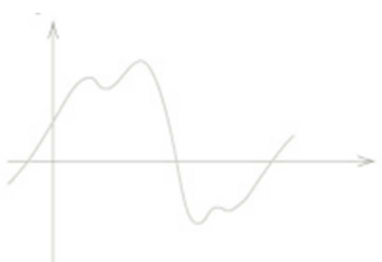
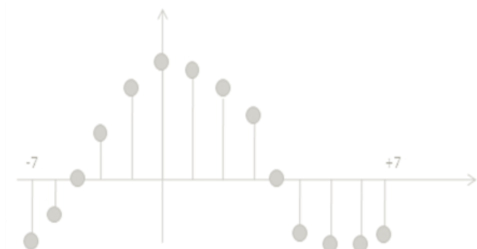
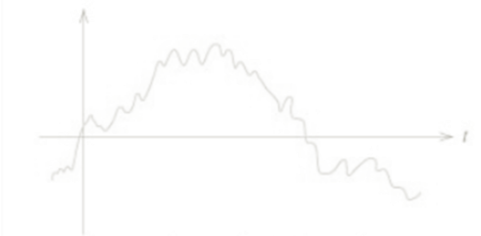
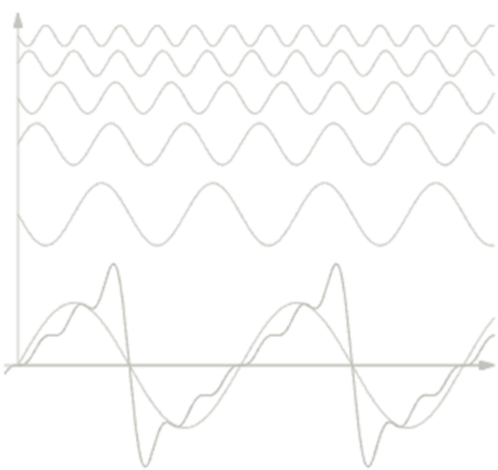






U1: Señales Continuas y Discretas

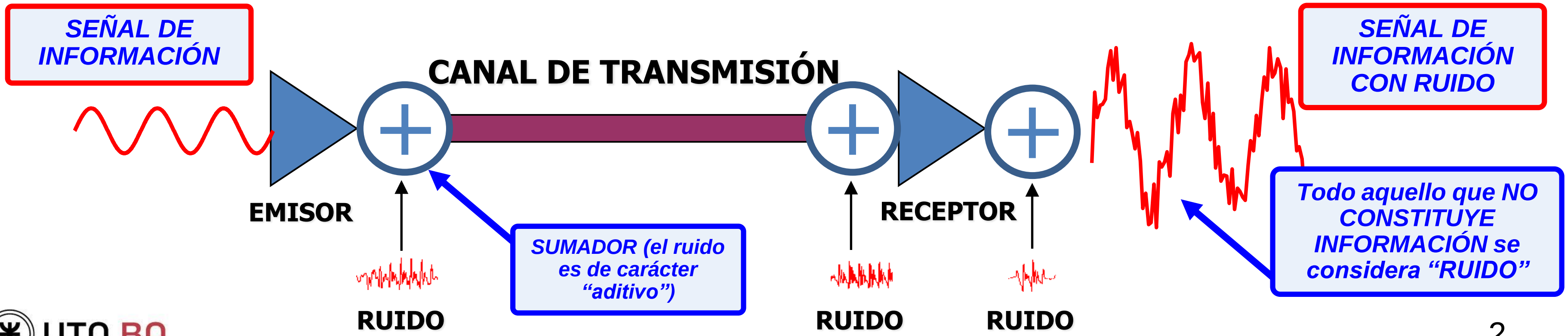
●Señales Continuas y Discretas 1P●



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

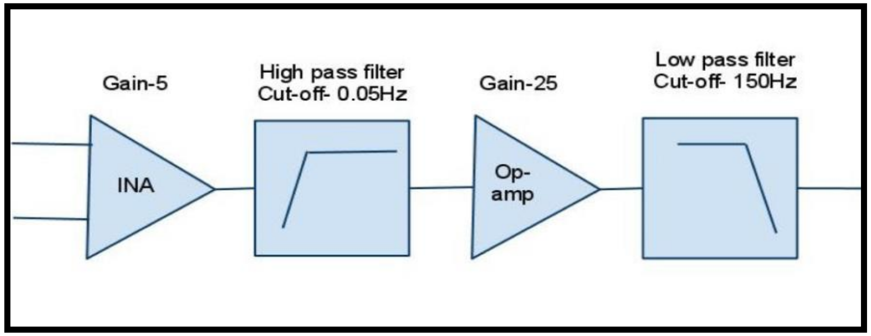
El concepto de "Señal Temporal"

Una ***señal*** es un ***símbolo***, un ***gesto*** u otro ***tipo de signo*** que ***informa*** o comunica algo. Puede ser también la ***variación de una corriente eléctrica*** u otra ***magnitud física en el tiempo*** que se utiliza para ***transmitir información***. Asimismo, las señales pueden ser afectadas de diversas maneras, dificultando su recepción, a partir de un fenómeno denominado ***"ruido"***:

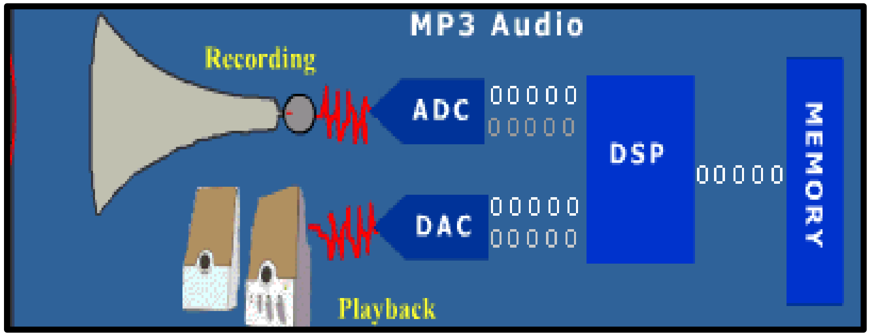


¿Qué implica "procesar" una señal?

El ***procesamiento*** de señales constituye la base para ***resaltar***, ***registrar***, ***extraer*** o ***transmitir*** información. Para ello se utilizan ***sensores*** (transductores) que ***transforman*** una magnitud física en una ***variación eléctrica***.



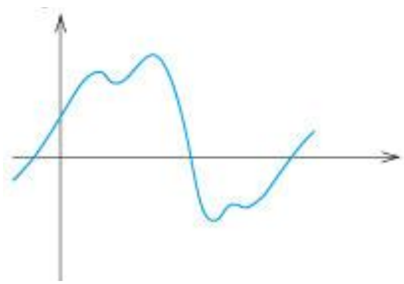
PROCESAMIENTO ANALÓGICO (Utiliza medios analógicos. Ej. Filtros circuitales)

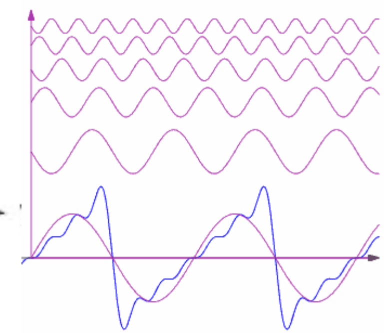


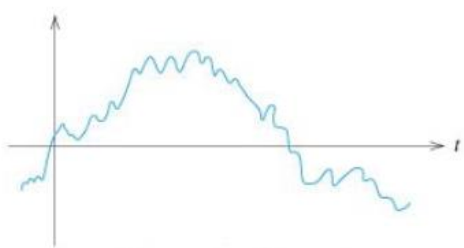
PROCESAMIENTO DIGITAL (Utiliza medios digitales. Ej. Algoritmos en un procesador)

Tipos de Señales

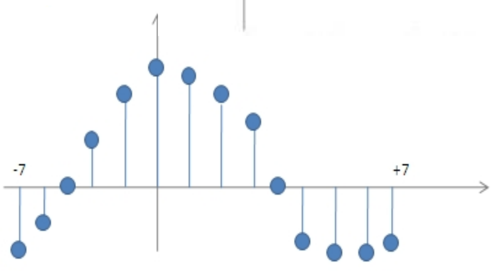
- Señales ***Continuas***
- Señales ***Discretas***
- Señales ***Analógicas***
- Señales ***Digitales***
- Señales ***Reales***
- Señales ***Complejas***
- Señales ***Deterministas***
- Señales ***Estocásticas***
- Señales ***Pares***
- Señales ***Impares***
- Señales ***Ortogonales***

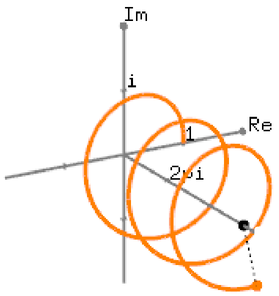






Las señales TEMPORALES pueden ser de diversos tipos



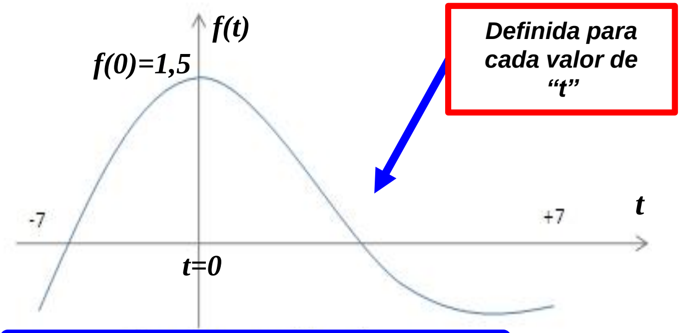


Señal de Tiempo Continuo

Es aquella que está ***definida en todos sus puntos*** a lo largo de un intervalo temporal:

$$\boxed{x = f(t)}$$

con "t" variable independiente continua



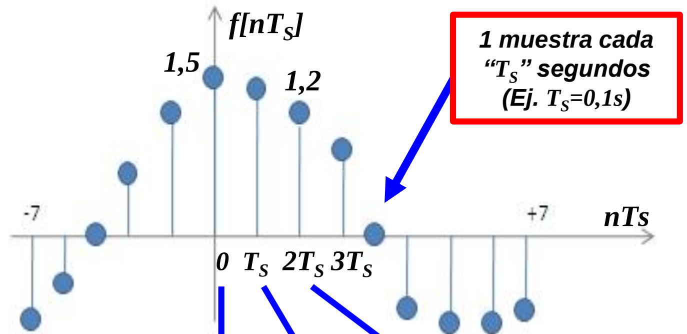
SEÑAL CONTINUA (presenta un valor para todo t)

Señal de Tiempo Discreto

Es aquella ***definida sólo en instantes específicos*** pertenecientes a un intervalo temporal. Dichos instantes, denominados ***muestras***, usualmente se encuentran equiespaciados:

$$\boxed{x_n = f[nT_S]}$$

con "n" variable independiente discreta (…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…) y T_S intervalo entre muestras



$$\boxed{x_n = \{\dots;\ \underline{1,5};\ 1,4;\ 1,2;\dots\}}$$

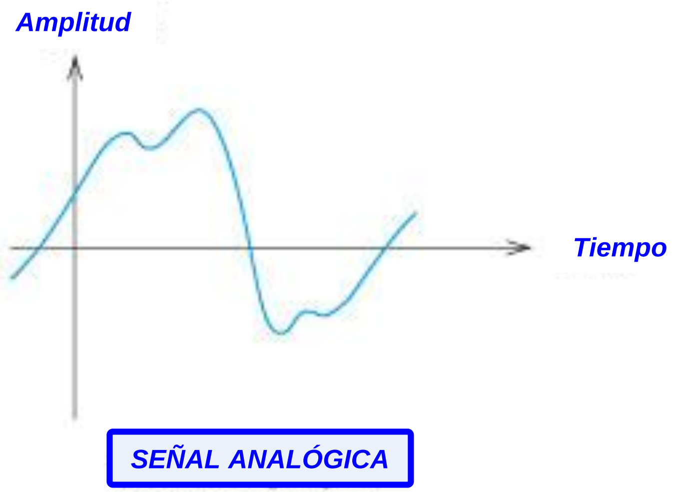
n=0 n=1 n=2

SEÑAL DISCRETA (presenta un valor en instantes específicos de t)

Clasificación de Señales

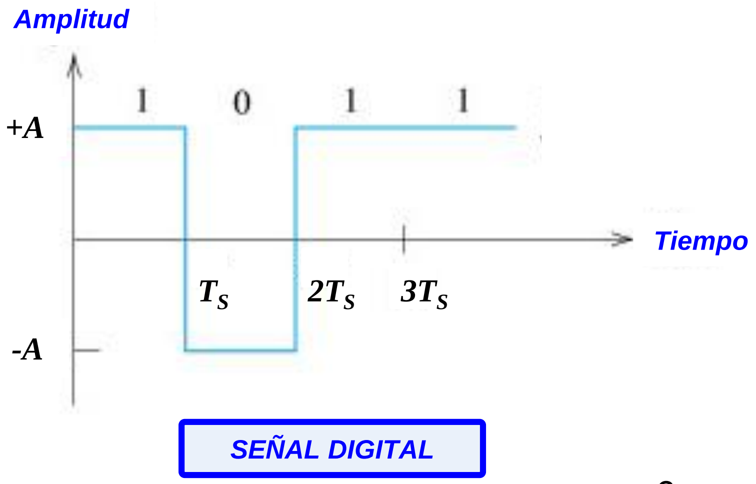
Señal Analógica

Es aquella *de* *tiempo continuo*, cuya ***magnitud*** también adopta valores ***continuos***. Se encuentra relacionada con un fenómeno físico, el cual está siendo estudiado o evaluado: El sonido, la luz, la tensión, la temperatura…



Señal Digital

Es aquella de *tiempo discreto*, cuya ***magnitud*** adopta valores en forma de ***dígitos codificados*** (generalmente de manera binaria)

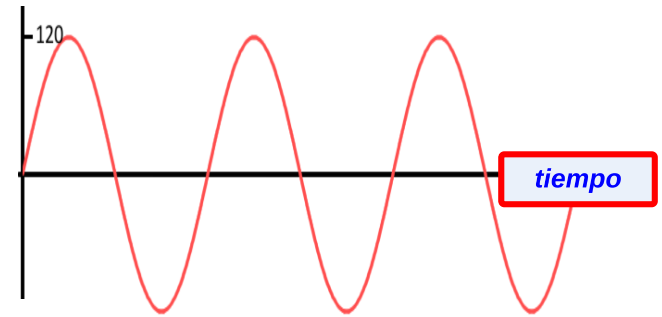


Clasificación de Señales

Señal Real

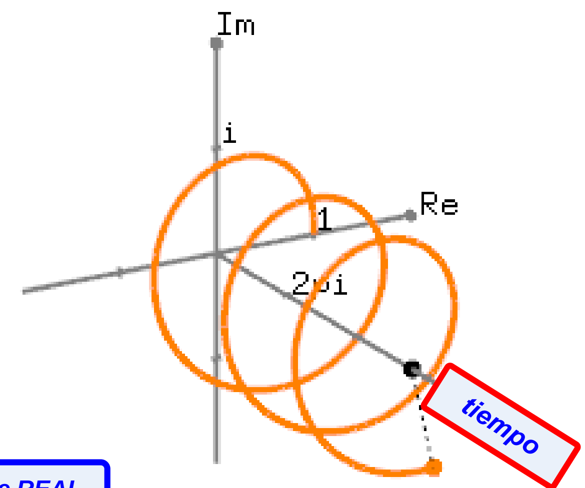
Es aquella cuya ***magnitud*** adopota valores pertenecientes al ***conjunto de los números reales***:

$$\boxed{x(t) = sen(2t)}$$



Señal Compleja

Es aquella cuya ***magnitud*** adopta valores pertenecientes al ***conjunto de los números complejos***. Debe recordarse este último ***incluye*** al conjunto de los números reales.



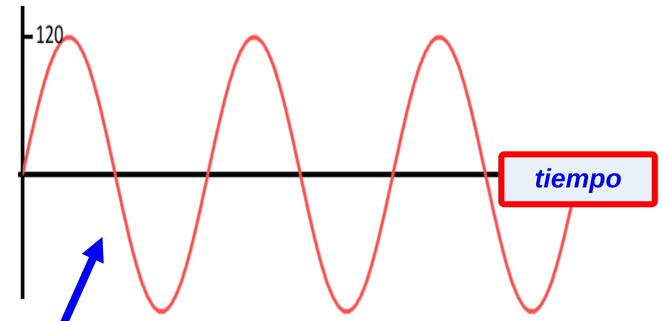
$$\boxed{x(t) = \cos(t) + jsen(t)}$$

$x(t)$ presenta una parte REAL ($\cos(t)$) y una parte IMAGINARIA ($sen(t)$)

Clasificación de Señales

Señal Determinística

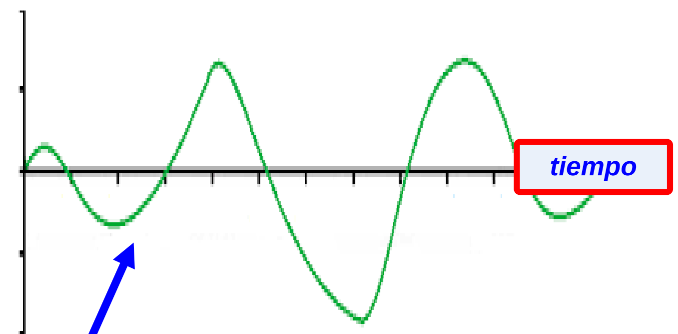
Es aquella que puede ser representada explícitamente ***por una función matemática***: $x(t)=sen(2t)$. Como consecuencia de ello, ***es predecible***.



Debido a que una señal determinística puede ser descripta matemáticamente, puede conocerse su valor para todo t

Señal Aleatoria o "Estocástica"

Es aquella cuya magnitud ***no puede ser descripta por ninguna función*** y por lo tanto sus valores no son predecibles. Ej: la voz, el ruido, parámetros climáticos...



Una señal ESTOCÁSTICA NO PUEDE DESCRIBIRSE a través de una función matemática dependiente del tiempo…

Clasificación de Señales

Señales Pares e Impares

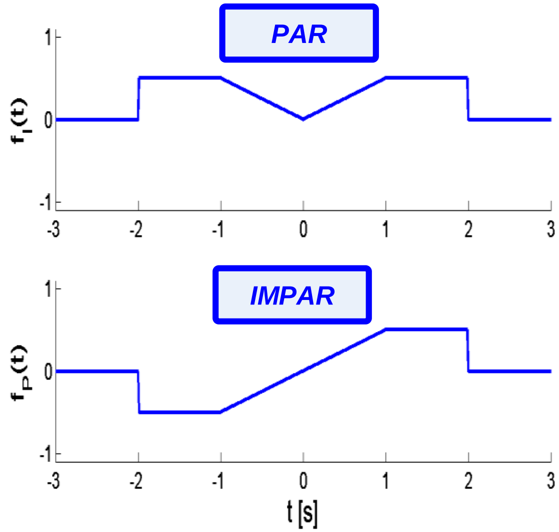
Una señal ***par*** es aquella ***simétrica*** respecto del eje de ***ordenadas***. Es ***impar***, si la ***simetría*** se observa respecto del eje de ***abscisas***

$$\boxed{x(t) = x(-t)}$$

PAR

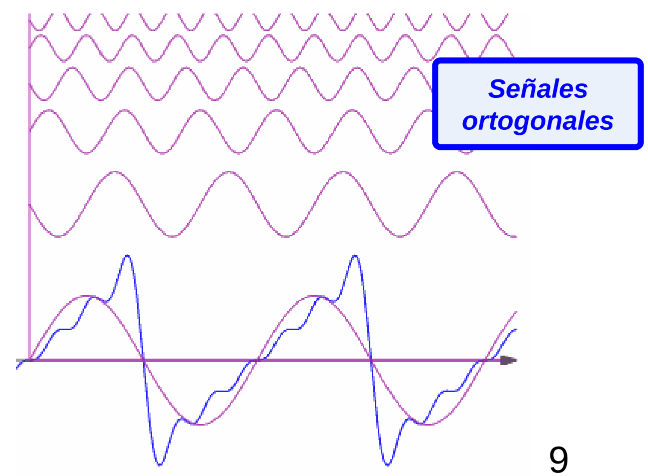
$$\boxed{x(t) = -x(-t)}$$

IMAR



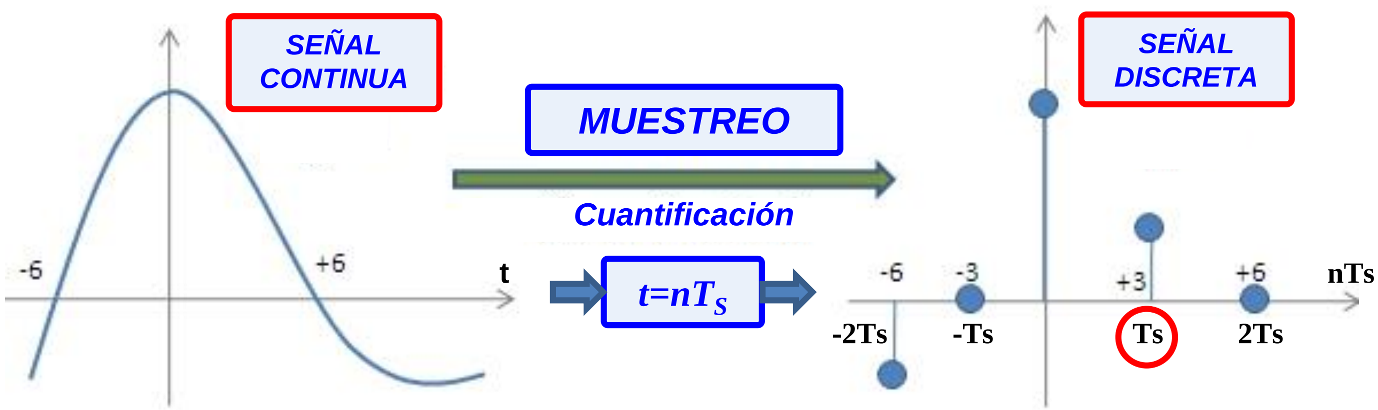
Señales Ortogonales

Su ***producto interno*** resulta nulo (perpendiculares entre si). Permiten conformar una ***base de funciones*** de modo poder representar otras (Series de Fourier).

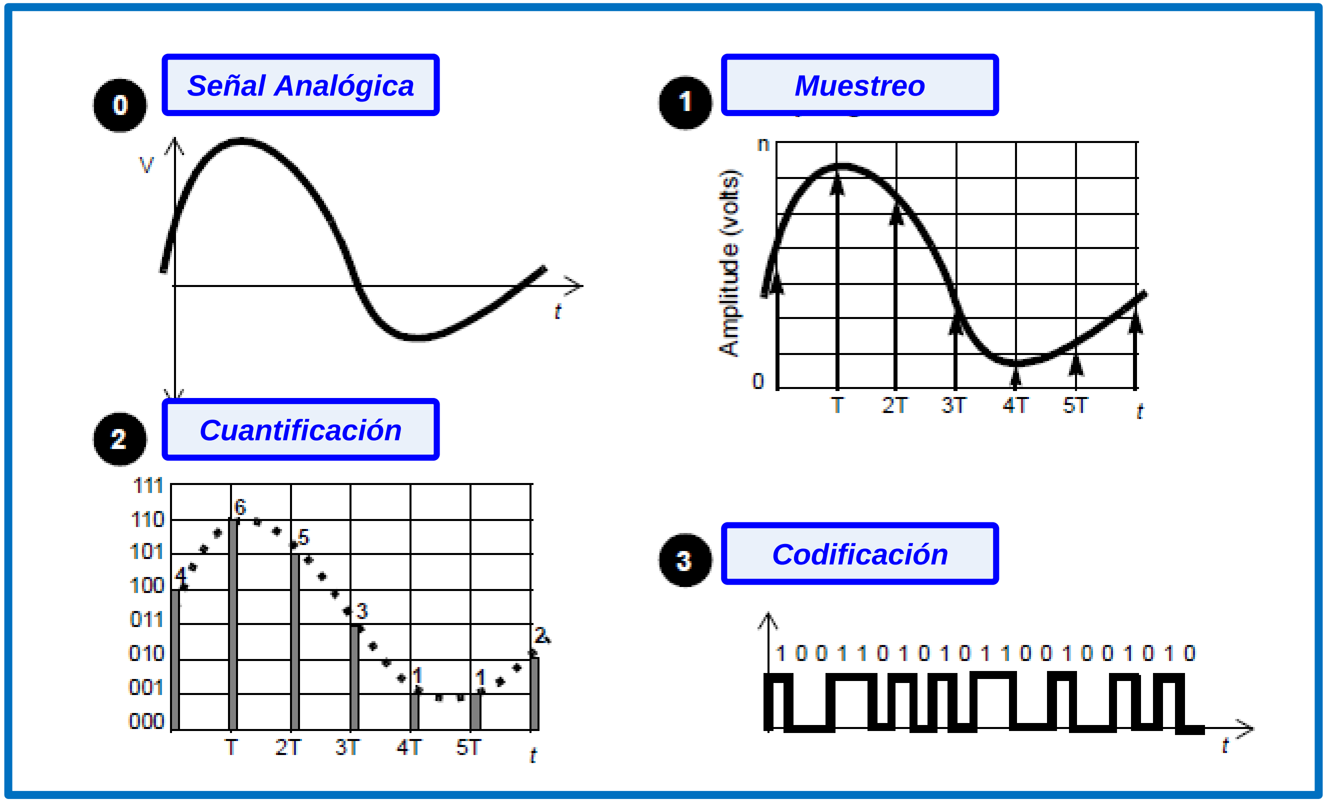


¿Qué constituye formalmente el proceso de "muestreo"?

Una señal continua puede convertirse en una serie temporal discreta, adquiriendo ***muestras*** de la misma a ***intervalos regulares*** de valor T_s. ***Dicho proceso se denomina muestreo***. Por otra parte, si el valor obtenido de cada muestra discreta no puede ser continuo y debe encontrarse dentro de un ***conjunto de valores posibles***, se está efectuando un proceso de ***cuantificación*** (***digitalización*** si se lo codifica)



Unidad 1: Señales Continuas y Discretas
Clasificación de Señales

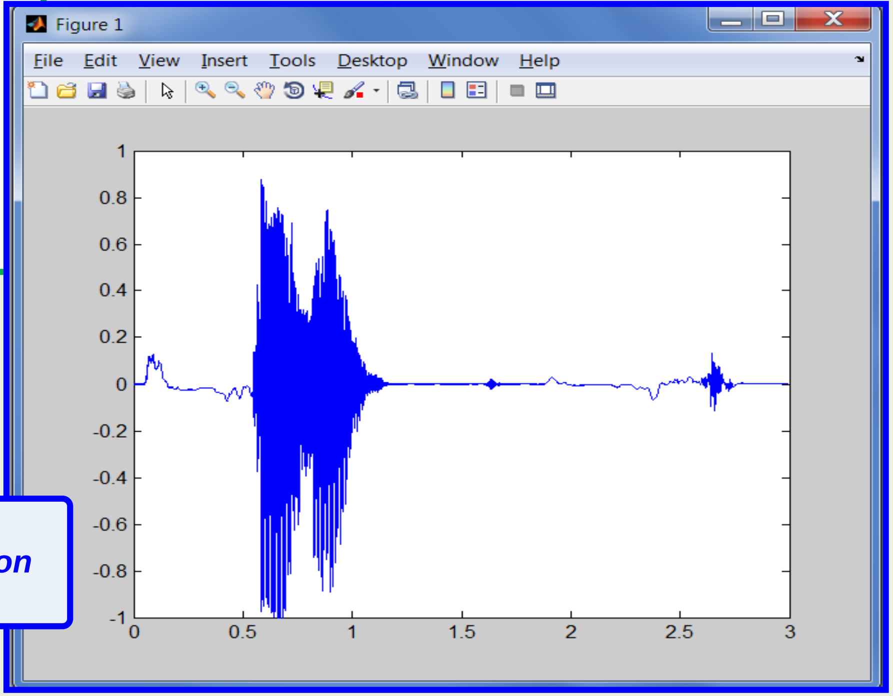


Digitalización en tres pasos: ***1) Muestreo*** (obtención de muestras a intervalos regulares), ***2) Cuantificación de la amplitud*** (asignación de niveles representables en el sistema de numeración a utilizar) y ***3) Codificación binaria*** (asignación de un número binario a cada nivel)

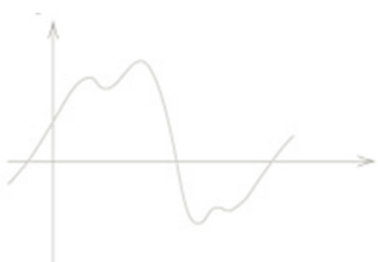
Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

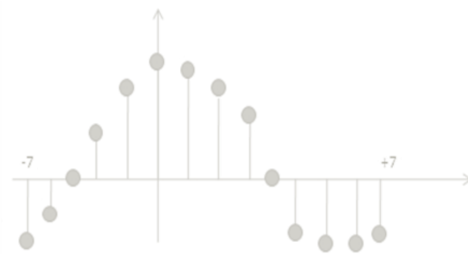
Aplicación en MatLab

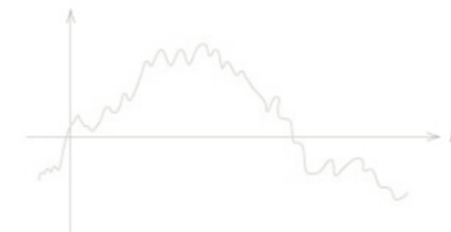
```
dt=1/8000;
t=0:dt:3-dt;
fs=1/dt;
r=audiorecorder(fs,16,1);
record(r,3);
y=getaudiodata(r);
plot(t,y);
audiowrite('sonido.wav',y,fs);
[y,fs]=audioread('sonido.wav');
sound(y,fs);
```



MatLab/Octave posibilita trabajar con señales audibles

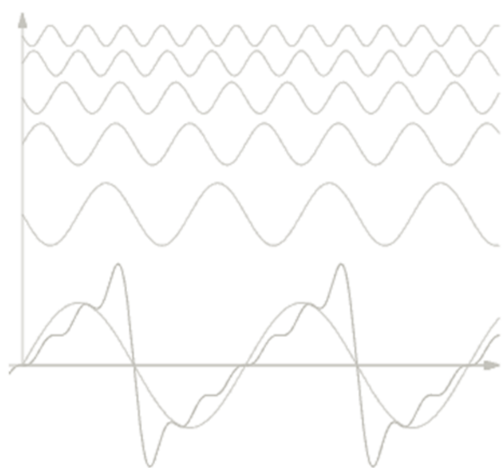


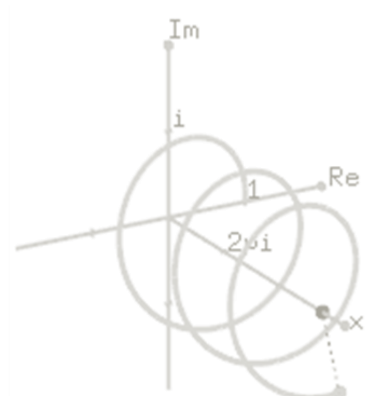




U1: Señales Continuas y Discretas

●Señales Periódicas●





Señales Periódicas

¿En qué consiste una señal periódica?

Las señales periódicas presentan un ***patrón que se repite infinitamente*** en el tiempo, de modo que se cumple:

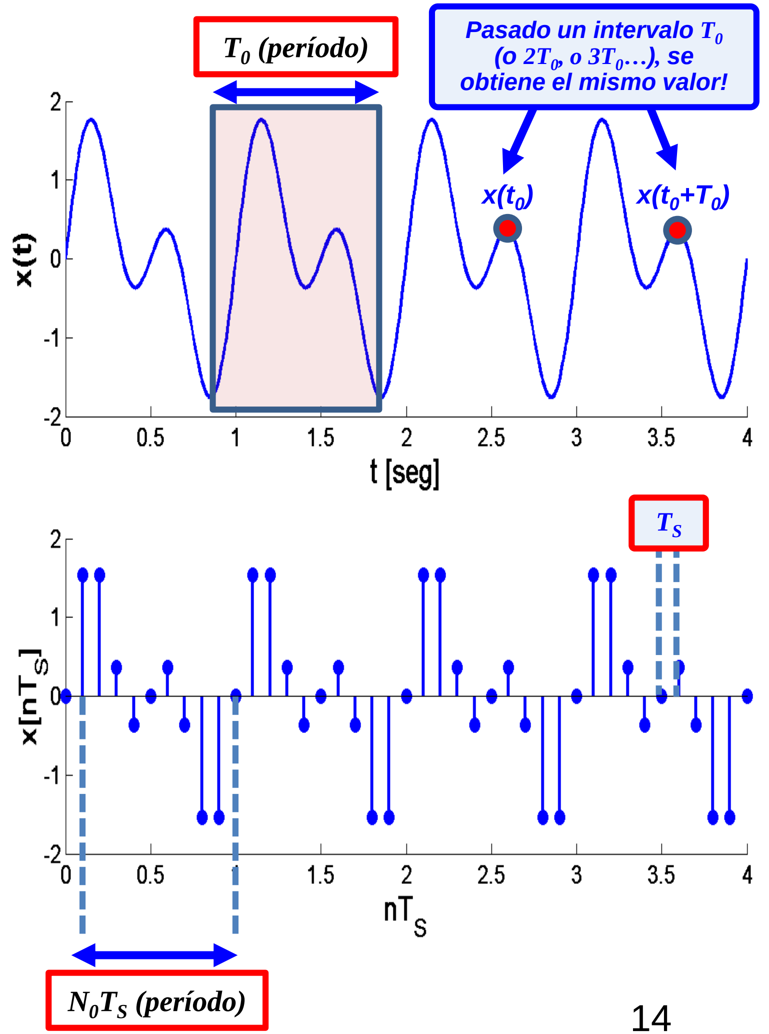
$$x(t) = x(t + mT_0)$$

Aplicando Muestreo

$$x[nT_S] = x[nT_S + mN_0T_S]$$

donde T_0 **(en segundos)** o N_0 **(en número de muestras)** se denomina ***período fundamental***. El valor ***m es un número entero***

En el intervalo de un período se encuentra contenida toda la información ÚTIL de la señal



Señales Periódicas

La cantidad de ***repeticiones*** del patrón ***en un segundo***, se denomina ***frecuencia*** [ciclos/seg o Hz]:

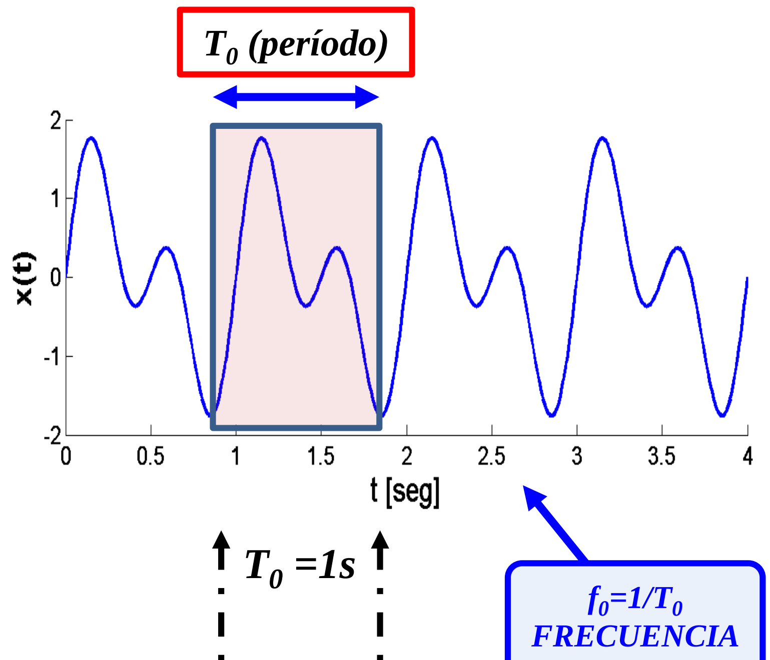
$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0}\,[Hz]}$$

que también puede expresarse en forma de ***frecuencia angular*** [radianes/seg]:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\, f_0 \quad [\frac{rad}{s}]}$$

Por ejemplo, el ***"espectro audible"*** puede subdividirse en ***rangos de frecuencia***:

F. BAJAS (***16-256 Hz***), ***F. MEDIAS*** (***256 Hz a 2 kHz***) y ***F. ALTAS*** (***2-16 kHz***)



$$T_0 = 1\,s$$
$$f_0 = 1\,Hz$$
$$\omega_0 = 2\pi\ rad/s$$

$f_0=1/T_0$
FRECUENCIA
(cantidad de repeticiones del período por segundo, Hz)

Señales Periódicas

¿Y cómo se trabaja con una señal discreta periódica?

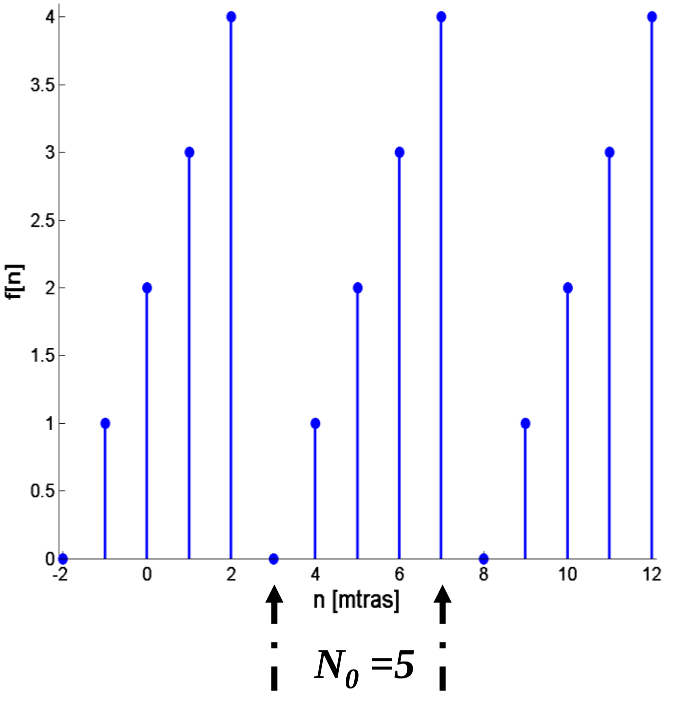
Si se ***normaliza*** el eje temporal de la señal discreta por el intervalo T_s, el ***tiempo discreto*** se torna ***adimensional*** y se lo mide en ***muestras*** ***(t=nT$_s$→n)*** **:**

$$\boxed{x[n] = x[n \pm mN_0]}$$

Se trabaja con "n" en lugar de "nTs" (T_s=1)

Al igual que en las continuas, se puede calcular una frecuencia, ***que también resulta normalizada***, denominda "***FRECUENCIA DIGITAL***":

$$F_0 = \frac{1}{N_0} \quad [\frac{ciclos}{mtra}]; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = 2\pi F_0 \quad [\frac{rad}{mtra}]$$



$$N_0 = 5 \Rightarrow F_0 = \frac{1}{5} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

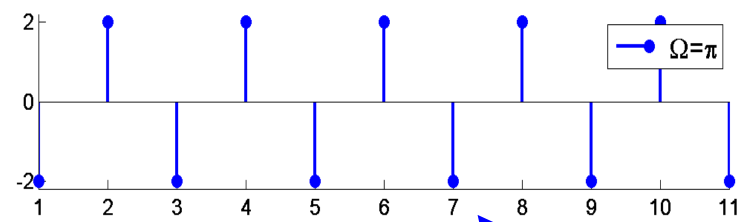
Señales Periódicas

¿Qué particularidad se observa en una señal discreta en tiempo normalizado?

Debido a que N_0 es un número natural (cantidad de muestras del período), el **mínimo valor que puede alcanzar es de 2 muestras** (si $N_0=1$ se genera una señal constante, no considerada periódica).

En términos de la frecuencia normalizada Ω_0, *el rango de variaciones* que puede experimentar la señal es:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}\begin{cases} N_0 = 2 \rightarrow \Omega_0 = \pi \text{ (frec. máxima)} \\ N_0 \rightarrow \infty \rightarrow \Omega_0 = 0 \text{ (frec. mínima)} \end{cases}$$



$N_0 = 2$

$N_0=2$ es la máxima variación que puede experimentar una señal periódica discreta

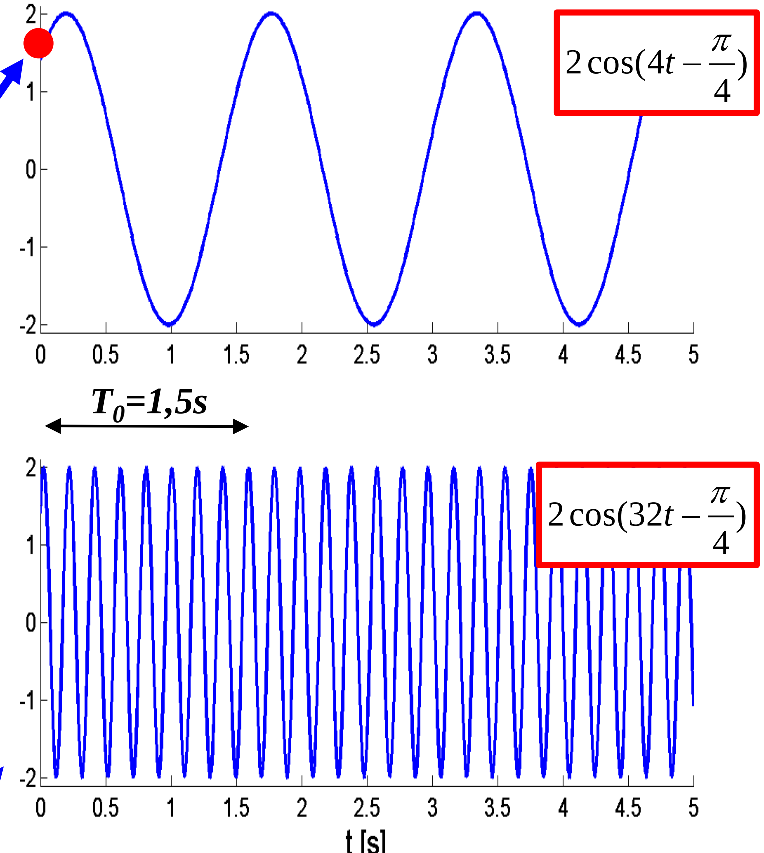
$$N_0 = 2 \Rightarrow F_0 = 0,5 \Rightarrow \Omega_0 = \pi$$

Funciones Sinusoidales Continuas

Permiten la representación ***matemática*** de ***oscilaciones puras*** en el dominio del tiempo:

$$\boxed{x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

- A: Amplitud
- f_0: Frecuencia $[Hz]$
- $\omega_0=2\pi f_0$ Frecuencia angular $[rad/s]$
- $T_0=2\pi/\omega_0=1/f_0$: Período $[s]$
- φ: Fase $[rad]$ (corrimiento temporal)
- Rango posible de valores de ω_0: $[0;\infty)$

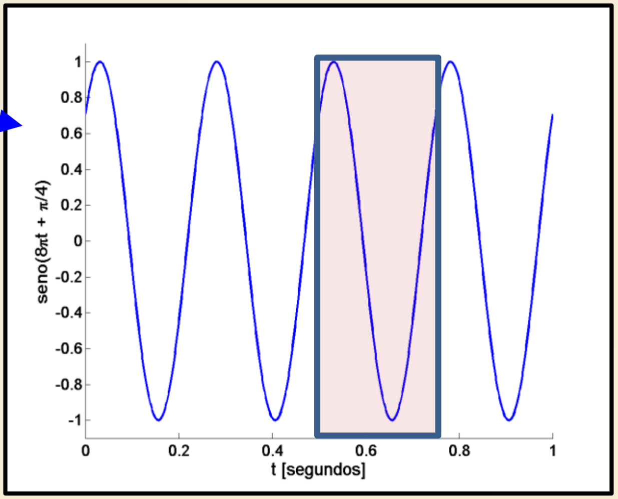


Resulta una señal ÚNICA PARA CADA VALOR de ω_0

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Calcular el período T_0 de la siguiente función $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = sen(8\pi t + \frac{\pi}{4})}$$



$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T_0} \Rightarrow \begin{cases} f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4\ ciclos/seg \\ T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{1}{4} = 0,25s \end{cases}$$

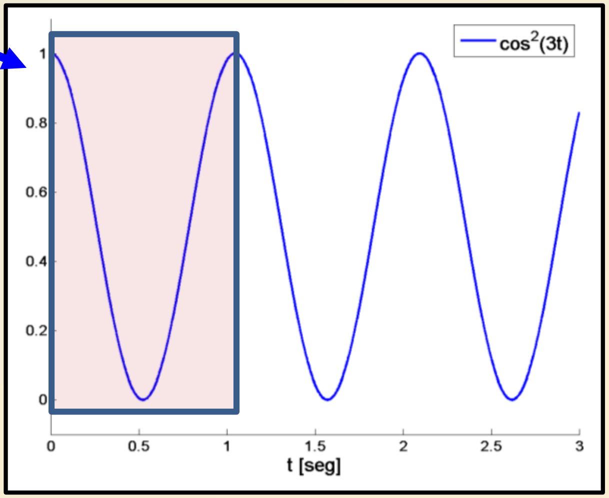
Nótese que la frecuencia angular ω_0 se utiliza de modo que ***al ser multiplicada por "t", el argumento del seno quede en radianes***. Por su parte, la ***fase*** $\pi/4$ (en radianes) introduce un desplazamiento ***temporal*** del seno de $(\pi/4)/\omega_0 = 1/32$ segundos.

Ejemplo: Calcular el período T_0 de la siguiente función $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = \cos^2(3t)}$$

$$\cos^2(3t) = \frac{1+\cos(2.3t)}{2} \rightarrow \omega_0 = 6\ rad/s$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{3}\ seg$$



Como puede advertirse, no en todos los casos el factor que multiplica a la variable t (en este ejemplo el valor 3) determina la frecuencia de la señal sinusoidal. Efectivamente, elevar el coseno al cuadrado <u>duplica dicho valor</u>

Señales Periódicas

Discretizando señales periódicas continuas: ¿El resultado es una periódica discreta?

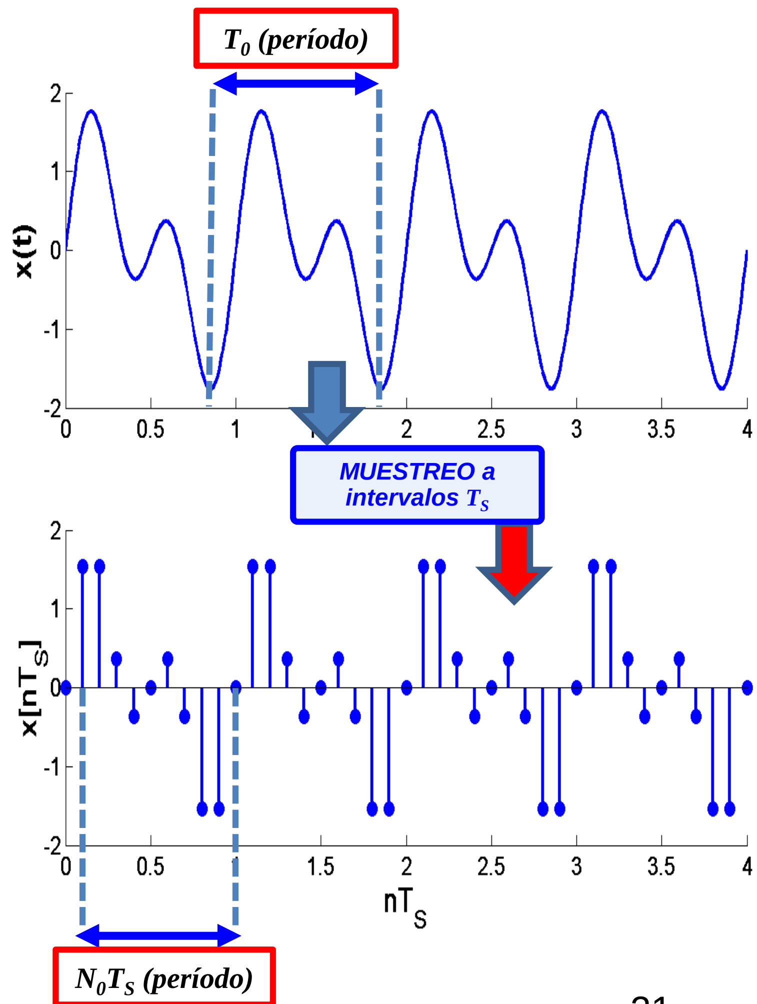
Se toman muestras de una señal periódica continua a intervalos temporales T_s ($t=nT_s$, **con n entero**):

La señal resultante ***sólo será periódica en N_0 si se cumple*** $kT_0=T_sN_0$. En este caso, k (natural) es el ***número de períodos continuos*** utilizados para generar la señal discreta:

$$\boxed{N_0T_S = kT_0 \rightarrow \frac{k}{N_0} = \frac{T_S}{T_0} = \frac{f_0}{f_S} = F_0}$$

$f_s=1/T_s$ se denomina FRECUENCIA DE MUESTREO

La frecuencia digital F_0 resulta un NÚMERO RACIONAL (cociente de enteros). Si $k=1$, sólo se toma un ciclo de la señal continua para generar N_0.



Ejemplo Práctico

Verificación: Se muestrea una ***señal sinusoidal*** a intervalos regulares T_s, ***de modo de obtener una señal discreta periódica***:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \rightarrow t = nT_S$$

$$x[nT_s] = \cos(\omega_0 nT_S + \phi) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_S} n + \phi)$$

$$x[n] = \cos(2\pi F_0 n + \phi) = \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

$f_S=1/T_S$ es la FRECUENCIA DE MUESTREO

Efectivamente, la relación entre f_0 y $f_S=1/T_S$ determina la ***frecuencia normalizada*** $\Omega_0=2\pi F_0$. ***De esta manera, si la señal resulta periódica, debe cumplirse que***:

$$\cos(\Omega_0 n + \varphi) = \cos(\Omega_0 (n + N_0) + \varphi) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N_0 + \varphi)$$

Ejemplo Práctico

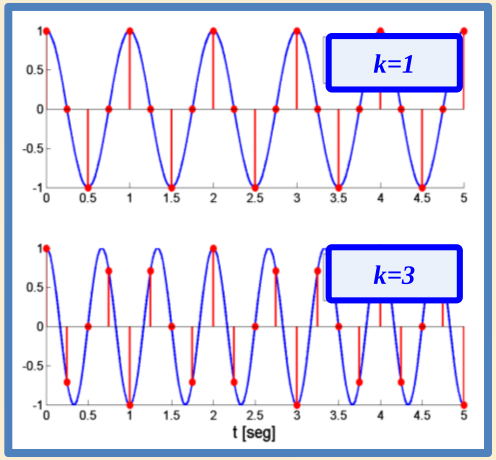
Por lo que $\Omega_0 N_0$ ***debe ser un múltiplo de*** 2π (el coseno es periódico en $2k\pi$) ***para que la igualdad se cumpla***. Finalmente:

$$\boxed{\Omega_0 N_0 = 2k\pi \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2k\pi}{N_0} = 2\pi F_0} \Rightarrow \boxed{F_0 = \frac{f_0}{f_S} = \frac{k}{N_0}}$$

Se verifica entonces que <u>en las sinusoidales discretas</u> la frecuencia $F_0 = f_0 / f_S$ <u>debe ser un cociente de enteros</u> (k/N_0) <u>para que la función sea periódica</u> (en caso contrario no lo será)

No se requiere que F_0 sea necesariamente sea un entero (f_S múltiplo de f_0), YA QUE SE PUEDE UTILIZAR MÁS DE UN CICLO PARA GENERAR PERIODICIDAD.

En este último caso, la cantidad de períodos utilizados de la señal continua (envolvente) la determina el valor de k (cuyo valor es 1 si efectivamente f_S es múltiplo de f_0)

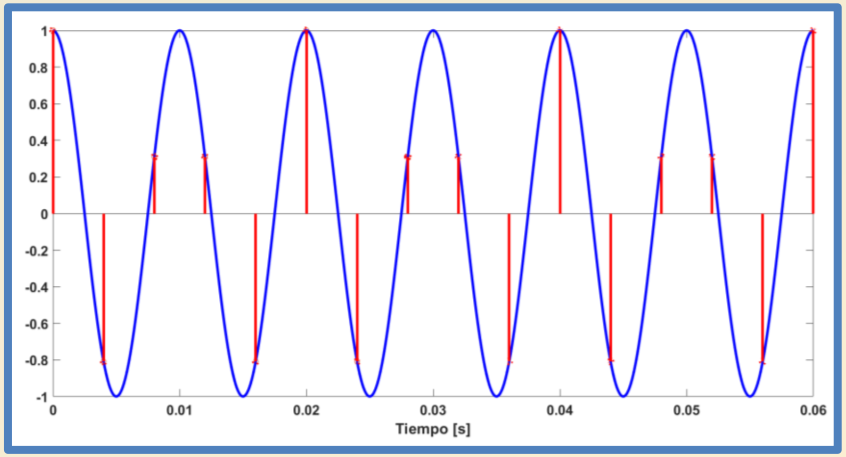


Ejemplo Práctico

Ejemplo: Se discretiza la señal $x(t)=\cos(2\pi 100t)$ con un intervalo de muestreo $T_S=0{,}004s$ ¿Resultará periódica la señal $x[n]$?

Calculando entonces el valor de la frecuencia digital:

$$F_0 = \frac{f_0}{f_S} = \frac{100Hz}{\frac{1}{0{,}004}Hz} = 0{,}4 = \frac{2}{5} = \frac{k}{N_0}$$



Efectivamente ***la señal obtenida será periódica***, cuyo período será $N_0=5$ y se utilizarán $k=2$ ***ciclos*** de la señal $x(t)$ para generarlo

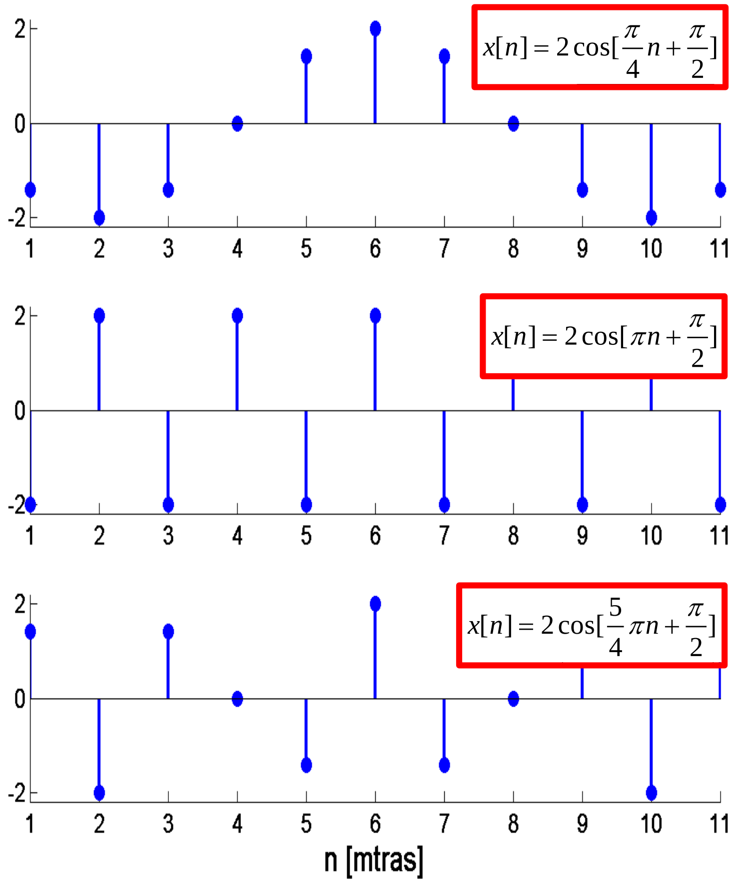
Señales Periódicas

Funciones Sinusoidales Discretas en Tiempo Normalizado

$$\boxed{x[n] = A\cos[2\pi F_0 n + \phi] = A\cos[\Omega_0 n + \phi]}$$

- A: Amplitud
- F_0: Frecuencia ***normalizada*** *[ciclos/mtra]*
- $\Omega_0 = 2\pi F_0$: Frecuencia angular [*rad/mtra*]
- $N_0 = 2k\pi/\Omega_0$: Período [*mtras*]
- φ: Fase [*rad*] (corrimiento en muestras)
- Rango efectivo de valores de Ω_0: $[0;2\pi)$

A DIFERENCIA DE LA FUNCIONES CONTINUAS, NO SE GENERA UN PATRÓN DISTINTO PARA CADA Ω_0 DE MANERA INDEFINIDA, SINO DENTRO DEL RANGO $[0,2\pi)$…



Ejemplo Práctico

Ejemplo: Calcular el período de las siguientes señales discretas sinusoidales:

Caso a) $x[n] = 2sen(\frac{\pi}{5}n)$

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow N_0 = 10$$

Se observa que se deben adoptar valores de ***k*** de modo de obtener el ***N_0 entero menor***, en este caso ***k=1*** ***(período fundamental)***

Caso b) $x[n] = 10\cos(\frac{2}{3}n)$

$$\Omega_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{2}{3}} = 3k\pi \Rightarrow \nexists k \ para \ N_0 \ entero \leftarrow \boxed{\text{NO PERIÓDICA!}}$$

Caso c) $x[n] = sen(\frac{3\pi}{4}n)$

$$\Omega_0 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}k \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow N_0 = \frac{8}{3} \\ \vdots \\ k = 3 \rightarrow N_0 = 8 \end{cases}$$

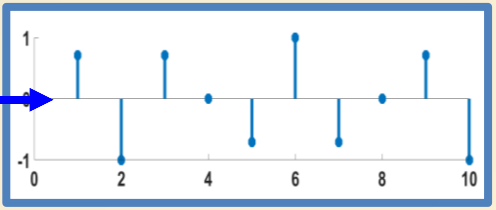
$$\Rightarrow N_0 = 8, \quad k = 3$$

En este caso, la señal ***x[n]*** presenta un patrón con periodicidad en ***8 muestras*** pero como consecuencia del muestreo de ***3 ciclos de un seno continuo*** (a diferencia del el caso ***a)***, ***k=1***, donde un ciclo es suficiente)

Ejemplo Práctico

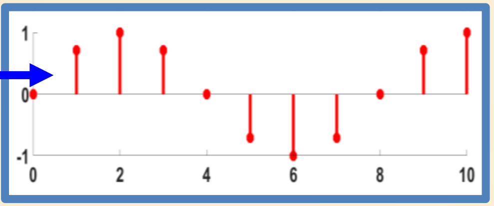
Recordar que para las ***funciones sinusoidales discretas*** ***no alcanza con "contar" el número de muestras*** N_0 *del patrón que las caracteriza*, para obtener el Ω_0 ***de dicha función.*** Además del período, se debe especificar la ***cantidad de ciclos utilizados (k) para generarlo,*** de manera que la sinusoidal discreta ***pueda describir adecuadamente dicho patrón:***

$$N_0 = 8, k = 3 \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi k}{N_0} = \frac{2\pi 3}{8} = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad sen\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$



que de otro modo hubiera resultado (considerando $k = 1$)

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N_0} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \rightarrow sen\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$



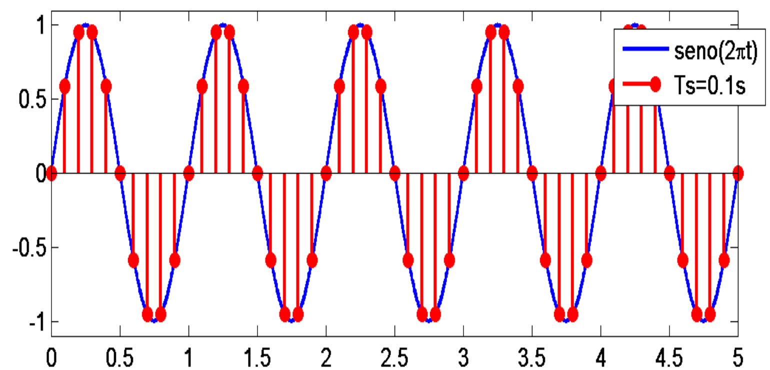
EI PATRÓN DISCRETO DESCRIPTO POR LA FUNCIÓN depende del valor de k! (a pesar de tener el mismo N_0)

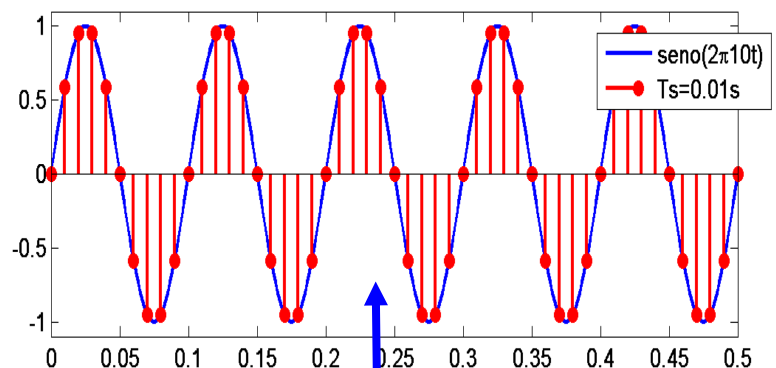
Señales Periódicas

Sinusoides discretas: Periodicidad en la frecuencia

En virtud de lo anterior, puede efectuarse la ***siguiente observación***:

Debido a que Ω_0 está determinado por la relación f_s/f_0, **se puede obtener exactamente *el mismo patrón discreto***, tomando muestras de sinusoides de ***distinta frecuencia*** pero donde dicha relación se ***mantiene constante***:





EL PROCESO DE MUESTREO (DISCRETIZACIÓN $t=nTs$) GENERA UNA REPETICIÓN DE PATRONES EN LAS SEÑALES DISCRETAS. DICHO FENÓMENO NO SE VE EN LAS FUNCIONES CONTINUAS Y SE DENOMINA PERIODICIDAD EN FRECUENCIA

Tomar muestras de una señal de $f_0=1Hz$ a $f_S=10Hz$ es equivalente a tomar muestras una señal de $f_0=10Hz$ a $f_S=100Hz$

Señales Periódicas

Evaluando la Periodicidad en frecuencia

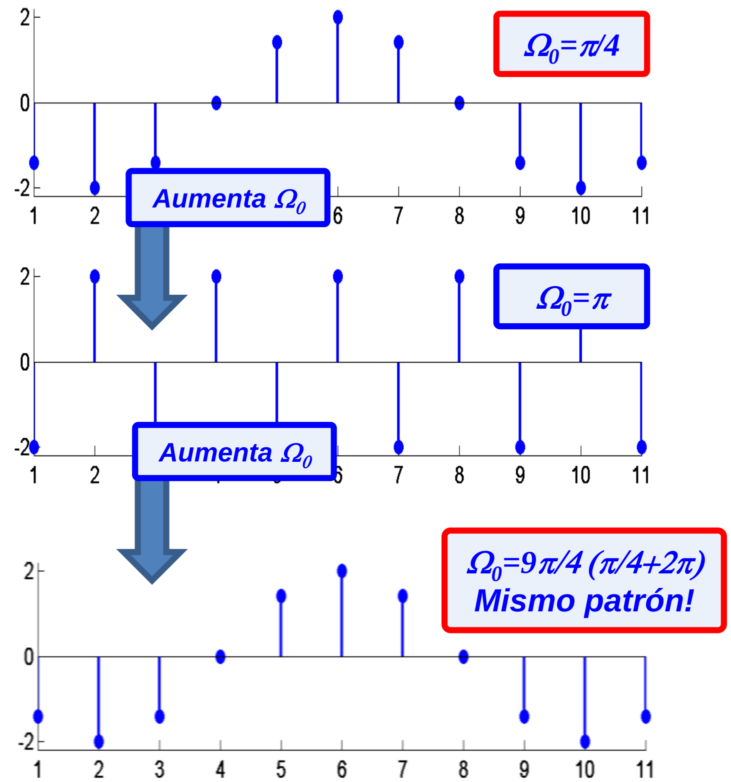
Sea la señal siguiente señal sinusoidal discreta:

$$\boxed{A\cos[\Omega_0 n+\phi]}$$

Si se efectúa un análisis del rango de valores ***$\Omega_0=[0,2\pi)$***, se obtiene una secuencia de patrones de señales, ***que se reinicia al alcanzar el valor $\Omega_0=2\pi$***:

$$\begin{aligned} A\cos[(\Omega_0+2\pi)n+\phi] &= A\cos[\Omega_0 n+2\pi n+\phi] \\ &= A\cos[\Omega_0 n+\phi] \end{aligned}$$

Al adicionar 2π (o un múltiplo) a la frecuencia Ω_0 SE OBTIENE LA MISMA SEÑAL! Es por ello que las señales sinusoidales discretas normalizadas presentan una CUALIDAD ADICIONAL A LA PERIODICIDAD TEMPORAL, la <u>PERIODICIDAD FRECUENCIAL en 2π</u>



Como el coseno es naturalmente periódico en 2π, la presencia de $2\pi n$ no modifica su valor, ya que n es entero

Ejemplo: Determinar el período de la seña ***x[n]***:

$$x[n] = sen(\frac{11\pi}{4}n)$$

$$\Omega_0 = \frac{11\pi}{4} \rightarrow N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{11\pi}{4}} = \frac{8}{11}k \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow N_0 = \frac{8}{11} \\ \vdots \\ k = 11 \rightarrow N_0 = 8 \text{ (período)} \end{cases}$$

$$además \rightarrow sen\left(\frac{11\pi}{4}n\right) = sen\left[\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)n\right] = sen\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \rightarrow N_0 = 8, k = 3$$

Por periodicidad en frecuencia, **se pueden restar múlti-plos de 2π** para obtener una frecuencia en el rango ***[0,2π)***. En este caso ***11π/3-2π*** resulta en ***3π/4*** *(donde N_0=8 pero con* ***k=3***, esto último dado que f_S no es múltiplo de f_0*)*

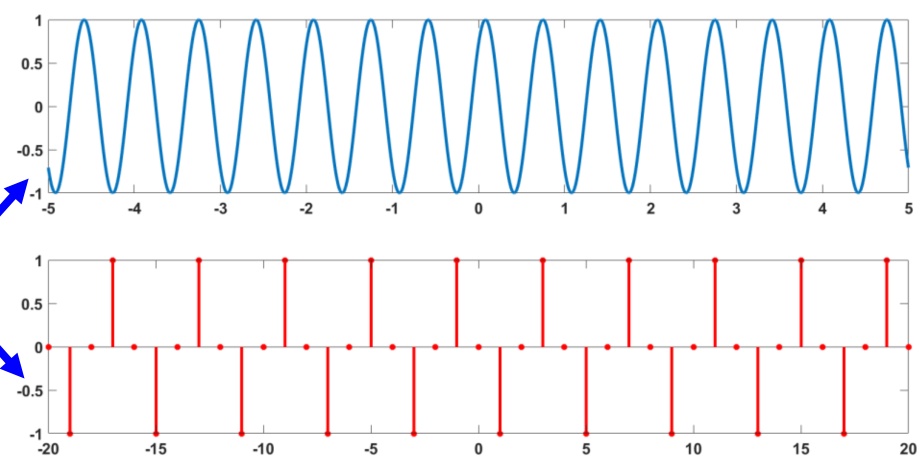
```
t=-5:0.001:5;
x1=sin(3*pi*t+pi/4);

n=-20:20;
x2=cos((pi*n/2)+pi/2);

figure;
subplot(211); plot(t,x1);
subplot(212); stem(n,x2);
```

La gran DIFERENCIA con la señal $x_2[n]$ es que el eje temporal está NORMALIZADO (se mide en muestras sin unidad, "n") y por ende la separación entre muestra y muestra tiene valor 1.

EN ESTE CASO SE LA ESTUDIA DE MANERA DISCRETA, INDIVIDUALIZANDO CADA MUESTRA.



NOTA: En Matlab/Octave, AMBAS SEÑALES GENERADAS RESULTAN DISCRETAS. Para el caso de $x_1(t)$, el utilizar un eje temporal en segundos y un T_S muy pequeño (al menos diez veces menor a un período), permite evaluar la señal COMO SI COMPORTARA de manera continua.

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A (15 minutos)

1. Determinar ***analíticamente*** lo valores de ω_0, f_0 y T_0 (Ω_0, F_0 y N_0 en el caso discreto) de las siguientes funciones:

$$a)\quad x(t) = sen(2\pi 1000t + \frac{\pi}{4})$$

$$b)\quad x(t) = sen\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c)\quad x[n] = \cos\left[\frac{5\pi}{4}n + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$d)\quad x[n] = sen\left[4\pi n\right]$$

2. **Utilizar Matlab** para graficar la forma de la función y ***verificar el período calculado junto con la fase temporal*** (tener cuidado al elegir T_s y la cantidad de ciclos a visualizar)

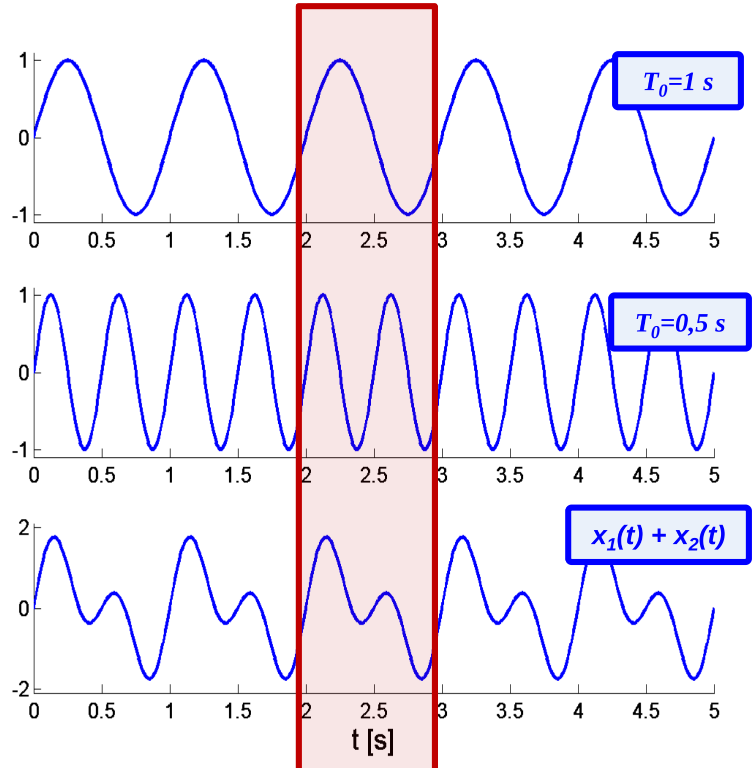
3. Considerar F_S=8000Hz para discretizar la señal ***a)*** (recordar que $T_S=1/F_S$) . Reproducirla audiblemente y luego duplicar la frecuencia del tono (f_0=2000Hz) ***¿Qué se oye?***

Combinaciones de Señales Periódicas

¿Se mantiene la periodicidad si se adicionan señales periódicas?

El período de una combinación de señales periódicas (T_C) constituye la **duración mínima** sobre la cual **cada señal completa un número ENTERO de ciclos:**

- T_C corresponde al ***mínimo común múltiplo (MCM)*** de los períodos intervinientes
- F_C corresponde al ***máximo común divisor (MCD)*** de las frecuencias intervinientes



$$T_1 = 2T_2 = T_c \Rightarrow T_c = 1\ s$$

Para que lo anterior se cumpla, EL COCIENTE ENTRE LOS PERÍODOS DE LAS SEÑALES INTERVINIENTES DEBE SER RACIONAL (cociente de enteros). En caso contrario, la señal no resulta periódica y se denomina "pseudoperiódica"

El cociente entre T_1 y T_2 es un número racional ($T_1/T_2=2$) de modo que en el intervalo $T_C=1\ s$ (período resultante de la suma) entran un ciclo de T_1 y dos ciclos de T_2. Asimismo, T_C es el MCM entre 1 y 0,5 (10/10 y 5/10)

Ejemplo Práctico

Ejemplo 1: Calcular el período de la señal compuesta ***x(t)***:

$$x(t) = 2sen(\frac{2}{3}t) + 4\cos(\frac{1}{2}t) + 4\cos(\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}\pi)$$

Se obtienen los períodos individuales y se calcula el ***Mínimo Común Múltiplo***:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 3\pi \\ T_2 = 4\pi \Rightarrow MCM = 12\pi \\ T_3 = 6\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_c = 12\pi\ s} \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{6} rad/s}$$

Nótese que al ser la ***suma periódica*** el ***cociente entre cualquiera de los períodos*** resulta ***siempre un número racional*** (cociente de enteros):

Ejemplo Práctico

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 4T_1 = 3T_2 \rightarrow T_{c12} = 12\pi \\ \dfrac{T_2}{T_3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2T_3 = 3T_2 \rightarrow T_{c23} = 12\pi \\ \dfrac{T_3}{T_1} = 2 \Rightarrow 2T_1 = T_3 \rightarrow T_{c31} = 12\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow MCM = 12\pi \rightarrow \boxed{T_c = 12\pi\ s}$$

Lo anterior ***no sucedería*** si:

$$x(t) = 2sen(\frac{2}{3}\pi t) + 4\cos(\frac{1}{2}t) \rightarrow \begin{cases} T_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \\ T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4\pi}\ No\ racional}$$

La señal resultante NO RESULTA PERIÓDICA ya que evidentemente no existe un T_0 que pueda contemplar números enteros de ciclos de T_1 y T_2 simultáneamente.

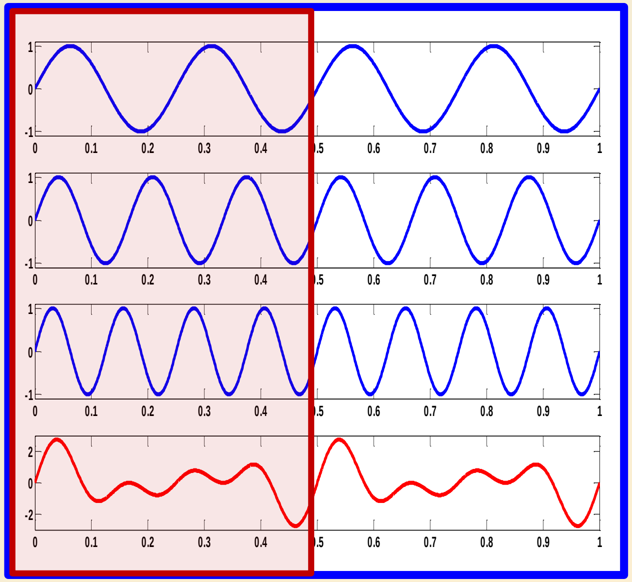
Ejemplo Práctico

Ejemplo 2: Determinar el período de la siguiente señal ***x(t)***:

$$x(t) = sen(2\pi 4t) + \cos(2\pi 6t) + \cos(2\pi 8t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = 4Hz \\ f_2 = 6Hz \Rightarrow MCD = 2Hz \\ f_3 = 8Hz \end{cases}$$

$$\boxed{f_C = 2Hz \rightarrow T_c = 0,5s}$$



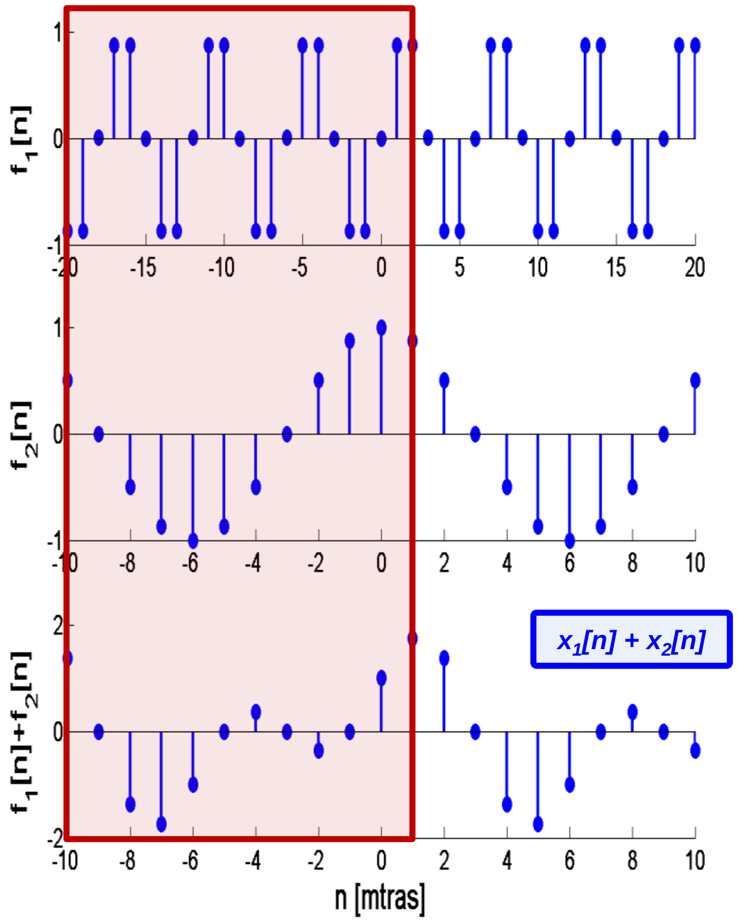
Una manera interesante de ver el resultado reside en que ***una señal periódica podría descomponerse en sinusoidales MÚLTIPLO de una FRECUENCIA COMÚN!!!*** (en este caso ***2Hz***, el ***MCD***)

Así se constituyen las bases de las SERIES DE FOURIER

Combinaciones de Señales Periódicas

¿Sucederá lo mismo si se combinan señales discretas?

Debido a que el período N_0 de una señal discreta periódica ***es entero***, el ***cociente entre períodos*** derivado de una combinación de señales periódicas ***siempre será racional***. Es por ello que puede aplicarse el ***mismo método*** que para las continuas para la obtención de N_C y Ω_C



LA COMBINACIÓN DE SEÑALES PERIÓDICAS DISCRETAS DA COMO RESULTADO UNA SEÑAL PERIÓDICA, EN TODAS LAS SITUACIONES POSIBLES.

Consigna de la clase #B (10 minutos)

1. Determinar ω_0, f_0 y T_0 (Ω_0, F_0 y N_0 en el caso discreto) de las siguientes funciones:

$$a)\quad x(t) = sen\left(2\pi 260t + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(2\pi 440t\right)$$

$$b)\quad x[n] = sen\left[\frac{\pi}{3}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{6}n\right]$$

2. **Verificar el resultado obtenido en Matlab** a partir de sus gráficos. Reproducir audiblemente $x(t)$ *utilizando* F_S*=8000Hz* para efectuar el muestreo. Comparar con la componente de *260Hz* y la de *440Hz*.

3. Proponga una ***frecuencia angular*** para una de las señales en ***a)*** de manera que la suma ***no resulte periódica*** ***¿Se advierte algo particular en su comportamiento?¿Se puede efectuar lo mismo en el caso b)?¿Cuál sería la diferencia?***

¿Señales complejas? La Fórmula de Euler

La fórmula de Euler establece una ***relación*** entre las funciones trigonométricas ***seno y coseno*** y la función ***exponencial***, en virtud de la utilización del ***campo complejo***:

$$\boxed{z = x \pm jy = \rho\left(\cos\varphi \pm j sen\varphi\right) \Rightarrow z = \rho e^{\pm j\varphi}}$$

Se utiliza la función exponencial con argumento "imaginario" para definir un COMPLEJO $x+jy$!!!

Demostración:

$$\left.\begin{aligned} & e^{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n!} \rightarrow e^{jx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{n} x^{n}}{n!} \\ & \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{2n!} ; \; senx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos x + j senx = e^{jx}$$

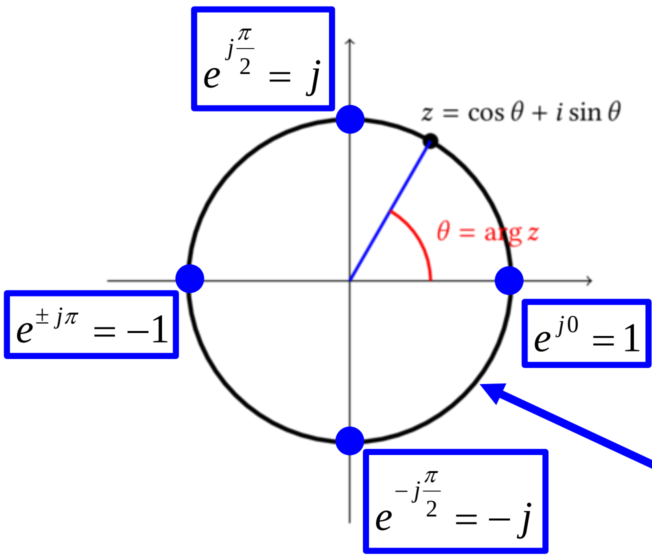
Señales Exponenciales Complejas

Considerando valores específicos del argumento φ para valores de ρ=1 se obtiene:

$$\boxed{e^{j\pm\pi} = -1; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j; \quad e^{j2\pi} = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{j\pi} + 1 = 0}$$



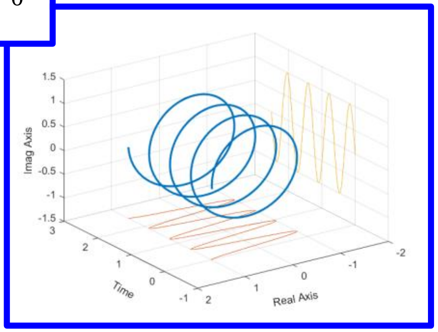
Circunferencia de Radio Unitario en el Plano Complejo (debido a que ρ=1)

Señales Exponenciales Complejas

Considerando ahora el argumento de la exponencial como $\varphi=\omega_0 t$, **se obtiene una señal temporal exponencial compleja continua:**

$$\boxed{x(t)=e^{\pm j\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)\pm j sen(\omega_0 t)}$$

$$e^{\pm j\omega_0 t}$$



$$\rightarrow \begin{cases} \cos(\omega_0 t)=\dfrac{(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})}{2} \\ sen(\omega_0 t)=\dfrac{(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})}{2j} \end{cases}$$

Las funciones $sen(\omega_0 t)$ y $cos(\omega_0 t)$ pueden definirse en términos de funciones EXPONENCIALES COMPLEJAS!

Las señales exponenciales complejas muestran ***periodicidad temporal***, debido a que están constituidas por pares ordenados de sinusoides:

$$\boxed{e^{j\omega_0(t+kT)}=e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 kT}=e^{j\omega_0 t}e^{jk2\pi}=e^{j\omega_0 t}.1=e^{j\omega_0 t}}$$

Señales Exponenciales Complejas

Análogamente a lo efectuado para las señales continuas, puede discretizarse el eje temporal (***t→nTs, ω₀t →Ω₀n***), ***obteniéndose una señal exponencial compleja discreta***:

$$\boxed{x[n] = e^{\pm j\Omega_0 n} = \cos[\Omega_0 n] \pm j sen[\Omega_0 n]} \rightarrow \begin{cases} \cos[\Omega_0 n] = \dfrac{(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n})}{2} \\ sen[\Omega_0 n] = \dfrac{(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n})}{2j} \end{cases}$$

De igual manera, ***además de la periodicidad temporal*** (en N_0), las exponenciales discretas también presentan ***periodicidad frecuencial*** (en 2π):

$$\boxed{e^{j\Omega_0 (n+kN_0)} = e^{j\Omega_0 n}}$$

PERIODICIDAD TEMPORAL

$$\boxed{e^{j(\Omega_0 + k2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}}$$

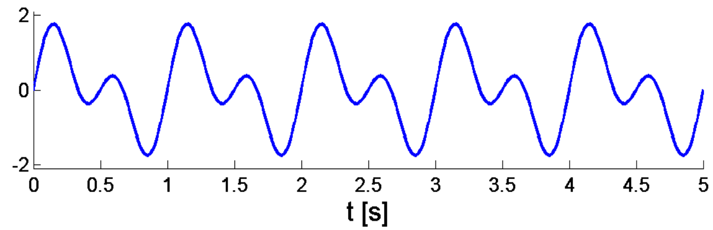
PERIODICIDAD FRECUENCIAL

Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

Resumen General

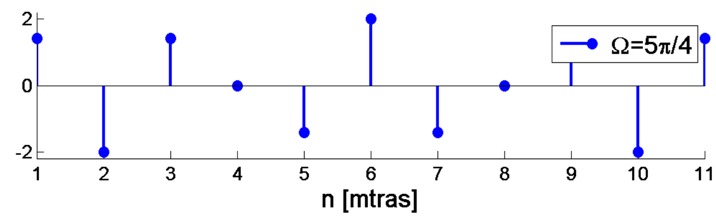
- **Señales Continuas**
- **Señales Discretas**
- Señales ***Analógicas***
- Señales ***Digitales***
- Señales ***Reales***
- Señales ***Complejas***
- Señales ***Deterministas***
- Señales ***Estocásticas***
- Señales ***Pares***
- Señales ***Impares***
- Señales ***Ortogonales***

SEÑALES PERIÓDICAS



$$x(t) = x(t \pm mT_0)$$

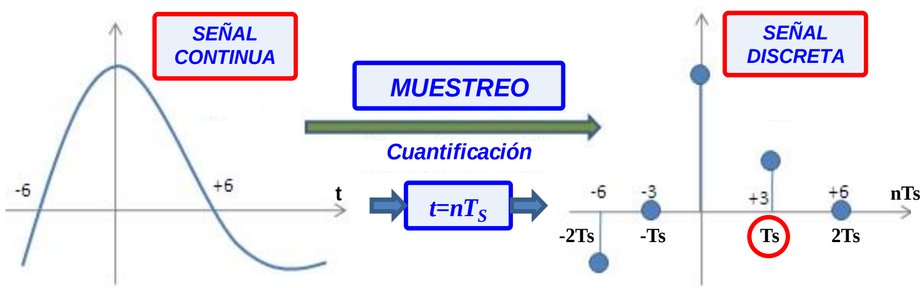
$$f_0 = \frac{1}{T_0}; \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

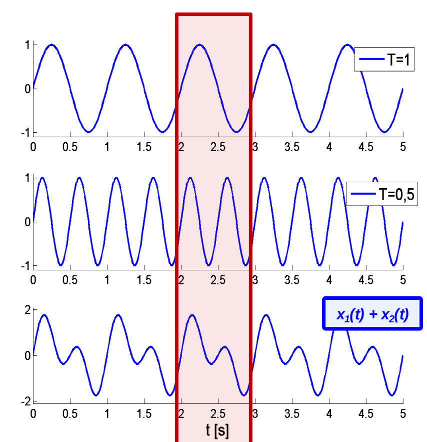


$$x[n] = x[n \pm mN_0]$$

$$F_0 = \frac{k}{N_0}; \quad \Omega_0 = \frac{2k\pi}{N_0} = 2\pi F_0$$

MUESTREO

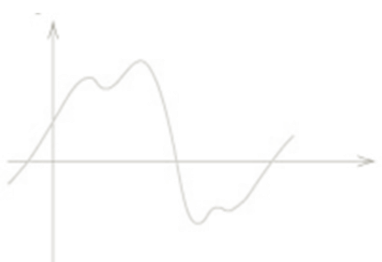


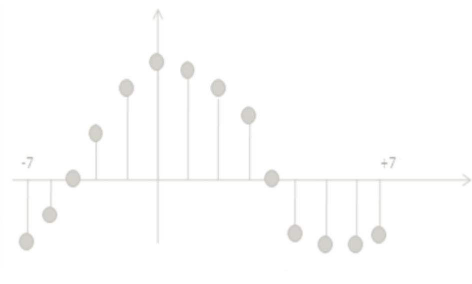


SUMA DE SEÑALES PERIÓDICAS

EULER $x(t) = e^{\pm j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm j sen(\omega_0 t)$

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

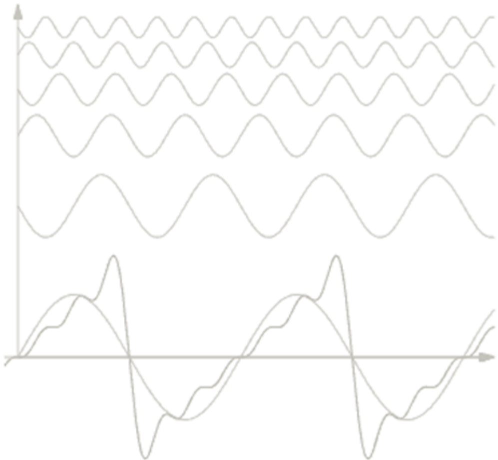




U1: Señales Continuas y Discretas

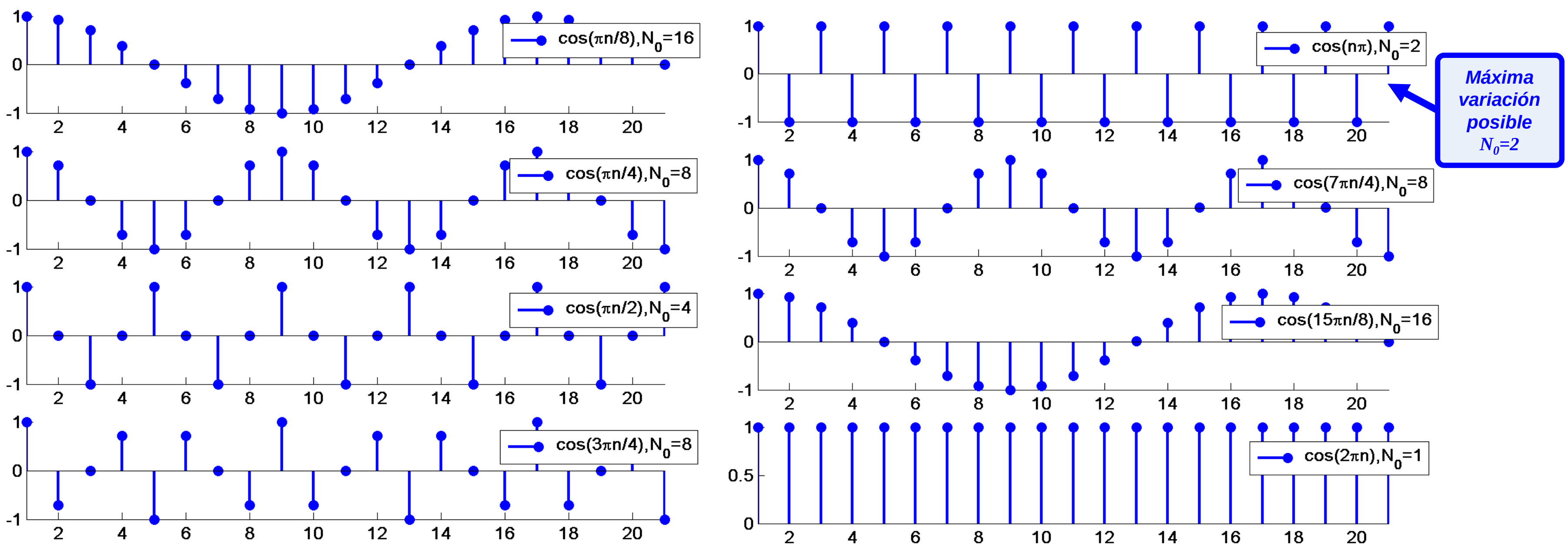
¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Señales Continuas y Discretas



APÉNDICE

Análisis de la sinusoide discreta $x[n]=\cos[\Omega_0 n]$



Al ***incrementarse la frecuencia*** Ω_0, se manifiesta un patrón de variación de las señales que resultanta ***único*** en el intervalo $\Omega_0=(0,2\pi]$. Luego dicho patrón se **reinicia**, con **periodicidad de** 2π. *Por ejemplo, en* $\Omega_0=9\pi/4$ *se observará exactamente el mismo comportamiento de* $\pi/4$ $(9\pi/4=\pi/4+2\pi)$ *y de incrementarse a* $5\pi/2$ se observará el patrón de $\pi/2$.

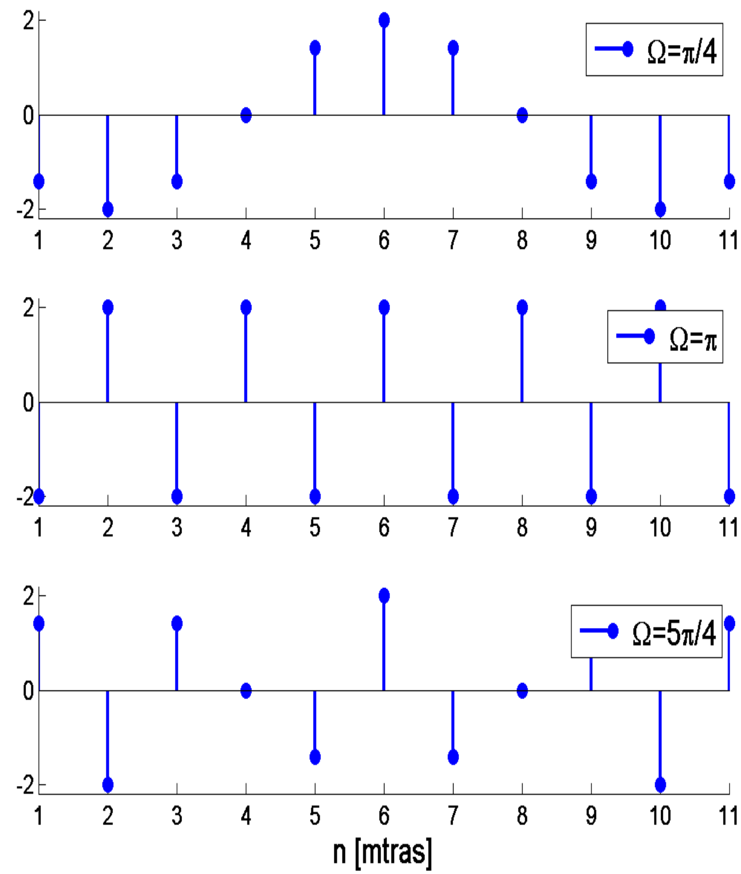
NOTA: $\cos(\pi n/4)$ ***y*** $\cos(3\pi n/4)$ ***tienen el mismo*** N_0***!*** ***Pero distinto k, por lo cual una varía más rápidamente que la otra. Sucede algo similar en*** $\Omega_0=\pi/4$ ***y*** $7\pi/4$ ***(mismo patrón).***

Señales Periódicas

¿Habría periodicidad en frecuencia si el tiempo no estuviera normalizado?

Considerando una señal discretizada en intervalos T_S a cuya frecuencia ω_0 se le suma otra $2\pi g_0$:

$$
\begin{aligned}
A\cos[\omega_0 nTs + \phi] &= A\cos[(\omega_0 + 2\pi g_0)nTs + \phi] \\
&= A\cos[\omega_0 nTs + 2\pi g_0 nTs + \phi] \\
&= A\cos[\omega_0 nTs + 2\pi n\frac{g_0}{fs} + \phi]
\end{aligned}
$$



En este caso debe darse $2\pi n g_0/f_S = 2k\pi$ y sólo sucede si el ***cociente entre g_0 y f_S resulta un entero***.

El motivo de la aparición de periodicidad en la frecuencia es la discretización de la función!