TRANSFORMADA Z: 2P ⇒ APLICÁNDOLA A SIST. LTI DISCRETOS

⇒ MISMO ROL que la TL en el CAMPO CONTINUO, en términos del MANEJO DE SEÑALES Y SISTEMAS en t. DISCRETO

t. cont.: $x(t) \rightarrow \boxed{h(t) \; H(s)} \rightarrow y(t)$; $X(s) \rightarrow Y(s)$ $\quad \overset{t=nT_s}{\Longrightarrow} \quad$ t. discr.: $x[n] \rightarrow \boxed{h[n] \; H(Z)} \rightarrow y[n]$; $X(Z) \rightarrow Y(Z)$

} ⇒ ∃ NUMEROSAS SIMILITUDES (A LA TL) en su APLICACIÓN, en especial al ANÁLISIS DE SEÑALES DISCRETAS APLICADAS A SIST. LTI representados por EC. en RECURRENCIAS (FILTROS DIG.)

⇒ en TFTD vimos que las EDOS se DISCRETIZABAN dando lugar a EC. en RECURRENCIAS NORMALIZADAS

$$\left[y'(t) + b\,y(t) = x(t) \longrightarrow y[n] - a\,y[n-1] = x[n]\right]$$

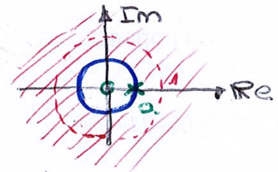
∴ al igual que en la TL, la APLIC. de la TZ permite hallar su FUNCIÓN DE TRANSF. H(Z):

$$Y(Z) - a\,Y(Z)\,Z^{-1} = X(Z) \Rightarrow \left[H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}\right] \; |Z| > a$$

↳ SE TOMA RdC $|Z|>a$ ya que el SIST. DISCR. es CAUSAL

⇒ Calculando la TIZ de H(Z), se obtiene la RESP. IMPULSIONAL DISCRETA h[n], que describe un FILTRO DE RESP. ∞ al IMPULSO (IIR):

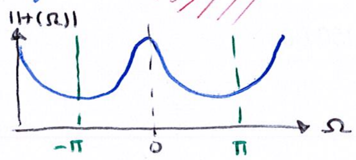
$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{Z}{Z-a}, \; |Z|>a \Rightarrow \left[h[n] = a^n u[n]\right]$$



⇒ considerando $|a|<1$ y haciendo el DIAGR. DE POLOS y CEROS ⇒

⇒ se ve que la CRU está incluida en la RdC ∴ H(Z) TIENE TFTD

$$\left[H(\Omega) = H(Z)\Big|_{Z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1-aZ^{-1}}\Big|_{Z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1-a e^{-j\Omega}}\right] \Rightarrow$$



⇒ la APLIC. de la TZ a la EC. en RECURRENCIAS da como resultado UNA H(Z) RACIONAL (COCIENTE de polin. de var. compl.)

$$\left[\sum_{K=0}^{Q} a_K\, y[n-K] = \sum_{K=0}^{P} b_K\, x[n-K]\right] \Rightarrow \left[H(Z) = \frac{\sum_{K=0}^{P} b_K Z^{-K}}{\sum_{K=0}^{Q} a_K Z^{-K}}\right]$$

} RAÍCES del num: CEROS (coefic. b_K)
RAÍCES del denom: POLOS (coefic. a_K)

⇕

ej: $\left[y[n] - 0{,}8\, y[n-1] = x[n] \quad \Rightarrow \quad H(Z) = \frac{Z}{Z-0{,}8}\; ; |Z|>0{,}8\right]$

[∴ TODO SIST LTI DISCRETO puede verse como un FILTRO FIR o IIR y SUS POLOS y CEROS CARACTERIZARSE POR...]

ESTABILIDAD Y CAUSALIDAD EN TZ

⇒ según el ANÁLISIS RESULTANTE de la func. transf. H(Z), se ESTABLECE lo siguiente:

① CAUSALIDAD: debe cumplirse la condición $\rho > \rho_0$ (RdC hacia AFUERA), tal que la h[n] sea DERECHA

ASIMISMO, la CAUSALIDAD del SIST. EXIGE que: $\left[h[n] = 0 \text{ si } n<0 \Rightarrow \text{CANT. de CEROS} \le \text{CANT. DE POLOS}\right]$ SINO pueden dar VALORES de $h[n] \neq 0$ si $n<0$ al IOAGER la TIZ

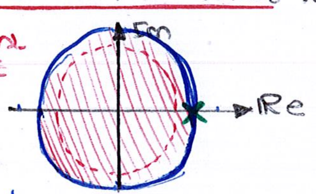
PUES SINO la EC. EN RECURR. tiene MUESTRAS FUTURAS

② ESTABILIDAD: la h[n] deberá ser una SEÑAL de E FINITA (ABSOLUTAM. SUMABLE)

En consecuencia, la CRU (eje jω de LAPLACE) debe estar INCLUIDA en la RdC

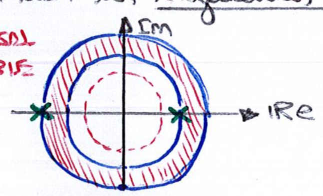
∴ según el H(Z) obtenido se pueden dar las siguientes situaciones:

NO CAUSAL
ESTABLE

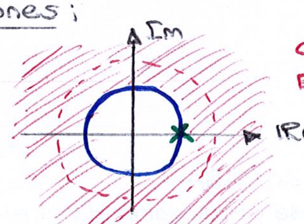


h[n] IZQUIERDA

NO CAUSAL
NO ESTABLE



h[n] BILATERAL



CAUSAL
ESTABLE

h[n] DERECHA

[SI EL SISTEMA ES CAUSAL RESULTA ESTABLE SI TODOS SUS POLOS ESTÁN UBICADOS DENTRO DE LA CRU]

TEOREMAS DEL VALOR INICIAL Y FINAL EN TZ

⇒ TEOREMA DEL VALOR INICIAL: $\left[x[0] = \lim_{Z\to\infty} X(Z) \text{ con } x[n]=0 \text{ si } n<0\right]$

⇒ TEOREMA DEL VALOR FINAL: $\left[\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{Z\to 1} (Z-1)\,X(Z)\right]$ los polos de $(Z-1)X(Z)$ deben estar INCLUIDOS en la CRU

INCORPORANDO CONDICIONES INICIALES AL ANÁLISIS DE EC. EN RECURRENCIAS

⇒ Si no son tenidos en cuenta los valores para $n<0$, se puede definir la TZU (UNILATERAL)

$$\left[X_U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}\right] \quad x[n]=0 \;\; \forall\, n<0$$

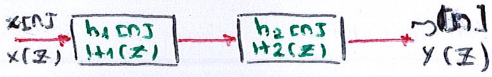
⇒ LAS PROPIEDADES SE CONSERVAN respecto de la TZ BILATERAL, pero la propiedad de DESPLAZAMIENTO TEMPORAL cambia:

$$\begin{cases} x[n-n_0] \xrightarrow{TUZ} z^{-n_0}X(z) + z^{-n_0+1}\, x[-1] + \dots + x[-n_0] \\ x[n+n_0] \xrightarrow{TUZ} z^{n_0}X(z) - z^{n_0}\, x[0] - \dots - x[n_0-1] \end{cases}$$

⇒ ∴ pueden INCORPORARSE COND. INICIALES $(x[-1], x[-2], \dots)$

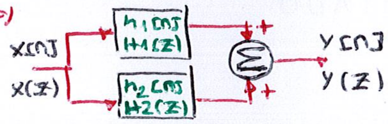
INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS LTI DISCRETOS

① CONEXIÓN SERIE ⇒



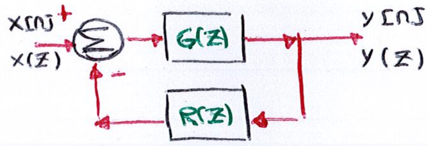
$$\left[\begin{aligned} h_T[n] &= h_1[n] * h_2[n] \\ H_T(z) &= H_1(z)\, H_2(z) \end{aligned}\right]$$

② CONEXIÓN PARALELO ⇒



$$\left[\begin{aligned} h_T[n] &= h_1[n] + h_2[n] \\ H_T(z) &= H_1(z) + H_2(z) \end{aligned}\right]$$

③ SIST. REALIMENTADO NEGATIVAMENTE

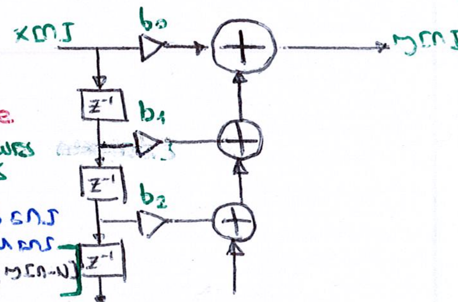


$$\left[H_T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)R(z)}\right]$$

APLICANDO TZ A FILTROS FIR e IIR: CARACT. PRINCIPALES

en LA PRÁCTICA ∟ ASUMIMOS CAUSALIDAD → POLOS DENTRO DE CRU p/ ASEGURAR ESTABILIDAD

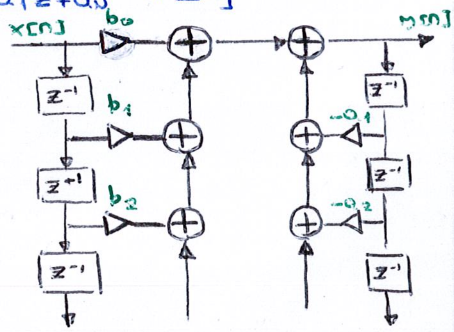
① FIR: $\left[y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M]\right]$ ⇒ $\left[H(z) = \dfrac{b_0 z^M + \dots + b_{M-1} z + b_M}{z^M}\right]$



- $h[n]$ cuya cant. DE MUESTRAS es FINITA
- $H(z)$ con CEROS distribuidos (orden del filtro) → POLOS EN EL ORIGEN SIEMPRE
- son SIEMPRE ESTABLES ($h[n]$ FINITA → ∴ ABS. SUMABLE) POLOS ≥ CEROS p/ ser estable.
- si el ORDEN M es pequeño, su resp. en frec NO puede tener TRANSICIONES ABRUPTAS
- Se realizan operaciones sólo CON MUESTRAS DE LA ENTRADA
  ⇒ como y sólo dep. de x, es fácil IMPLEMENTAR. $h[n]$ → reempl. x por $\delta[n]$; $g[n]$ → reempl. x por $u[n]$

② IIR: $\left[y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots b_M x[n-M] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N]\right]$

- poseen $h[n]$ cuya CANTIDAD de MUESTRAS es INFINITA $\left[H(z) = \dfrac{b_0 z^N + \dots + b_M z^{N-M}}{z^N + \dots + a_1 z + a_N} \; ; \; N \geq M\right]$
- $H(z)$ con CEROS DISTRIBUIDOS → AL MENOS UN POLO FUERA DEL ORIGEN
- PUEDEN SER INESTABLES (presencia de POLOS FUERA DE LA CRU)
- Las operaciones se realizan con MUESTRAS DE LA ENTRADA Y SALIDA (REALIMENTACIÓN)

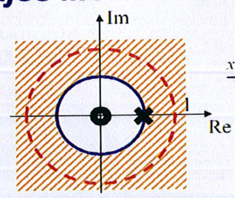


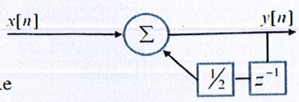
TIPOS DE FILTROS

Ejemplo: Filtro Pasabajos IIR

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, |z| > \frac{1}{2}$$





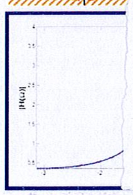
Ejemplo: Filtro IIR Pasa-Banda

$$y[n] = x[n] + 1{,}1314\, y[n-1] - 0{,}64\, y[n-2]$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}1314 z + 0{,}64}$$

$$H(\Omega) = \frac{e^{j2\Omega}}{\left(e^{j\Omega} - 0{,}8 e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{j\Omega} - 0{,}8 e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

$$h[n] = 0{,}8^n \frac{2}{\sqrt{2}} sen\left[\frac{\pi}{4}(n+1)\right] u[n]$$

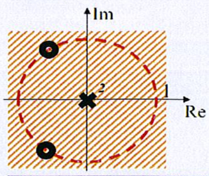


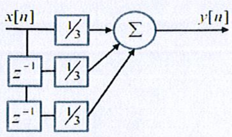
Ejemplo: Filtro Pasa-Bajos FIR (Media Móvil)

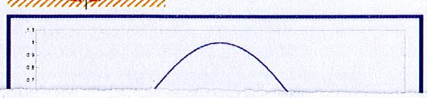
$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

$$H(z) = \frac{1}{3}\frac{z^2+z+1}{z^2}, |z| > 0$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}\left(e^{-2\Omega} + e^{-\Omega} + 1\right)$$



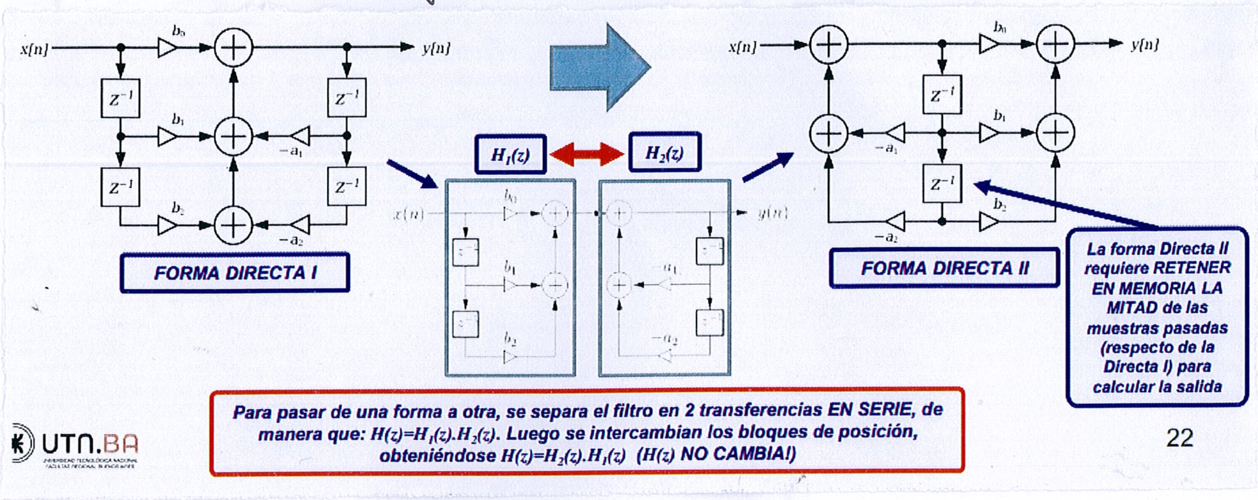




HAY 1 MAS

DIAGRAMA EN BLOQUES ; FORMA DIRECTA I y DIRECTA II (CANÓNICA)

⇒ Los diagramas en bloque anteriores (FORMA DIRECTA I) SE PUEDEN SIMPLIFICAR, de modo de efectuar un AHORRO de despachos (MEMORIA DEL SIST. DIGITAL, FORMA DIRECTA II)

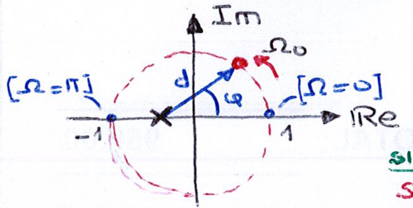


FILTROS IIR se usa con MUCHOS coefic.

OBTENCIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA $H(\Omega)$

⇒ como en la TL, se puede graficar rápidamente la RESP. en frecuencia $H(\Omega)$ de un SIST. LTI considerando LA POSICIÓN DE POLOS Y CEROS RESPECTO DE UN VALOR DE FREC. NORM. Ω_0

$$\Rightarrow \left[\,|H(\Omega_0)| = \frac{\prod \text{dist. ceros a } \Omega_0}{\prod \text{dist. polos a } \Omega_0}\right] \Rightarrow \left[\,\angle H(\Omega_0) = \sum \text{Fases ceros resp. } \Omega_0 - \sum \text{Fases polos resp. } \Omega_0\right]$$



Recordar que Ω se evalúa sobre la CRU, recorriéndola entre 0 y π (ANTIHORARIO)

y luego ⇒ entre 0 y $-\pi$ (SIMÉTRICO si f es Real)

SI TENEMOS UN POLO en -1 (O UN CERO)

SI $\Omega=-1$, la FASE del POLO -1 se toma evaluando lo que sucede INFINITESIMALMENTE antes de llegar a π en $\curvearrowleft$ ($\Omega=\pi$, FASE $=\pi/2$) y de la misma forma en ... (también si esta en 1 hacer lo mismo)

DISEÑANDO FILTROS DIGITALES : GENERALIDADES

⇒ En los FIR, la morfología de la resp. en frec. $H(\Omega)$ está DETERMINADA por los CEROS

⇒ Para asegurar CAUSALIDAD, el Nº de POLOS debe ser igual o superior al de ceros (P/ LOS FIR y IIR)

⇒ Los POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS generan efectos PASA-BANDA y combinados con CEROS COMPLEJOS CONJ. generan efectos ELIMINA-BANDA

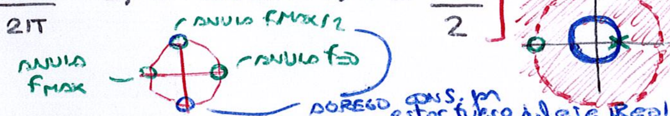
⇒ P/ eliminar frecuencias se colocan CEROS sobre la CRU. Si están fuera del eje Real, deberán ser CONJUGADOS ∴ NO QUEDARÍA PAR Y DARÍA un h COMPLEJO

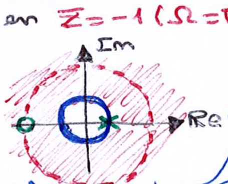
pues si NO PONGO LOS CONJUGADOS solo anulo en el espectro las compon. de una mitad

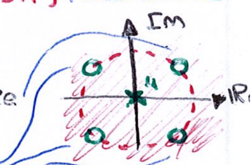
$f=0$ FMAX

⇒ Los CEROS en $z=1\ (\Omega=0)$, generan un EFECTO PASA-ALTOS y en $z=-1\ (\Omega=\pi)$ PASA BAJOS

$$\Rightarrow \text{recordar: } \left[\ \Omega = \frac{2\pi f}{F_s}\ ;\ f = \frac{\Omega F_s}{2\pi} \ \Rightarrow \text{en } \Omega=\pi \Rightarrow f = \frac{F_s}{2}\ \right]$$







LA TRANSFORMACIÓN BILINEAL

⇒ sabemos que al considerar una señal ANALÓGICA $x(t)$ de BANDA LIMITADA f_m; el proceso de DIGITALIZACIÓN conlleva a seleccionar una $F_s \geq 2f_m$

⇒ En consecuencia, SI LA RESP. en frec $H(s)$ de un FILTRO ANALÓGICO, trabaja solo en dicho ANCHO DE BANDA (más allá de f_m no hay frecuencias) PODRÍA TRANSFERIRSE SU RESP. ANALÓGICA al dominio digital

$$\left[\ Z = e^{sT_s} \longrightarrow s = \frac{1}{T_s}\ln(z) \longrightarrow H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{1}{T_s}\ln(z)}\ \right]$$

se expande en una serie de pot. compl.

} como la obtención de "s" en términos de "z" y su posterior reemplazo en $H(s)$ NO GENERA COMO RESULTADO una FUNCIÓN RACIONAL, se llega a solo una APROXIM. de $z=e^{sT_s}$

$$\Rightarrow z = e^{sT_s} = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} = \frac{1 + \frac{sT_s}{2} + \frac{(sT_s/2)^2}{2!} + \dots}{1 - \frac{sT_s}{2} + \frac{(sT_s/2)^2}{2!} - \dots} \Rightarrow \left[\ z \approx \frac{1+\frac{sT_s}{2}}{1-\frac{sT_s}{2}} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}\ \right]$$

⇒ La TRANSF. COMPLEJA de "s" a "z" se llama TRANSF. Z BILINEAL y convierte toda $H(s)$ ESTABLE en una $H(z)$ ESTABLE :

$$\left[\ s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}\ \text{(TZ BILINEAL)}\ \right] \Rightarrow \left[\ H_L(s) = \frac{1}{s+10} \Rightarrow H_Z(z) = \frac{z+1}{z-(2-10T_s)/(2+10T_s)}\right]$$

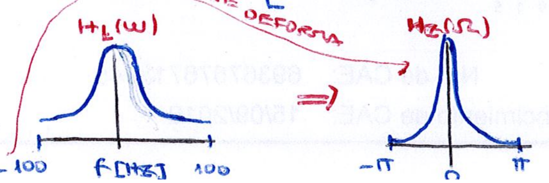
$F_s = 100$ HZ

∴ si $f = F_s$

⇒ $\Omega = 2\pi$, pero Ω va de $-\pi$ a π

∴ ESTÁ FORZADO

P/ EVITAR SOLAPAM.



} la TZ BILINEAL asegura LA NO GENERACIÓN DE SOLAPAMIENTO del filtro resultante en el dom Z ($|H_Z(\pi)|=0$ pues en π, z=-1)

} Esto IMPLICA UNA DEFORMACIÓN de la TRANSF. del filtro de LAPLACE p/ altas frec. por FORZARSE su comportamiento ASINTÓTICO resp. de ω a INCORPORARSE al rango $[-\pi, \pi]$