Universidad Tecnológica Nacional

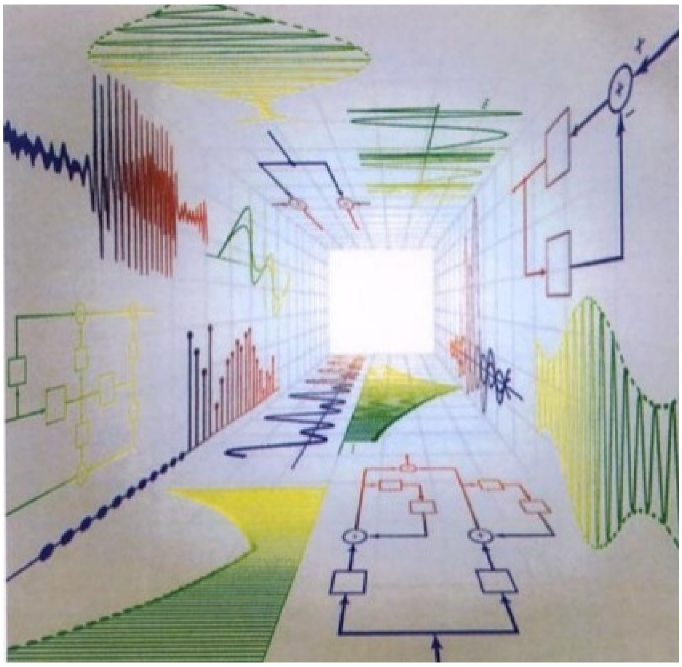
Facultad Regional Buenos Aires

Departamento de Electrónica

Análisis de Señales y Sistemas

Ejercicios modelo de Autocorrelación y Correlación cruzada

Año 2017



1. Introducción

La *correlación cruzada* es una operación matemática que mide la similitud entre dos señales en función de un tiempo paramético (o tiempo relativo). Cuando las señales que se quieren comparar son la misma, la operación se denomina *autocorrelación*.

Cuando las funciones a correlacionar f_1 y f_2 son distribuciones de probabilidad de variables aleatorias independientes X_1 y X_2, la correlación cruzada nos da la distribución de probabilidad $X_2 - X_1$, mientras que la convolución nos da la de $X_1 + X_2$.

Definición y notación:

- Para dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ aperiódicas:

$$R_{xh}(\tau) = (x \star h)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t+\tau)\, dt \tag{1}$$

- Para dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ periódicas de periodo T:

$$R_{xh}(\tau) = (x \star h)(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot h(t+\tau)\, dt \tag{2}$$

- Para dos funciones aleatorias $x(t)$ y $h(t)$:

$$R_{xh}(\tau) = (x \star h)(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot h(t+\tau)\, dt \tag{3}$$

2. Propiedades

Sean $x(t)$ y $h(t)$ dos funciones continuas reales:

1. $R_{xh}(\tau) = R_{hx}(-\tau)$

   Demostración:

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t+\tau) dt$$

   Si llamo $u = t + \tau \to t = u - \tau$, entonces:

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u-\tau) \cdot h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot x(u-\tau) du = R_{hx}(-\tau)$$

$$\therefore R_{xh}(\tau) = R_{hx}(-\tau)$$

2. $x(t) \star h(t) = x(-t) * h(t)$

   Demostración:

   De la demostración anterior se puede ver que $\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot x(u-\tau) du$ es la es la definición de $(h * x)(\tau)$, y como la convolución es conmutativa:

$$x(t) \star h(t) = x(-t) * h(t)$$

3. Ejercicio I

Sea un sistema LTI cuya salida se determina a partir de la siguiente expresión:

$$y(t) = x(t) - x(t-T)$$

Determinar la función de autocorrelación de la salida $R_{yy}(\tau)$ en función de la autocorrelación de entrada $R_{xx}(\tau)$.

Este ejercicio puede parecer complicado pero lo único que hay que hacer es aplicar la definición y reacomodar las cosas. De la definición de autocorrelación tenemos:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot y(t+\tau)\, dt$$

Reemplazando $y(t)$ por su relación con la entrada $x(t)$:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot y(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - x(t-T)] \cdot [x(t+\tau) - x(t-T+\tau)]\ dt$$

$$R_{yy}(\tau) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt}_{I} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-T+\tau)dt}_{II} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-T)x(t+\tau)dt}_{III} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-T)x(t-T+\tau)dt}_{IV}$$

I es directamente la definición de autocorrelación:

$$I : \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = R_{xx}(\tau) \tag{4}$$

Si a II lo escribimos de la siguiente manera nos queda que:

$$II : \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t-T+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x\left(t + (\tau - T)\right)\ dt = R_{xx}(\tau - T) \tag{5}$$

En III, si llamamos $u = t - T \rightarrow t + \tau = u + T + \tau$, tenemos:

$$III : \int_{-\infty}^{\infty} x(t-T)\, x(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, x(u+\tau+T)\, du = R_{xx}(\tau + T) \tag{6}$$

Y en IV, con el mismo cambio de variable que en III:

$$IV : \int_{-\infty}^{\infty} x(t-T)\, x(t-T+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, x(u+\tau)\, du = R_{xx}(\tau) \tag{7}$$

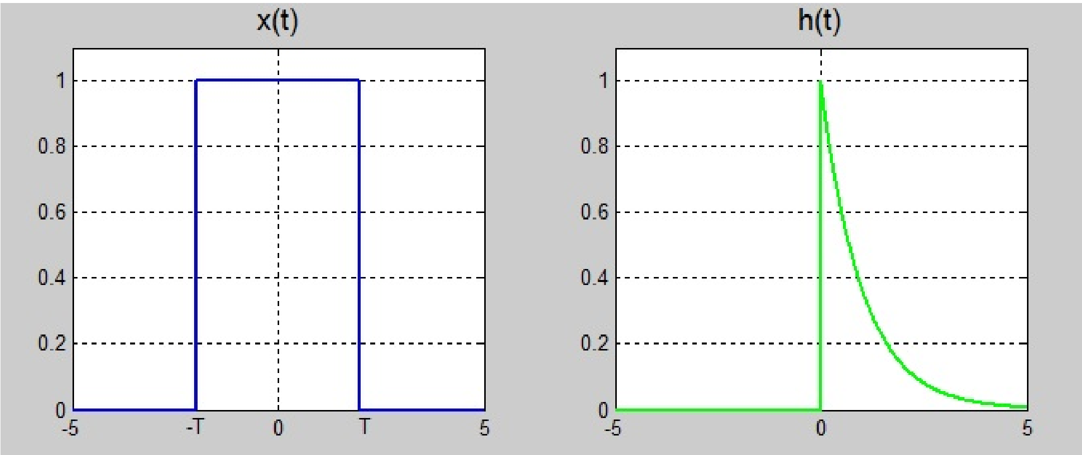
Por lo tanto:

$$R_{yy}(\tau) = 2\, R_{xx}(\tau) - R_{xx}(\tau - T) - R_{xx}(\tau + T)$$

4. Ejercicio II

Sean $x(t) = \prod \left[\frac{t}{2T}\right]$ y $h(t) = e^{-a\,t}u(t)$ siendo $(a > 0)$, hallar R_{xh} y R_{hx}.

Bueno, siempre primero conviene graficar ambas expresiones para ver los puntos clave, así como hacíamos con la convolución. Uno es un pulso unitario de ancho $2T$ y la otra es la típica exponencial decreciente de todos los ejemplos.

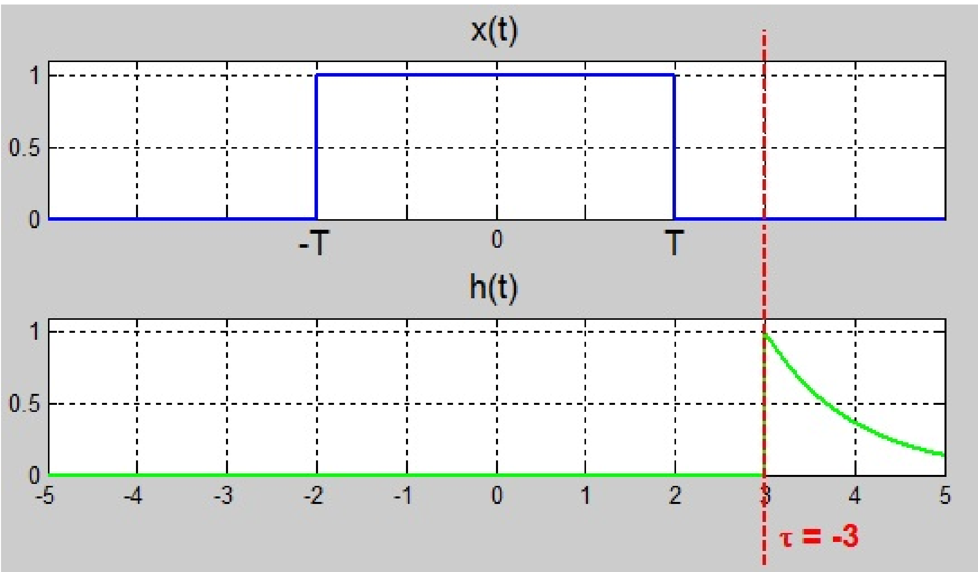


Una desventaja de la correlación cruzada respecto de la convolución es que no podemos elegir libremente qué señal es la que se va a desplazar ya que esta operación no es conmutativa. Si nos piden calcularl R_{xh}, la que se desplaza es $h(t)$. Sin embargo, gracias a la propiedad (2), uno puede desplazar $x(t)$ y luego espejar el resultado ya que $R_{xh}(\tau) = R_{hx}(-\tau)$.

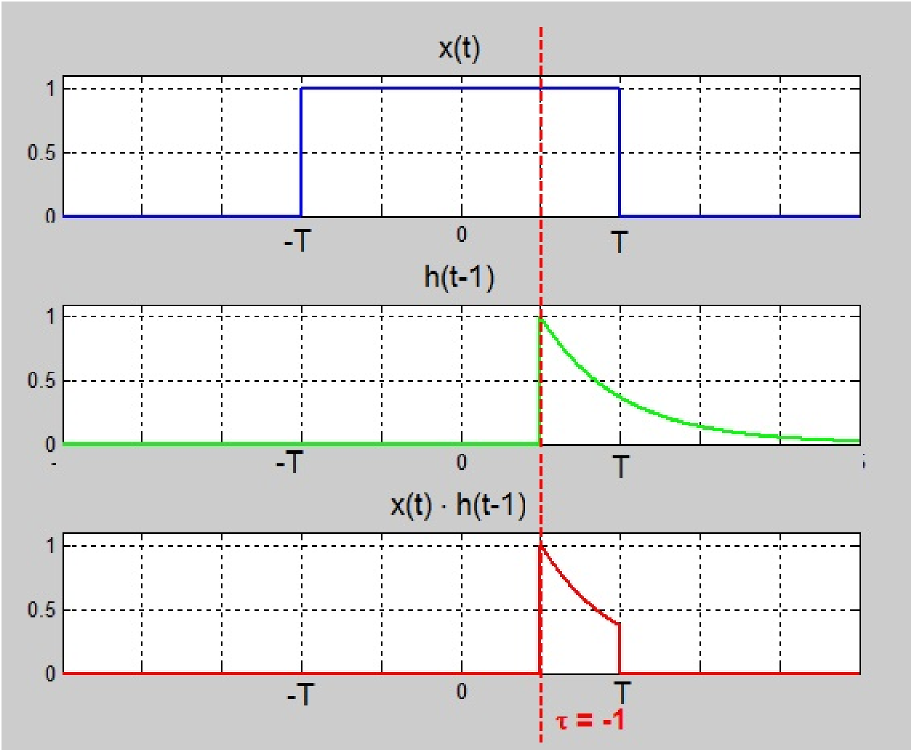
Para calcular primero R_{xh} veamos la definición:

$$R_{xh} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t + \tau)\, dt$$

Otra de las diferencias con la convolución es que el desplazamiento de la señal se hace de derecha a izquierda: para $\tau < 0$, la señal $h(t)$ está retrasada, es decir, corrida hacia la derecha, y a medida que τ va creciendo, se acerca al eje y.



A partir de la gráfica anterior ya podemos ir viendo los puntos de inflexión de las integrales: la correlación a ser nula hasta que coincidan el inicio de h con el final de x, esto es $\tau_i = t_{i_h} - t_{f_x} = 0 - T = -T$. Luego ambas señales irán teniendo área conjunta con la misma ley de crecimiento hasta que el inicio de h coincida con el inicio de x en $\tau = t_{i_h} - t_{i_x} = 0 - (-T) = T$.



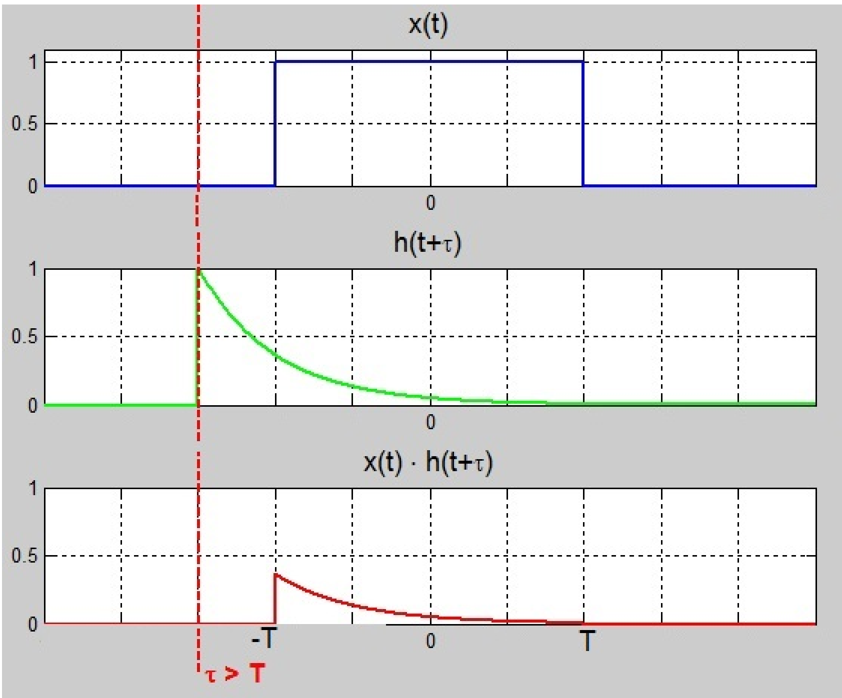
Por lo tanto ya podemos resolver la integral para el tramo entre $-T < \tau < T$, cuyos límites de integración son $-\tau$ (el primero es móvil) y T:

$$R_{xh_1}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t+\tau)\, dt = \int_{-\tau}^{T} 1 \cdot e^{-a(t+\tau)}\, dt = e^{-a\tau} \int_{-\tau}^{T} e^{-at}\, dt$$

$$R_{xh_1}(\tau) = -e^{-a\tau} \left. \frac{e^{-at}}{a} \right|_{t=-\tau}^{T} = \frac{e^{-a\tau}}{a} \left(e^{a\tau} - e^{-aT}\right)$$

$$R_{xh_1}(\tau) = \frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T+\tau)}\right)$$

Nos queda ver que pasa para $\tau > T$. Como $h(t)$ tiene duración infinita, la correlación cruzada nunca vuelve a ser cero. De la gráfica, podemos ver que los límites del área conjunta dejan de estar relacionado con τ sino que están fijos entre $-T$ y T.

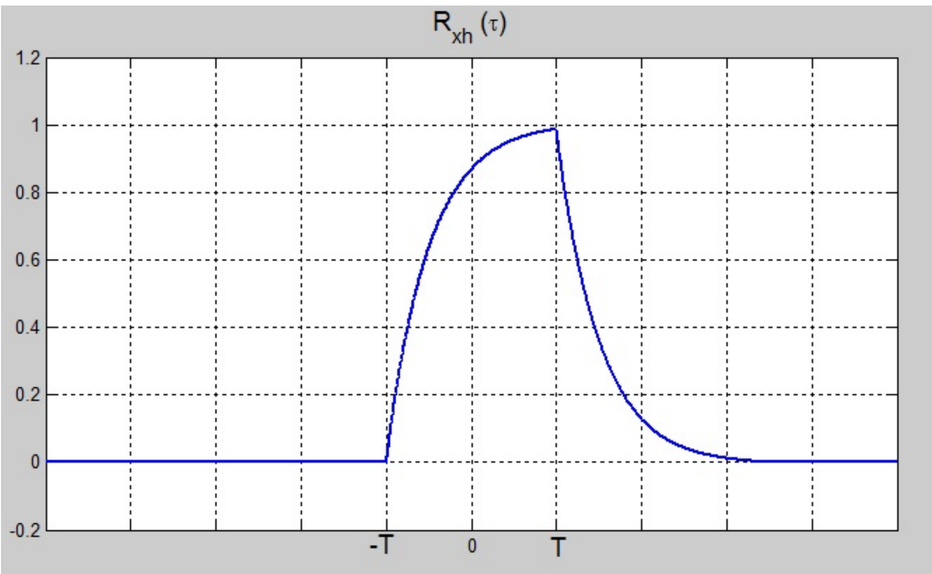


$$R_{xh_2}(\tau) = \int_{-T}^{T} 1\, e^{-a(t+\tau)}\, dt = e^{-a\tau} \int_{-T}^{T} e^{-at}\, dt = e^{-a\tau} \left[-\frac{1}{a} e^{at} \right]_{t=-T}^{T} = \frac{e^{-a\tau}}{a} \left(e^{aT} - e^{-aT} \right)$$

$$R_{xh_2}(\tau) = \frac{2}{a}\, sinh(aT)\, e^{-a\tau}$$

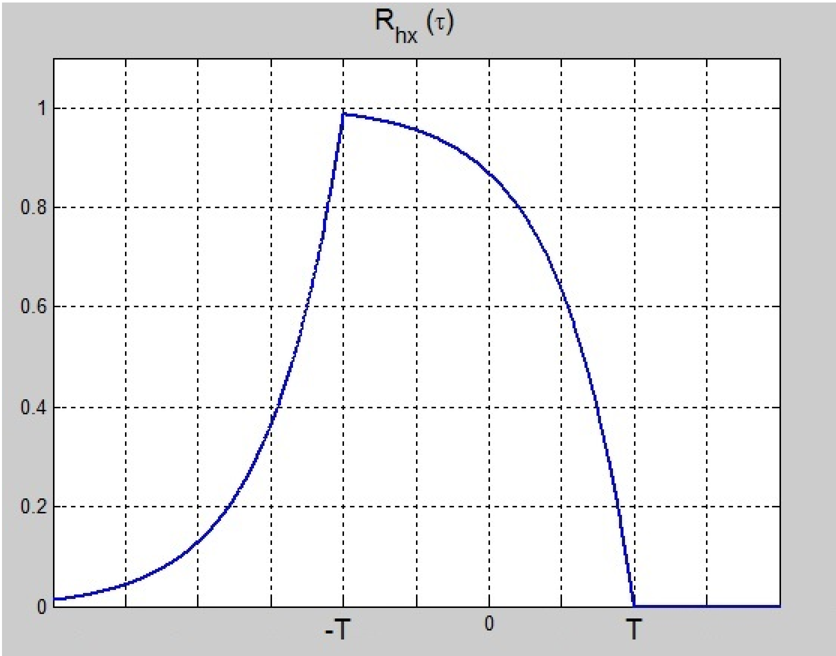
Por lo tanto nos queda:

$$R_{xh}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \\ \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T+\tau)}\right), & -T \leq \tau < T \\ \frac{2}{a}\, sinh(aT)\, e^{-a\tau}, & \tau \geq T \end{cases}$$

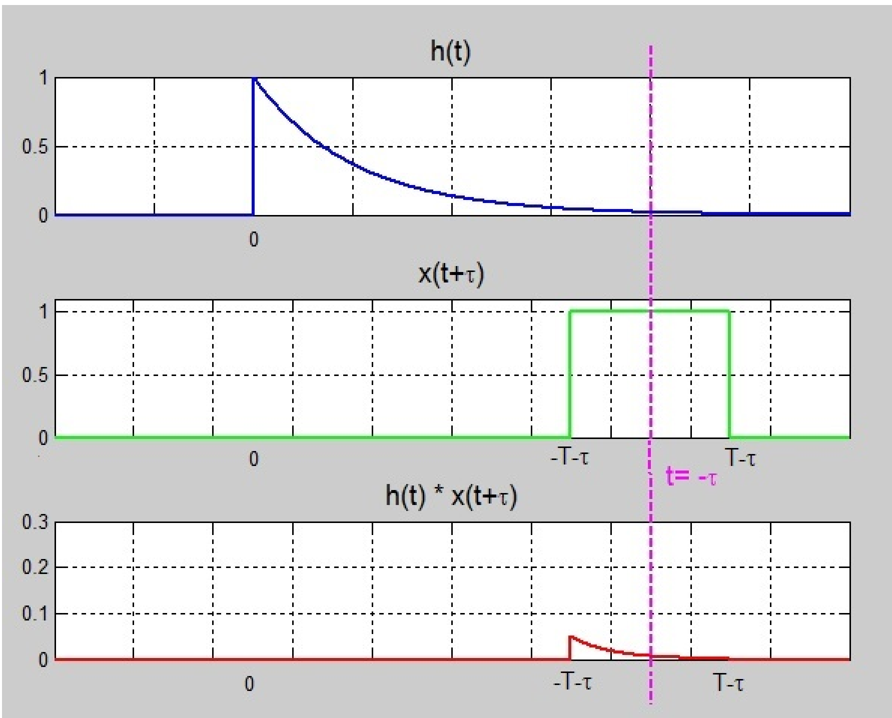


Para calcular $R_{hx}(\tau)$ podemos utilizar la propiedad (1) que no es más que espejar la gráfica de $R_{xh}(\tau)$ que ya tenemos. Recordar que al utilizar esta propiedad en la definición de R_{xh} debemos hacer la sustitución de $\tau = -\tau$ tanto en la expresión como en el intervalo de validez.

$$R_{hx}(\tau) = R_{xh}(-\tau) = \begin{cases} \frac{2}{a}\, sinh(aT)\, e^{a\tau}, & \tau < -T \\ \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-\tau)}\right), & -T \leq \tau < T \\ 0, & \tau \geq T \end{cases}$$



A modo de ejercitación, verifiquemos esto analíticamente. Como estamos calculando R_{hx}, la función que debemos desplazar es $x(t)$. Empecemos viendo qué sucede para $\tau << 0$:



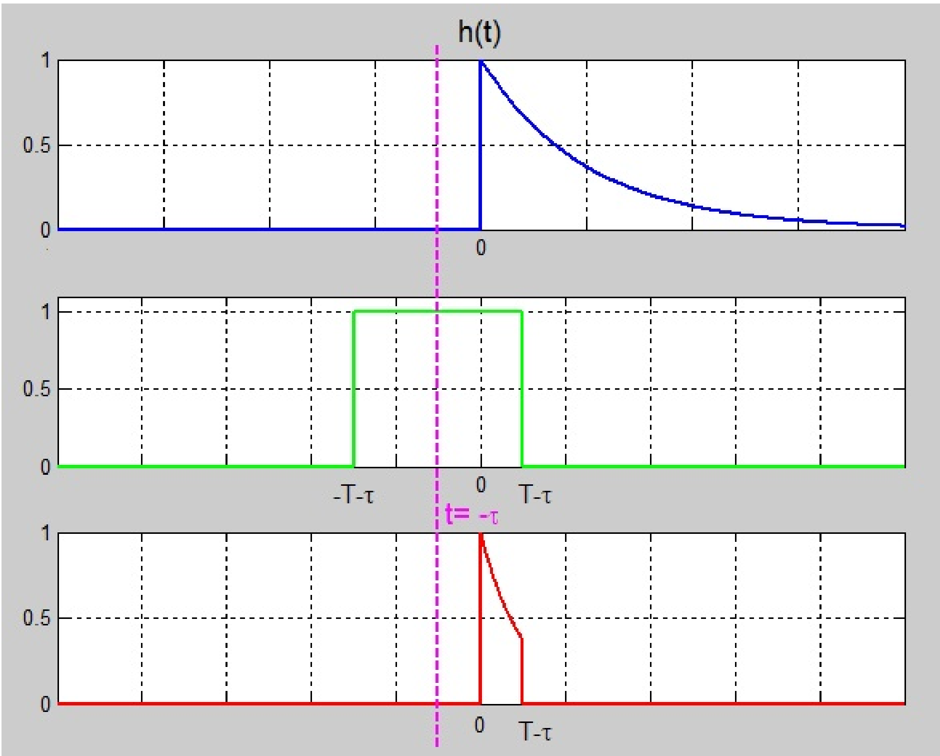
Podemos ver que por más chico que sea τ siempre va a haber área en común entre x y h. Ese área está siempre concatenado entre $(-T-\tau)$ y $(T-\tau)$: es el ancho del pulso corrido en τ hacia la derecha ya que estamos analizando para $\tau < 0$. Éstos son los límites de integración de la primer integral que debemos plantear pero, hasta cuándo tiene validez esa expresión?

Fijémonos que a medida que hacemos crecer a τ, nos movemos más hacia la izquierda y llega un momento en que el comienzo de h (en $t = 0$) coincide con el comienzo de x (en $t = -T$). Para ver bien en qué valor de τ ocurre eso, conviene ver el gráfico anterior y notar que $(-T-\tau)$ debe ser igual a 0 y despejando se obtiene que esa situación se da para $\tau = -T$. Por lo tanto ya tenemos los límites de integración para calcular la función y su región de validez $(-\infty < \tau < -T)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot x(t+\tau)\,dt = \int_{-T-\tau}^{T-\tau} e^{-a\,t}\cdot 1\,dt = -\frac{1}{a}\left(e^{-a(T-\tau)} - e^{-a(-T-\tau)}\right)$$

$$= \frac{e^{a\,\tau}}{a}\left(e^{aT} - e^{-aT}\right) = \frac{2\,sinh(aT)}{a}\,e^{a\,\tau}$$

Ya vimos que para $\tau = -T$ la expresión de la integral presentaba un cambio ya que el pulso comienza a "salir" de la exponencial. Si seguimos aumentando τ llegará un momento en que el pulso y la exponencial no tendrá más área en común y la correlación de como resultado cero. No es difícil darse cuenta que el valor de τ para dicha situación es cuando el borde derecho de x (en $T-\tau$) coincida con el inicio de h (en $t = 0$). Despejando τ nuevamente como hicimos antes tenemos que $\tau = T$. Ya tenemos la región de validez de la segunda integral, nos faltan los límites de ésta que los vemos del siguiente gráfico:



Claramente los límites de integración son 0 y $(T-\tau)$ con lo que nos resta calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot x(t+\tau)\,dt = \int_{0}^{T-\tau} e^{-a\,t}\cdot 1\,dt = \left.\frac{e^{-a\,t}}{a}\right|_{t=T-\tau}^{0} = \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-\tau)})$$

Por lo dicho antes, para $\tau > T$ ya sabemos que la correlación es cero. Reagrupando todo:

$$R_{hx}(\tau) = \begin{cases} \frac{2\,sinh(aT)}{a}\,e^{a\tau}, & -\infty < \tau < -T \\ \frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-\tau)}\right), & -T \le \tau < T \\ 0, & T \le \tau < \infty \end{cases}$$

que es lo mismo que obtuvimos en la página 7 aplicando la propiedad.

Cualquier consulta, duda, crítica, error o sugerencia de corrección son todas bienvenidas a: ahojnadel@est.frba.utn.edu.ar

---