# TRANSFORMADA Z → LAPLACE DISCRETIZADO

⇒ Habíamos llegado hasta la **TFTD**, la cual pasaría de la func. de la **TFTC** a una señal discretizada $x_p(t)$, pero su espectro era CONTINUO, lo que tenía espectro DISCRETO era la **DFT** (ÚTIL P/ ANÁLISIS espectral de señ. digitales)

⇒ Se puede hacer un ANÁLISIS SEMEJANTE con la TL, con el fin de EXTENDER SU OPERATIVIDAD a SISTEMAS LTI DISCRETOS en virtud de SU VERSIÓN DISCRETA, LA TRANSFORMADA Z

## APLICANDO TL A UNA SEÑAL DISCRETA

⇒ Aplicamos TL directamente a una SEÑAL MUESTREADA a INTERVALOS $T_s$:

$$X(s) = TL\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s]\,\delta(t-nT_s)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s]\, e^{-snT_s}$$

⟸ SE OBTIENE una sumatoria de exponenciales AFECTADAS por $x[nT_s]$

⇒ Sustituimos ahora por una NUEVA VARIABLE COMPLEJA $Z = e^{sT_s}$ y NORMALIZANDO el eje temporal en $T_s$, se obtiene

$$\left[Z = e^{sT_s}\right] \Rightarrow \left[X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, Z^{-n}\right]$$

COMO CONSECUENCIA DE LA DISCRETIZACIÓN de $x(t)$ se pasa a TRABAJAR en un NUEVO PLANO TRANSFORMADO ($Z = e^{sT_s}$) LLAMADO PLANO Z

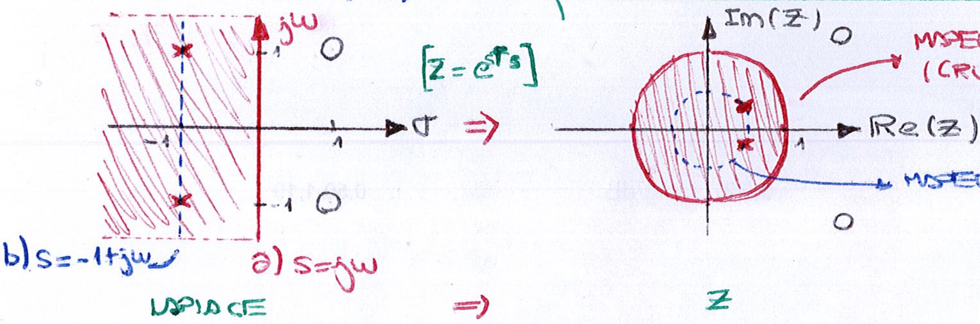
## ASPECTO DEL DOMINIO DE LAPLACE DISCRETIZADO; PLANO Z

⇒ analizando Z: $\left[Z = e^{sT_s} = e^{(\sigma+j\omega)T_s} = \underbrace{e^{\sigma T_s}}_{\rho} . e^{j\omega T_s} \Rightarrow Z = \rho . e^{j\Omega}\right]$ ($\Omega = \omega T_s$, frec. nom. de la TFTD)

↳ a) $s = j\omega$ (eje frecuencial): $\left[Z = e^{sT_s}\Big|_{s=j\omega} = e^{j\omega T_s} = e^{j\Omega}\right]$ ($\rho = 1$ pues $\sigma = 0$)

↳ b) $s = -1 + j\omega$ (RECTA $\sigma = -1$ cte): $\left[Z = e^{(-1+j\omega)T_s} = \underbrace{e^{-1T_s}}_{\rho} . e^{j\Omega} = \rho . e^{j\Omega}\right]$ ($\rho < 1$)

en este caso b) ⇒ VEMOS que las RECTAS VERTICALES SE TRANSFORMAN en CIRCUNFERENCIAS!




MAPEO DE $s = j\omega$ (a)) en $Z = e^{j\Omega}$ (CRU centrada en el origen)

MAPEO DE $s = -1 + j\omega$ (b)) en $Z = \rho e^{j\Omega}$ ($\rho < 1$)

¿Qué podemos ver? → ①: el eje $j\omega$ pasa a ser una CIRCUNF. de RADIO UNITARIO CENTRADA EN EL ORIGEN (CRU, $\rho = 1$)

→ ②: el SEMIPLANO IZQUIERDO pasa al interior de la CRU y el SEMIPLANO DERECHO al exterior

→ ③: Las REGIONES DE CONV. (RdC) se definen conforme a RADIOS respecto del origen (valores de $\rho$)

⇒ definiendo entonces $Z = \rho e^{j\Omega}$ como la "FRECUENCIA COMPLEJA NORMALIZADA", donde $\rho = |Z|$ y $\Omega$ es su fase, SE OBTIENE FORMALMENTE:

$$\left[X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}\right] \text{ TRANSFORMADA Z (TZ)} \iff \left[x[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz\right] \text{ ANTITRANSF. Z (TIZ) si } x[n<0]=0$$

(C debe encerrar a todos los polos de $X(z)z^{n-1}$)

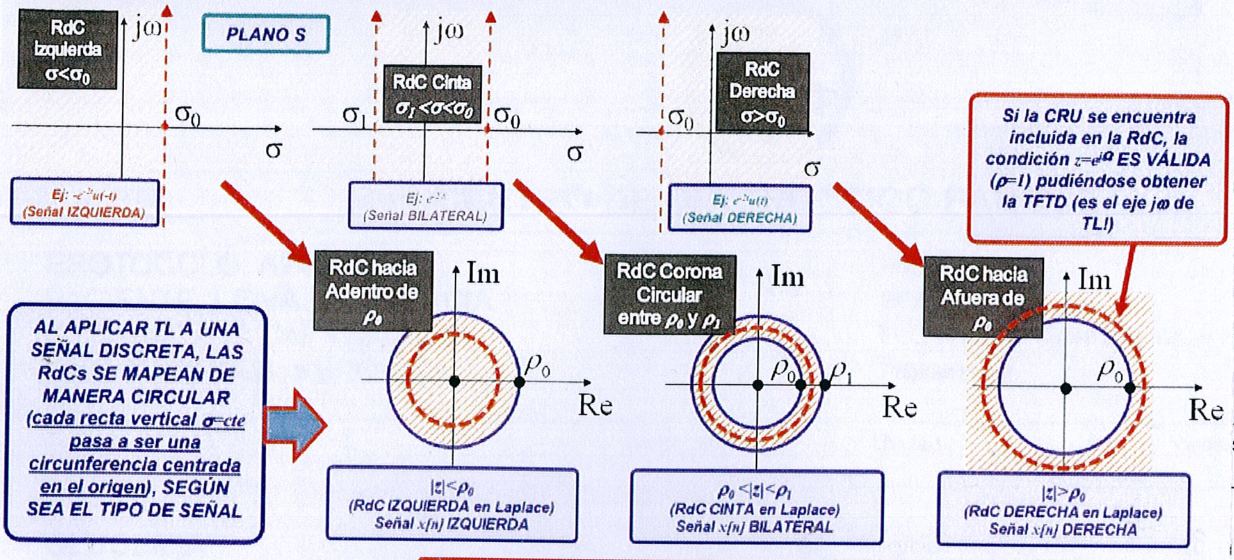
⇒ como en la TL, TAMPOCO se cuenta FORMALMENTE con el espectro de $x[n]$. ¿Cómo INTERVIENE entonces la CONDICIÓN $s = j\omega$? ($\sigma = 0$: PASO A FOURIER) ⇒ en ese caso VIMOS que $Z = e^{j\Omega}$ ($\rho = 1$, la CRU) y por ende:

$$\left[X(Z)\Big|_{Z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}\right] \Rightarrow \text{es la TFTD!}$$

¡VOLVEMOS a FOURIER, siempre que $s = j\omega$ esté ASUMIDO en la RdC

⇒ del otro lado de la HOJA se ven cómo se TRANSFORMAN LOS TIPOS de RDC en el dom Z

En virtud de lo anterior, ***los tipos de RdC se transforman*** en:




**NOTA: *En el caso de las señales de DURACIÓN FINITA (muestras contables), la RdC resulta TODO EL PLANO Z***

UTN.BA

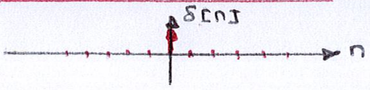
:40

s de Referencia

0

# APLICANDO TZ

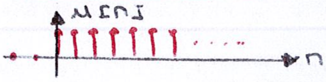
① DELTA DE KRONECKER $\Rightarrow x[n] = \delta[n] \Rightarrow TZ\{\delta[n]\} = X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} \Big)_{n=0}$




como $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] \cdot 1 = 1$

$\therefore \left[\delta[n] \xrightarrow{TZ} 1, \forall \rho\right]$

② ESCALÓN UNITARIO $\Rightarrow x[n] = u[n] \Rightarrow TZ\{u[n]\} = X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} z^{-n}$

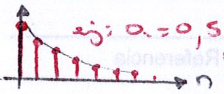



usando SERIE GEOMÉTRICA: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{z-1}{z}}\right)$

$\therefore \left[u[n] \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z-1} ; |z| > 1\right]$ SEÑAL DERECHA (hacia n positivos)

∴ Rdc HACIA AFUERA ($|z| = \rho > 1$) ∴ NO INCLUYE a la CRU ($r=1$)

③ FUNCIÓN EXPONENCIAL DECRECIENTE DERECHA




ej: $a = 0{,}5$ $\quad x[n] = a^n u[n] ; |a| < 1 \Rightarrow TZ\{a^n u[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n$

si $-1 < a < 0$ la señal alterna valores positivos y negativos

usando SERIE GEOMÉTRICA: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}}$ si $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$

$\therefore \left[a^n u[n] \longrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > |a|\right]$ SEÑAL DERECHA ∴ Rdc HACIA AFUERA ($\rho > |a|$)

④ FUNCIÓN EXPONENCIAL (crec. o decrec.) IZQUIERDA: $x[n] = -a^n u[-n-1]$ para no $|a| < 1$ INCLUYE a la CRU

como en el caso anterior, se obtiene: $TZ\{-a^n u[-n-1]\} = X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1} z)^m}$

se reemplaza $m=-n$ y se INVIERTEN LOS LÍMITES (por eso el −)

$\therefore X(z) = -\left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^m - 1\right] = 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{a}}$ si $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$

se reemplaza por una $\Sigma$ que inicie en $m=0$ p/ APLICAR S. GEOMÉTRICA

∴ se DEBE RESTAR el TÉRMINO en $m=0$ (1) p/ MANTENER LA IGUALDAD

$\therefore \left[-a^n u[-n-1] ; |a| < 1 \longrightarrow \frac{z}{z-a} ; |z| < |a|\right]$

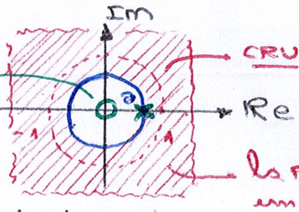
SEÑAL IZQUIERDA (hacia n NEGATIVOS; Rdc HACIA ADENTRO ($\rho < |a|$). Si $|a| < 1$ (exp. creciente) NO INCLUYE a la CRU

SI $|a| > 1$ (exp. decrec, E FINITA)

③ y ④ $\Rightarrow$ MISMA TZ pero $\neq$ Rdc

$\Rightarrow$ se puede ver que LA DISCRETIZACIÓN de $x(t)$ en el dom. de LAPLACE implica la OBTENCIÓN de una NUEVA FUNCIÓN de VARIABLE COMPLEJA $F(z)$ donde POLOS y CEROS se han REORGANIZADO en torno a RdCs LIMITADAS por CIRCUNFERENCIAS

ej: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \overset{TZ}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$




a diferencia de la exp. decrec. cont. en TL, en $z=0$ hay un CERO

CRU: $z = e^{j\Omega}$

la EXP. DECREC. DISCRETA presenta un POLO SIMPLE en $z=a$, y dicho VALOR es el que limita la Rdc (en $|z| < |a|$) la func. diverge

$|z| > |a|$ Rdc HACIA AFUERA

POLOS EN EL EJE Real

POLOS DENTRO CRU:

LADO DERECHO → exp. decr

LADO IZQUIERDO → exp decr ALTERNADA

POLOS FUERA CRU:

LO MISMO pero exp. CRECIENTE

FUERA del eje Real → senoidales (crec y decr según ubic.)

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE FORMALMENTE ENTRE LA TZ y el espectro de $x[n]$ expresado por TFTD

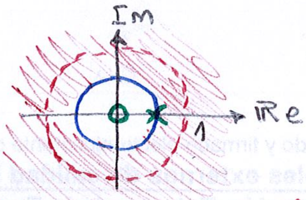
$\Rightarrow$ de la expresión de TZ y reempl. $z = \rho e^{j\Omega}$:

$\left[TZ\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \rho^{-n} e^{-j\Omega n} = TFTD\{x[n]\rho^{-n}\}\right]$ si $\rho = |z| = 1$ se OBTIENE la TFTD

como en la TL, la TZ ADMITE SEÑALES DE E $\infty$, por estar $x[n]$ MULTIPL. por una exp. decr. $\rho^{-n}$ (término de CONVERG. en TZ): $x_z[n] = x[n]\rho^{-n}$

$\Rightarrow \therefore$ si la CRU está dentro de la Rdc ($|z| = \rho = 1$ unido), la variable "z" puede ser reemplazada por $e^{j\Omega}$ OBTENIENDO la TFTD

ej: $\left[x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{TZ} X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} ; |z| > \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$




como la CRU está INCLUIDA en Rdc $\Rightarrow$ LA FUNCIÓN POSEE TFTD ∴ reempl. $z$ por $e^{j\Omega}$

$\left[X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right]$ en $z=1, \Omega=0$; en $z=-1, \Omega=-\pi$ $\Big\}$ Recordar que el eje $j\omega$ de LAPLACE se convirtió en la CRU de TZ

PROPIEDADES → contemplan los definidos en TFTD → reempl. $z = e^{j\Omega}$ SE USAN LAS MISMAS

① LINEALIDAD → $\left[ f[n] + g[n] \xrightarrow{TZ} F(z) + G(z) \quad y \quad (a+jb) f[n] \xrightarrow{TZ} (a+jb) F(z) \right]$

② DESPL. TEMPORAL → $\left[ f[n-n_0] \xrightarrow{TZ} z^{-n_0} F(z) \right]$ (recordando que $z$ es exp. compleja)

③ DESPL. FRECUENCIAL → $\left[ f[n] \xrightarrow{TZ} F(z)$ tiene RdC $\Rightarrow z_0^{\,n} f[n] \xrightarrow{TZ} F\left(\frac{z}{z_0}\right)$ tiene $z_0$RdC

└ se lleva a cabo dividiendo por dicho valor (DESPLAZ. RADIAL) pues las RdCs están unidas por 0

④ INVERSIÓN TEMPORAL → $\left[ f[n] \xrightarrow{TZ} F(z)$ tiene RdC $\Rightarrow f[-n] \xrightarrow{TZ} F\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene $\frac{1}{RdC} \right]$

⑤ ACUMULACIÓN → $\left[ f[n] \xrightarrow{TZ} F(z)$ tiene RdC $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-z} F(z)$ tiene RdC $\cap |z|=1$

└ IMPLICA UNA INVERSIÓN frec.

└ ACUM. en $n$ DIVIDE por $1-z$

⑥ DERIV. frecuencial → $\left[ -n f[n] \xrightarrow{TZ} z \frac{\partial F(z)}{dz} \right]$

⑦ CONVOLUCIÓN → $\left[ f[n] * g[n] \xrightarrow{TZ} F(z) G(z)$ con $RdC_f \cap RdC_g \right]$

TRANSFORMADA INVERSA: ¿CÓMO SE REGRESA AL dom. temp?

⇒ La TIZ consiste en LA RESOLUCIÓN de una INTEGRAL DE LÍNEA en el campo de la variable compleja $z$. Al igual que en TL, se proponen 3 MÉTODOS:

① Usar TABLA DE TRANSFORMADAS DE MANERA DIRECTA

② Si la TZ es una FUNCIÓN RACIONAL (cociente de polinomios); separarla en FRACCIONES PARCIALES y usar TABLA DE TRANSFORMADAS (RECOMENDADO)

③ Usar TEORÍA DE LOS RESIDUOS p/ resolver la $\oint$

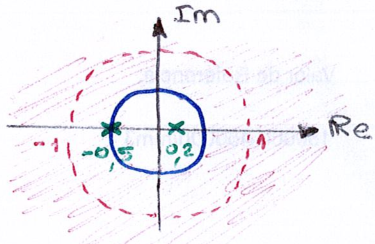
ej: CON FRACCIONES PARCIALES ⇒ obtener la TIZ de $x(z)$ aplicando FRACC. PARCIALES

$$x(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{5}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

⇒ se ven 2 POLOS SIMPLES (orden 1) para $x[n]$ DERECHA (pues la RdC es HACIA AFUERA). Expresamos entonces $x(z)$ en FRACCIONES PARCIALES:

$$x(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{5}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{10}{7}\left[\frac{1}{\left(z-\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

se asignan las RdCs $|z| > 1/5$ y $|z| > 1/2$ p/ que la RdC resultante (INTERSECCIÓN) resulte HACIA AFUERA (Y SEA DERECHA)




y considerando que: $a^n u[n] \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z-a}$

$\Rightarrow a^{n-1} u[n-1] \to z^{-1} \cdot \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$ } SE APLICÓ DESPL. temp en $n$ p/ OBTENER una TRANSF. INV de la fracción $1/z-a$

⇒ la expresión de $x[n]$ finalmente resulta

$$x(z) = \frac{10}{7}\left[\frac{1}{\left(z-\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right] \Rightarrow \left[ x[n] = \frac{10}{7}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]\right\} \right]$$

EL 1º VALOR NO NULO es p/ $n=2$

---

AGREGAR A TABLA TZ:

$\Rightarrow \left[ a^{n-1} u[n-1] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{z-a} \; ; |z| > |a| \right]$

$\Rightarrow \left[ b(n-1) a^{n-2} u[n-2] \xrightarrow{TZ} \frac{b}{(z-a)^2} \; ; |z| > |a| \right]$

AL poner den y num en MATLAB tener en cuenta que:

$$x(z) = \frac{b(1) + b(2) z^{-1} + \ldots + b(n+1) z^{-n}}{a(1) + a(2) z^{-1} + \ldots + a(m+1) z^{-m}}$$

ej: $x(z) = \frac{1}{(z-0{,}4)^2 (z+0{,}1)}$

⇒ en MATLAB: num = [1] ESTÁ MAL! pues el denom. es de ORDEN 3 ⇒ DEBE haber 4 COEFIC.

debe ser: num = [0 0 0 1]

den = [1 -0,7 0,08 0,016] (DE hacer DISTRIBUTIVA)

RESPUESTA en frecuencia p/ FILTROS DIGITALES → freqz (num, den); gráfica RESP. en frec en dB

└ [H,w] = freqz (num,den); plot (w, abs (H)); gráfica RESP. en frec en ESCALA NORMAL

PARA dominio de LAPLACE en frecs

⇒ POLOS ADENTRO CRU → señal exponencial decreciente ∧ TIENE TFTD por ser E<∞

⇒ " " CRU → señal CRECIENTE ∧ NO TIENE TFTD por ser E = ∞