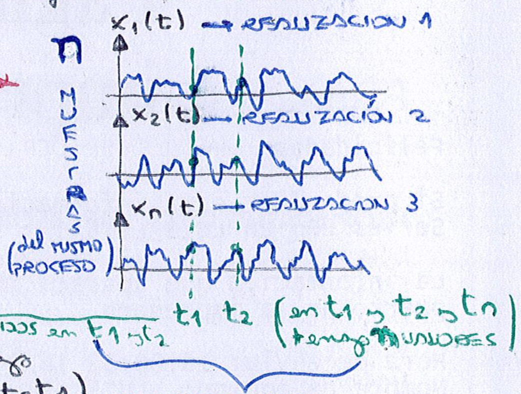
# PROCESOS ESTOCÁSTICOS → producen SEÑALES ALEATORIAS → presentan un comportamiento desconocido de TIPO ESTOCÁSTICO
- RUIDO
- OSC. CAÓTICAS
- VOZ HUMANA

→ analizando el PROCESO ESTOCÁSTICO que las produce, se pueden caracterizar dichas señales

→ CADA REALIZACIÓN $x_i(t)$ obtenida de observar el PROCESO recibe el nombre de MUESTRA

→ al CONJ. de las $\infty$ REALIZACIONES temporales generadas por los procesos $x_1(t); x_i(t), \dots; x_n(t)$ se lo llama ENSAMBLE




→ la caracterización de estas señales se efectúa a partir de PROMEDIOS ESTOCÁSTICOS

puedo sacar el PROMEDIO de los VALORES obtenidos en $t_1$ y $t_2$

(MEDIA DE ENSAMBLE)
→ VALOR ESPERADO → VALOR MEDIO obtenido a lo largo del ENSAMBLE tomando t cte ($t=t_1$)

$$\left[E[x(t_1)] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)\right]$$

→ SUMO el VALOR en $t_1$ de todos los X ($x_1$ a $x_n$) (de 1 a N) y los DIVIDO por N

→ no se calcula en la práctica por NO conocer N (MUESTRAS) pero se lo APROX. con un CONJ. de MUESTRAS

$$(E[x(t_1)] \neq E[x(t_2)])$$

→ considerando TODAS las MUESTRAS del ENSAMBLE ($x_1(t); \dots; x_n(t)$), que describen al proceso EN TODOS LOS VALORES POSIBLES DE tiempo t, se pueden definir:

→ PROMEDIO LINEAL TEMPORAL → caracteriza la variación del valor medio en el t (es como el ESPERADO pero para cualquier t)

$$\left[\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right]$$

→ PROMEDIO CUADRÁTICO TEMPORAL → permite efectuar la evaluación de la POTENCIA PROMEDIO del proceso en el t

$$\left[P_x(t) = E[x^2(t)] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2(t)\right]$$

→ VARIANZA TEMPORAL → cuadrado de la DESVIACIÓN del promedio LINEAL.
→ MIDE DISPERSIÓN de los datos en torno al PROMEDIO

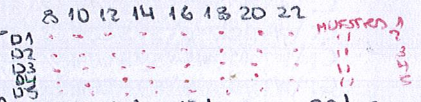
$$\left[\sigma_x^2(t) = E[x(t) - \mu_x(t)]^2 = E[x^2(t)] - \mu_x^2(t)\right]$$

TODOS ESTOS SE LLAMAN MOMENTOS DE 1º ORDEN por depender de un t ÚNICO

→ con ellos 2, se pueden describir los procesos, resultan necesarios pues puede suceder que 2 procesos ESTOCÁSTICOS ≠ tengan ≠ VARIANZAS temp = PROMEDIO $\mu(t)$ — ¡es lo que los DIFERENCIA!

SIN EMBARGO LA DESCRIPCIÓN COMPLETA DEL PROCESO SE OBTIENE ADICIONANDO VALORES ESPERADOS DE 2º ORDEN (dependen de 2 t ≠): LA F. de CORRELACIÓN

en MATLAB, si queremos caracterizar un proceso:

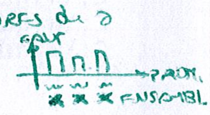



```
A = load('temp.txt'); % carga los datos de una ENSAMBLE
```
de temperaturas tomadas en 5 DÍAS, a las 8hs, 10hs, 12hs, ..., 22hs

```
a = mean (A); % como A es una MATRIZ, a será un VECTOR donde el elemento será el
```
PROMEDIO de las COLUMNAS, osea de las horas → PROMEDIO DE ENSAMBLE (o temporal)

```
b = mean (transpose (A)); % TRANSPONE A: a será un VECTOR donde c/elemento será el
```
PROMEDIO de las FILAS osea de los DÍAS → PROMEDIO MUESTRAL

```
hist (a,x); % histograma del VECTOR a, donde x es, de a cuanto agrupa los VALORES de a
hist (b,x);
std (a); } DESVIACIONES
std (b); } ESTÁNDAR
```



## FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN: en el ENSAMBLE → MEDIDAS DE SIMILARIDAD

↳ como se vió antes, el prom. y la varianza se prolongan en un instante temp. específico

↳ por esto, resultan INCAPACES DE EVALUAR LAS DEPENDENCIAS ESTADÍSTICAS ENTRE ≠ INSTANTES DE LA SEÑAL

↳ como consecuencia de ello, se usa la FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN $\phi_{xx}$ (FAC)

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)x_i(t_2)}$$ MOMENTO DE 2º ORDEN

↳ DESCRIBE la RELACIÓN entre los VALORES ALEATORIOS RESULTANTES DEL ENSAMBLE en los INSTANTES $t_1$ y $t_2$
→ SI RESULTA ELEVADA, $x(t)$ en $t_1$ se CORRELACIONA LINEALMENTE a $x(t)$ en $t_2$.
→ brinda NOCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LA SEÑAL
→ identifica CUAN RÁPIDAMENTE cambian los valores de $x(t)$

ESTA NO TIENE EL DESPLAZAM. que tenía la $R_{xx}(\tau)$
• DEPENDE FUERTEMENTE DE LOS INSTANTES DONDE NOS PARAMOS
• LA QUE MAS ALTA DA INDICA LA CORRELACIÓN LINEAL MAS FUERTE

## AUTOCOVARIANZA → constituye la FAC, con REMOCIÓN DEL VALOR MEDIO

↳ $$\boxed{C_{xx}(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-\mu_1)(X(t_2)-\mu_2)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x(t_1)-\mu_1)(x(t_2)-\mu_2)}$$

P/ NORMALIZAR, RESTO el VALOR MEDIO

↳ en el ORIGEN REPRESENTA la VARIANZA → $\boxed{C_{xx}(t_1,t_2)=\sigma^2_{x_1}}$

↳ además → $\boxed{C_{xx}(t_1,t_2)=\phi_{xx}(t_1,t_2)-\mu_1\mu_2}$

FAC POSITIVA → implica una ASOCIACIÓN LINEAL entre los valores en $t_1$ y $t_2$ de pendiente POSITIVA
→ VALORES ELEVADOS se corresponden con valores elevados

FAC NEGATIVA → implica una ASOCIACIÓN que refiere a una PENDIENTE menor a 0
→ VALORES ELEVADOS se corresponden con VALORES PEQUEÑOS)

EL VALOR ABSOLUTO INDICA LA FUERZA DE ASOCIACIÓN

## ¿CUANDO UN PROCESO SE CONSIDERA ESTACIONARIO?

↳ un proceso aleatorio se denomina ESTACIONARIO EN SENTIDO ESTRICTO si TODAS SUS PROPIEDADES ESTADÍSTICAS (ORDEN M) NO CAMBIAN CON EL $t$

CONSIDERANDO UN CORRIM. temp. $\Delta t$

↳ MOMENTOS DE 1º ORDEN → $\boxed{E[g(x(t_1))]=E[g(x(t_1+\Delta t))]}$ → $\mu_x(t)=\mu_x$, $P_x(t)=P_x$, $\sigma_x^2(t)=\sigma_x^2$, ⋮

↳ MOMENTOS DE 2º ORDEN → $\boxed{\varphi_{xx}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]=E[x(t_1+\Delta t)\,x(t_2+\Delta t)]}$

↳ en CONSECUENCIA, la FAC del ENSAMBLE, sólo dependerá de la DIFERENCIA entre $t_1$ y $t_2$ ($\tau=t_1-t_2$) Y NO DEL INSTANTE DE EVALUACIÓN (ej. tomo entre 8hs, 10hs; 10hs, 12hs; 12hs, 14hs)

⇒ $\boxed{\varphi_{xx}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]=E[x(t_1+\tau)x(t_2+\tau)]=\varphi_{xx}(\tau) \quad \tau=t_1-t_2}$

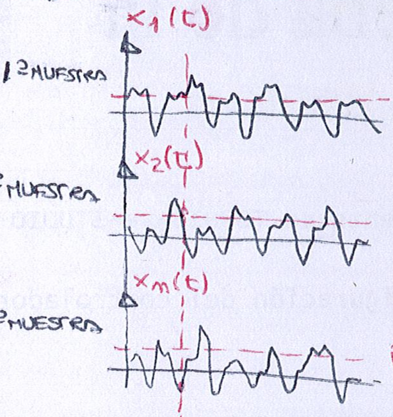
↳ si en vez de que TODA LA ESTADÍSTICA se mantenga cte, SOLO SE CUMPLE LA CONDICIÓN RELATIVA AL PROMEDIO temp (cte p/ TODO $t$) y a la FAC (sólo depend. de $\tau=t_1-t_2$) ⟹ EL PROCESO se llama ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO

## PROCESO ERGÓDICO

→ sea el PROMEDIO ~~temporal~~ MUESTRAL de una OBSERVACIÓN → $\overline{x_i(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)\,dt$

→ un PROCESO ESTACIONARIO se denomina ERGÓDICO EN LA MEDIA si todos los promedios ~~temporales~~ MUESTRALES de c/muestra COINCIDEN con los del ENSAMBLE $\mu_X$

~~VALIENDO~~




PROM. ~~temp~~ MUESTRAL de $x_1$ $(\overline{x_1(t)})$

PROM. ~~temp~~ MUESTRAL de $x_2$ $(\overline{x_2(t)})$

PROM. ~~temp~~ MUESTRAL de $x_m$ $(\overline{x_m(t)})$

DEBEN SER TODOS =

$\mu_X$ DEL ENSAMBLE → DEBE SER IGUAL a $\mu_X$ PARA SER ERGÓDICO

ME QUEDO CON UNA SOLA MUESTRA

PUES si ∀ $\overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \overline{x_m(t)} = \mu_X$ ∴ con $x_1(t)$ hallo $\overline{x_1(t)}$ y como $\overline{x_1(t)} = \mu_X$ hallo $\mu_X$ con UNA SOLA MUESTRA

SE USA UNA SOLA MUESTRA DEL PROCESO p/CALCULAR $\mu_X$

→ si además de la MEDIA, ocurre lo mismo con la AUTOCORRELACIÓN ⇒ el PROCESO resulta ERGÓDICO en SENTIDO DÉBIL, cumpliendo

- ↳ VALOR MEDIO
  - ↳ $E[x(t)] = \mu_X = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$
  - ↳ VALOR ESP. coincide con la MEDIA MUESTRAL
- ↳ FAC
  - ↳ $\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{t=t}^{T} x(t)x(t+\tau)\,dt$
  - ↳ FAC del ENSAMBLE COINCIDE con la FAC MUESTRAL

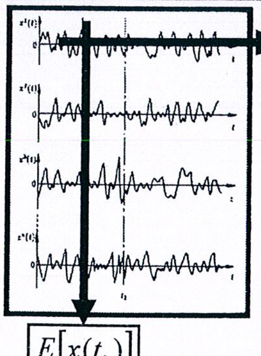
→ SI SE PUEDE CALCULAR TODA LA ESTADÍSTICA A PARTIR de una ÚNICA MUESTRA, el PROCESO es ERGÓDICO EN SENTIDO FUERTE

→ UN PROCESO ERGÓDICO ES ESTACIONARIO → ya que $\mu_X(t) = cte$ en el t.
(EL RECÍPROCO ES FALSO) (UN SOLO $\mu_X = \overline{x_1}(t) = \overline{x_2}(t) = \overline{x_m}(t)$)

→ generalmente, los procesos NO SUELEN SER ERGÓDICOS O ESTACIONARIOS

↳ a veces se asume o ESPERA ERGODICIDAD p/poder trabajar con una SOLA REALIZACIÓN pues no es posible tener acceso al ENSAMBLE

**Proceso Estocástico (Ensamble)**



$\overline{x_1(t)}$

$E[x(t_1)]$

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

**CARACTERIZACIÓN del PE**

$$\mu_X(t) = \mu_X = cte$$

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2) = \varphi_{xx}(\tau) \text{ con } \tau = t_1 - t_2$$

***ESTACIONARIO* en sentido amplio (si no se cumple se no es estacionario)**

RUIDO → es una SEÑAL ALEATORIA, de carácter INDESEABLE

→ SI SE VINCULA con una señal, genera una DEGRADACIÓN en la INTELIGIBILIDAD de esta

→ cuantificada (la de SERIES) por la RELACIÓN SEÑAL-RUIDO → COCIENTE entre la POT. de la señal y la del ruido

→ TIPOS → BLANCO → ES IDEAL → por estar totalmente DESCORRELACIONADO en relación a $\tau$

→ DISTRIB. de prob. GAUSSIANA ∴ su FAC es: $\boxed{R_{xx}(\tau) = G_0\,\delta(\tau)}$ → MÁXIMO al compararse con sí mismo en el ORIGEN, luego es 0

→ TÉRMICO → se comporta como el blanco bajo ciertas circunstancias

→ su FAC tiende a → $R_{xx}(\tau) \cong G_0/(1+\tau^2)$

→ ROSA → su FAC tiene la forma → $R_{xx}(\tau) = G_0 \operatorname{sen}(\tau)/\tau$

→ sea entonces

→ $p(t) = x(t) + n(t)$; suma de señal y ruido, se demuestra que la FAC resultante es.

$$\boxed{R_{pp}(t) = R_{xx}(t) + R_{nn}(t) + R_{xn}(t) + R_{nx}(t)}$$

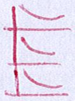
∴ si $x(t)$ y $n(t)$ NO ESTÁN CORRELACIONADOS ⇒ $\boxed{R_{pp}(t) = R_{xx}(t) + R_{nn}(t)}$

---

## ¿CÓMO SE TRABAJA CON SISTEMAS LTI?

⇒ LAS PROPIEDADES DE ESTACIONARIEDAD y ERGODICIDAD de la ENTRADA, SE CONSERVAN a la SALIDA

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$   $\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$

POR SER DETERMINÍSTICA, como siempre es igual ⇒  ⇒ $E(h(t)) = h(t)$

∴ el VALOR ESPERADO de $\mu_y(t)$ de la salida $y(t)$ será:

$$\mu_y(t) = E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E[x(t)] * h(t) \Rightarrow \boxed{\mu_y(t) = h(t) * \mu_x(t)}$$

y si el PROCESO $x(t)$ es ESTACIONARIO ⇒ $\mu_x(t) = \mu_x$ ⇒ $\boxed{\mu_y = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu_x\, d\tau = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)\, dt}$

⇒ FAC temporal (del ENSAMBLE) → $\boxed{R_{yy}(\tau) = E[y(t+\tau)\,y(t)]}$

∴ considerando $y(t) = x(t) * h(t)$ se demuestra que

$$\boxed{\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{hh}(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= h(-\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) &= h(\tau) * R_{xx}(\tau) \end{aligned}} — Ⓐ$$

FAC DE LA SALIDA          CORREL. CRUZADA ENTRADA - SALIDA

viendo Ⓐ ⇒ si se coloca a la entrada del SISTEMA una SEÑAL TOTALMENTE DESCORRELACIONADA (como RUIDO BLANCO → $R_{xx}(\tau) = \delta(t)$) ⇒ el RESULTADO SERÍA $h(t)$