SERIES DE FOURIER

APROXIMACIÓN DE SEÑALES CON UN SOLO COEFICIENTE → dada una señal $x(t)$ periódica, puedo aproximarla con una sola señal con un único COEFICIENTE C tal que

$$\left[f_s(t) = C \operatorname{sen}(w_0 t)\right]$$

→ C se calcula partiendo de la minimización del error cuadrático medio entre ambas ($\widehat{f_s \sim f}$), durante un período $[t_1, t_2]$ y se demuestra que ⇒

$$\left[C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} [f(t) \operatorname{sen}(w_0 t)]\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen}^2(w_0 t)\, dt}\right]$$

APROXIMACIÓN DE SEÑALES CON TODOS LOS COEFIC. → se halla una SERIE COMPLETA ($f(t)$) con coefic. a_m y b_m afectando a SENOS y COSENOS (con sus AMPLITUDES) de FRECUENCIAS MÚLTIPLOS de la FUNDAMENTAL (la señal a aproximar) llamados ARMÓNICAS

→ este cálculo es posible gracias a la ORTOGONALIDAD de las funciones SENO y COSENO usadas por FOURIER / DEL CONJ. $\underbrace{\{f_K(t)\}}$

⇒ en un INTERVALO $a < t < b$, 2 funciones cualesquiera $f_m(t), f_n(t)$ SON ORTOGONALES SI CUMPLEN:

$$\int_a^b f_m(t) f_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_m & \text{para } m = n \end{cases}$$

⇒ APLICANDO esto a sen y cos (MÚLTIPLOS de w_0) se obtiene que:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(m w_0 t) \cos(n w_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \neq 0 \\ T_0/2 & \text{si } m = n \neq 0 \\ T_0 & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \operatorname{sen}(m w_0 t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n,\ m = n = 0 \\ \frac{T_0}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \operatorname{sen}(m w_0 t) \cos(n w_0 t)\, dt = 0\right] \quad \text{p/ } m, n \text{ ARBITRARIOS}$$

ESTA ES LA IMPORTANTE p/ el cálculo de a_m y b_m

∴ de una demostración se obtiene (partiendo de ①

$$\left[f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \left[a_K \cos(K w_0 t) + b_K \operatorname{sen}(K w_0 t)\right]\right]$$

⇒ $$\left[a_m = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \cos(m w_0 t)\, dt \quad (m = 1, 2, 3, \dots)\right] \quad \left[a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t)\, dt\right]$$

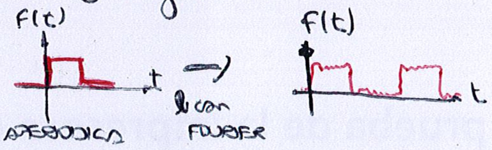
⇒ $$\left[b_m = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \operatorname{sen}(m w_0 t)\, dt \quad (m = 1, 2, 3)\right] \quad \left[b_0 = 0\right] \quad \left(b_0 = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \operatorname{sen}(0)\, dt = 0\right)$$

∴ obtenidos los a_0, a_m, b_0, b_m reemplazar en ①

A TENER en CUENTA:

⇒ $f(t)$ (señal a APROXIMAR con FOURIER) está definida SOLO EN EL INTERVALO QUE ESPECIFIQUEMOS. La SERIE DE FOURIER LA EXTIENDE PERIÓDICAMENTE, con período T_0 igual al INTERVALO de DEFINICIÓN

∴ $f(t)$ puede ser APERIÓDICA ⇒ ej:



⇒ como $\text{sen}(m\omega_0 t)$ es IMPAR p/TODO m y $\cos(m\omega_0 t)$ es PAR p/TODO m entonces:

- si $f(t)$ es IMPAR ⇒ su S.D.F. NO CONTENDRÁ TÉRMINOS COSENO ∴ $a_m = 0$ p/TODO m:

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \underbrace{f(t)}_{\text{IMPAR}} \underbrace{\cos(m\omega_0 t)}_{\text{PAR}}\, dt = 0$$

⇒ IMPAR × PAR = IMPAR ∴ AL INTEGRAR en T_0 se ANULA

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \underbrace{f(t)}_{\text{IMPAR}} \underbrace{\text{sen}(m\omega_0 t)}_{\text{IMPAR}}\, dt \neq 0$$

⇒ IMPAR × IMPAR = PAR ∴ AL INTEGRAR en T_0 DA $\neq 0$

- si $f(t)$ es PAR ⇒ su S.D.F. NO CONTENDRÁ TÉRMINOS sen

∴ $b_m = 0$ p/TODO m (pues $\overset{f(t)}{\text{PAR}} \times \overset{\cos}{\text{IMPAR}}$ = IMPAR ∴ AL INTEGRAR = 0)

$a_m \neq 0$ p/TODO m (pues $\overset{f(t)}{\text{PAR}} \times \overset{\text{sen}}{\text{PAR}}$ = PAR ∴ AL INTEGRAR $\neq 0$)

- si $f(t)$ NO es PAR NI IMPAR ⇒ su SDF CONTENDRÁ sen y cos

⇒ a veces FUNCIONES IMPARES son afectadas por suma de una cte, perdiendo esa CONDICIÓN

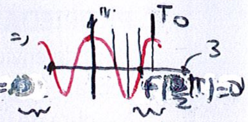
∴ los b_m serán los MISMOS

los a_m serán NULOS EXCEPTO a_0 (me dará $\neq 0$ debido a esa cte)

⇒ la S.D.F aplicada a SINUSOIDALES es la propia FUNCIÓN, pues ya está definida por senos y cos múltiplos de ω_0

Función PAR ⇒ $f(-x) = f(x)$

ej: $\cos(m\omega_0 t)$ ⇒

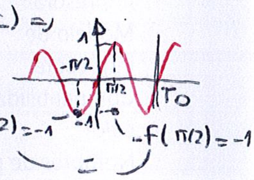


$f(-\frac{3\pi}{2}) = 0$ $f(\frac{3\pi}{2}) = 0$

SI INTEGRO en T_0 NO SE ANULA (las ÁREAS NO SE ANULAN) VALEN LO MISMO

FUNCIÓN IMPAR ⇒ $f(-x) = -f(x)$

ej: $\text{sen}(m\omega_0 t)$ ⇒



SI INTEGRO en T_0 SE ANULAN ÁREAS ∴ la INTEG. DA 0

$f(-\pi/2) = -1$ $-f(\pi/2) = -1$