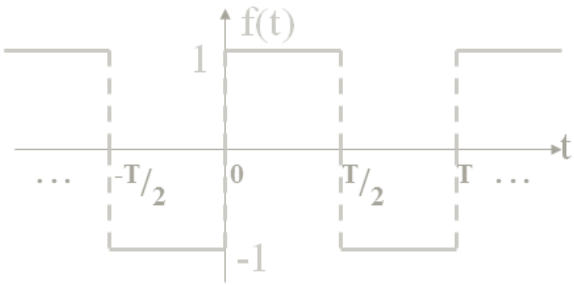
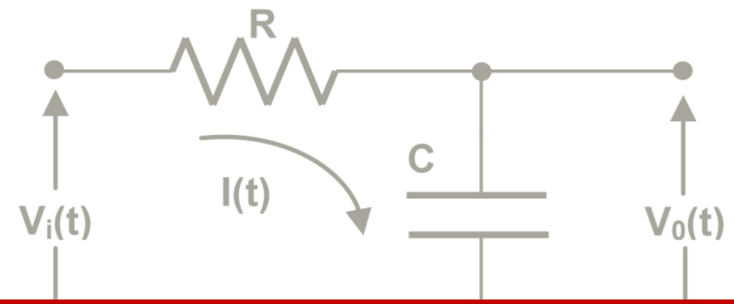
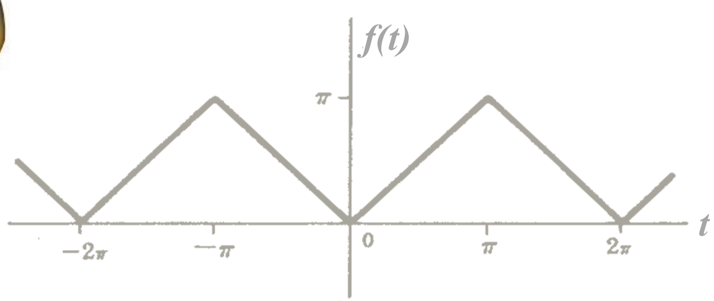
Actividad Práctica: Resolución de Consignas

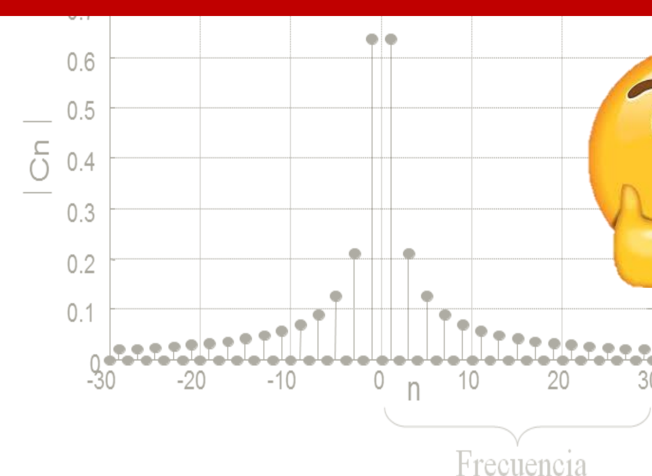




Actividad Práctica

●Convolución 2P●



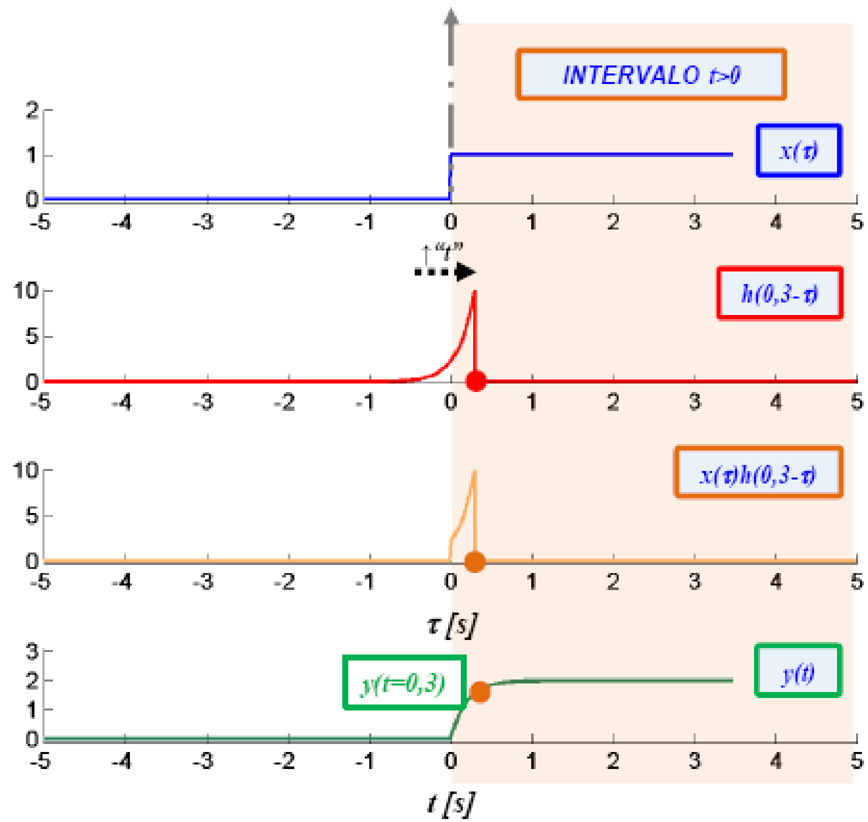


UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Resumen

Integral de Convolución

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Respuesta Indicial

$$g(t) = y(t)\Big|_{x(t)=u(t)} = h(t) * u(t)$$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

Estabilidad

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

Memoria

$$h(t) = A\,\delta(t)$$

$$h[n] = A\,\delta[n]$$

Causalidad

$$h(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$h[n] = \text{si } n < 0$$

Invertibilidad

$$h(t) * h_{INV}(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_{INV}[n] = \delta[n]$$

$y[n] = x[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\, g[n-k]$ Tiempo Discreto

Convolución de tiempo continuo

$\boxed{y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).\, g(t-\tau).\, d\tau}$ Tiempo Continuo

$$y(t) = x(t) * g(t) = g(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau).\, x(t-\tau).\, d\tau$$

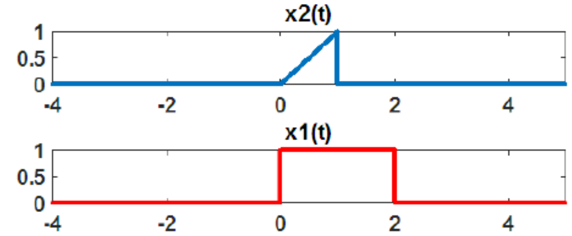
Ejercicio Conv. Continua) Sean las siguientes señales contínuas, calcular la operatoria de convolución que se detallan a continuación:

$x_1(t) = u(t) - u(t-2)$;

$x_2(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-1)$

$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$

Resolución

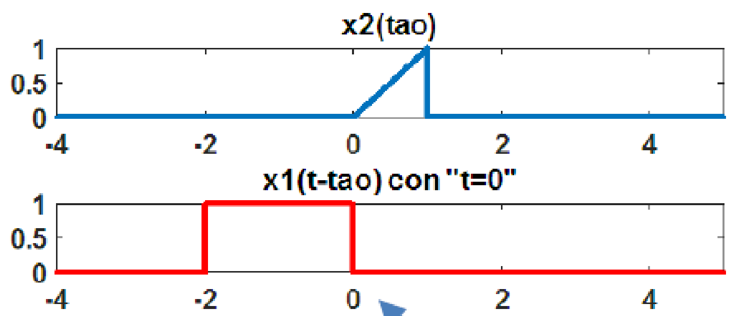


1) **La señal más complicada graficamos con τ, $x_2(\tau)$**

2) Tomamos señal más simple, la invertimos y graficamos con τ. *Es decir graficamos* $x_1(-\tau)$

3) ***Ver punto "t"***

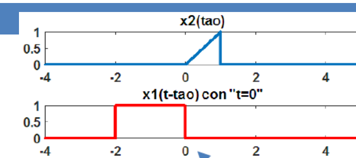
Graficamos: $x_2(\tau)$ y $x_1(-\tau)$



$$\boxed{x_1(t-\tau)|_{t=0} = x_1(-\tau)}$$

$\boxed{t}$ Este punto en el orígen le asignamos t

Continuación

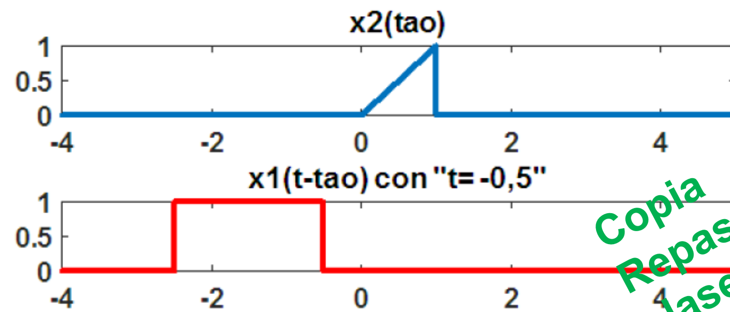


$x_1(t-\tau)|_{t=0} = x_1(-\tau)$

$\boxed{t}$ Este punto en el orígen le asignamos t

$t < 0 \qquad y(t) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau).x_1(t-\tau).d\tau = 0$$



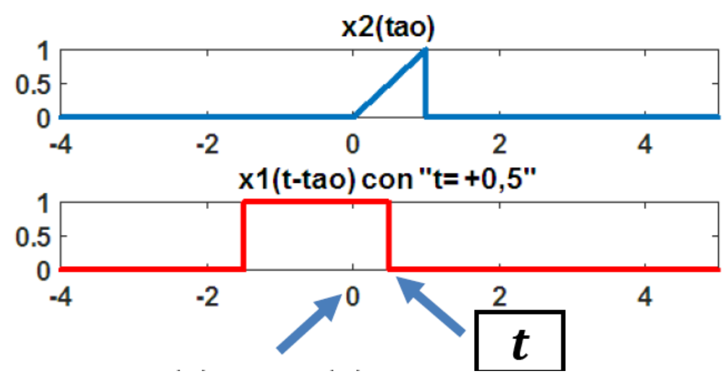
Copia
Repaso de la clase pasada

$0 < t < 1$ Siendo: $x_1(t) = u(t) - u(t-2)$

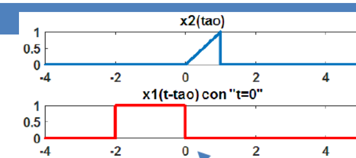
$x_2(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-1)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau).x_1(t-\tau).d\tau =$

$$y(t) = \int_0^t \tau.1.d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$



Continuación



$x_1(t-\tau)|_{t=0} = x_1(-\tau)$

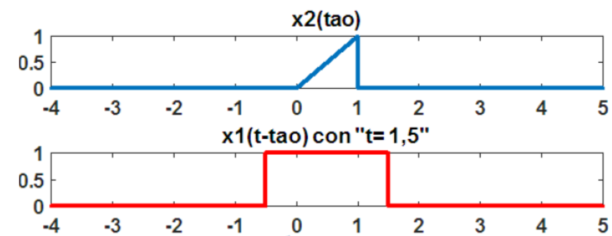
$\boxed{t}$ Este punto en el orígen le asignamos t

$\underline{1 < t < 2}$

$$y(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau).\, x_1(t-\tau).\, d\tau = \int_0^1 \tau.\, 1.\, d\tau$$

$$y(t) = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



$\boxed{1}$

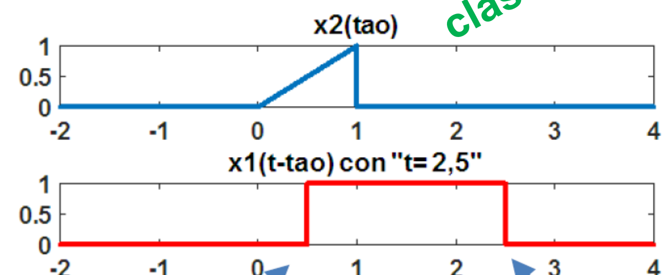
Repaso de la clase pasada

$\underline{2 < t < 3}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau).\, x_1(t-\tau).\, d\tau = \int_{t-2}^{1} \tau.\, 1.\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(t-2)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t^2 - 4.t + 4}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + 2.t - 2$$

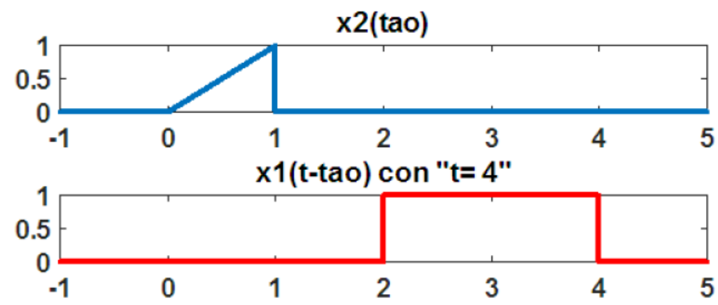
$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + 2.t - \frac{3}{2}$$



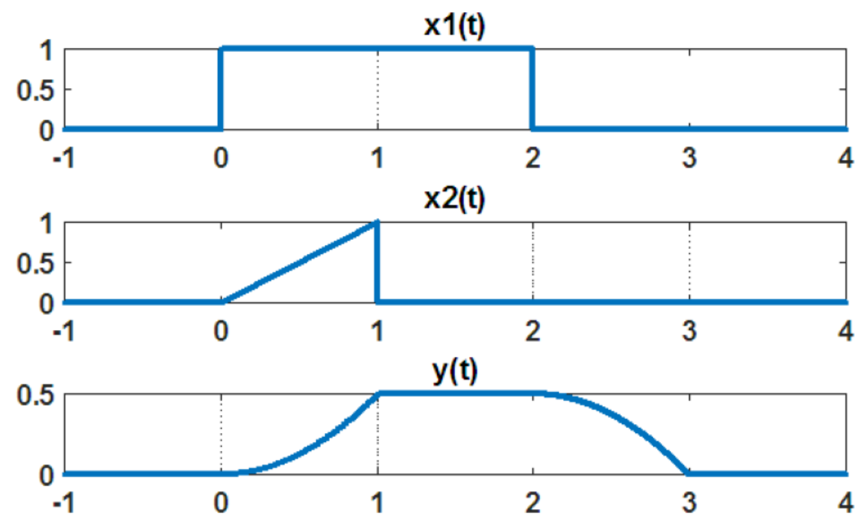
$\boxed{t-2}$ $\boxed{t}$

Continuación

$t > 3 \qquad y(t) = 0$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 1/2 & 1 < t < 2 \\ -\frac{t^2}{2} + 2.t - \frac{3}{2} & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$



Continuación

```
%Resolución Numérica con Matlab
% Usamos mismo tiempo en ambas señales, podría ser distinto
dt = 0.01 ; t= -1: dt: 5 ; % largo L
x1= escalon(t)-escalon(t-2);
x2= rampa(t) -rampa(t-1) - escalon(t-1);
y=conv(x1,x2)* dt; % largo resultante L+L-1
subplot(311), plot(t,x1, 'linewidth',3, 'color','r') ; grid on;
subplot(312), plot(t,x2, 'linewidth',3) ; grid on;
% Convolución inicia en: suma de inicios,
% finaliza en: suma de finales
tc = (-1-1) : dt : (5+5) ; % Nuevo vector temporal más largo
subplot(313), plot(tc,y, 'linewidth',11, 'color','y') ;
grid on; xlim([-1 5])
% Opcional gráfico analítico
hold on;
ya = t.^2 /2 .*(escalon(t)-escalon(t-1)) +...
    1/2 .*(escalon(t-1)-escalon(t-2)) +...
    (-t.^2 /2  +2*t -3/2) .*(escalon(t-2)-escalon(t-3))  ;
plot(t,ya)
```

Resumen del código

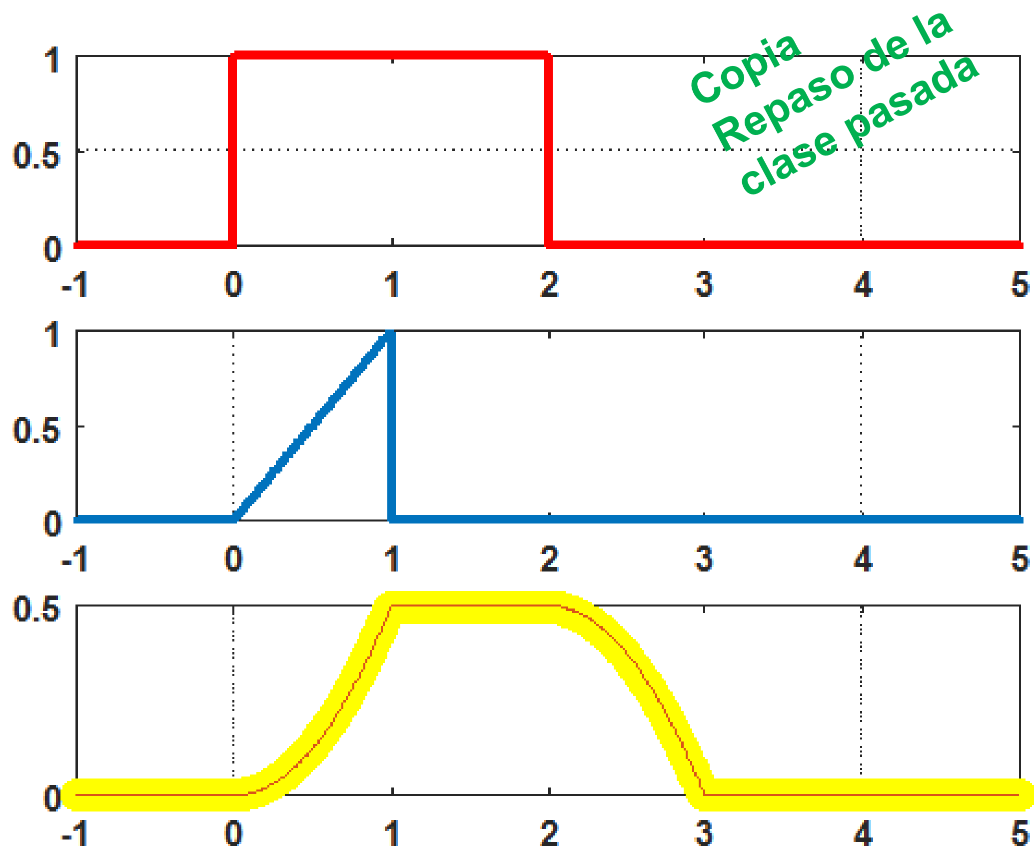
Definimos: dt, t, x1, x2

y=conv(x1,x2) dt;*

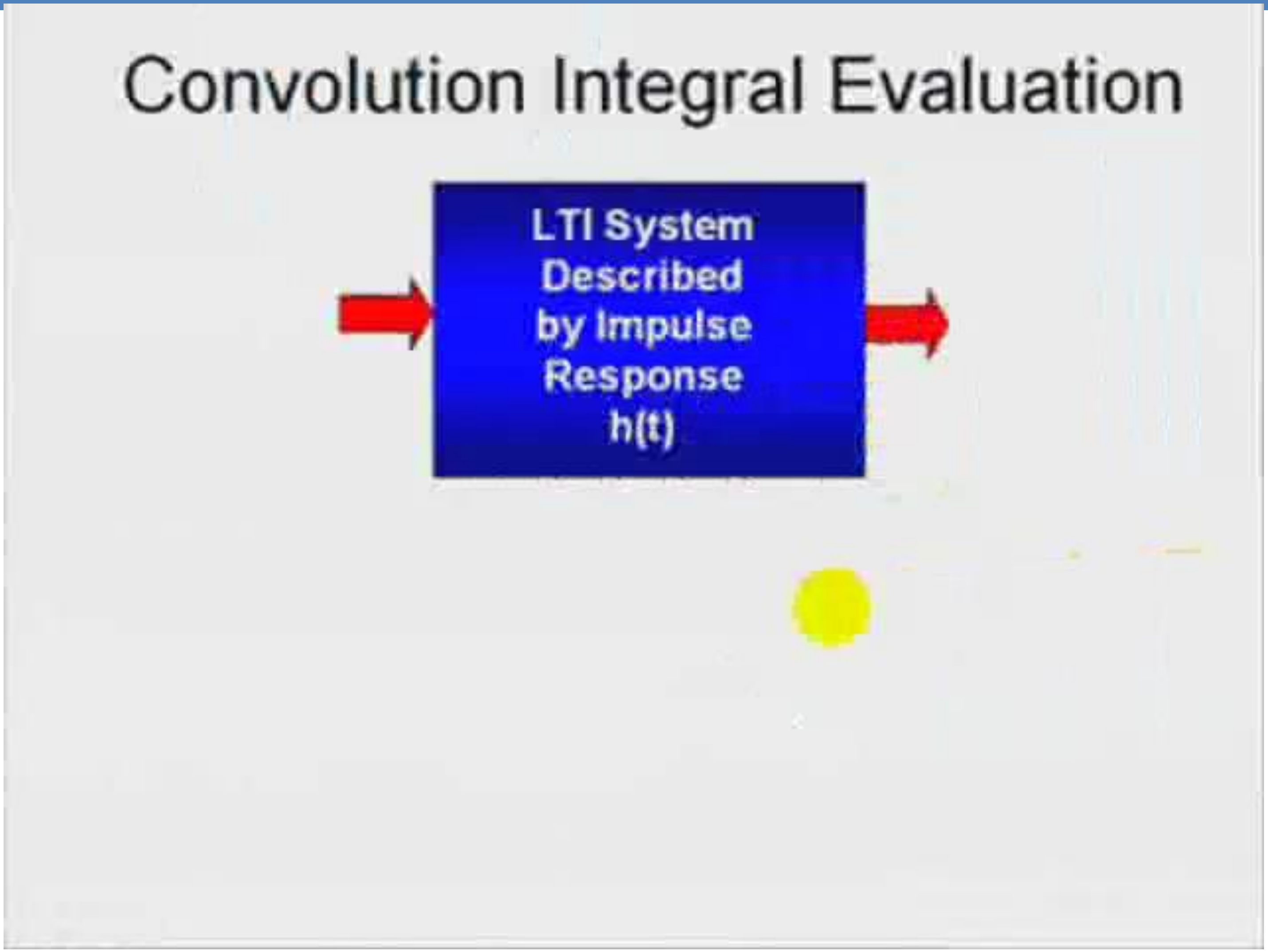
tc = (-1-1) : dt : (5+5) ;

Graficamos

Y analitica



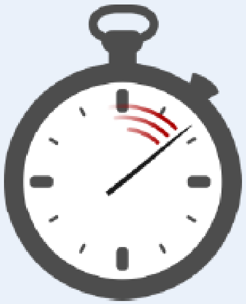
Video
Convolución
Continua
3 minutos



Video Convlución Discreta 1,5 minutos

Consigna de la clase #A (20 minutos)

1. Obtener la salida *y(t)* correspondiente al sistema ***LIT*** descripto por su ***respuesta impulsional*** *h(t)*, ***aplicando convolución*** en ***MatLab***. Verificar ***analíticamente*** los resultados obtenidos en ***a)*** y ***c)*** ***¿Pueden aplicarse propiedades?***



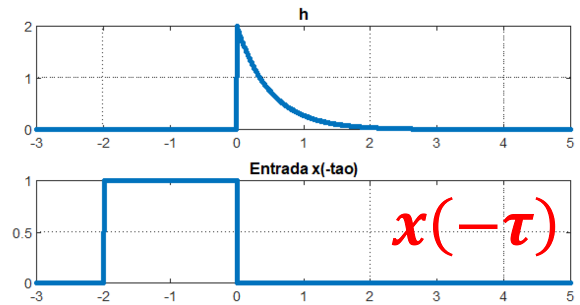
$$h(t) = 2e^{-2t}u(t), \begin{cases} a)\ x(t) = u(t) - u(t-2) \\ b)\ x(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-1) \\ c)\ x(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2) \\ d)\ x(t) = \cos(2\pi f_0 t)u(t),\ f_0 = \begin{cases} 1Hz \\ 10Hz \end{cases} \end{cases}$$

2. ***¿Se puede inferir alguna conclusión del efecto que impone el sistema las excitaciones sinusoidales en d)?*** Comparar excitación vs. respuesta ***en un mismo gráfico***, luego de transcurrido el régimen el transitorio, ***para ambas frecuencias***.

Analítico

1.a) $h(t) = 2.e^{-2.t}.u(t)$,

$\boldsymbol{x(t) = u(t) - u(t-2)}$



$\underline{t < 0}$

$\underline{\ Completar...}$

$\underline{0 < t < 1}$ Siendo: $\underline{x(t) = u(t) - u(t-2)}$

$h(t) = 2.e^{-2.t}.u(t)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau).x_1(t-\tau).d\tau =$

$y(t) = \int_0^t 2.e^{-2.\tau}.\cancel{u(\tau).}1.d\tau = \text{completar}$

$\underline{t > 1}$ Completar

Analítico

1.a) $h(t) = 2.e^{-2.t}.u(t)$,

Otra forma

$\boldsymbol{x(t) = u(t) - u(t-2)}$

Resolver $y1(t) = h(t) * \boldsymbol{u(t)}$

… completar….

$g(t) = y_1(t)$

Si $\boldsymbol{x(t) = u(t) - u(t-2)}$

¿ Qué propiedad puede usar ?

¿Cuánto vale $y(t) = x(t) * h(t)$ *?*

$y(t) =$

Sistemas LIT

Analítico

Sistemas LIT

1.c) $h(t) = 2.e^{-2.t}.u(t)$

$x(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2)$

¿ Qué propiedad puede usar ?

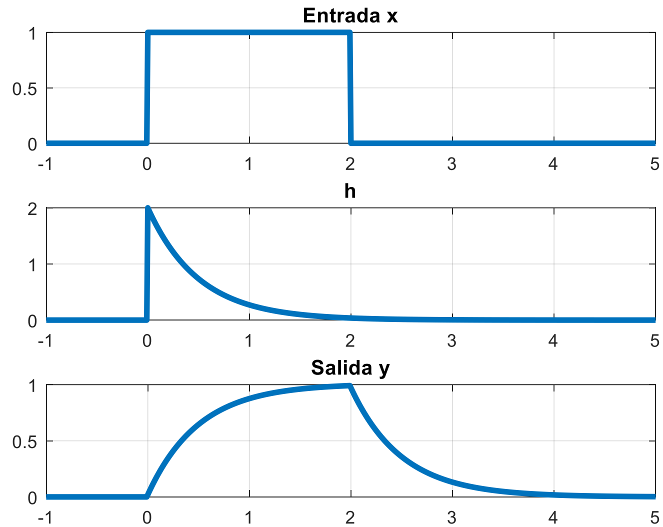
¿Cuánto vale $y(t)$*?*

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

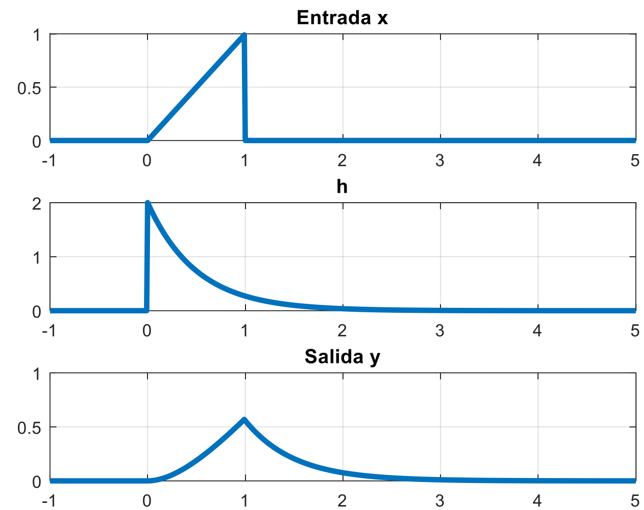
$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * (\delta(t-1) - \delta(t-2))$$

Resultados Matlab

Punto a)



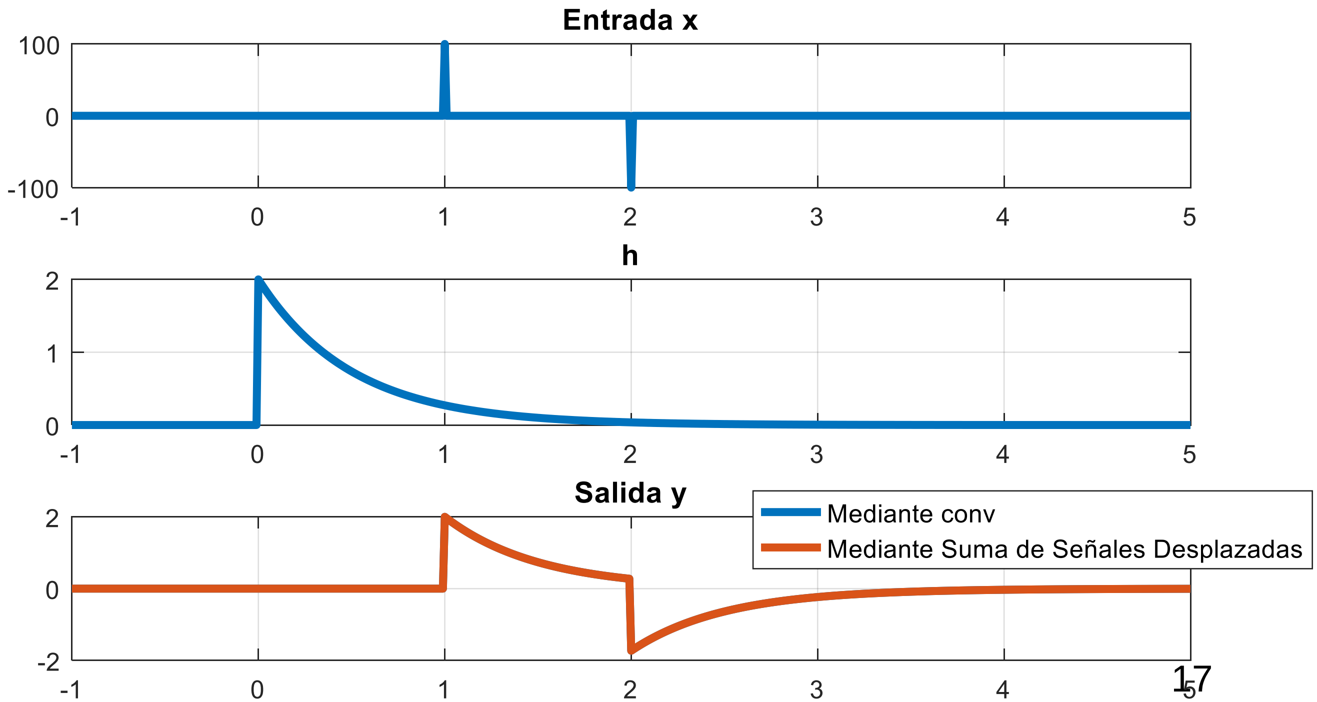
Punto b)



Resultados Matlab

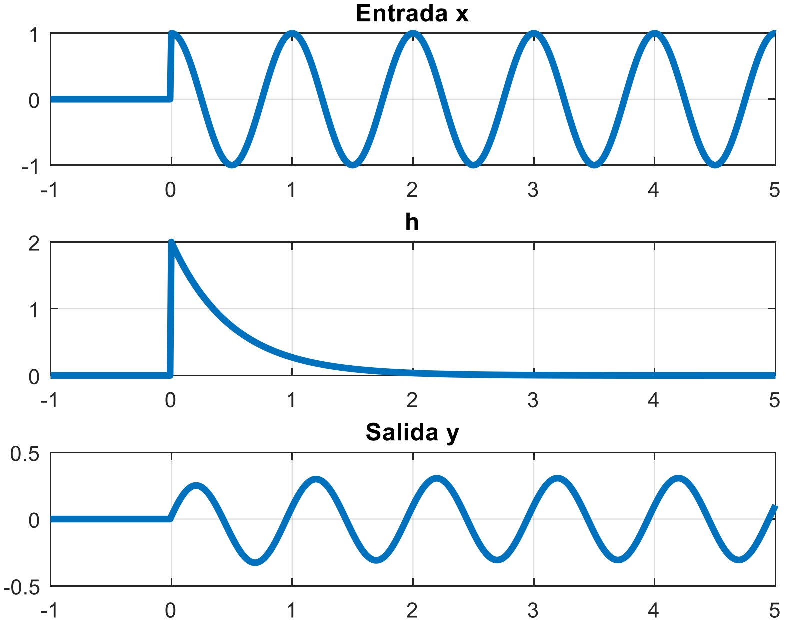
Punto c) *Resolvemos con **conv** y graficamos*
Luego Agregamos estas líneas

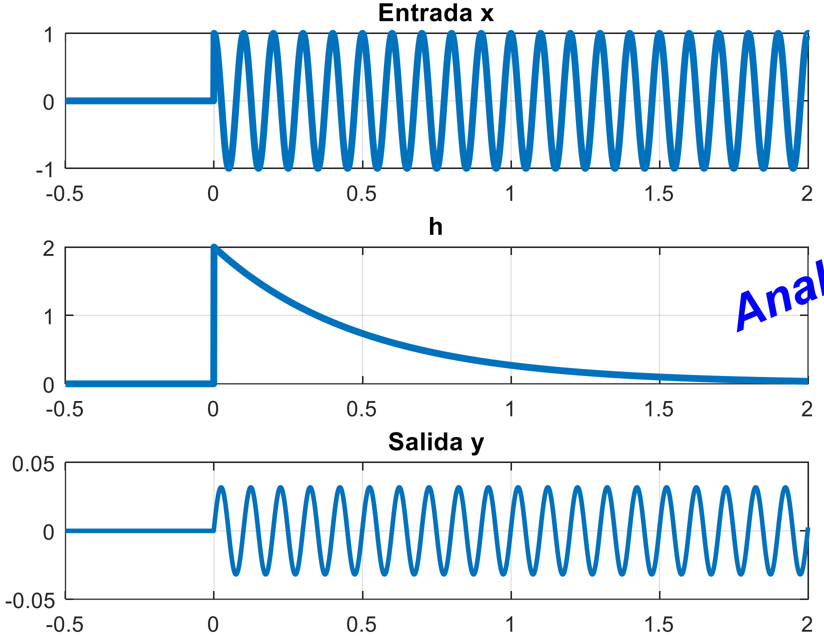
```
subplot(313);hold on ;  tt= -1: dt: 5 ;
hh = @(t) 2*exp(-2*(t)).*escalon(t);
yy= hh(tt-1)- hh(tt-2) ;
plot(tt,yy,'linewidth',3)
% Explicar con comentarios en script
```



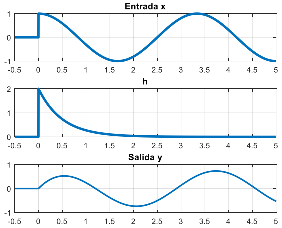
Resultados Matlab

Punto d) Escribir Conclusiones en comentarios en el script





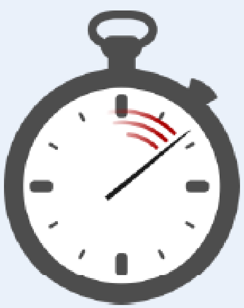
Analizar..

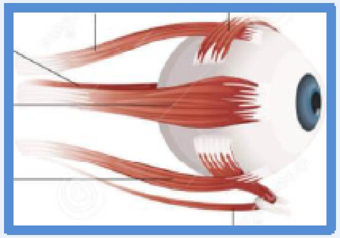


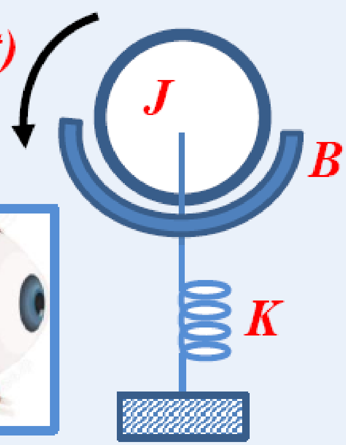
Agregado

Consigna de la clase #B INTEGRADORA (30 minutos)

1. Evaluar ***analíticamente*** la ***Respuesta Indicial*** (al escalón) del siguiente sistema, que modela la ***posición angular*** $\theta(t)$ del ojo humano (excitación muscular, $T(t)$). ***Utilizar MatLab*** para ***verificar el resultado***, utilizando **convolución**.







$$J = 1$$

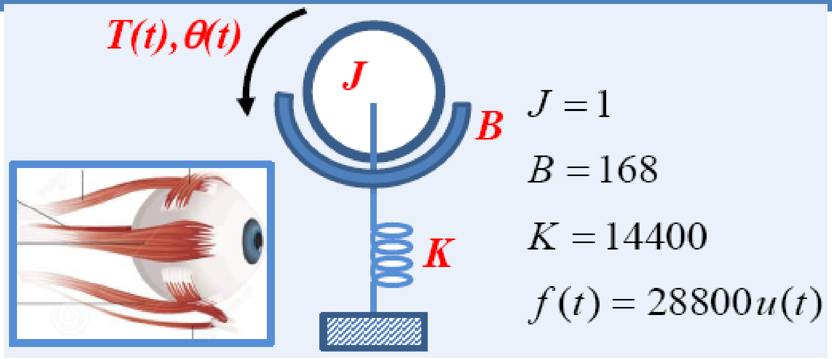
$$B = 168$$

$$K = 14400$$

$$f(t) = 28800u(t)$$

2. Para el sistema obtenido, ***evaluar las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad***

Actividad Práctica
Ayudas de Consignas



En clases

EDO

$$T(t) =$$

$$w(t) = \theta'(t)$$

Primero resolvemos EDO para hallar «Respuesta Indicial e Impulsional»

Luego «Convolución» o Linealidad

$$T(t) = J.w'(t) + B.w(t) + K\int_{-\infty}^{t} w(\tau).d\tau$$

$$T(t) = J.\theta''(t) + B.\theta'(t) + K.\theta(t) \quad ;$$

$$\frac{T(t)}{J} = \theta''(t) + \frac{B}{J}.\theta'(t) + \frac{K}{J}.\theta(t)$$

¿Por qué no usamos solo EDOs? ……

¿Qué pasa si tenemos 1000 señales de entrada distintas?

Situación real de un sistema

Primero calculamos la Respuesta Indicial:

$T1(t) = u(t)$ **(Amplitud 1)**

$J = 1 \quad ; \quad B = 168 \quad ; \quad K = 14400$

$\theta''(t) + 168.\theta'(t) + 14400.\theta(t) = 1$; para $t > 0$

Solución homogénea

$\theta''(t) + 168.\theta'(t) + 14400.\theta(t) = 0$; para $t > 0$

$\theta_H(t) = k.e^{\lambda.t} \quad ; \quad \lambda^2.k.e^{\lambda.t} + 168.\lambda.k.e^{\lambda.t} + 14400.k.e^{\lambda.t} = 0 \quad ;\lambda^2 + 168.\lambda + 14400 = 0$

roots([1 168 14400]) ans = -84.0000 +85.6971i -84.0000 -85.6971i

Raíces complejas conjugadas. Entonces planteamos:

$$\boldsymbol{\theta_H(t) = e^{-84.t}.(C_1.cos(85,7.t) + C_2.seno(85,7.t))}$$

Analítico

Solución particular

$\theta''(t) + 168.\theta'(t) + 14400.\theta(t) = 1$; para $t > 0$

Completar… $\theta_P(t) = A = \frac{1}{14400}$

Solución general= Solución homogénea + Solución particular

$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t)$

$\theta(t) = e^{-84\,.t}.(C_1.\cos(85{,}7.t) + C_2.\text{seno}(85{,}7.t)\,) + \frac{1}{14400}$

CIN: $\theta(0) = 0$

$\theta'(t) = -84\,.e^{-84\,.t}.(C_1.\cos(85{,}7.t) + C_2.\text{seno}(85{,}7.t)\,) + e^{-84\,.t}.(-C_1.85{,}7.\text{seno}(85{,}7.t) + C_2..85{,}7.\cos(85{,}7.t)\,)$

CIN: $\theta'(0) = 0$ **Completar…**

Respuesta Indicial ($T1(t) = u(t)$)

$$\boxed{g(t) = \theta(t) = \frac{1}{14400}\left[1 - e^{-84\,.t}.\left(cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.seno(85{,}7.t)\right)\right]}$$

Completar…
Presentar analitico y
Matlab completo

Verificamos con Matlab

```
dsolve('D2y+168*Dy+14400*y=1','y(0)=0', 'Dy(0)=0')
ans = 1/14400 - (7*51^(1/2)*exp(-84*t)*sin(12*51^(1/2)*t))/734400 - (exp(-84*t)*cos(12*51^(1/2)*t))/14400
7*51^(1/2)/14400    1/14000     Ok !!!
```

Respuesta Indicial

$$\boldsymbol{T1(t) = u(t)} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{g(t) = \theta(t) = \frac{1}{14400}\left[1 - e^{-84\,.t}.\left(cos(85,7.t) + \frac{84}{85,7}.seno(85,7.t)\right)\right]}}$$

Respuesta Impulsional

$$\boxed{\boldsymbol{h(t) = \frac{dg(t)}{dt}}}$$

$$h(t) = \frac{1}{14400}\left[+84\,.e^{-84\,.t}.\left(\cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.\text{seno}(85{,}7.t)\right) - e^{-84\,.t}.(-85{,}7.\text{seno}(85{,}7.t) + 84.\cos(85{,}7.t)\,)\right]$$

$$h(t) = \frac{e^{-84\,.t}}{14400}\left[+84\,.\left(\cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.\text{seno}(85{,}7.t)\right) + (85{,}7.\text{seno}(85{,}7.t) - 84.\cos(85{,}7.t)\,)\right]$$

$$h(t) = \frac{e^{-84\,.t}}{14400}\left[\left(\frac{84*84}{85{,}7}.\text{seno}(85{,}7.t)\right) + (85{,}7.\text{seno}(85{,}7.t)\,)\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{h(t) = \frac{e^{-84\,.t}}{14400}.168{,}034.seno(85{,}7.t)}} \quad \textbf{t>0}$$

Método 1: Convolución

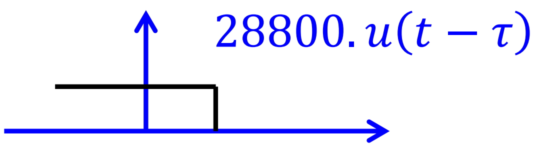
$$\boldsymbol{h(t) = \frac{e^{-84.t}}{14400}.168,034.seno(85,7.t)}$$

t>0

$$\boldsymbol{f(t) = T(t) = 28800.u(t)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\theta 2(t) = h(t) * f(t)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta 2(t) = h(t) * f(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).28800.u(t-\tau).d\tau}$$

Graficar $h(\tau)$ **y** $28800.u(t-\tau)$**, convolución:**



$$\boldsymbol{h(t) = \frac{dg(t)}{dt}}$$

$t > 0$

$$\boldsymbol{\theta 2(t)} = h(t) * f(t) = 28800\int_0^t h(\tau).1.d\tau = 28800.g(t)$$

Multiplicamos Indicial $g(t)$ ***por 28800***

Obtuvimos:

$$\boldsymbol{T1(t) = u(t)} \quad \rightarrow g(t) = \theta(t) = \frac{1}{14400}\left[1 - e^{-84.t}.\left(cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.seno(85{,}7.t)\right)\right]$$

$$\theta 2(t) = 28800.g(t) = 28800.\frac{1}{14400}\left[1 - e^{-84.t}.\left(cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.seno(85{,}7.t)\right)\right]$$

$$\theta 2(t) = 2.\left[1 - e^{-84.t}.\left(cos(85{,}7.t) + \frac{84}{85{,}7}.seno(85{,}7.t)\right)\right]$$

Ídem anterior
Por linealidad o por convolución mismo resultado

Método 2: Linealidad

Agregado: Enunciado pide convolución pero lo resolveremos por Linealidad

$$\boldsymbol{T1(t) = u(t) \quad \rightarrow g(t) = \theta(t) = \frac{1}{14400}\left[1 - e^{-84\,.t}.\left(cos(85,7.t) + \frac{84}{85,7}.seno(85,7.t)\right)\right]}$$

Sistema LIT: aplicamos «Linealidad»

$$\boldsymbol{f(t) = T(t) = 28800.u(t) \quad \rightarrow \quad \theta_2(t) = \frac{28800}{14400}\left[e^{-84\,.t}.\left(-cos(85,7.t) - \frac{84}{85,7}.seno(85,7.t)\right) + 1\right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta_2(t) = 2\left[1 - e^{-84\,.t}.\left(cos(85,7.t) + \frac{84}{85,7}.seno(85,7.t)\right)\right]}}$$

Linealidad:
Entrada: $x(t)$ salida $y(t)$
Entrada: $a.x(t)$ salida $a.y(t)$
$a.x1(t) + b.x2(t)$ salida:..

```
function Principal
clc; clear; close all;
%% Ejercicio Ojo
  dt = 0.005;   t = -0.1:dt:0.4;
%% Analitica
  g_an = (1/14400)*(1-exp(-84*t).*(cos(85.7 …. completar
  h_an = diff(g_an)/dt;
%% Numerica con ODE
  entrada = @(t1) escalon(t1);
  CI = [0;0];
  [tode, yode] = ode23(@(t,y)mi_edo2(t,y,entrada),t,CI);
  g_num = yode(:,1);
  h_num = yode(:,2);
%% Numerica con Convolucion
  tita2 = 2 * (1 - (exp(-84*t) .* (cos(85.7 * t) + (84/85.7) * sin(85.7 * t)))) .*escalon(t);
  entrada2 = 28800 .* escalon(t);
  conv1 = conv(h_num , entrada2) * dt;
  tc = t(1)+ tode(1) : dt : t(end)+ tode(end);
%% Graficamos
…  COMPLETAR
end
```

```matlab
%% Funciones EDOs
function dy = mi_edo2(t,y,x)
    K = 14400;  J = 1;  B = 168;
    xt = x(t);  %Entrada:
    A = [
           0,   1;
        -K/J, -B/J
        ];
    B = [   0;
            1/J
        ];
    dy = A*y + B*xt;
end
```

Otra Forma

Matlab

$$\boxed{\theta''(t) + 168.\theta'(t) + 14400.\theta(t) = 28800}$$

Vector yp es vector y derivado

```
%mi_edo2
function yp = mi_edo2(t,y)
    % y es un vector de 2 elementos con: y(1)=y    ;  y(2)=dy/dt.
   % Luego yp es la derivada del anterior:
   % yp es un vector de 2 elementos con: yp(1)=y(2)=dy/dt yp(2)=d2y/dt2
   % Debo resolver a* d2y/dt2 + b*dy/dt + c*y = f(t)
   % Despejo yp(2)= d2y/dt2 = f(t)/a -(b/a)*y(2) - (c/a)*y(1)
    yp=zeros(2,1); %Inicio una matriz de 2 filas y 1 columna con ceros
    yp(1)=y(2);
    yp(2)= 1 - 168*y(2) -1440*y(1);      %yp=[yp1;yp2];
end
```

Vector y

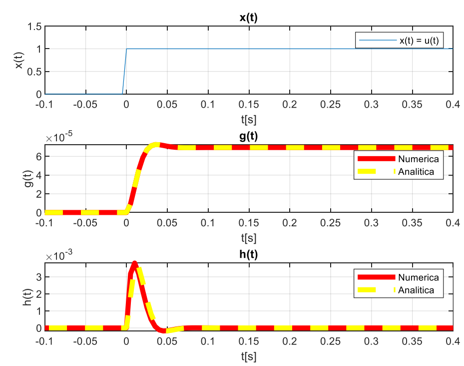
y
y'

Vector yp

y'
y''

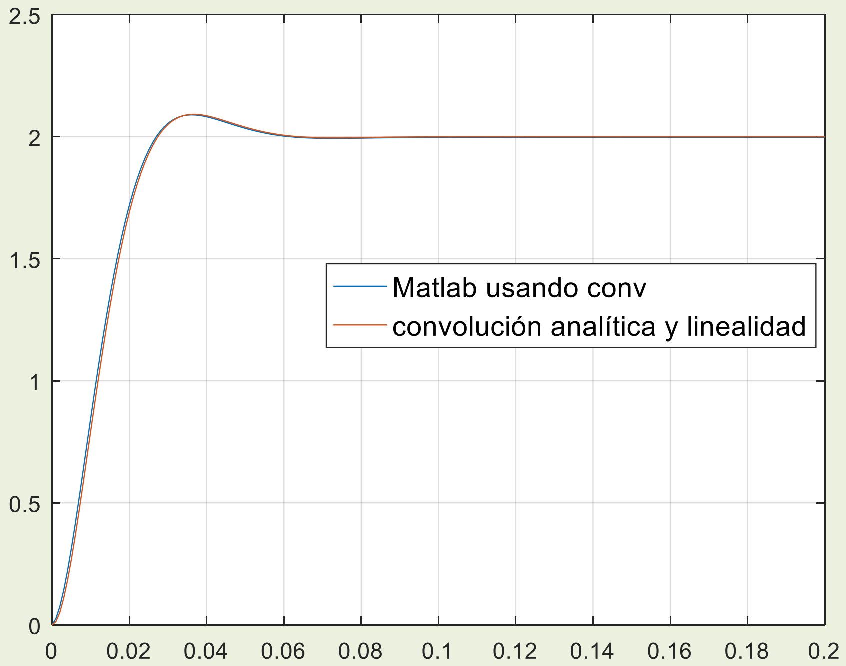
$$\boxed{y''(t) = 28800 - 168.y'(t) - 1440.y(t)}$$

$$\theta''(t) + 168.\theta'(t) + 14400.\theta(t) = 1$$



Actividad Práctica EN MATLAB...

```
%% Tarea
% Completar código....
t=0:dt:0.2 ; f=28800*escalon(t) ; % Escalón defino en  0 0,2
…
Usar al final:     xlim([0 0.2])
```




```
¿Que pasa si no usamos
xlim([0 0.2]) ?
Probar eliminar:
% xlim([0 0.2])
```

Punto 2 – Para el sistema obtenido, Analizar Memoria, Causalidad y Estabilidad

$$\boxed{h(t) = \frac{e^{-84\,.t}}{14400}.\,168,034.\,seno(85,7.\,t)}$$ t>0

¿Tiene Memoria ? ¿Es causal ? ¿Es estable? Completar

Repaso:

Sin Memoria

$$h(t) = A\delta(t)$$
$$h[n] = A\delta[n]$$

$\Rightarrow$ $h = y\big|_{x=\delta}$ $\Rightarrow$

$$y(t) = Ax(t)$$
$$y[n] = Ax[n]$$

Sistemas LIT SIN MEMORIA

Causalidad

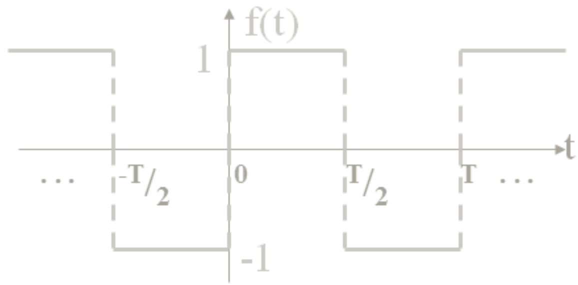
Para que no intervengan valores futuros de x respecto de t_0

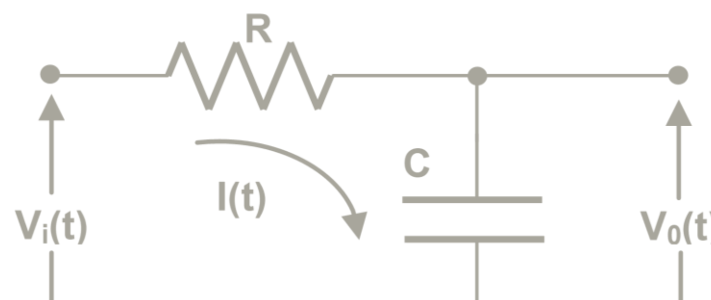
$$h(t) = 0 \ si \ t < 0$$
$$h[n] = si \ n < 0$$

Estabilidad

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$





Actividad Práctica

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual