad.

Relaciones complejas.

De forma similar a lo que ocurre con las propiedades, las relaciones pueden estar dadas en términos de otras relaciones.
Por ejemplo, podríamos decir que estar enamorado requiere de dos cosas, atracción física y atracción intelectual. Así:
Está enamorado de = *Siente atracción fisica* $\wedge$ *Siente atracción intelectual*

Relaciones complejas - Ejemplo.

La frase *Siente atracción física* nos resulta un poco obvia en su aplicación.
Por ejemplo, apliquemos *"Está enamorado de"* a "Juan" y a "María".
Cómo sabemos que la equivalencia es:
Juan siente atracción fisica por María $\wedge$ *Juan siente atracción intelectual por María*

Relaciones con orden en la aplicación.

Pensemos ahora en la relación *"es amado por"*. Podríamos definir "es amado por" en términos de "está enamorado de". Por ejemplo: *María es amada por Juan* = *Juan está enamorado de María*.
Pero si definimos:
Es amado por = *Esta enamorado de*
No resulta evidente que el orden de mis individuos cambia en la equivalencia.

Parámetros.

Para solucionar el problema anterior, tenemos que introducir un nuevo elemento. Los **parámetros**.
Un **parámetro** no es más que un nombre que va a representar a un individuo, pero que al momento de la definición, no sabemos quien es.
Vamos a usar los parámetros en nuestras propiedades y relaciones. Así por ejemplo en lugar de decir que la propiedad es *"Es hombre"* vamos a decir *"x es hombre"*.
¿Quién es x? La respuesta es x va a ser reemplazado en el texto por un individuo cuando apliquemos la propiedad al mismo. Por ejemplo, si aplicamos ahora *"x es hombre"* a *"Juan"*, lo que hacemos es reemplazar la x por "Juan" y quedarnos con la oración formada *"Juan es hombre"*.

Parámetros - Cont.

Esto aplica también a las relaciones, ahora que tenemos más de un individuo, necesitamos más de un parámetro.
Volvamos a nuestra relación *"Es amado por"*. Si lo replanteamos usando parámetros podemos escribir *"x es amado por y"*. Si aplicamos entonces ahora a "Juan" y "María", obtenemos *"Juan es amado por María"*.
Ahora, si miramos la definición de es amado por, podemos dejar más claro que el orden de los individuos se invierte.
x es amado por y = y está enamorado de x
Luego veremos que llamarlos x e y es arbitrario, pero de momento vamos a decir que x representa al individuo que aplicamos la relación primero e y al segundo.

Parámetros - Cont.

No solo es el caso en donde se invierte el orden de los parámetros en donde sirve, sino donde el individuo se repite en la frase equivalente.
Pensemos en la relación *"Se casará con"*. Una persona se va a casar con otra si están enamorados mutuamente. Tratemos de plantearlo en términos de nuestra otra relación:
Se casará con = Está enamorado de $\wedge$ Está enamorado de
El segundo "Está enamorado de" debería indicar de alguna forma que ya no es el primer individuo del segundo, sino el segundo del primero. Sin embargo, lo que escribimos no dice nada de eso.

Parámetros - Cont.

Replanteemos la relación utilizando parámetros. Es decir, pensemos ahora que significa *"x se casará con y"*.
x se casará con y = x está enamorado de y $\wedge$ y está enamorado de x
Queda de esta forma claramente expresado cuales son las relaciones que se deben cumplir.

Representando relaciones.

Podemos representar una relación de forma similar a las propiedades, es decir, mediante una tabla de doble entrada.
A diferencia de la tabla sencilla de las propiedades, en la cual podíamos representar más de una propiedad en la misma tabla, aquí toda la tabla representa una sola relación. Las filas representarán el individuo al que aplicamos primero la relación (x) y las columnas al que aplicamos segundo (y).

Representando relaciones.

Veamos la tabla de nuestro ejemplo:

x está enamorado de y	Juan	Luis	María	Ana
Juan	F	F	V	F
Luis	F	V	F	F
María	V	V	F	F
Ana	F	V	F	F

En la tabla se ve como Juan está enamorado de María, y esta está enamorada de él, por lo que van a casarse. Ana está enamorada de Luis, pero Luis solo está enamorado de si mismo.

Relaciones múltiples.

Podemos tener relaciones que tienen más de dos individuos como elementos. Por ejemplo la relación *"x conoce a y gracias a z"*. Podríamos decir entonces *"Ana conoce a Luis gracias a María"*.
Para obtener esa proposición basta aplicar la relación primero a Ana, luego a Luis y por último a María.
Este tipo de relaciones ya no se pueden interpretar utilizando una tabla, por lo que hay que aplicar nuestra mejor capacidad mental y de abstracción para comprender plenamente estas relaciones.

Parte 4. Todos

Todos.

Volvamos a nuestro ejemplo de la escuela y sus chicos. ¿Qué significaría la frase *"Todos son inteligentes"*?
Pensémoslo en términos de nuestra tabla de propiedades:

	x es inteligente
Juan	
Luis	
María	
Ana	

¿Cómo deberíamos completar los espacios en blanco?

Todos - Cont.

Podemos pensar la frase *"Todos son inteligentes"* como una propiedad que depende de otras propiedades. En particular:
Todos son inteligentes = Juan es inteligente $\wedge$ *Luis es inteligente* $\wedge$ *María es inteligente* $\wedge$ *Ana es inteligente*
Es decir, la idea de que todos son inteligentes nos dice que cada uno de los chicos es inteligente.
Precisamente, **La palabra "Todos" nos indica que la propiedad aplica a cada uno de los individuos de nuestro universo**

Todos - Cont.

Si vamos al caso del ejemplo anterior, nuestra tabla para interpretar el universo quedaría así:

	x es inteligente
Juan	VERDADERO
Luis	VERDADERO
María	VERDADERO
Ana	VERDADERO

Nadie.

¿Y qué pasa si decimos *"Nadie se porta mal"*?
Nadie es lo mismo que decir que, ni Juan, ni Luis, ni María, ni Ana se portan mal. Podemos pensarlo como una dependencia de otras propiedades.
Nadie se porta mal = ($\neg$ *Juan se porta mal)* $\wedge$ *(*$\neg$ *Luis se porta mal)* $\wedge$ *(*$\neg$ *María se porta mal)* $\wedge$ *(*$\neg$ *Ana se porta mal)*
Como ya sabemos, La negación implica que la propiedad sea falsa. Es decir que, en nuestra tabla, esto estaría representado de la siguiente forma:

	x es inteligente	x se porta mal
Juan	VERDADERO	FALSO
Luis	VERDADERO	FALSO
María	VERDADERO	FALSO
Ana	VERDADERO	FALSO

Alguien.

Hay otro tipo de oraciones que nos brindan información lógica acerca del universo. Pensemos en el siguiente ejemplo *"Alguien juega a la pelota"*.

Podemos pensar en términos de nuestra tabla.

	x juega a la pelota
Juan	
Luis	
María	
Ana	

¿Cómo completamos la tabla?

Alguien.

La realidad es que la frase no nos dice mucho. Solo nos dice que hay alguien que juega a la pelota, pero bien podría ser que haya más de una persona que lo haga.
Es decir solo sabemos que alguno de los casos es VERDADERO, pero el resto podrían ser FALSOo VERDADERO.
Es decir, hablar de alguno, es hablar de disyunciones entre los individuos.
Alguien juega a la pelota = *Juan juega a la pelota* $\vee$ *Luis juega a la pelota* $\vee$ *María juega a la pelota* $\vee$ *Ana juega a la pelota*
Para que la disyunción sea verdadera, alguno de los términos de la disyunción debe ser verdadera, pero no sabemos cuál. Si combinamos esa información con otra, tal vez podamos deducir quien sea.

Todos los....

Otro tipo de oración que solemos utilizar cuando hablamos, involucran hablar de un subgrupo de elementos.
Por ejemplo la oración *"Todos los hombres se escaparon de la escuela"*
¿Qué significa esto en nuestro ejemplo? Juan y Luis, ambos son hombres, y por tanto se escaparon.
¿Qué pasa con las chicas? La respuesta es, no sabemos. La frase no dice nada acerca de si María o Ana se escaparon o no de la escuela.

Todos los....

En este caso hay efectivamente una relación entre la propiedad de ser hombre y la propiedad de escaparse de la escuela. Podemos ponerlo de esta forma:
Todos los hombres se escaparon de la escuela =
x *es hombre* $\rightarrow$ x *se escapó de la escuela*
¿Quién es x en este caso? El individuo puntual al que aplicamos nuestra propiedad, pero, en este caso, debemos aplicarlo a cada uno de los individuos de nuestro universo, pues tenemos la palabra "Todos" adelante.
Apliquemos a *"Juan"* nuestra propiedad. Como *"Juan es hombre"* es VERDADERO, para que la implicación sea verdadera entonces *"Juan se escapó de la escuela"* debe necesariamente ser VERDADERO.
Apliquemos ahora a *"María"*. Como *"María es hombre"* es FALSO, la implicación ya es verdadera, independientemente del valor de *"María se escapó de la escuela"*.

Todos los... - Cont.

Es decir, sabiendo que *"Todos los hombres se escaparon de la escuela"*, podemos completar la tabla de la siguiente forma.

	x es hombre	x se escapó de la escuela
Juan	VERDADERO	VERDADERO
Luis	VERDADERO	VERDADERO
María	FALSO	?
Ana	FALSO	?

En los lugares en donde hay un signo de pregunta, no podemos completar nada, pues la frase no contiene información sobre esos casos.

Algún....

De forma similar a "todos los ..." podemos decir frases con la forma *"Alguna mujer se escapó de la escuela"*.
Es decir, que puede haber dos casos, o bien María se escapó de la escuela o bien Ana se escapó de la escuela. Podríamos decir que:
Alguna mujer se escapó de la escuela = (María se escapó de la escuela) $\vee$ *(Ana se escapó de la escuela)*
Pero ¿Por qué agregamos solo a María y Ana a nuestra fórmula equivalente? Sencillamente porque son las únicas mujeres. Pero cuando decíamos "alguno", vimos que debíamos hacer una disyunción con todos los elementos del universo. Debemos entonces buscar una formula equivalente, en donde los casos de aquellos que son hombres, seguro den FALSO.

Algún....

Así, la idea es que necesitamos realizar una conjunción de disyunciones.
Alguna mujer se escapó de la escuela = (Juan es mujer $\wedge$ *Juan se escapó de la escuela)* $\vee$
(Luis es mujer $\wedge$ *Luis se escapó de la escuela)* $\vee$
(María es mujer $\wedge$ *María se escapó de la escuela)* $\vee$
(Ana es mujer $\wedge$ *Ana se escapó de la escuela)*
Si analizamos esa fórmula, en el caso de Juan y Luis, la conjunción dará FALSOpues no es cierto que sean mujeres. Mientras que en el caso de María dará VERDADEROsolo si María se escapó de la escuela. Lo mismo ocurre para Ana.

Sección 2. Formalización de la lógica de predicados

Formalización.

Hasta ahora hemos solamente trabajado con la lógica de predicados de forma natural, intentando interpretar de forma intuitiva las oraciones que nos encontramos.
Comencemos entonces a formalizar los conceptos que hemos visto hasta ahora.

Parte 1. Representando individuos

Constantes.

Las **constantes** representan a los individuos de nuestro universo.
En la bibliografía se denotan en general con letras minúsculas, donde la letra suele estar relacionada con el individuo al que representa (Ej. j = *Juan*, m = *María*)
Vamos a tener una constante para cada individuo del universo que podamos (o mejor dicho, que necesitemos) nombrar.

Funciones.

Las **funciones** son una forma de denotar a un individuo sin hacer una referencia directa al mismo.
Una función debe ser aplicada a uno o más constantes (individuos) y expresará un y solo un individuo. Actúan como una función en matemática.
El ejemplo más fácil de entender sería la función *sucesor*. Esta función, dado un número, devuelve ese número sumado en uno. Así por ejemplo:
sucesor(0) = 1
sucesor(1) = 2
...
sucesor(n) = n+1

Una función puede estar expresada en lenguaje formal, como en el caso de "sucesor" que usa lenguaje matemático, o puede usar lenguaje coloquial.

Funciones - Cont.

Pero las funciones no son solo para números. Por ejemplo, la función *vecino(x)*, que dado una persona, devuelve el vecino de esa persona.
Como definimos quien es vecino de quien es ambiguo, y no va a estar dado por un lenguaje formal. En todo caso, tenemos que tratar de definir que significa en un lenguaje no ambiguo. Por ejemplo, para cada persona del universo, decir exactamente quien es el vecino, armando una lista.
Las funciones se suelen representar en la bibliografía con una letra minúscula, de forma similar a una constante.

Aridad.

Las funciones toman parámetros. Es decir, esperan ser aplicadas a una cantidad específica de individuos. Esto se conoce como **aridad**
La **aridad** es la cantidad de parámetros que espera la función. Si una función espera un solo parámetro, se dice que tiene aridad 1, si espera dos parámetros, se dice que tiene aridad 2, etc.
Por ejemplo, la función **sucesor(x)** tiene aridad 1. La función **suma(x, y)** tiene aridad 2.

Al formalizarlo se vuelve sencillo expresar que nombre le ponemos al parámetro, es decir al individuo al que le aplicamos primero la función. En este caso, el primer individuo se llama x, y el segundo y. Pero si formalizamos la función como **suma(a, b)**, es la misma función, pero llamamos a y b a nuestros parámetros. Es simplemente el nombre que le ponemos al individuo para hablar de él cuando definimos que significa "suma".

Aplicación.

Cuando aplicamos una función, en lugar de colocar el nombre del parámetro colocamos el nombre del individuo al cual le aplicamos la misma (Es decir, nuestra constante).
Así por ejemplo, si lo que queremos es obtener el vecino de Juan, diremos *"v(j)"*, donde "j" es la constante que representa a Juan, y *"v(x)"* es la función que denota a un vecino de x.
Es decir, que hay que separar en dos partes. Por un lado, la definición de nuestros elementos (El **diccionario**). Por otro lado, la fórmula en si, es decir, lo que queremos expresar, utilizando esas definiciones.

Aplicación - Cont.

Ejemplo:
$j = Juan$
$v(x) = el\ vecino\ de\ x$

$v(j)$
Las primeras dos líneas definen el diccionario, mientras que la última define lo que queremos expresar, en este caso "el vecino de Juan".
Note como la x se reemplaza por la j para pasar a ser "el vecino de j", primero, y como luego analizamos j para interpretarlo como "el vecino de Juan".

Resumen.

Podemos representar los individuos de nuestro universo de dos formas:

- Mediante constantes
- Mediante funciones que se aplican a una o más constantes

Denotamos a los individuos con letras minúsculas, ya sea una constante o una función.
Para ser más expresivos podemos usar nombres en minúscula, por ejemplo, "juan" puede ser una constante, y "vecino" una función.

Parte 2. Predicados

Predicados.

Hasta ahora vimos como representar individuos, pero no las propiedades y las relaciones sobre ellos.
Las propiedades y relaciones se representan mediante **predicados**.
Un predicado es una función que se aplica a uno o más individuos y que al hacerlo expresa un valor de verdad, ya sea VERDADEROo FALSO.
Los predicados también tienen aridad. Un predicado de aridad uno se corresponde con una propiedad del individuo. Un predicado de aridad dos se corresponde a una relación entre individuos. Un predicado de mayor aridad se corresponde a relaciones entre múltiples individuos.

Predicados - Cont.

Los predicados se suelen representar en la bibliografía con letras mayúsculas (P, Q, R), en general relacionadas con lo que representan.
Así por ejemplo la propiedad *"x es hombre"* se puede representar como *"$H(x)$"*.
Para ganar expresividad podemos utilizar una palabra que comience con mayúscula, por ejemplo *"Hombre(x)"*.

Aplicación.

Los predicados se aplican de la misma forma que las funciones. Es decir, reemplazamos el parámetro por la constante que representa al individuo al cual queremos aplicar el predicado.
Así podemos tener el siguiente ejemplo.
$j = Juan$
$m = María$
$E(x, y) = x \text{ está enamorado de } y$

$E(j, m)$
Esta expresión nos dice *"Juan está enamorado de María"*.

Aplicación - Cont.

Note que *"$E(j, m)$"* no es lo mismo que *"$E(m, j)$"*. Mientras el primero indica que *"Juan está enamorado de María"*, el segundo nos dice que *"María está enamorada de Juan"*.
El orden en el que ponemos nuestras constantes es relevante, y nos indica quien debería ser tomado por x y quien por y.

Uniendo predicados.

Como un predicado aplicado representa un valor de verdad, podemos unir varios predicados usando conectivas lógicas. El valor de verdad final de toda

la fórmula será el resultado de evaluar los predicados aplicados y luego usar las reglas vistas en la lógica proposicional para obtener el valor de aplicar las conectivas.
Por ejemplo en el siguiente ejemplo:
$E(j,m) \wedge E(m,j)$
Estamos diciendo que Juan y María están enamorados uno del otro.
En el siguiente:
$E(j,m) \wedge \neg E(m,j)$
Estamos diciendo que Juan ama a María pero María no le corresponde.

Parte 3. Cuantificadores y Variables

Índice

[currentsection,currentsubsection].

Cuantificadores.

Lo último que nos falta ver es como representar oraciones que contienen las palabras "Todos", "Alguno" y "Ninguno".
Para representar esto surge la idea de **cuantificador**.
Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que un predicado es VERDADEROsi se aplica el mismo a cada uno de los individuos del universo.
Vamos a ver tres cuantificadores, el **cuantificador universarl**, el **cuantificador existencial** y el **cuantificador existencial negado**.

Cuantificadores.

Para entender mejor el concepto supongamos que en nuestro universo tenemos n individuos (donde n es un número cualquiera).
Tendremos entonces las siguientes constantes representando a dichos individuos.
$c_1, c_2, c_3, ..., c_{n-1}, c_n$
Supongamos también que contamos con un predicado $P(x)$.

Cuantificador Universal.

El **Cuantificador Universal** se utiliza para afirmar que **todos** los individuos cumplen el predicado.
Es decir, que si aplicamos el predicado a cada uno de los individuos del universo, este debe dar VERDADEROen todos los casos.
El cuantificador universal se representa con el símbolo $\forall$.
Si queremos decir que "Todos los individuos cumplen el predicado P" escribimos:
$\forall x.P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:
$\forall x.P(x) = P(c_1) \wedge P(c_2) \wedge P(c_3) \wedge ... \wedge P(c_{n-1}) \wedge P(c_n)$

Cuantificador Universal.

Los cuantificadores no solo aplican a un predicado, sino a toda la fórmula que viene luego del cuantificador.
Así por ejemplo *"$\forall x.P(x) \wedge \neg Q(x)$"* es equivalente a decir que todos los individuos cumplen *"$P(x) \wedge \neg Q(x)$"*.
Así, se cumple lo siguiente:
$\forall x.P(x) \wedge \neg Q(x) = (P(c_1) \wedge \neg Q(c_1)) \wedge (P(c_2) \wedge \neg Q(c_2)) \wedge ... \wedge \wedge (P(c_n) \wedge \neg Q(c_n))$

Variables.

Pero, ¿Qué significa $\forall x$?, o mejor dicho, ¿De donde sale esa x?
La x es una **variable**. Una **variable** representa, de forma similar a un parámetro, a un individuo. Pero ¿A qué individuo? La respuesta es, a todos.
La idea es, el cuantificador dice, *"Para todo individuo del universo, llamémoslo x, ese x cumple el siguiente predicado"*.
¿Por qué es importante ponerle un nombre al individuo? Porque podemos cuantificar más de un individuo. Por ejemplo, *"Para todo par de numero, llamemos al primero x y al segundo y, se cumple ..."*.
Eso podemos formalizarlo como: $\forall x.\forall y.....$ Otra forma de representar lo mismo es $\forall x, y.....$

Cuantificador Existencial.

El **cuantificador existencial** es para indicar que existe **algún** elemento (o más de uno) que cumplen el predicado.
Es decir, nos indica que si aplicamos el predicado a cada individuo del universo, habrá al menos uno para el cual el predicado evaluará a VERDADERO.
El cuantificador existencial se representa con el símbolo **"$\exists$"**.
Si queremos decir que "Algún individuo cumple el predicado P" escribimos:
$\exists x.P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:
$\exists x.P(x) = P(c_1) \vee P(c_2) \vee P(c_3) \vee ... \vee P(c_{n-1}) \vee P(c_n)$

Cuantificador Existencial Negado.

El **cuantificador existencial negado** es para indicar que **no** existe **ningún** individuo que cumple el predicado.
Es decir, nos indica que si aplicamos el predicado a cada individuo del universo, todos los individuos evaluarán a FALSO.
El cuantificador existencial negado se representa con el símbolo **"$\nexists$"**.

Si queremos decir que "Ningún individuo cumple el predicado P" escribimos:
$\nexists x.P(x)$

Cuantificador Existencial Negado - Cont.

En este sentido se pueden encontrar las siguientes equivalencias:
$\nexists x.P(x) = \forall x.\neg P(x)$
O lo que es lo mismo:
$\nexists x.P(x) = (\neg P(c_1)) \wedge (\neg P(c_2)) \wedge ... \wedge (\neg P(c_n))$
Se llama "cuantificador existencial negado" porque decir *Ninguno ...* es lo mismo que decir *No existe alguno que ...*.
Sin embargo, vemos que, a nivel de fórmula, está más cerca del cuantificador universal, pues también es lo mismo que decir *Todos no cumplen ...*

Sección 3. La lógica de predicados en la matemática

Índice

[currentsection,currentsubsection].

Lógica en la matemática.

La lógica de predicados es muy utilizada en matemática para exponer propiedades sobre distintos elementos (por ejemplo, números, funciones, etc.)
La operaciones aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación y la división, son funciones de la lógica de predicados (En particular, de aridad dos. Dados dos números, la suma devuelve otro número, por lo que es una forma de representar individuos).
Las comparaciones, como la igualdad, mayor qué, menor o igual qué, etc. son predicados (También en este caso de aridad dos, dados dos números, la igualdad me dice VERDADEROsi efectivamente son iguales, y FALSOen caso contrario).

Notación lógico-matemática.

Como diferenciación interesante con respecto a la lógica tradicional, en matemática no es necesario definir el diccionario (al menos no para las operaciones básicas), pues el significado de los símbolos utilizados ya es conocido. Por eso, la notación matemática se mezcla con la notación de la lógica de predicados.
Por ejemplo, en lugar de escribir "$suma(x, y)$" escribimos directamente "$x + y$".
También en lugar de escribir "*Igual(x, y)*" escribimos "$x = y$".
Sin embargo, solo cambia la notación. Semánticamente, el significado es el mismo.

Ejemplo conmutatividad de la suma.

Las cosas se entienden mejor con un ejemplo, veamos entonces como expresar lógicamente algunas expresiones comunes.
La suma es conmutativa para todo par de números.
$\forall x \in \Re, y \in \Re . x + y = y + x$
En notación lógica tradicional escribiríamos: $\forall x . \forall y . EsReal(x) \wedge EsReal(y) \rightarrow Iguales(suma(x, y), suma(y, x))$

Mas ejemplos.

Asociatividad:
$\forall x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re . (x + y) + z = x + (y + z)$
Distributividad:
$\forall x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re . x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
Neutros:
$\forall x \in \Re . x + 0 = x$
$\forall x \in \Re . x \cdot 1 = x$

Fin de la lección.