TRANSFORMADA DE FOURIER: 2ª PARTE

¿CÓMO SE DISTRIBUYE LA ENERGÍA DE UNA SEÑAL $F(t)$ EN TORNO A SU CONTENIDO ESPECTRAL $F(w)$?

Considerando la TF de $F_1(t) \cdot F_2(t) \Rightarrow F_1(t)F_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w)$

APLIC. DEF. de TF y de CONV.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t)F_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(w)F_2(-w)\,dw$$ ¿CÓMO?

~~TEOREMA DE PLANCHEREL~~

Asumiendo entonces que $F_1(t) = F(t)$; $F_2(t)$ su FUNCIÓN CONJUGADA y recordando que: $\overline{F(t)} \xrightarrow{TF} \overline{F(-w)}$

se obtiene entonces que:
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{F(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\overline{F(w)}\,dw$$
(el PROD de 2 COMPL. CONJ. es su MODULO al [cuadrado]) TEOREMA DE PLANCHEREL

y operando:
$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2\,dw\right]$$
REPRESENTA DENSIDAD DE ENERGÍA

IDENTIDAD DE PARSEVAL: la E de $F(t)$ se distrib. en $F(w)$; su forma general es el TEOREMA DE PLANCHEREL

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |F(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$
(IGUAL que en la S[erie])

∴ LA E CONTENIDA en la señal temp. $f(t)$ SE DISTRIBUYE en el ESPECTRO CONTINUO de Frec $F(w)$

ANCHO DE BANDA — p/ los ESPECTROS

⇒ ANCHO DE BANDA ABSOLUTO DE UNA SEÑAL ⇒ se encuentra definido por la anchura de su espectro, partiendo de $w = 0$ (normalmente es ∞, "BANDA ILIMITADA")

⇒ ANCHO DE BANDA EFECTIVO DE UNA SEÑAL (ABE) ⇒ intervalo de frecuencias (partiendo de $w=0$) limitado por una frec ESPECÍFICA llamada FRECUENCIA DE CORTE w_c

REPRESENTA el CONTENIDO de INFORMAC.

Siempre se define el ABE resp. de w_c y 0

• El valor de ABE (w_c) se determina EN VIRTUD DE UN CRITERIO:

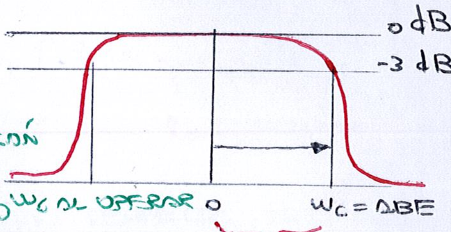
⇒ en $[-w_c, w_c] \Rightarrow$ se obtiene la MITAD de la POT/ENERGÍA TOTAL.

⇒ en w_c ocurre el PRIMER NULO

⇒ en $[-w_c, w_c]$ se obtiene el % DE ENERGÍA TOTAL

⇒ en $[-w_c, w_c]$ " " " % DE AREA TOTAL

A PARTIR de w_c en ADELANTE consideramos que ∄ INFORMACIÓN y SIEMPRE INTEGRA- MOS entre $-w_c$ y w_c AL OPERAR



$ABE = w_c - 0 = w_c$

CÁLCULOS DE ABE por CRITERIO ⇒ sea $x(t) = e^{-2t}u(t)$, cuyo espectro va de $-\infty$ a $+\infty$

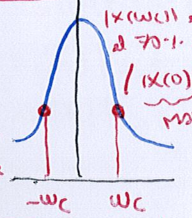
¿Qué rango de Frec $[0; w_c]$ pueden considerarse REPRESENTATIVAS de $x(t)$? DEPENDE DEL CRITERIO APLICADO a su E_{TOTAL}

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(w)|^2\,dw \quad (E_{TOTAL})$$
w_c LO DETERMINO YO SEGÚN el CRITERIO

a) CRITERIO DE POTENCIA (ENERGÍA) MITAD:
$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} |X(w)|^2 = \frac{E_T}{2}\right]$$
Se busca un w_c (ABE) que cumpla con la premisa de concentrar MITAD DE ENERGÍA (o POT. si fuera PERIÓDICA) TOTAL (la E se calcula en $[-w_c, w_c]$)

b) CRITERIO DE PORCENTAJE ENERGÉTICO:
$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} |X(w)|^2 = \%\, E_T\right]$$
se determina w_c (ABE) de modo de concentrar un % de la ENERGÍA/POTENCIA. Se suele tomar 90, 95 ó 99% → ABE POTENCIA

c) CRITERIO DE AMPLITUD ESPECTRAL:
$$\left[|X(w_c)| = \frac{|X(0)|}{10}\right]$$
se determina w_c (ABE) de modo que $|X(w_c)|$ represente una parte de $|X(0)|$ (AMPL MAX)



EL ABE SE DEFINE EN VIRTUD DEL RANGO DE FRECUENCIAS DONDE SE ~~CONSIDERA~~ CONCENTRA LA MAYOR PARTE DE LA INFO DE $x(t)$

ANÁLISIS DE SISTEMAS

→ se había visto que la salida de un SIST. LTI, si la entrada está en SERIES DE FOURIER $X(nw_0)$, la salida $Y(nw_0)$ también y que Y_n/X_n está DETERMINADA por $H(nw_0)$ (TRANSFERENCIA)

$x(t)$, $X(nw_0)$ → [$h(t)$ / $H(nw_0)$] → $y(t)$, $Y(nw_0)$

• Como $y(t) = x(t) * \underset{\text{R. IMPULSIONAL}}{h(t)} \Rightarrow \left[y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{TF} Y(w) = X(w)H(w)\right]$ POR PROP DE CONVOLUCIÓN

⇒ En el dom. de la frec, las CARACTERÍSTICAS INTERNAS DEL SIST LTI LAS REPRESENTA $H(w)$

$x(t)$, $X(w)$, e^{jw_0t} → $\boxed{H(w)}$ → $y(t)$, $Y(w)$, $H(w_0)e^{jw_0t}$

$$\left[H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = |H(w)|e^{\varphi(w)}\right]$$

SI LA ENTRADA es UNA ARMÓNICA, LA SALIDA (luego del RÉG. TRANSITORIO) está formada POR ESA ARMÓNICA AFECTADA en AMPL Y FASE (LAS DE $H(w)$)

$H(\omega)$ ahora se hallará aplicando TF a la EDO del sistema → SE TRANSFORMA en una EC. ALGEBR. en VAR. COMPL.

- ya que $H(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ y en la EDO tengo $x(t)$ e $y(t)$ ∴ TRANSFORMO y luego $\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$
- y para OBTENER LA RESPUESTA IMPULSIONAL $h(t)$, hacemos la ANTITRANSFORMADA DE FOURIER (VAMOS DE LA DERECHA A IZQ EN LA TABLA)

∴ PODEMOS OBTENER LA $h(t)$ SIN EFECTUAR CONV. O RESOLVER LA EDO

- TAMBIEN PODEMOS OBTENER $y(t)$ a partir de $x(t)$ APLICANDO TF

⇒ a partir de la EDO TRANSFORMADA DESPEJAMOS $Y(\omega)$ Y LUEGO LA ANTITRANSFORMAMOS

⇒ a veces habrá que hacer CAMBIO DE VARIABLES o EXPANDIR EN FRACCIONES SIMPLES

¿QUE SUCEDE CON SEÑALES PERIÓDICAS? ⇒ $f(t)$ PERIODICA de $T = T_0$ ⇒ $\left[f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right]$

⇒ EL ESPECTRO RESULTANTE ES EQUIV. al de FOURIER (SDF), pero conformado por FUNCIONES $\delta(t)$

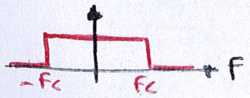
(LAS CUALES son TF de las exp compl. de la SDF)

FILTROS → son SISTEMAS cuya $H(\omega)$ PRIVILEGIA el PASO DE CIERTAS BANDAS DE FRECUENCIAS (BANDA DE PASO) e IMPIDE el PASO DE OTRAS (BANDA DE ATENUACIÓN)

⇒ las frecuencias que definen los LIMITES de las bandas se llaman FRECUENCIAS DE CORTE (f_c)

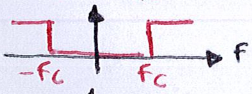
TIPOS

① → PASA BAJOS ⇒



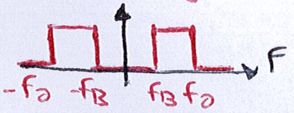
⇒ PASAN todas las f tales que $-f_c < f < f_c$

② → PASA ALTOS ⇒

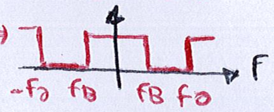


⇒ pasan todas las f MENOS las que $-f_c < f < f_c$

③ → PASA-BANDA ⇒



④ → ELIMINA-BANDA ⇒



P/ UNA TRANSMISION PERFECTA, $H(\omega)$ DEBE presentar MODULO cte (GANANCIA) y FASE LINEAL ⇒ CASO CONTRARIO HAY DISTORSIÓN

¿COMO FUNCIONA?

- El espectro de la salida está formado por el PRODUCTO DE LOS ESPECTROS de $X(\omega)$ y la transf. $H(\omega)$
- Según el valor de $|H(f)|$ para cierta f_i SE OBTENDRA:
  - una $Y(f_i)$ SIN CAMBIOS → $|H(f_i)| = 1$
  - " ATENUADA → $|H(f_i)| < 1$
  - " AMPLIFICADA → $|H(f_i)| > 1$
  - " ELIMINADA → $|H(f_i)| = 0$