TRANSFORMADA DE FOURIER — p/ SEÑALES APERIÓDICAS

- Al tener un probl. difícil de resolver en sus COORD. ORIGINALES (espacio "t"), suele ser mas sencillo TRANSFORMARLO a un espacio "τ" con una $\int$ y un NÚCLEO (proyección)
- Luego, la TRANSFORMADA INVERSA devuelve LA SOLUCIÓN en el ESPACIO ORIGINAL

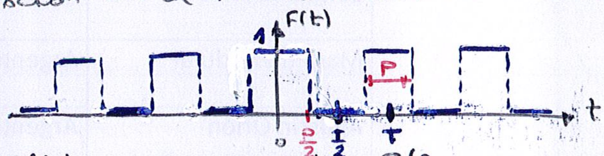
$$\rightarrow \left[\underbrace{F(\tau)}_{\text{FUNCIÓN TRANSFORMADA (dominio } \tau)} = \int_a^b K(\tau,t)\underbrace{F(t)}_{\text{FUNCIÓN ORIGINAL (dominio } t)}dt\right]$$

$K(\tau,t) \Rightarrow$ NÚCLEO DE LA TRANSF. $\Rightarrow$ POSIBILITA el MAPEO al dominio TRANSFORMADO

Se asocia a c/ función $F(t)$ en el espacio t otra función $F(\tau)$ en el espacio τ

- ¿Se puede EXTENDER LAS SEF p/ obtener una representación en el dominio de la F de FUNCIONES NO PERIÓDICAS?

$\Rightarrow$ consideremos la sig. función PERIÓDICA de $T=T_0$ $\Rightarrow$

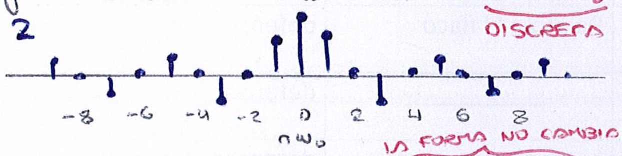


$\Rightarrow$ Si hallamos sus C_n, por ser $F(t)$ PAR, nos darán PURAMENTE REALES por lo cual se pueden graficar de forma DIRECTA en términos de $\omega = n\omega_0$ DISCRETA

$$F(t) = \begin{cases} 0 & -T_0/2 < t < -P/2 \\ 1 & -P/2 < t < P/2 \\ 0 & P/2 < t < T_0/2 \end{cases}$$

* $\Rightarrow \left[C_n = \left(\frac{P}{T_0}\right)\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \frac{P}{2})}{(n\omega_0 P/2)}\right]$

$T_0 = 2$

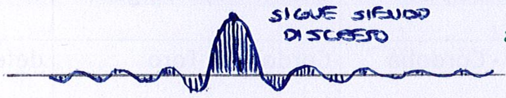


la SEF DE UNA SEÑAL DE PULSOS TIENE FORMA DE FUNC SINC $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

LA FORMA NO CAMBIÓ, SOLO LA FREC

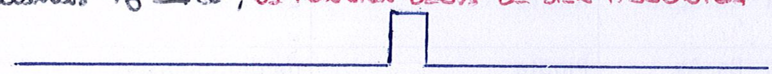
$\Rightarrow$ si vamos aumentando SOLAMENTE T_0 SE VE QUE EL ESPECTRO SE DENSIFICA por generarse componentes INTERMEDIOS YA QUE AL AUMENTAR $T_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ DISMINUYE $\therefore$ el VALOR DISCRETO $n\omega_0$ PRESENTA MENORES INCREMENTOS

si $T_0 = 20 \Rightarrow$



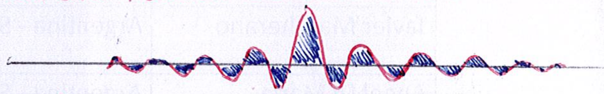
*OTRA COSA QUE PASA ES QUE DISMINUYE LA AMPLITUD DE LOS C_n

$\Rightarrow$ Cuando $T_0 \to \infty$, LA FUNCIÓN DEJA DE SER PERIÓDICA



SE VUELVE APERIÓDICA

el ESPECTRO SE VUELVE CONTINUO y se convierte en una FUNCIÓN DEPEND. DE ω $\underbrace{(\text{VAR. CONTINUA})}_{n\omega_0 \to \omega}$ y la ampl. de los C_n BAJA DRÁSTICAMENTE $\Rightarrow$



- Lo anterior reconsidera la expresión de una FUNC. APERIÓDICA $f_A(t)$ en el dom de la FREC COMO UNA FUNCIÓN CONTINUA de ω. ¿Y que pasa con los C_n? $\Rightarrow$ sea $f_p(t)$ una func. PERIÓDICA

$\Rightarrow C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \quad \hookrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; p/ evitar que $C_n \to 0$ cuando $T_0 \to \infty$, se trabajará con UNA EXPRESIÓN INDEP. DEL INCREMENTO DE T_0 $\Rightarrow \left[C_n T_0 = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]$

ω_0 se VUELVE MUY CHICO

$\Rightarrow$ Al aplicar ahora $T_0 \to \infty$, se ve que $f_p(t) \to f_A(t)$ y $n\omega_0 \to \omega$;

$$\left[\lim_{T_0\to\infty} C_n T_0 = \lim_{T_0\to\infty}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(t)e^{-j\omega t}dt = F(\omega)\right] \quad \text{(I)}$$

en el lim $C_n T_0$ se TRANSFORMA en una FUNC. CONTINUA $F(\omega)$ depend. de la frec.

SIGUE SIENDO UN CASO PARTICULAR de la SEF con T_0 MUY GRANDE

[LAS SEÑALES APERIÓDICAS REQUIEREN de senos y cosenos "cercanos" CONFORM. BANDAS DE FRECUENCIAS]

$\Rightarrow$ esto se puede aplicar también a la $F_p(t)$ en términos de su SEF:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T_0 e^{jn\omega_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{T_0}\right)}^{\omega_0/2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T_0 e^{jn\omega_0 t}\omega_0$$

pues ω_0 se VUELVE INFINITESIMAL ¿SE VUELVE UNA $\int$?

cuando $T_0 \to \infty \Rightarrow f_p(t) \to f_A(t)$; $n\omega_0 \to \omega$; $\omega_0 \to d\omega$; la $\Sigma \to \int$:

(II) $\left[f_A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$, donde $F(\omega) = \lim_{T_0\to\infty} C_n T_0$

$f_A(t)$ APERIÓDICA se expresa como una $\int$ de su ESPECTRO CONTINUO $F(\omega)$

$\Rightarrow$ finalmente (I) y (II) $\Rightarrow \left[F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right] \Longleftrightarrow \left[f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$

TRANSF. DE FOURIER (TF) permite hallar el esp. de F. de $f(t)$

TRANSF. INVERSA de FOURIER (TIF), p/ ~~hallar~~ reconstruir $f(t)$ a partir de su ESP. FRECUENCIAL

PODEMOS CALCULAR $F(\omega)$ (domin. de la frec) a partir de una $f(t)$ APERIÓDICA (dom. del t) y VICEVERSA

- la TF es una EXTENSIÓN de la SEF $\Rightarrow \left[F(\omega) = T_0 C_n\big|_{n\omega_0\to\omega} \Rightarrow C_n = \frac{F(\omega)\big|_{\omega\to n\omega_0}}{T_0} = \frac{F(n\omega_0)}{T_0}\right]$

reemplazo ω por $n\omega_0$ en $F(\omega)$ y me da el $C_n T_0$ — de C_n

DISCRETIZO

al evaluar $F(\omega)$ en PUNTOS EQUIESPACIADOS $n\omega_0$ se obtiene C_n

- Como trabajamos con $C_n T_0$ $\Rightarrow$ la $\overline{\text{UNIDAD}}$ en el esp. frec en TF pasa a ser MULTIPL. por segundos en resumen se obtuvo :

SEÑAL PERIÓDICA $f_p(t)$ (CONTINUA) — SEF (FRECUENCIA DISCRETA)

SEÑAL APERIÓDICA $f_A(t)$ (CONTINUA) — TF (FRECUENCIA CONTINUA)

$$\left[C_n = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f_p(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right] \Longleftrightarrow \left[F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right]$$

$$\left[f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t} \right] \Longleftrightarrow \left[f_A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right]$$

DISTINTAS NOTACIONES DE LA TF

- La expresión p/ hallar $F(\omega)$ (TF de $f(t)$) presenta la sig. NOTACIÓN : $F[f(t)] = \hat{F}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$
- " " p/ hallar $f(t)$ a partir de $F(\omega)$ (TIF) se manifiesta : $F^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

COSAS QUE SE SIGUEN CUMPLIENDO EN LA TF

1) si $f(t)$ es REAL → el ESP. DE AMPL. es PAR ; → el DIAGR. DE FASE es IMPAR

2) si $f(t)$ es PAR ⇒ el ESP. es una FUNCIÓN REAL (sólo se requieren cosenos infinitesimales)

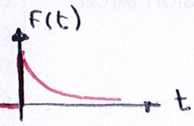
3) si $f(t)$ es IMPAR ⇒ el ESP. es una FUNCIÓN IMAGINARIA (sólo se requieren senos infinitesimales)

¿TODAS LAS SEÑALES POSEEN TF? → La condición de suficiencia p/ que la TF de $f(t)$, $F(\omega)$ EXISTA es (DIRICHLET) $\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty \right]$

- ∴ $f(t)$ DEBE ser de ENERGÍA FINITA (CUADRADO INTEGRABLE)
- las FUNCIONES que NO VAYAN ASINTÓTICAMENTE a 0 al tender $t \to \infty$ y $-\infty$ en general NO TIENEN TF

APLICANDO TF A DISTINTAS FUNCIONES

1) FUNCIÓN EXPONENCIAL DECRECIENTE ⇒ $f(t) = e^{-at}\, u(t)$; $a > 0$



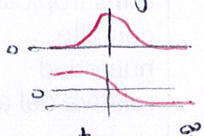
$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = -\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_0^{\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-at}\, e^{-j\omega t}}{a+j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

SE OBTIENE UNA func de var. compl.

ESPECTROS ⇒ $|F(\omega)| = 1/\sqrt{a^2+\omega^2}$

$\overbrace{}^{0}\angle F(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

DANDOLE VALORES a ω se obtienen LOS ESPECTROS — ahora CONTINUOS

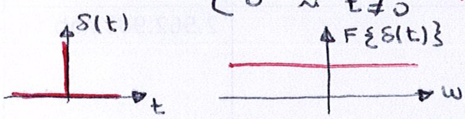


FASE = FASE NUM - FASE DENOM (por ser una división)

2) FUNCIÓN DELTA DE DIRAC ⇒ $\delta(t) = \begin{cases} \infty & si\ t = 0 \\ 0 & si\ t \neq 0 \end{cases}$ ⇒ $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1\, dt = 1$

por prop.: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\, dt = f(t_0)$

∴ $\delta(t) \xleftrightarrow{T.F.} 1$ ⇒



ESP. DE AMPL. CONSTANTE p/ todas frec ⇒ DIAGR. DE FASE NULO

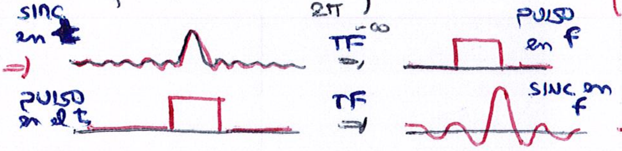
⇒ [COLOCAR UN IMPULSO A LA ~~E~~ IN DE UN SIST. es = a EXCITARLO SIMULTÁNEAMENTE con todas las frec EXISTENTES]

SIMETRÍA DE LAS TF → DUALIDAD tiempo-frec → Si $F(\omega)$ constituye la TF de $f(t)$. ¿Cuál será la TF de $F(t)$?

- $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \to f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$

⇒ INTERCAMBIAMOS ω por t, se ve que ⇒ $f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \to \left[2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) \longrightarrow F(\omega) \\ F(t) \longrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{array} \right]$$



LA TF es SIMÉTRICA en términos MORFOLÓGICOS

OTRAS PROPIEDADES

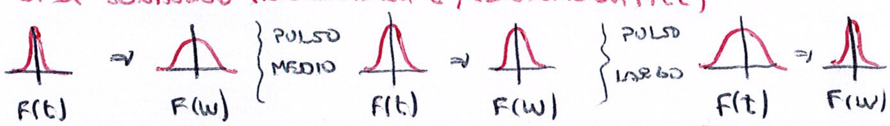
1) → LINEALIDAD → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$, $g(t) \xleftrightarrow{TF} G(\omega)$ ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} f(t) + g(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega) + G(\omega) \\ (a+jb)f(t) \xleftrightarrow{TF} (a+jb)F(\omega) \end{array} \right\}$

2) → ESCALADO → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$ ⇒ $\left\{ f(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \right\}$ (COMPRIME en t, ENSANCHA en f)

si $a > 1$ ⇒ la señal varía + rápido e INCREMENTA sus COMP. DE ALTA frec.

si $a < 1$ ⇒ el EFECTO es el CONTRARIO (ENSANCHA en t ; COMPRIME en frec)

MIENTRAS MÁS CORTO es el PULSO + ANCHO es el ESPECTRO + COMPONENTES en ALTA FREC



SIGUEN LAS PROPIEDADES → ③ DESPLAZAM. TEMPORAL → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(t \mp a) \xleftrightarrow{TF} e^{\mp j\omega a} F(\omega) \right]$$

} INDEP. de la ubicación temp. de la señal, su espectro NO CAMBIA (de AMPLITUD). Solo se MODIFICA el DIAGR. de FASE

④ DESPLAZAM. FRECUENCIAL → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$ ⇒ $\left[e^{\pm j\omega_0 t} f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega \mp \omega_0) \right]$

} el desplaz. del ESPECTRO hace que su MODULO DEJE DE SER PAR y que su FASE " " " IMPAR
→ LA SEÑAL temp SE TORNA COMPLEJA pues está MULTIPL. por $e^{\pm j\omega_0 t}$ por eso DEJA DE SER PAR el ESP.

⑤ DERIVACIÓN TEMPORAL → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{d f(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega F(\omega) \right]$$

} al DERIVAR en el t, el espectro se ve MULTIPL. por el factor "$j\omega$" como CONSEC., cambia el MODULO y FASE (pero siguen siendo PAR e IMPAR dado que la deriv. es Real)

⑥ SE USA MAS DERIVACIÓN FRECUENCIAL → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$ ⇒ $\left[-jt f(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right]$

} al deriv. en frec, el ESPECTRO SE MODIF. la señal se torna COMPLEJA

⑦ INTEGRACIÓN TEMPORAL → $f(t) \xrightarrow{TF} F(\omega)$ → $\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi \delta(\omega) F(0) \right]$

} el espectro se VE DIVIDIDO por el FACTOR $j\omega$ y se ADICIONA UN IMPULSO. Cambia MÓDULO y FASE (pero siguen siendo PAR e IMPAR por ser la INTE. OPER. 0...)

⑧ IMPORTANTE CONVOLUCIÓN TEMPORAL → $f(t) \xrightarrow{TF} F(\omega)$, $g(t) \longrightarrow G(\omega)$ ⇒ $\left[f(t) * g(t) \xleftarrow{TF} F(\omega)\, G(\omega) \right]$

La operación de CONV en t se transforman en un PRODUCTO de los espectros en frec! ∴ es MAS FACIL hacer TF de f y g, MULTIPL. F y G y no de la CONV

⑨ MODULACIÓN → $f(t) \xleftrightarrow{TF} F(\omega)$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(t)\, g(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) \right]$$

el PROD. de 2 Func. en el t. es = a la CONV. de sus espectros en frecuencia de f y g

→ puede demostrarse ANALÍTICAMENTE que: $\left[f(t) \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF} \frac{F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)}{2} \right]$ pensando los espectros

LO IMPORTANTE ES APLICAR ESTAS PROPIEDADES, PUEDO APLICARLAS SIEMPRE

APLICANDO TF A MAS FUNCIONES

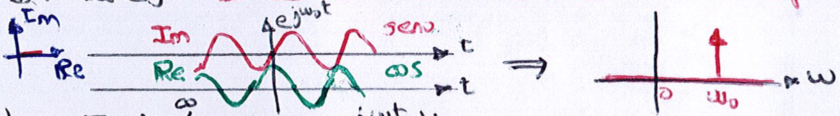
APLICAMOS PROPIEDADES

③ FUNCIÓN EXP. COMPLEJA : $e^{j\omega_0 t}$ ⇒ $\delta(t) \xrightarrow{TF} 1$ ⇒ $1 \xrightarrow{TF} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ (POR SIMETRÍA)

⇒ $1 . e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ (POR DESPLAZAM. FRECUENCIAL)

∴ $\left[e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \right]$; SE OBSERVA que la TF de $e^{j\omega_0 t}$ SE REPRESENTA COMO UNA frec. PURA en el espectro

por ser Real la FASE es 0



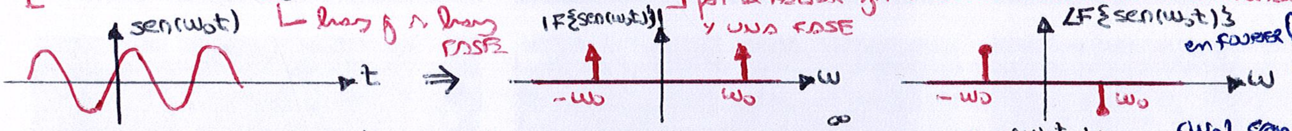
④ SENO $(\omega_0 t)$ (TONO PURO) → $f(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ → $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega_0 t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2\pi}{2j} \left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0) \right]$$

APLICAMOS TF DE la $e^{j\omega_0 t}$

∴ $\left[\text{sen}(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF} j\pi \left[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0) \right] \right]$ ← hay j ∴ hay FASE

SE VEN 2 FUNCIONES IMPULSO UBICADOS en $\pm\omega_0$, afectados por el FACTOR $j\pi$. C/U ALMACENARÁ en su AREA UN MODULO Y UNA FASE

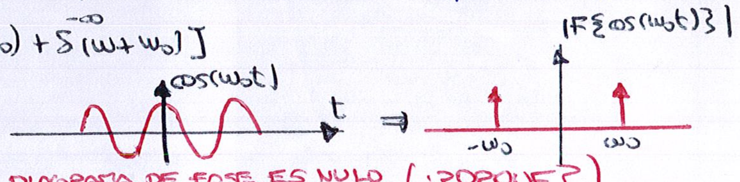


en Fourier lo ÚNICO COMP. del seno es esa MISMA frec (ω_0), con su AMPLITUD representada por ese δ

⑤ COSENO $(\omega_0 t)$ (TONO PURO) → $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ → $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2\pi}{2} \left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0) \right]$$

∴ $\left[\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF} \pi \left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) \right] \right]$



→ NO TIENE j

EL DIAGRAMA DE FASE ES NULO (¿PORQUE?) por ser Real la TF

LA TRANSFORMADA DA VENTAJAS OPERATIVAS con RESP. a la SF

∴ SIRVEN p/ IDENTIF. el CONTENIDO espectral, ver que pasa con las señales en un SIST.

SI UNA TF da Real NEGATIVA ⇒ FASE π o −π

" " " " Real POSITIVA ⇒ NO TIENE DIAGR. pues FASE 0