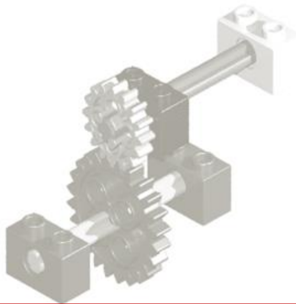
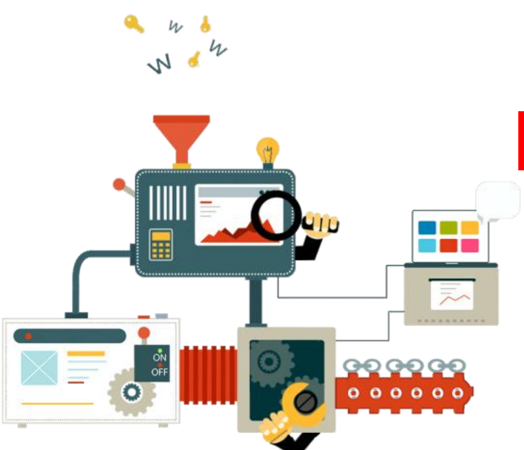


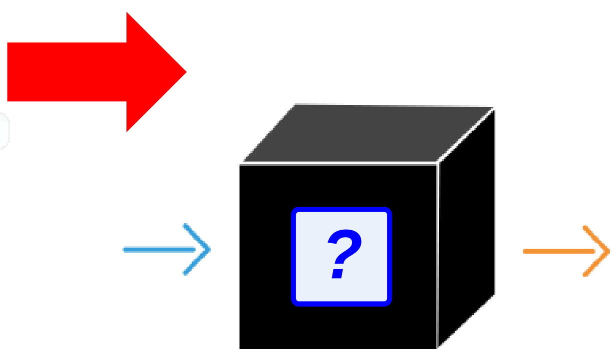
U2: Sistemas Continuos y Discretos

●Evaluación de Sistemas ●

¿CÓMO SE EVALÚA UN MODELO MATEMÁTICO?

La ***caracterización matemática de un sistema físico*** permite ***predecir*** su respuesta ante distintos tipos de excitación, ***sin tener que recurrir a su ensayo en el campo real***. Si bien hay sistemas que pueden ser modelados a partir de la ***interacción de sus componentes*** (como los que se han analizado anteriormente), ***hay casos en donde dicha información no está disponible*** y debe implementarse el modelo ***exclusivamente en virtud de la relación excitación vs respuesta…***

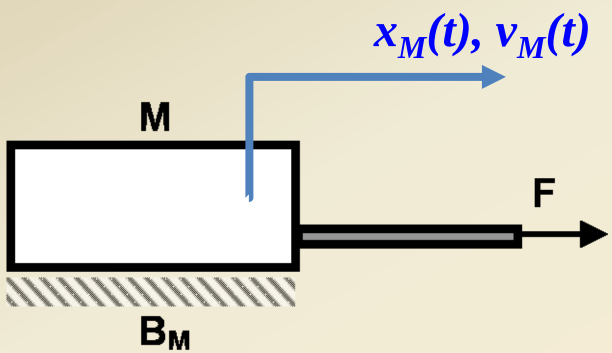




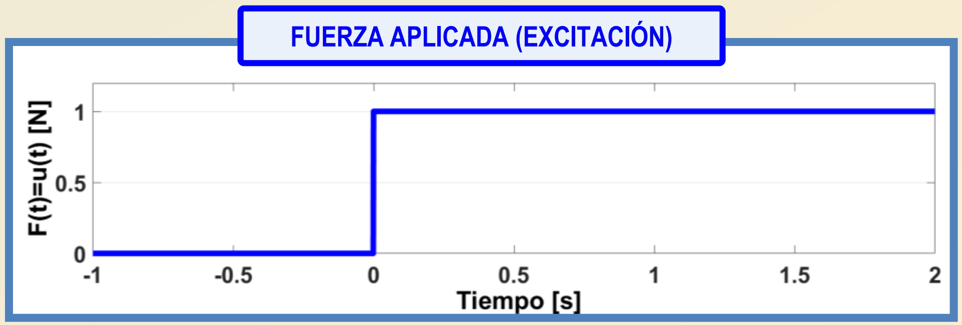
$$\boxed{f(t) = M v'(t) + B v(t) + K \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau}$$

Ejemplo Práctico

EJEMPLO: Obtener la ***velocidad*** $v_M(t)$ $[m/s]$ de la masa del siguiente sistema físico (***respuesta*** *del modelo*), si para desplazarla se aplica una ***fuerza*** constante $F(t)=u(t)$ $[N]$ (***excitación*** *del modelo*).



$$M = 0{,}1\ Kg$$
$$B_M = 0{,}5\ Kg.s/m$$

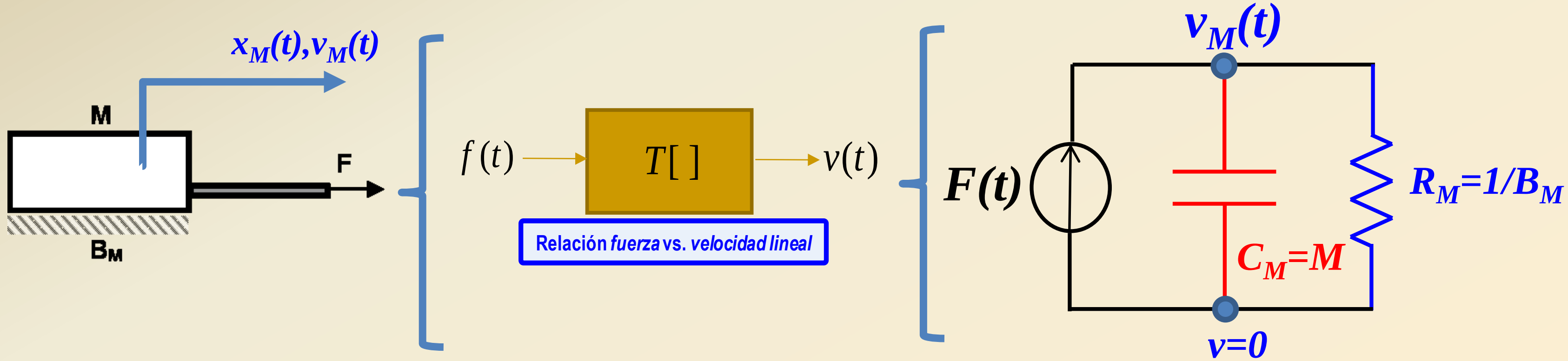


VELOCIDAD DE LA MASA M (RESPUESTA)

?

1) Obtención de las ecuaciones de movimiento (modelo):

A partir de la aplicación de la ***analogía circuital***, ***se obtiene la EDO de primer orden*** que ***modela el sistema físico*** (*siempre normalizar por el coeficiente de la derivada de mayor orden*):



$$F(t) = F_M(t) + F_B(t) \rightarrow F(t) = C_M \, d\frac{[v_M(t) - 0]}{dt} + \frac{v_M(t) - 0}{R_M}$$

$$F(t) = M v_M{}'(t) + B_M v_M(t)$$

$$\frac{F(t)}{M} = v_M{}'(t) + \frac{B_M}{M} v_M(t)$$

$$10F(t) = v_M{}'(t) + 5 v_M(t)$$

Ejemplo Práctico

2) Para hallar la respuesta buscada ($v_M(t)$), se utiliza el método de resolución de la EDO "solución homogénea + solución particular":

$$\boxed{10F(t) = v_M'(t) + 5v_M(t)}$$

$$v_M(t) = v_H(t) + v_P(t) \rightarrow \begin{cases} v_H(t) = Ke^{\lambda t} \text{ (solución propuesta)} \\ v_P(t) = A \text{ (solución propuesta)} \\ F(t) = 1 \text{ (constante en } t > 0) \\ v(0) = 0 \text{ (condición inicial)} \end{cases}$$

Componentes homogénea (TRANSITORIA) y particular (PERMANENTE)

La solución de la EDO de PRIMER ORDEN (respuesta del sistema $v_M(t)$) se encuentra constituida por la suma de una componente homogénea ($v_H(t)$) y una particular ($v_P(t)$)

La HOMOGÉNEA $v_H(t)$ se propone como $Ke^{\lambda t}$ y la PARTICULAR $v_P(t)$ con el FORMATO DE LA EXCITACIÓN (en este caso una constante "A" dado que se aplica un escalón)

Se deben determinar entonces los valores de λ, A y K para obtener $v_M(t)$:

a) Reemplazando la solución $v_H(t)$ en la *ecuación diferencial homogénea* (***EDO*** igualada a cero, excitación nula) se obtiene λ:

$$0 = v_H'(t) + 5v_H(t) \rightarrow 0 = \lambda Ke^{\lambda t} + 5Ke^{\lambda t} \rightarrow 0 = Ke^{\lambda t}(\lambda + 5)$$

$$\rightarrow \lambda = -5 \rightarrow \boxed{v_H(t) = Ke^{-5t}}$$

Ejemplo Práctico

b) Reemplazando ahora la solución $\boldsymbol{v_P(t)}$ en la ***ecuación diferencial particular*** (igualada a la excitación $\boldsymbol{F(t)}$ para $\boldsymbol{t>0}$) se obtiene $\boldsymbol{A}$:

$$10.1 = v_P'(t) + 5v_P(t) \Rightarrow 10.1 = 0 + A5 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \boxed{v_P(t) = 2}$$

Dado que la EXCITACIÓN resulta CONSTANTE para $t>0$ ($F(t)=1$), la componente particular DEBE SER CONSTANTE bajo la misma condición ($v_p(t)=A=2$)

La solución $\boldsymbol{v_M(t)}$ queda expresada como:

$$v_M(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ke^{-5t} + 2$$

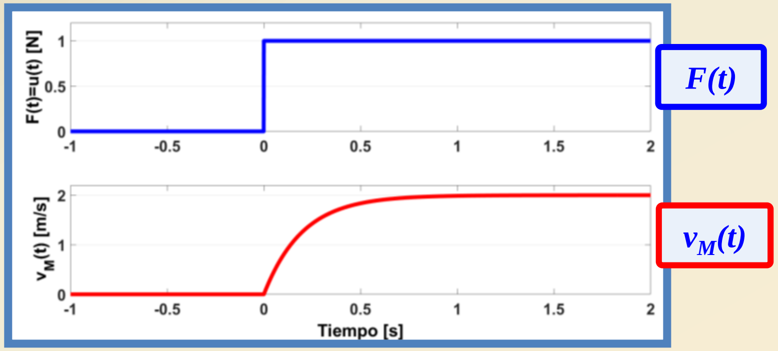
c) Para determinar $\boldsymbol{K}$, se evalúa la condición inicial correspondiente a $\boldsymbol{v_M(t)}$ (valor en $\boldsymbol{t=0}$). Debido a que ***el sistema no estaba en movimiento***, ***se inicia con velocidad nula*** ($\boldsymbol{v_M(t=0)=0}$), por lo que de la expresión de $\boldsymbol{v_M(t)}$ se obtiene:

$$v_M(0) = Ke^0 + 2 = 0 \Rightarrow K = -2$$

$$\boxed{v_M(t) = -2e^{-5t} + 2}$$

De modo que finalmente:

$$v_M(t) = -2e^{-5t} + 2,\ t > 0$$
$$v_M(t) = 2\left(1 - e^{-5t}\right)u(t)$$



Se observa que al aplicar el ESCALÓN DE FUERZA $F(t)$, la VELOCIDAD $v_M(t)$ se INCREMENTA EXPONENCIALMENTE hasta alcanzar un valor ESTABLE en aproximadamente $t=1s$. Dicho comportamiento se denomina régimen TRANSITORIO y depende de la componente HOMOGENEA, la cual se *"extingue"* con el paso del tiempo (tiende a anularse). Transcurrido dicho intervalo, la velocidad adquiere la FORMA DE LA EXCITACIÓN (constante en este caso, $v_M(t)=2$)) dando lugar al régimen PERMANENTE

¿Qué sucedería ahora si la entrada modifica su forma a la expresión $F(t)=u(t)-u(t-1)$? (pulso de duración 1s)

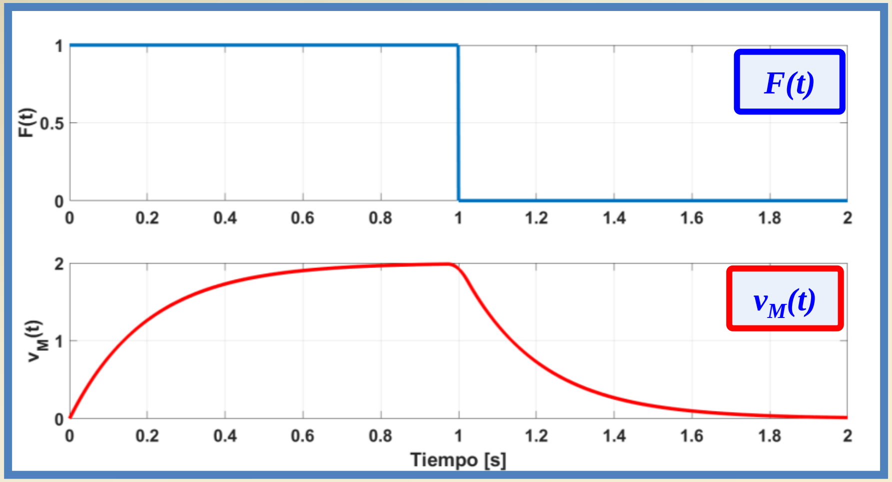
Se puede aprovechar la ***linealidad*** e ***invariancia*** temporal del sistema:

$$si\ F(t) = u(t) \Rightarrow v_{M1}(t)\big|_{F(t)=u(t)} = 2(1 - e^{-5t})u(t)\ \text{(salida para la entrada } u(t))$$

Ejemplo Práctico

$$\text{Si } F(t) = u(t) - u(t-1) \Rightarrow \text{Por ser LTI: } v_M(t) = v_{M1}(t) - v_{M1}(t-1)$$

$$v_M(t) = 2(1-e^{-5t})u(t) - 2\left[1-e^{-5(t-1)}\right]u(t-1)$$



En este caso $F(t)$ constituye UN PULSO de duración 1s. La respuesta hasta t=1s COINCIDE con la del ejemplo anterior, mientras que para t>1s, cesa la fuerza $F(t)$ ($F(t>1)=0$) por lo que la velocidad $v_M(t)$ disminuye (con comportamiento también exponencial) hasta alcanzar el reposo

<u>IMPORTANTE</u>: Para poder obtener la respuesta del sistema como suma de las excitaciones LAS CONDICIONES INCIALES (CI) DEBEN SER NULAS!!! (sino el sistema no se comporta linealmente). De existir CI, considerarlas nulas en el análisis y sumarlas como una constante a la expresión final de la salida

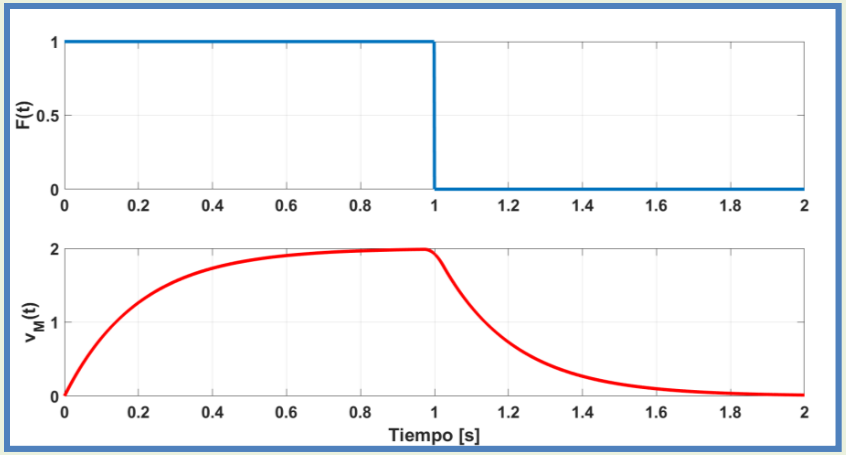
Aplicación en MatLab

$$10F(t) = v_M'(t) + 5v_M(t), \quad F(t) = u(t) - u(t-1)$$

```
%EDO: vm'= 10*F-5*vm
%Incremento diferencial
dt=0.01;
%Condición inicial de la ecuación diferencial
vm0=0;
%Rango de evaluación temporal de la EDO
t=[0:dt:3];
%Visualización de la función de entrada
subplot(211),plot(t,FUN_F(t)),grid
%Resolucion de la EDO
[t vm]=ode23('ODE_vm',t,vm0);
%Visualización de la solución
subplot(212),plot(t,vm);grid;
```

```
%ECUACION DIFERENCIAL
function vmp=ODE_vm(t,vm)
vmp=10*FUN_F(t)-5*vm;
```

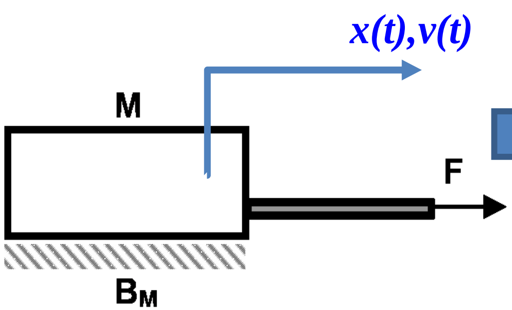
```
%FUNCION DE ENTRADA FUN_ve1
function f=FUN_F(t)
f=escalon(t)-escalon(t-1);
```



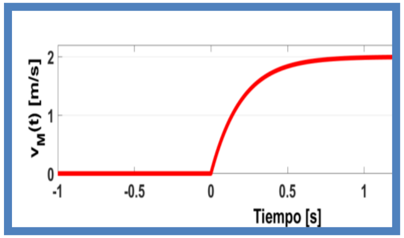
Para efectuar la resolución de la EDO que caracteriza al sistema en MATLAB/OCTAVE, puede utilizarse la herramienta `ODE23/45` (integración numérica de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales). Para ello se requiere generar una función específica donde se encuentre definido el formato de la EDO (`ODE_vm`), expresado en términos de la derivada de mayor orden. Asimismo debe definirse una función adicional que represente el comportamiento temporal de la excitación (`FUN_f`), de modo que pueda ser ejecutada durante el proceso de resolución. Finalmente, deben establecerse las condiciones iniciales (`vm0`)

Evaluando el sistema: La "Constante deTiempo"

La utilización de una ***entrada tipo escalón*** en un sistema ***LIT*** ***permite evaluar su comportamiento***. En el sistema del ejemplo, al colocar un ***"escalón de fuerza"*** en la entrada, se observó que la ***respuesta adoptó la siguiente forma***:



$$F(t) = u(t) \Rightarrow v_M(t) = 2\left(1 - e^{-5t}\right)$$



donde si $t \to \infty$, la velocidad ***alcanza su valor final*** $v_M(\infty) = 2\ m/s$

Bajo dicha premisa, la velocidad $v_M(t)$ ***puede expresarse*** de la siguiente manera:

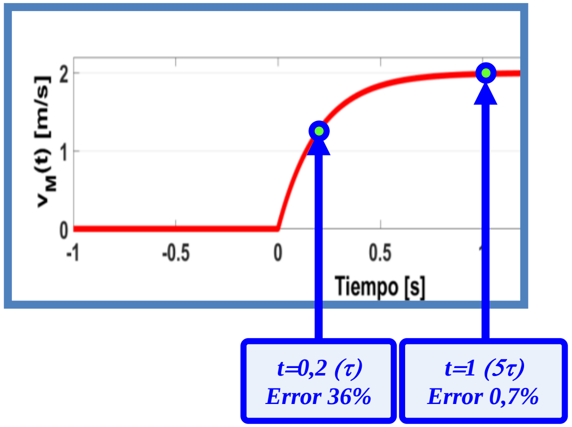
$$v_M(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad con\ \tau = \frac{1}{5}$$

La función exponencial es expresada bajo el formato "$e^{-t/\tau}$"

Constante de Tiempo

donde el parámetro τ se denomina ***"constante de tiempo del sistema"*** y determina ***la rapidez con que la respuesta entra en un estado "estacionario"*** (se comporta de la misma manera que la excitación, con un ***error inferior al 2% de su valor final*** en $t \to \infty$)

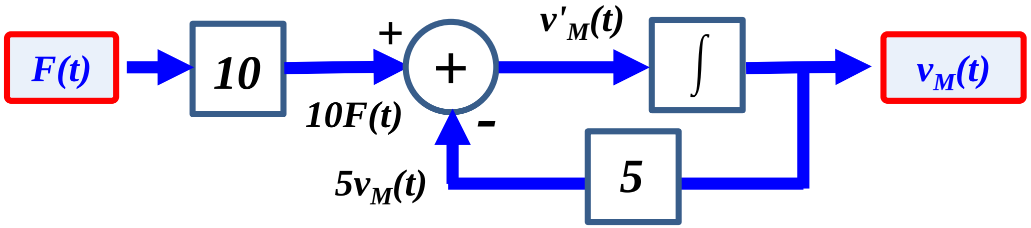
$$v(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{t}{0,2}}\right) \rightarrow \begin{cases} v_M(\infty) = 2\left(1 - e^{-\infty}\right) = 2 \text{ (valor final)} \\ v_M(\tau) = 2\left(1 - e^{-1}\right) = 1,2642 \; (63,2\% \; de \; v_M(\infty)) \\ v_M(5\tau) = 2\left(1 - e^{-5}\right) = 1,9865 \; (99,3\% \; de \; v_M(\infty)) \end{cases}$$



En un sistema de primer orden (EDO en derivada primera), TRANSCURRIDO UN INTRVALO DE 5τ, puede considerarse que el mismo ENTRÓ EN ESTADO ESTACIONARIO

Asimismo, la ***EDO*** del sistema puede esquematizarse a partir de su ***diagrama en bloques***:

$$v_M'(t) = 10F(t) - 5v_M(t)$$

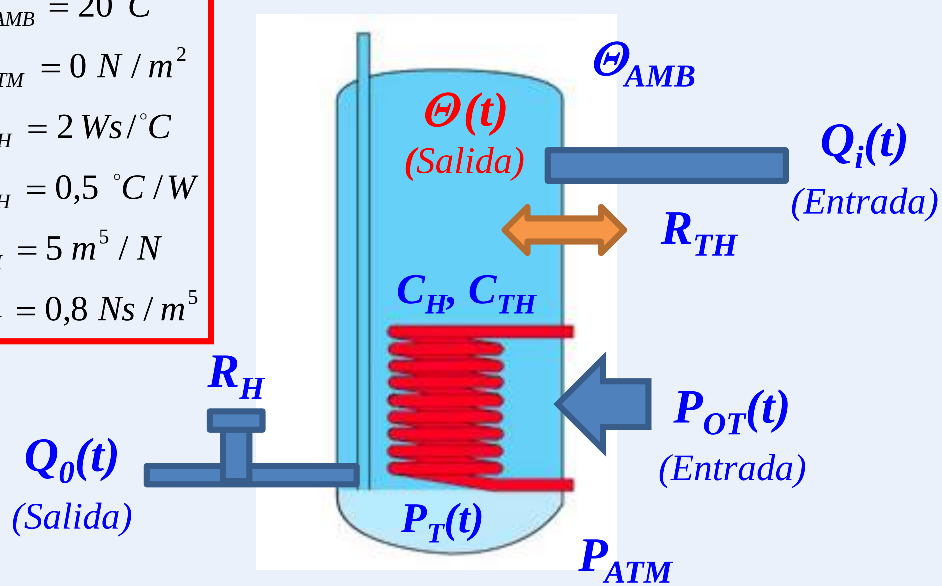


Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A INTEGRADORA (20 minutos)

Obtener las ***ecuaciones que modelan*** el siguiente termotanque eléctrico (térmicas e hidráulicas por separado) y calcular cada una de las respuestas del mismo para las excitaciones $Q_i(t)=2u(t)$ y $P_{OT}(t)=6[\rho(t)-\rho(t-20)]$. Verificar ambos resultados en ***MatLab***.

$$\Theta_{AMB} = 20^\circ C$$
$$P_{ATM} = 0\ N/m^2$$
$$C_{TH} = 2\ Ws/^\circ C$$
$$R_{TH} = 0{,}5\ ^\circ C/W$$
$$C_H = 5\ m^5/N$$
$$R_H = 0{,}8\ Ns/m^5$$



1. ¿En qué valor se estabiliza el flujo de salida $Q_0(t)$?

2. ¿Qué valor máximo alcanza la temperatura del tanque $\Theta(t)$?

Evaluando el sistema: ¿Y los modelos discretos?

Los sistemas discretos se representan a través de ***ecuaciones en diferencias*** (recurrencias), las cuáles se comportan como ***ecuaciones diferenciales en tiempo discreto***:

$$\boxed{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]}$$

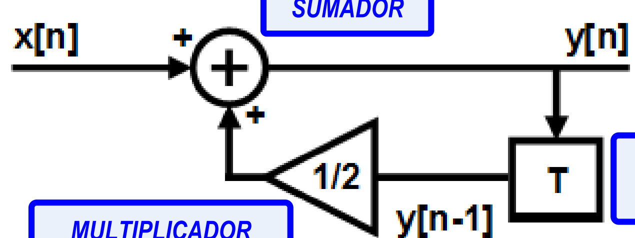
Los sistemas pueden definirse directamente en el dominio discreto o a partir de la DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA CONTINUO

De manera similar a los continuos, sus diagramas en bloques se encuentran constituidos por ***sumadores, multiplicadores*** y ***retardadores temporales*** ($\boldsymbol{T}$):

$$\boxed{y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]}$$

ENTRADA

SUMADOR



SALIDA

RETARDADOR DE UNA MUESTRA

MULTIPLICADOR $(1/2)y[n-1]$

Si se evalúa la SALIDA DEL SUMADOR, se obtiene la EDO en recurrencias

¿Y cómo se discretiza un sistema LIT en tiempo continuo?

Una ecuación diferencial ordinaria que caracteriza a un sistema ***LIT*** ***puede ser discretizada ($t=nT_S$)***, de modo de llevar a cabo su ***resolución numérica***:

$$y'(t)+by(t)=x(t) \Rightarrow y'(t)=x(t)-by(t)$$

Se DESPEJA LA DERIVADA DE MAYOR ORDEN para llevar a cabo la DISCRETIZACIÓN

Aproximando entonces ***la derivada en términos de su cociente incremental*** (método de las diferencias finitas) y efectuando el reemplazo $t=nT_S$:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \Rightarrow \frac{y[(n+1)T_S]-y[nT_S]}{T_S}=x[nT_S]-by[nT_S]$$

Cociente Diferencial

Discretización

La diferencias finitas permiten aproximar numéricamente la derivada en virtud de su cociente incremental, posibilitando la resolución de ecuaciones diferenciales

y luego operando algebraicamente :

$$y[(n+1)T_S]=y[nT_S]+T_S\left[x[nT_S]-by[nT_S]\right]$$

$$y[(n+1)T_S]=y[nT_S](1-bT_S)+T_S x[nT_S]$$

Sistemas Discretos

Finalmente, considerando $a=(1-bT_S)$, se obtiene la ***versión discretizada de la EDO de primer orden***, una ***ecuación en recurrencias hacia adelante***:

$$y'(t)+by(t)=x(t) \Rightarrow y[(n+1)T_S]-ay[nT_S]=T_S x[nT_S]$$

y normalizando ahora el eje temporal:

$$y'(t)+by(t)=x(t) \Rightarrow y[n+1]-ay[n]=T_S x[n], \quad donde \;\; a=1-bT_S$$

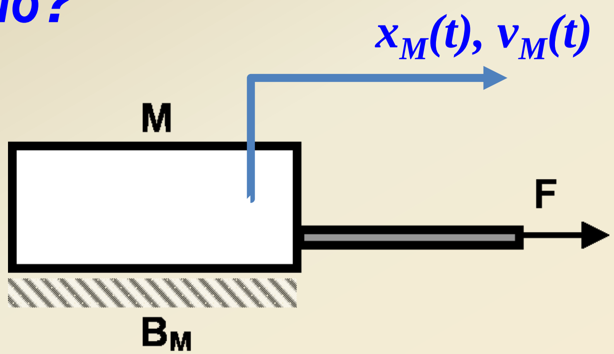
Asimismo, puede efectuarse el ***cambio de variables*** ***k=n+1***, de manera de generar una ***ecuación en recurrencias hacia atrás***:

$$y'(t)+by(t)=x(t) \Rightarrow y[k]-ay[k-1]=T_S x[k-1], \quad \text{con } a=(1-bT_S)$$

De esta manera se obtiene un "<u>modelo discreto normalizado</u>" del sistema continuo

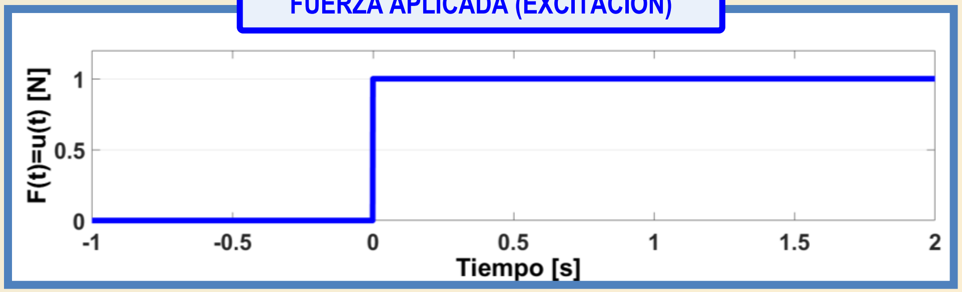
Ejemplo Práctico

Ejemplo: Obtener un ***modelo discreto*** para ***determinar numéricamente*** la velocidad de la masa $v_M(t)$ $[m/s]$ del siguiente sistema físico, al que se le aplica una fuerza $F(t)=u(t)$ $[N]$. Graficar su ***diagrama en bloques*** y obtener ***5 mustras de la respuesta***, considerando una tasa de discretización $T_S=0,1s$ ***¿Cuál es el error que se comete respecto del valor $v_M(t)$ en tiempo continuo?***



$$M = 0,1\ Kg$$
$$B_M = 0,5\ Kg.s/m$$

FUERZA APLICADA (EXCITACIÓN)

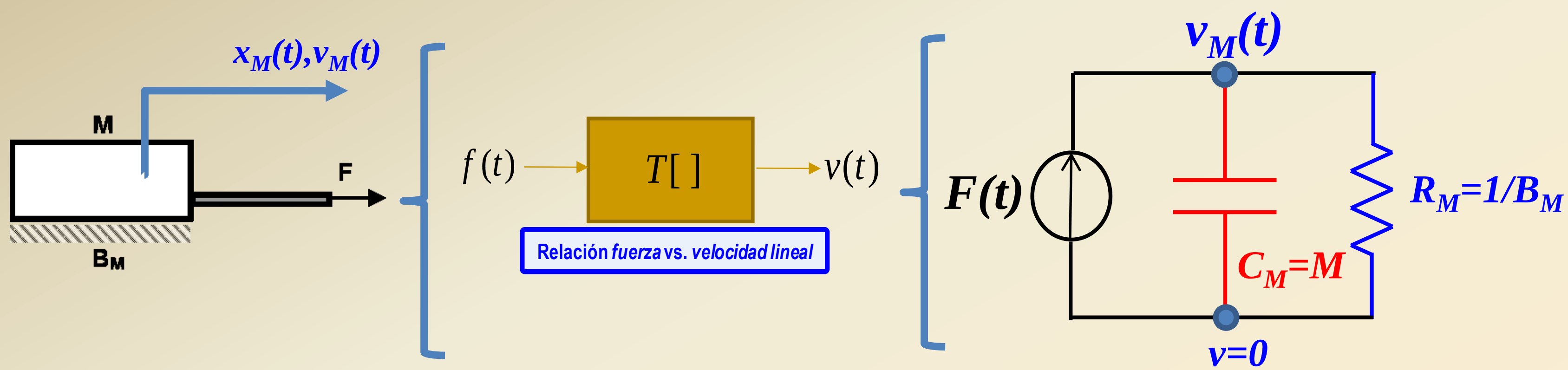


VELOCIDAD DE LA MASA M (RESPUESTA) en $t=[0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4]$ (CÁLCULO DISCRETO)

?

Ejemplo Práctico

1) Obtención de las ecuaciones de movimiento (modelo):



$$10F(t) = v_M'(t) + 5v_M(t) \Rightarrow F(t) = u(t) \Rightarrow v_M(t) = 2(1-e^{-5t})u(t)$$

Resultado obtenido en el ejemplo de análisis continuo

2) Discretización de la EDO (T_S=0,1):

$$v_M'(t) + 5v_M(t) = 10F(t) \Rightarrow v_M[n] - (1-5.0,1)v_M[n-1] = 0,1.10F[n-1]$$

$$v_M[n] = F[n-1] + 0,5v_M[n-1]$$

Ecuación en recurrencias del modelo continuo

3) Cálculo de los valores correspondientes (nT_S=0 a 0,4)

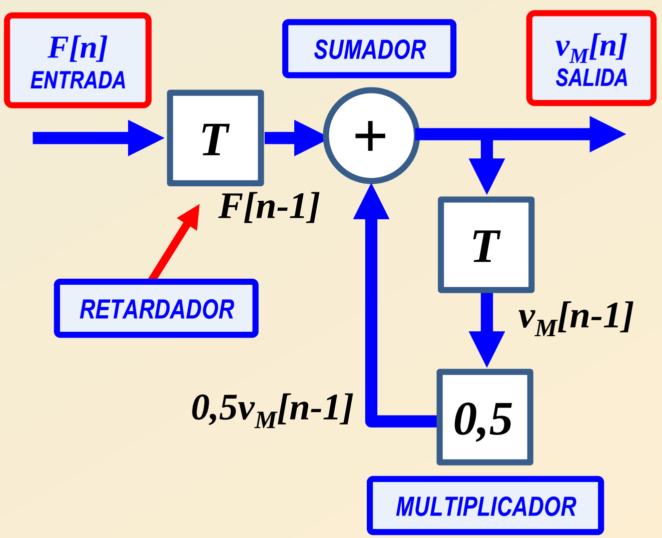
$$v_M[n] = F[n-1] + 0,5v_M[n-1]$$

$v_M[-1]$ es la CONDICION INICIAL

n	nT_S	$v_M(nT_S)$ (solución analíitica)	F[(n-1)]	$v_M[n-1]$	$v_M[n]$	Error
0	0	0	0	0	0	0
1	0,1	0,787	1	0	1	0,213
2	0,2	1,264	1	1	1,5	0,236
3	0,3	1,554	1	1,5	1,75	0,196
4	0,4	1,729	1	1,75	1,875	0,146

F[0]=1 (se considera u[n])

DIAGRAMA EN BLOQUES



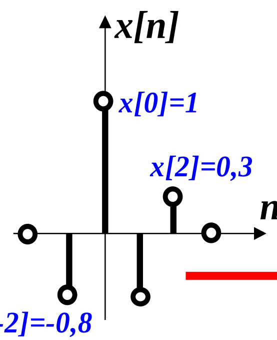
¿Disminuirá el error si T_S=0,01?

Evaluando el Sistema: La señal impulso $\delta(t)$ como excitación

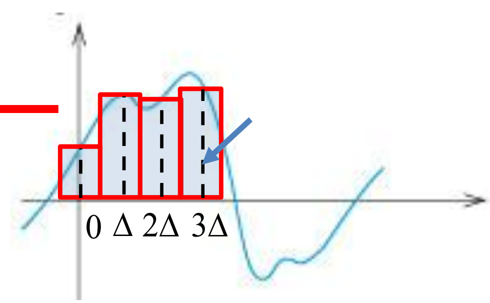
Al estudiar un sistema ***LIT***, se observaron los fenómenos de ***escalamiento*** (linealidad) e ***invariancia temporal***:

$$ax(t-t_0) \qquad ax[n-n_0] \longrightarrow \boxed{T[\;]} \longrightarrow ay(t-t_0) \qquad ay[n-n_0]$$

Asimismo se demostró que ***cualquier señal temporal***, ya sea continua o discreta, puede expresarse ***como un conjunto de señales impulso escaladas y desplazadas***:



$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \\ x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(n-k) \end{aligned}}$$



Respuesta Impulsional

En virtud de lo anterior, puede evaluarse la ***respuesta del sistema a una señal impulso δ(t),*** definida como ***"Respuesta Impulsional"***:

$$h(t) = T[\delta(t)] = y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}$$

$$h[n] = T[\delta[n]] = y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

$$\delta(t),\ \delta[n] \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow h(t),\ h[n]$$

$h(t)$, $h[n]$ RESPUESTA IMPULSIONAL (respuesta del sistema a una entrada impulso)

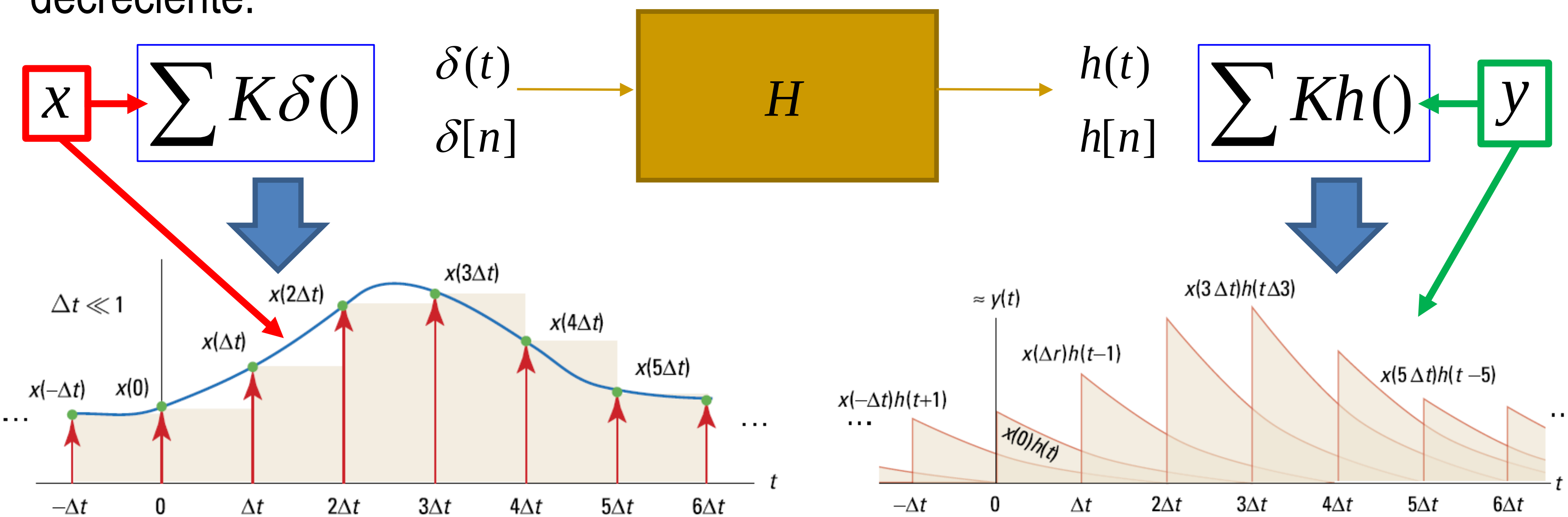
De esta manera, al expresar la señal $\boldsymbol{x(t)}$ ($\boldsymbol{x[n]}$) como combinación de señales impulsos escaladas y desplazadas y ***aplicarla a un sistema LTI, se obtendrá la suma de las respuestas impulsionales h(t) (h[n]) escaladas y desplazadas***:

$$\boxed{x} \rightarrow \boxed{\sum K\delta()} \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow \boxed{\sum Kh()} \leftarrow \boxed{y}$$

Se observa que, SI SE TIENE CONOCIMIENTO DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA A UN IMPULSO (elemento constitutivo de cualquier excitación), puede obtenerse la respuesta del sistema <u>SIN TENER QUE RECURRIR a las ecuaciones que lo MODELAN</u>!!!

Respuesta Impulsional

Un ejemplo de lo anterior puede advertirse asumiendo que la ***respuesta de un sistema a una función impulso*** $\boldsymbol{\delta(t)}$ presenta un comportamiento exponencial decreciente:



Efectivamente, la RESPUESTA IMPULSIONAL constituye una "RADIOGRAFÍA" del sistema LIT, dado que REPRESENTA LA INFORMACIÓN NECESARIA PARA DETERMINAR LA RESPUESTA A CUALQUIER EXCITACIÓN. Lo anterior implica que h(t) (h[n]) SÓLO DEPENDE DE LOS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS del sistema (es una característica intrínseca) y DEBE obtenerse en CONDICIONES INICIALES NULAS

¿Cómo se obtiene la respuesta al impulso de un sistema LIT?

La respuesta impulsional ***h(t)*** de un sistema puede obtenerse a partir de su ***respuesta al escalón u(t)***, denominada formalmente "***Respuesta Indicial***":

$$\boxed{\begin{matrix} u(t) \\ u[n] \end{matrix}} \quad \begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ y[n] \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} g(t) \\ g[n] \end{matrix}}$$

Físicamente, la generación una excitación escalón resulta factible y mucho más simple en relación a un impulso δ(t) (amplitud ∞, duración nula). Por otra parte, al utilizar un impulso se estaría sometiendo al sistema a amplitudes para las que podría no estar preparado

La respuesta ***indicial*** continua (***g(t)***) se define matemáticamente como:

$$\boxed{g(t) = y(t)\Big|_{x(t)=u(t)} = T\big[u(t)\big]}$$

La respuesta indicial *g(t)* debe obtenerse en CONDICIONES INICIALES NULAS

Derivando ambos miembros y ***aplicando linealidad:***

$$g'(t) = d\,\frac{T\big[u(t)\big]}{dt} \Rightarrow g'(t) = T\left[d\,\frac{u(t)}{dt}\right] = T\big[\delta(t)\big]$$

RESPUESTA A UN IMPULSO!

Respuesta Indicial

Finalmente, la respuesta impulsional ***h(t)*** correspondiente a un ***sistema LIT se encuentra determinada por la derivada de la respuesta indicial g(t)***:

$$\boxed{h(t) = T\left[\delta(t)\right] = d\,\frac{g(t)}{dt}} \Rightarrow \boxed{g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau}$$

LA RESPUESTA IMPULSIONAL SE OBTIENE A PARTIR DE LA DERIVADA DE LA RESPUESTA INDICIAL

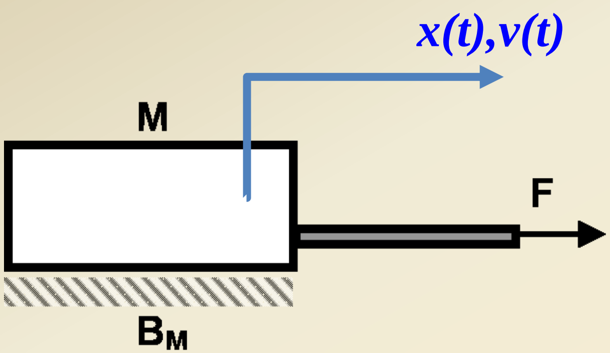
Asimismo, ***si se discretiza la expresión anterior*** (para luego normalizar el eje temporal) se obtiene la expresión de ***h[n]*** en términos de ***g[n] para los sistemas discretos***:

$$\boxed{h(t) = d\,\frac{g(t)}{dt} \Rightarrow h[n] = g[n] - g[n-1]}$$

La derivada pasa a conformar una ecuación en recurrencias!

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Determinar la ***respuesta impulsional h(t)*** del siguiente sistema físico, considerando a fuerza aplicada ***F(t) como excitación*** y a la ***velocidad desarrollada por la masa $v_M(t)$*** como respuesta:



$$\boxed{\begin{aligned} M &= 0{,}1\ Kg \\ B_M &= 0{,}5\ Kg.s/m \end{aligned}}$$

Conforme se ha visto anteriormente, la obtención de la ***respuesta impulsional h(t)*** del sistema implica ***determinar previamente la respuesta indicial g(t):***

Diagrama de Bloques

$$f(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow v(t)$$

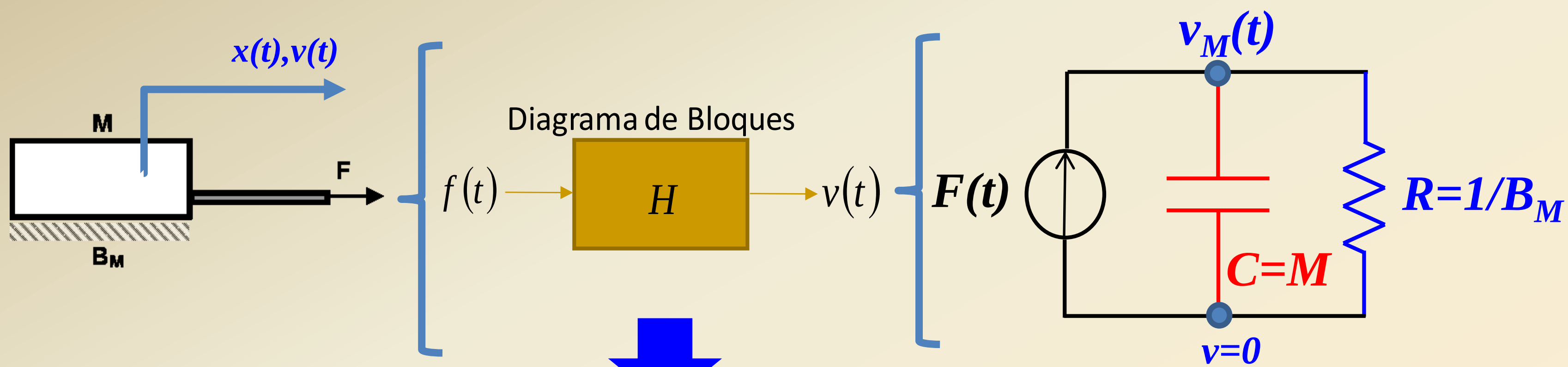
$$\boxed{g(t) = v_M(t)\big|_{F(t)=u(t)}}$$

Para luego:

$$\boxed{h(t) = d\,\frac{g(t)}{dt}}$$

Ejemplo Práctico

1. Obtención de las ***ecuaciones de movimiento*** (modelo):



$$\boxed{10F(t) = v_M'(t) + 5v(t)}$$

Resultado obtenido en el ejemplo de análisis continuo

2. Resolviendo ahora la ***EDO*** para la excitación ***F(t)=u(t)***, la ***Respuesta Indicial g(t)*** resulta:

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= -2e^{-5t} + 2 \\ v(t) &= 2\left(1-e^{-5t}\right),\ en\ t > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left. y(t)\right|_{x(t)=u(t)} = g(t) = 2\left(1-e^{-5t}\right)u(t)$$

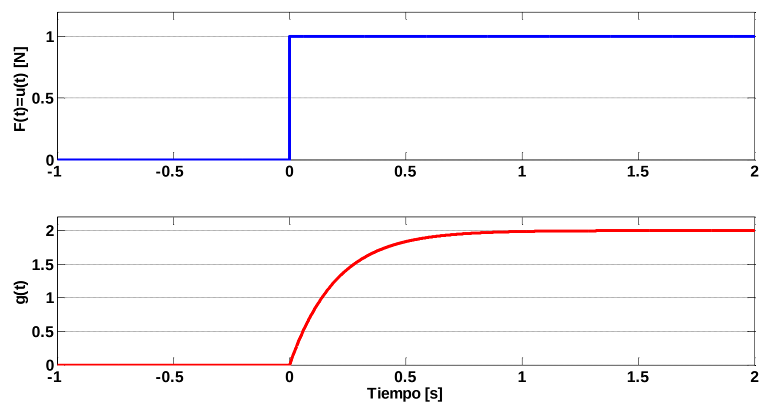
Ejemplo Práctico

y ***derivando la respuesta indicial g(t)*** se obtiene ***la respuesta impulsional h(t)***:

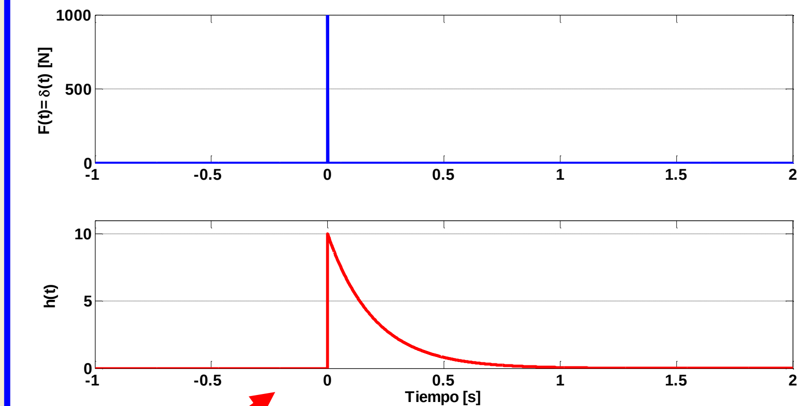
$$g(t) = 2\left(1 - e^{-5t}\right)u(t)$$

$$h(t) = d\,\frac{g(t)}{dt} = 10e^{-5t}u(t)$$

RESPUESTA INDICIAL
(excitación $u(t)$)



RESPUESTA IMPULSIONAL
(excitación $\delta(t)$)



OBSERVAR QUE PARA LOS SISTEMAS REPRESENDADOS POR UNA EDO DE 1er ORDEN, LA RESPUESTA IMPULSIONAL SE ENCUENTRA DEFINIDA POR UNA EXPONENCIAL DECRECIENTE

Respuesta Impulsional Discreta

¿Cómo se obtienen las respuestas impulsional e indicial en un Sistema Discreto?

- ***INDICIAL** (**g[n]**)*: Se puede colocar una señal ***u[n]*** a la entrada del sistema y llevar a cabo la cuenta manualmente ***de manera recursiva (análisis de la respuesta por "recursion")*** o ***resolver la serie numérica resultante*** de dicha operación
- ***IMPULSIONAL** (**h[n]**)*: Se puede colocar una señal ***δ[n]*** a la entrada del sistema y ***efectuar la resolución recursiva o aplicar la relación existente con*** ***g[n]***:

$$\boxed{h[n] = g[n] - g[n-1]}$$

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Discretizar el ***sistema LTI*** cuya ***EDO*** es $y'+2y=x$, considerando un intervalo de muestreo (tiempo de resolución) $T_S=0{,}1s$. Determinar las respuestas ***indicial*** e ***impulsional.***

Aplicando entonces el ***esquema de discretización de la EDO***:

$$y'(t)+by(t)=x(t) \Rightarrow y[k+1]-(1-bT_S)y[k]=T_S x[k]$$

$$y'(t)+2y(t)=x(t) \Rightarrow y[k+1]-(1-2.0{,}1)y[k]=0{,}1x[k]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y'(t)+2y(t)=x(t) \rightarrow y[k+1]-0{,}8y[k]=0{,}1x[k]}$$

LA RESPUESTA $y[n]$ ante una EXCITACIÓN $x[n]$ ($u[n]$ y $\delta[n]$) PUEDE OBTENERSE RESOLVIENDO LAS OPERACIONES DE MANERA RECURSIVA

Ejemplo Práctico

Efectuando el cambio de variables $n=k+1$ (diferencias hacia atrás) y considerando ahora $x[n]=u[n]$ (**respuesta indicial**) se obtiene:

$$\boxed{y[n]=0{,}1x[n-1]+0{,}8\,y[n-1]}$$

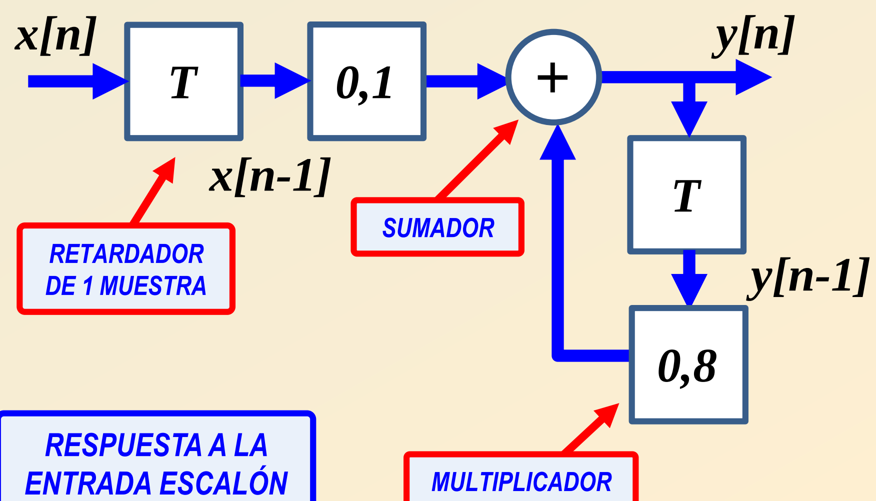
TABLA RECURSIVA

y[-1] es la Condición Inicial del sistema

n	x[n]	x[n-1]	y[n-1]	y[n]
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0,1
2	1	1	0,1	0,18
3	1	1	0,18	0,24
4	1	1	0,24	0,29
5	1	1	0,29	0,33

RESPUESTA A LA ENTRADA ESCALÓN

DIAGRAMA EN BLOQUES

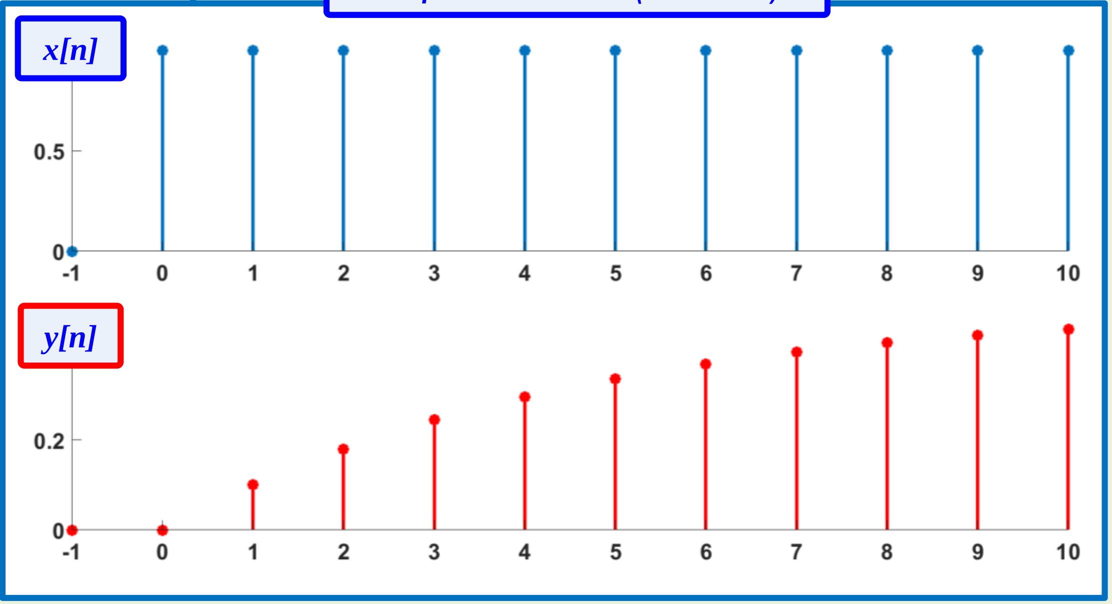


Aplicación en MatLab

```
%Análisis de un sistema en tiempo discreto
%Tiempo discreto
n=-1:10;
%Entrada (Escalón discreto)
x=[0 1 zeros(1,10)];
%Salida (Rta Indicial)
y=zeros(1,12);
%Condición inicial
y(1)=0;
%Ciclo de cálculo de y[n]
for k=2:length(y)
   y(k)=0.8*y(k-1)+0.1*x(k-1);
end
%Visualización
subplot(211),stem(n,x);
subplot(212),stem(n,y);
```

El análisis de los sistemas discretos en MatLab se puede llevar a cabo EN FORMA RECURSIVA, a través de un ciclo FOR

Respuesta INDICIAL (al escalón)



Ejemplo Práctico

Para la ***respuesta impulsional h[n]***, se considera ***$x[n]=\delta[n]$*** y se efectúa el mismo procedimiento:

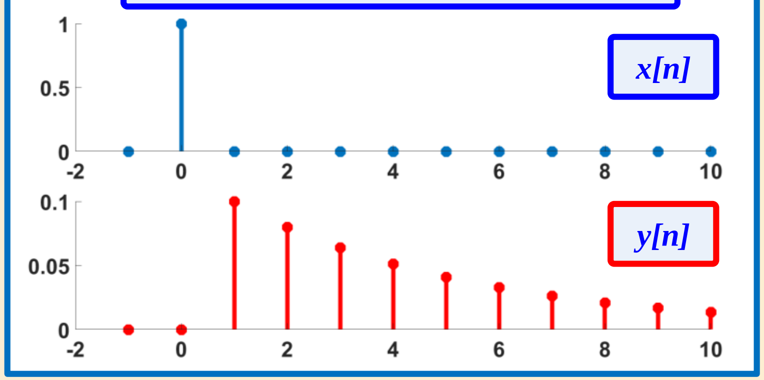
$$\boxed{y[k]=0{,}1x[k-1]+0{,}8y[k-1]}$$

TABLA RECURSIVA

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0,1
2	0	0	0,1	0,08
3	0	0	0,08	0,064
4	0	0	0,064	0,051
5	0	0	0,051	0,041

RESPUESTA A LA ENTRADA IMPULSO

RESPUESTA IMPULSIONAL



Ejemplo Práctico

Finalmente. las ***respuestas indicial g[n]*** e ***impulsional h[n]*** quedan expresadas como:

$$g[n]=[\underline{0} \quad 0{,}100 \quad 0{,}180 \quad 0{,}244 \quad 0{,}295 \quad 0{,}336 \quad \ldots]$$

$$h[n]=[\ \underline{0} \quad 0{,}100 \quad 0{,}080 \quad 0{,}064 \quad 0{,}051 \quad 0{,}041 \quad \ldots]$$

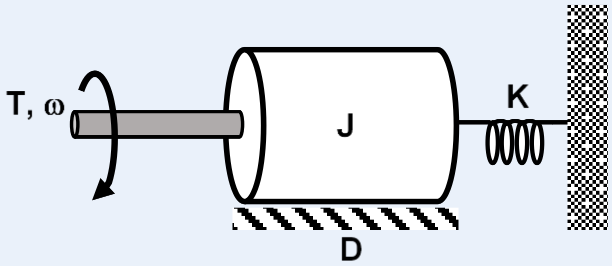
y se verifica:

$$\boxed{h[n]=g[n]-g[n-1]}$$

NOTA: Si se comparan los valores obtenidos en la respuesta discretizada $g[nTs]$ respecto de la respuesta continua $g(t)$, la precisión alcanzada se incrementa conforme T_S se hace más pequeño. A diferencia de ello, $h[n]$ no condice directamente con los valores esperados de $h(t)$. Esto ocurre dado que $\delta[0]$ se ha considerado 1 (Delta de Kronecker) y no $1/T_S$

Consigna de la clase #B (30 minutos)

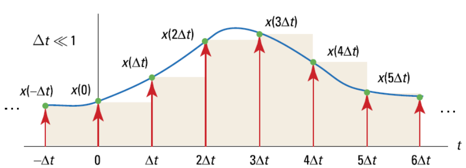
1. Obtener las respuestas ***indicial*** (al escalón, $g(t)$) e ***impulsional*** (al impulso, $h(t)$) correspondientes al siguiente sistema físico, al que se le aplica un torque $T(t)$. ***Considerar a)*** el resorte K desconectado (respuesta $\omega(t)$) y ***b)*** el resorte K conectado (respuesta $\theta(t)$). Utilizar ***MatLab*** para verificar numéricamente el resultado.



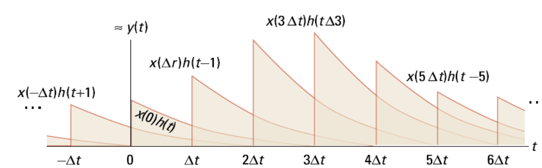
$$J = 1\ Kgm^2$$
$$D = 0,5\ Nms/rad$$
$$K = 2\ Nm/rad$$

2. ***Discretizar el sistema obtenido en a)*** a una tasa de muestreo $T_S=0,1s$. Calcular los primeras 5 muestras de su respuesta indicial $g[n]$, determinar el error respecto de $g(nT_S)$ y graficar su ***diagrama en bloques***.

Anteriormente se demostró que ***en los sistemas LIT*** es factible obtener la ***respuesta y(t) (y[n])*** a una ***excitación x(t) (x[n])***, en virtud del conocimiento de la ***respuesta impulsional h(t) (h[n])*** y la ***aplicación del principio de superposición***. La formalización ***matemática*** de dicho procedimiento se denomina ***“CONVOLUCIÓN”*** y se ***analizará en profundidad en la próxima unidad***.



$$x(t) \;\; x[n] \longrightarrow \boxed{T[x(t)] \equiv h(t)} \longrightarrow y(t) \;\; y[n]$$



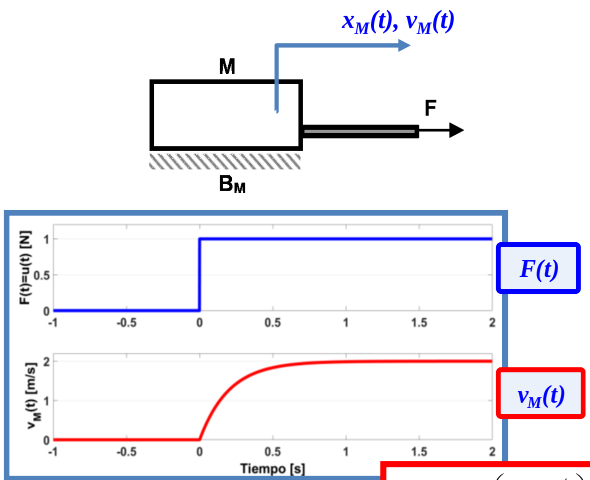
La operación de CONVOLUCIÓN permite la obtención de la respuesta de un sistema LIT ante cualquier tipo de excitación, SIN NECESIDAD DE RESOLVER SU ECUACIÓN MATEMÁTICA REPRESENTATIVA.

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$$

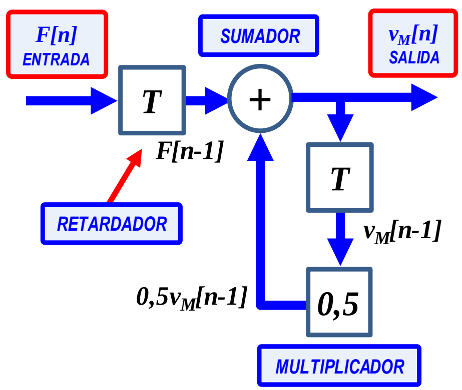
La RESPUESTA IMPULSIONAL h(t) caracteriza al SISTEMA DE MANERA EQUIVALENTE A SU ECUACIÖN MATEMÁTICA (Ej. EDO)

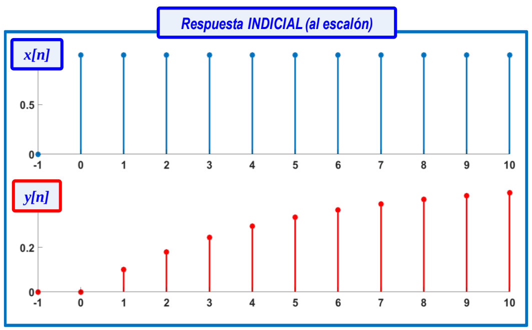
EVALUACIÓN DE SISTEMAS LIT CONTINUOS



$$v_M(t) = 2\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \; con \; \tau = \frac{1}{5}$$

EVALUACIÓN DE SISTEMAS LIT DISCRETOS





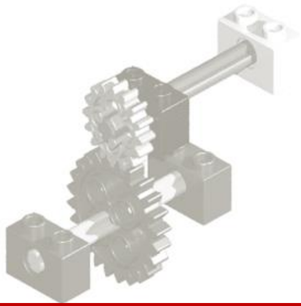
$\delta(t)$	$u(t)$	$x(t)$		$y(t)$	$g(t)$	$h(t)$
$\delta[n]$	$u[n]$	$x[n]$	$\rightarrow h \rightarrow$	$y[n]$	$g[n]$	$h[n]$

$$h(t) = d\,\frac{g(t)}{dt}$$

$$h[n] = g[n] - g[n-1]$$

RESPUESTA IMPULSIONAL h ($x=\delta$)

RESPUESTA INDICIAL g ($x=u$)



U2: Sistemas Continuos y Discretos

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Sistemas Continuos y Discretos