UNIDAD 2: SISTEMAS

Clasificación de sistemas

La mayoría de los sistemas estan categorizados en el siguiente diagrama:

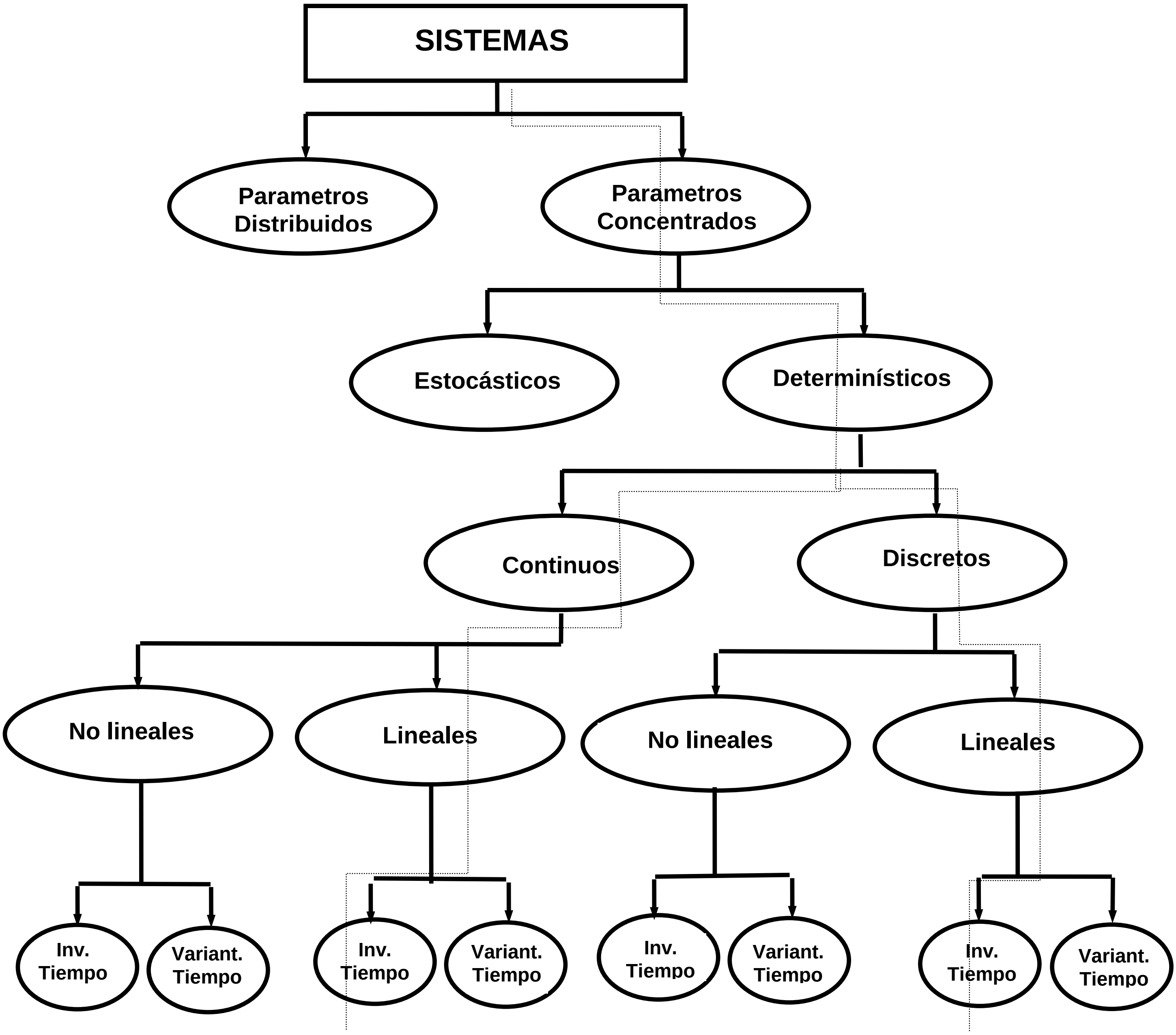


Fig 2.9:. Clasificación de sistemas. Los sistemas mas comunes en nuestra materia están recorridos por una línea punteada

Los sistemas de parámetros concentrados se caracterizan por tener un número finito de elementos fisicamente discretos cada uno de los cuales tiene la facultad de almacenar o de disipar energía o si es una fuente, entregar energía. Tales sistemas asumen que no existe retardo de propagación en las señales que atraviesan cada elemento y están descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Por el contrario los sistemas distribuídos son aquellos sistemas en los que no se puede describir el fenómeno físico mediante parámetros concentrados debido a que existe un tiempo de propagación en las señales presentes en el sistema. Estos sistemas están caracterizados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDE). Sistemas ópticos y líneas de transmisión son ejemplos de esta categoría.

Por otro lado los sistemas pueden ser lineales o no lineales. Un sistema lineal tiene un relación lineal entre causa-efecto o entre excitación y respuesta. Otra definición de lineal, se lleva a cabo mediante el principio de superposición, lo que significa, que la consecuencia de dos o mas excitaciones aplicadas simultaneamente al sistema es la suma de las consecuencias de cada excitación actuando separadamente.

Sistemas cuyos parámetros varían en el tiempo son llamados sistemas variantes en el tiempo. Contrariamente, nuestros sistemas de interés son los llamados invariantes en el tiempo. Nuestro estudio estará restringido a los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) que en el caso de los sistemas ópticos se conocerá como sistemas invariantes en el espacio (LSI).

Tabla 2.2. Correspondencia entre variables de los distintos sistemas

SISTEMA	***Variable que fluye por el elemento***	***Variable a lo largo del elemento***
Eléctrico	*Corriente, i*	*Diferencia de potencial, V*
Mecánico	*Velocidad, v*	*Fuerza, F*
de Fluidos	*Caudal, Q*	*Diferencia de presión, P*
Térmico	*Flujo de energía calórica, q*	*Diferencia de temperatura,* θ
Químico	*Flujo molar, q*	*Concentración, C*

Tabla 2.3. Elementos que caracterizan la disipación de energía

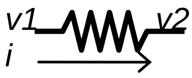
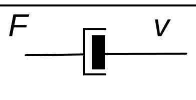
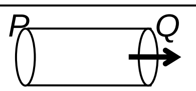
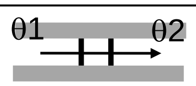
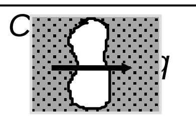
SISTEMA	***ELEMENTO FISICO***	***SIMBOLO***	***ECUACIÓN***	***LEY***	***AUTOR***
Eléctrico	*Resistencia Eléctrica*		$v = \left(\rho \frac{x}{A}\right) \cdot i$	$v = R \cdot i$	*Ohm*
Mecánico	*Rozamiento*		$F = \left(\frac{1}{\mu}\frac{x}{A}\right) \cdot v$	$v = R^{-1} \cdot F$	*Newton*
de Fluidos	*Resistencia del fluído*		$P = \left(\frac{8 \cdot \mu \cdot x}{R^2 \cdot A}\right) \cdot Q$	$P = R \cdot Q$	*Poisseuille*
Térmico	*Resistencia térmica*		$\theta = \left(\frac{1}{\nu}\frac{x}{A}\right) \cdot q$	$\theta = \frac{1}{\kappa} \cdot q$	*Fourier*
Químico	*Resistencia de difusión*		$C = \left(\frac{1}{D}\frac{x}{A}\right) \cdot q$	$C = \frac{1}{\kappa} \cdot q$	*Fick*

Tabla 2.4. Elementos que caracterizan el almacenamiento de energía potencial

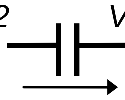
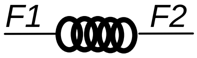
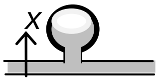
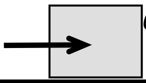
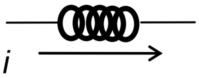
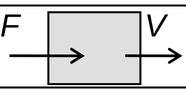
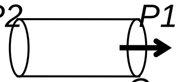
SISTEMA	***ELEMENTO FISICO***	***SIMBOLO***	***ECUACIÓN***	***ENERGÍA ALMACENADA***
Eléctrico	*Capacitancia eléctrica*	*V2*  *V1*	$v = \frac{1\cdot}{C}\int i\cdot dt$	$Ep = C\,\frac{v^2}{2}$
Mecánico	*Muelle mecánico*	*F1*  *F2*	$F = k\int v\cdot dt$	$Ep = k\,\frac{x^2}{2}$
de Fluidos	*Compliance*	*x* 	$v = \frac{\rho\cdot g}{A}\int Q\cdot dt = \rho\cdot g\cdot x$	$Ep = \frac{\rho\cdot g}{2\cdot A}\cdot Q^2$
Térmico	*Masa térmica*	 *q*	$\theta = \frac{1}{C}\int q\cdot dt$	

Tabla 2.5. Elementos que caracterizan el almacenamiento de energía cinética.

SISTEMA	***ELEMENTO FISICO***	***SIMBOLO***	***ECUACIÓN***	***ENERGÍA ALMACENADA***
Eléctrico	*Inductancia*	*V2* *V1*  *i*	$v = L\frac{di\cdot}{dt}$	$E_k = \frac{1}{2}L\,i^2$
Mecánico	*Inercia*	*F*  *V*	$F = m\frac{dV\cdot}{dt}$	$E_k = \frac{1}{2}m\,v^2$
de Fluidos	*Compliance*	*P2* *P1*  *Q*	$P = \frac{\rho\cdot l}{A}\frac{dQ\cdot}{dt}$	$E_k = \frac{1}{2}\frac{\rho L}{A}Q^2$

Ejemplo de ecuaciones homólogas

Sea un sistema mecánico como el de la amortiguación de un automóvil. Escribir las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema y encontrar su homólogo eléctrico.

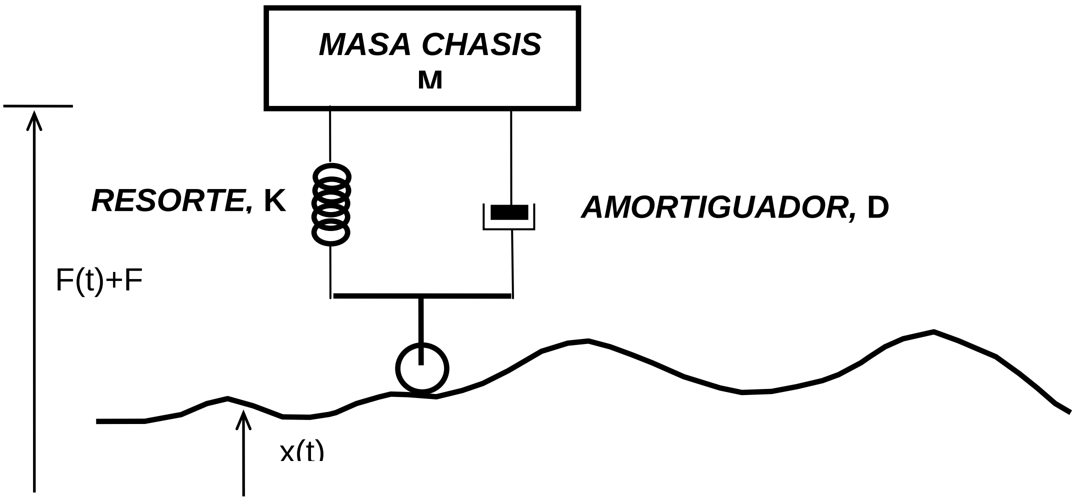


Figura 2.13. Sistema mecánico que representa la amortiguación de un automóvil

$$\boxed{F(t) = M \cdot \frac{d}{dt} v(t) + D \cdot v(t) + K \cdot \int v(t).dt}$$

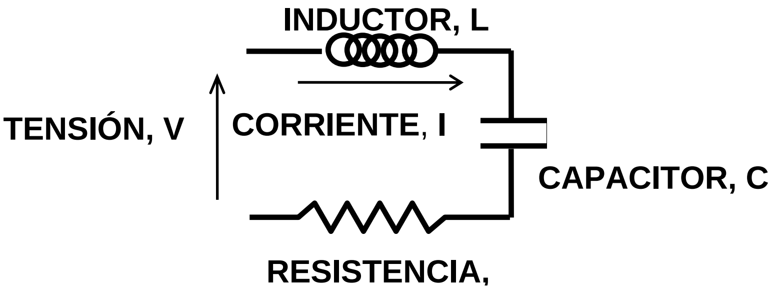
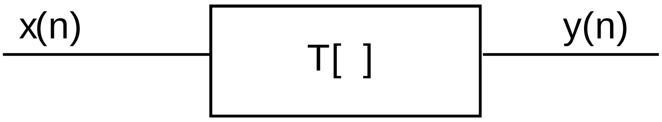


Figura 2.14. Sistema eléctrico homólogo

$$\boxed{v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t).dt}$$

Sistemas lineales discretos

Un ***sistema*** se define matemáticamente como una transformación u operador que transforma un señal de entrada x(n) en una señal de salida y(n). Esto puede escribirse y graficarse de la siguiente manera



$$y(n)=T[x(n)]$$

Los sistemas lineales están definidos por el principio de superposición. Por ejemplo si y1(n) e y2(n) son las respuestas cuando x1(n) y x2(n) son las entradas respectivamente, el sistema es lineal si y sólo si

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = ay_1(n)+by_2(n)$$

donde a y b son constantes. Por otro lado, se ha visto toda función puede estar representada por una suma de muestras unitarias, escaladas y retardadas, como se desarrolla a continuación:

$$x[n] = ...+x[-1]\cdot\delta[n+1]+x[0]\cdot\delta[n]+x[1]\cdot\delta[n-1]+...$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$$

Ingresando esta señal en el sistema anteriormente mencionado, esta se verá afectada por la transformación T que afectará solo a la variable discreta n.

$$x[n] = ...+x[-1]\cdot T[\delta[n+1]] + x[0]\cdot T[\delta[n]] + x[1]\cdot T[\delta[n-1]]+...$$

O lo que es igual a

$$y[n] = ...+x[-1]\cdot h[n+1] + x[0]\cdot h[n] + x[1]\cdot h[n-1]+...$$

donde h representa la respuesta indicial o respuesta del sistema al impulso unitario.

En su forma compacta escribimos:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

Esta ecuación sugiere que la respuesta a un sistema lineal determinado queda perfectamente determinada conociendo la respuesta indicial y la señal de entrada. Especificamente, si h_K [n] es la respuesta del sistema a δ[n-k]. Esto puede escribirse

$$y(n) = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\delta(n-k)\right]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot T[\delta(n-k)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h_k(n)$$

Un ***sistema invariante en el desplazamiento*** está caracterizado por la propiedad que si y(n) es la respuesta que a x(n), luego y(n-k) será la respuesta a x(n-k) donde k puede ser un entero positivo o negativo. Cuando el índice n está asociado con el tiempo la invariancia en el desplazamiento será ***invariancia en el tiempo.*** Esta propiedad implica que si h(n) es la respuesta a δ(n) la respuesta a **δ(n-k)** será simplemente **h(n-k).**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)$$

La ecuación anterior se conoce generalmente como la ***suma de convolución***

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k) = x(n)*h(n)$$
$$y(n) = h(n)*x(n)$$

Representación de señales contínuas en terminos de impulsos.

Como se ha visto anteriormente toda función discreta puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$$

También puede desarrollarse la descripción de una función genérica a partir de la función impulso.

Tomando la función $\hat{x}(t)$ como una aproximación de una dada función x(t) como se ve en la siguiente figura

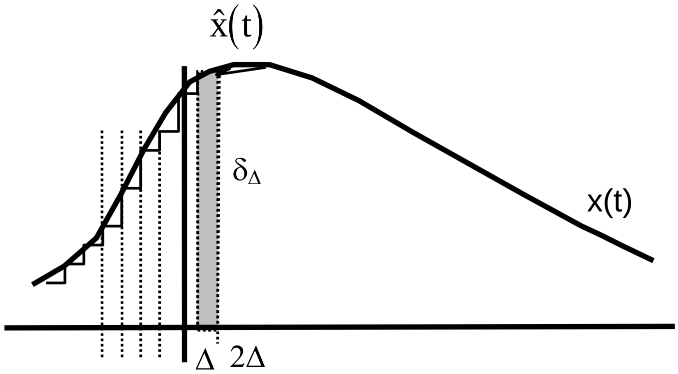


Figura 2.15 Aproximación de x(t) mediante la función impulso.

puede llevarse a cabo a partir de una combinación lineal de pulsos retardados de la siguiente característica:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \prec t \prec \Delta \\ 0 & \forall\ t \end{cases}$$

Entonces $\hat{x}(t)$ se expresa como

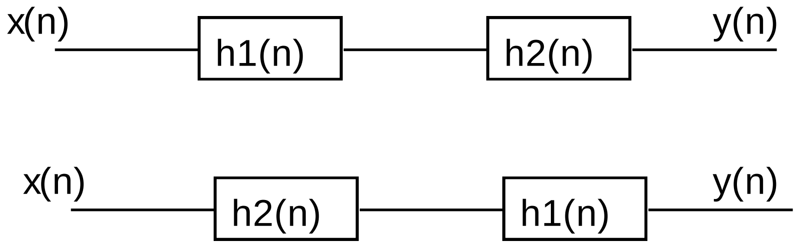
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k.\Delta].\delta_\Delta[t-k.\Delta]\cdot\Delta$$

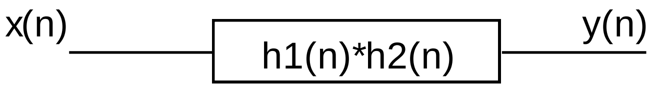
donde para Δ tiende a cero $\hat{x}(t)$ tiende a x(t).; formalmente:

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k.\Delta].\delta_\Delta[t-k.\Delta]\cdot\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

Respuesta de un sistema contínuo en función de su respuesta indicial.

En definitiva un sistema lineal invariante en el desplazamiento con entrada x(n) y respuesta al impulso h(n) tendrá la misma salida que el mismo tipo de sistema con entrada h(n) y respuesta al impulso x(n). En la figura siguiente se puede ver tres tipos de sistemas lineales invariantes en el desplazamiento con idéntica respuesta a la muestra unitaria.





Dos sistemas lineales invariantes en el desplazamiento en paralelo y sus sistema equivalente se grafican en la figura siguiente