# TRANSFORMADA DE LAPLACE: PARTE 1

⇒ Esta transformada es MAS AMPLIA Y OPERATIVA que la TFTC y tiene una FUERTE APLICABILIDAD en el ANÁLISIS DE SIST. LTI (así como la TFTC POSIBILITA un ANÁLISIS espectral de SIST. temp)

- señales que NO DISPONEN DE TRANSF. (CONT. E $\infty$)
- señales que están EN EL LIMITE FORMAL DE LA TF
- la RESOLUCIÓN DE EDOS NO deja CONTEMPLAR COND. INIC.
- DIFICIL establecer CRITERIOS DE ESTABILIDAD de los sistemas

⇒ CARACTERÍSTICAS
- → EDOS con FORMA ALGEBRAICA (INDEP. COND. INIC)
- → ADMITE SEÑALES que NO DISPONEN DE TFTC
- → RELACIÓN DIRECTA con la TFTC → podemos evaluar $\underbrace{\text{cont. espectral}}$ de func. admitidas en TFTC

⇒ Una de las CONDIC. DE $\exists$ de la TFTC es que la SEÑAL sea de $E < \infty$ (CUADRADO INTEGRABLE)
Esta condición puede ser CUMPLIMENTADA AGREGANDO UN TÉRMINO DE CONVERGENCIA $e^{-\sigma t}$ Y ASEGURAR una SOL. CONVERGENTE ⇒ $\left[E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|^2 dt < \infty\right]$

⇒ ELIGIENDO VALORES ADECUADOS DE $\sigma$ / tal que $x(t)e^{-\sigma t}$ DE E FINITA / POSIBILITA el CALC. DE TFTC

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

(el RANGO DE $\sigma$ DEBE ser definido p/ POSIBILITAR la TF)

ej: $u(t)$ es de $E\ \infty$ pero $u(t) \cdot e^{-\sigma t}$ → SE VUELVE de $E < \infty$ p/ $\sigma > 0$

⇒ SE DEFINE entonces: $\boxed{S = \sigma + j\omega}$ FRECUENCIA COMPLEJA y se obtiene así la $\overbrace{\text{TRANSF. DE LAPLACE}}^{TL}$

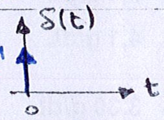
$$\left[X(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt\right] \Longleftrightarrow \left[x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds\right]$$

TRANSF. DE LAPLACE (TL) — ANTITRANSF. DE LAPLACE — SOLO SI $x(t<0) = 0$

⇒ En la TL NO SE OBTIENE FORMALMENTE con el CONTENIDO espectral de la SEÑAL ($\omega$ está INCLUIDO en $s$)
∴ p/ ello SE hace $S = j\omega$ ($\sigma = 0$ → VUELTA a dom. FOURIER) SI EL RANGO DE $\sigma$ LO PERMITE (CASO DE SEÑ. DE $E < \infty$)

## APLICANDO TL

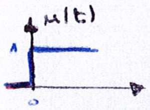
① → FUNCIÓN DELTA DE DIRAC $x(t) = \delta(t)$ →




$L\{\delta(t)\} = X(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt$

∴ $[\delta(t) \to 1, \forall \sigma]$ ó cte → $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ ⇒ $X(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1\, dt = 1$

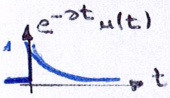
② → FUNCIÓN ESCALÓN $x(t) = u(t)$ →




$L\{u(t)\} = X(S) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) + \frac{1}{s}$

∴ $\left[u(t) \to \frac{1}{s}, \sigma > 0\right]$ → siendo $e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$ ⇒ $\lim_{t \to \infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = 0$ si $\sigma > 0$

③ → EXP. DECRECIENTE $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ →




$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\right) + \frac{1}{s+a}$

∴ $\left[e^{-at}u(t) \to \frac{1}{s+a}, \sigma > -a\right]$ → $e^{-(s+a)t} = e^{-(\sigma + j\omega + a)t} = e^{-(\sigma + a)t} \cdot e^{-j\omega t}$ → $\lim_{t \to \infty} e^{-(\sigma + a)t} \cdot e^{-j\omega t} = 0$ si $\sigma + a > 0$

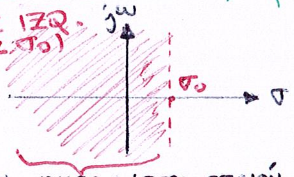
④ → EXP. CRECIENTE IZQ. $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, $a > 0$ → trabajando como en ③ → $\left[-e^{-at}u(-t) \to \frac{1}{s+a}, \sigma < -a\right]$ (MISMA TL que ③ pero ≠ VALORES DE $\sigma$)

⇒ FUNCIONES que NO POSEEN TL ($\nexists \sigma$ tal que converja la func.) → $x(t) = Ce^{-t}$; $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ } pues $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt \to \infty\ \forall \sigma$

## PLANO COMPLEJO DE LAPLACE (PLANO S) → por ser $S = \sigma + j\omega$ VAR. COMPLEJA

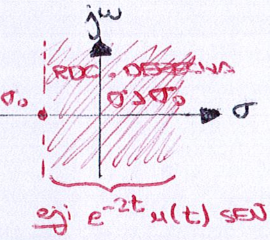
⇒ SE DEFINEN "REGIONES DE CONVERG" (RdCs), al considerar que la parte Re "$\sigma$" debe CUMPLIR una CONDICIÓN p/ que la $\int$ DE LAPLACE CONVERJA

RDC IZQ. ($\sigma < \sigma_0$)




TL VALIDA p/ ESTA REGIÓN
ej: $-e^{-2t}u(-t)$ (SEÑ. IZQ.)

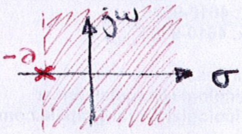

ej: $e^{-2|t|}$




ej: $e^{-2t}u(t)$ SEÑ. DER.

⇒ APLICANDO TL obtenemos FUNC. DE VAR. COMPL "F(S)" y si las mismas son $\overbrace{\text{RACIONALES}}^{F(S) = A(S)/B(S)}$ PODRÁN SER IDENTIFICADAS en el PLANO S a partir DE SUS POLOS Y CEROS

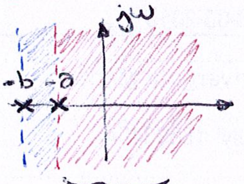
ej: $\left[F(S) = \frac{1}{s+a}; \sigma > -a\right]$ → POLO SIMPLE en $S = -a$ y DICHO VALOR LIMITA LA RdC (en $S < -a$ DIVERGE) ⇒



¿QUÉ PASA SI $x(t)$ ES COMPUESTA? $\Rightarrow x(t) = e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(t)$ con $a>0$, $b>0$

$\therefore X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$ ; $\sigma > -a$ ; $\sigma > -b$

$\therefore$ p/ que la FUNCIÓN COMPUESTA SEA VÁLIDA (ambas ∫ DEBEN CONV.), debe DETERMINARSE UNA REGIÓN DE CONV. COMÚN (INTERS. entre ambas)




ésta es la INTERSECCIÓN

$$\Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b} \ ; \ \sigma > -a}$$

RdC corresponde a la DEL POLO + a la DERECHA

## PROPIEDADES GENERALES DE LA RdC

- NO CONTIENE POLOS → son el lím. de la región (en ellos la TRANSF. diverge)
- SI $x(t) = 0$ en $t < t_0$ (SEÑ. DERECHA) → la RdC es de la FORMA $\sigma > \sigma_0$, con $\sigma_0$ = PARTE Re DEL POLO que MÁS A LA DERECHA ∃
- si $x(t) = 0$ en $t > t_0$ (SEÑ. IZQ.) → la RdC es de la FORMA $\sigma < \sigma_0$, con $\sigma_0$ = PARTE Re DEL POLO que MÁS A LA IZQUIERDA ∃
- SI $x(t)$ es DE DURACIÓN ∞ (SEÑ. BILATERAL) → la RdC es de la FORMA $\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$ (CINTA VERTICAL en PLANO S)
- SI $x(t)$ es DE DURAC. FINITA (INICIA en $t_0$ y CONCLUYE en $t_1$; $t_0$ $t_1$) → la RdC resulta TODO EL PLANO "S" (exceptuando quizás $\sigma = 0$ o $\sigma \to \infty$)

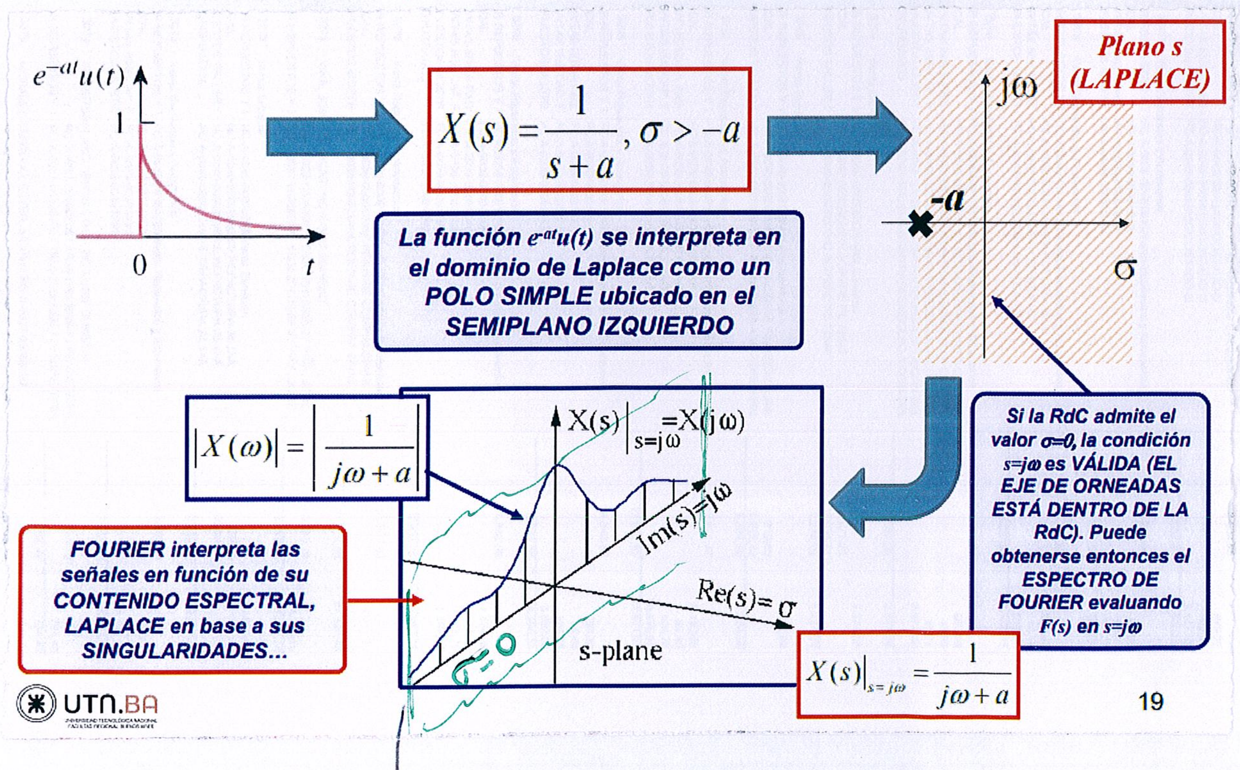
## ¿CÓMO SE CONECTAN FINALMENTE LA TL y LA TFTC?

⇒ hay que tener en cuenta que SI LA CONDICIÓN $\sigma = 0$ PERTENECE a la RdC (posibles valores de $\sigma$ que dan ∃ a la TL) ⇒ "S" puede ser REEMPL. por $j\omega$

$$\Rightarrow \left[ TL\,[F(t)] = TF\,[F(t)\,e^{-\sigma t}] \right] \Rightarrow \left[ TL = TF = \text{SI } S = j\omega \ (\sigma = 0) \right]$$

ESTA COND. IMPLICA que la FUNC. $F(t)$, ADEMÁS DE TL, posee TFTC ($E < \infty$)

BAJO ESTA PREMISA, LAS PROP. DE LA TL SON NECESARIAM. LAS MISMAS que en TFTC




VER que como $\sigma = 0$ pertenece a la RdC, puedo volver al dom de la TF DE FOURIER y obtener el espectro, OBSERVANDO en el PLANO $\sigma = 0$

## PROPIEDADES DE LA TL → evaluadas en "S"

① LINEALIDAD y ESCALADO → SE MANTIENEN INTACTAS

LINEALIDAD: $\left[\begin{array}{l} f(t)+g(t) \xrightarrow{TL} F(s)+G(s) \\ (a+jb)f(t) \xrightarrow{TL} (a+jb)F(s) \end{array}\right]$

ESC: $\left[TL\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)\right]$

② DESPLAZAMIENTO temporal → $\left[f(t-t_0) \xrightarrow{TL} e^{-st_0} F(s)\right]$

③ DESPLAZAMIENTO frecuencial → $\left[e^{\pm s_0 t} f(t) \xrightarrow{TL} F(s \mp s_0)\right]$ con $s_0$ COMPLEJO

④ DERIVADA TEMPORAL → $\left[f'(t) \xrightarrow{TL} sF(s)\right]$

⑤ DERIVADA frecuencial → $\left[-t f(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{d\,F(s)}{ds}\right]$ — $(-t)^n f(t) \leftarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n};\ n \in \mathbb{N}$

⑥ INTEGRACIÓN temporal → $\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{s} F(s)\right]$

⑦ CONVOLUCIÓN

$$\left[f(t) * g(t) \xrightarrow{TL} F(s)\,G(s)\right]$$

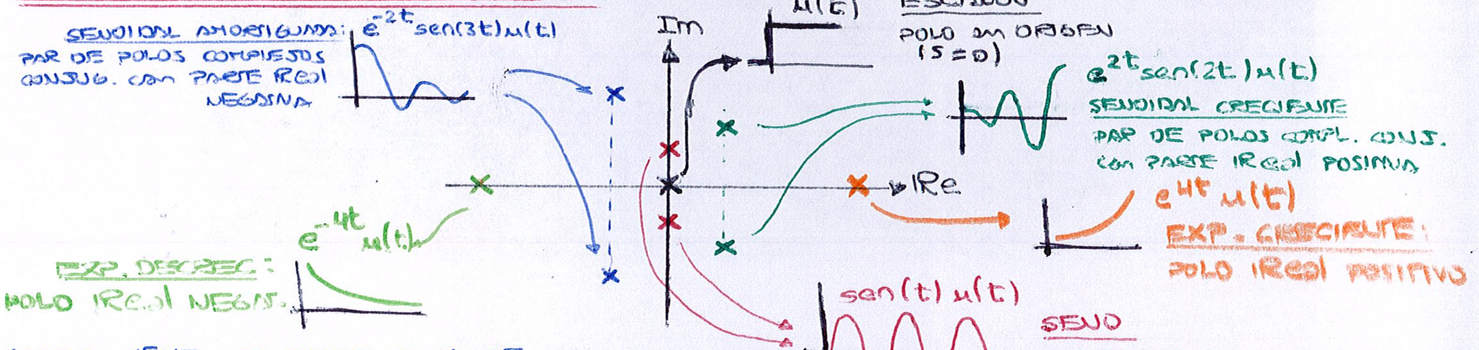
## LIMITACIONES DE LA TF (ADMITIDAS en TL)

⇒ TFTC NO ADMITE SEÑALES DE $E = \infty$ (LAPLACE SI)

⇒ LA RESOL. DE EDOS con TFTC NO permite INCORPORAR COND. INICIALES (SIEMPRE SE ASUMEN NULAS) mientras que la TL SI :-(útil p/ evaluar SIST. LTI)

⇒ ¿CUANDO es CONVENIENTE usar TFTC?
- ANALISIS DE SEÑALES PERIÓDICAS
- ANALISIS ENERG. POR PARSEVAL
- ANALISIS ESPECTRAL
- ANALISIS DE SEÑALES ESTACIONARIAS (ej: SINUSOIDES)

## VISIÓN GENERAL DE LA TL




(TODO VIENE DE HACER LA TL DE LAS FUNC. y ANALIZAR LOS POLOS Y CEROS según "S")

CON LA TL PODEMOS LEER el COMPORTAMIENTO TEMPORAL en VIRTUD DE LA UBICACIÓN DE SUS POLOS Y CEROS (UTIL en ANALISIS DE SIST. LTI)

## ANTITRANSFORMADA: ¿CÓMO VOLVEMOS AL dom. temp? (TIL)

⇒ LA TIL consiste en RESOLVER una INTEGRAL DE LINEA en el CAMPO DE LA VARIABLE COMPL.

$s = \sigma + j\omega$ ⇒ $$\left[x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds\right]$$

CONSISTE en integrar respecto de la VERTICAL $s = \gamma + j\infty$ tal que TODAS LAS SING. DE $X(s)$ queden a la IZQ.

⇒ se proponen 3 OPCIONES p/ SU IMPLEMENTACIÓN:

① usar TABLA DE TRANSF. de manera DIRECTA

② si la transf. es UNA FUNCIÓN RACIONAL (COC. DE POLINOM.) ⇒ separarla en FRACC. PARCIALES y usar la TABLA DE TRANSF (RECOMENDADO); GRADO NUM < GRADO DENOM.

③ ~~[illegible]~~ usar el TEOREMA DE LOS RESIDUOS p/ resolver la INTEGRAL

## APLICANDO EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS → $\left[\oint_C F(s)\,ds = j2\pi \sum_i \mathrm{res}\{F(s)\}\right]$

⇒ sólo se contemplan "LOS RESIDUOS" de las SING. encerradas por la curva C.

⇒ como las FUNC. en el PLANO S están comunmente CONST. por POLOS Y CEROS, puede asumirse entonces ~~[illegible]~~ una curva QUE CONTENGA A LA TOTALIDAD DE LOS POLOS de $X(s)e^{st}$ DE la TIL

⇒ $x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} X(s).e^{st}\,ds$ ⇒ SI $\oint_C F(s)\,ds = j2\pi \sum_i \mathrm{res}\{F(s)\}$ ⇒ $F(s)$ pasa a ser $X(s)e^{st}$

$$\therefore \left[x(t) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(s)\,e^{st}\,ds = \sum_i \mathrm{res}\left[X(s)\,e^{st}\right]\right]$$

siendo $\left[\mathrm{res}\{X(s)e^{st}\}_{s=s_i} = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{s\to s_i} \frac{d^{p-1}}{ds}\left[X(s)e^{st}(s-s_i)^p\right]\right]$

ESTA TECNICA sólo puede usarse con FUNC. DERECHAS ($t=0$ si $t<0$).
SE debe VERIF. en la func. racional que el GRADO DEL NUM sea INF. al GRADO DENOM