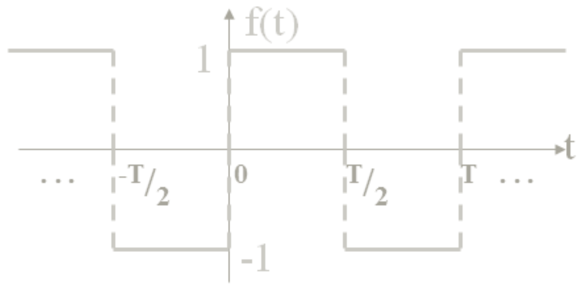
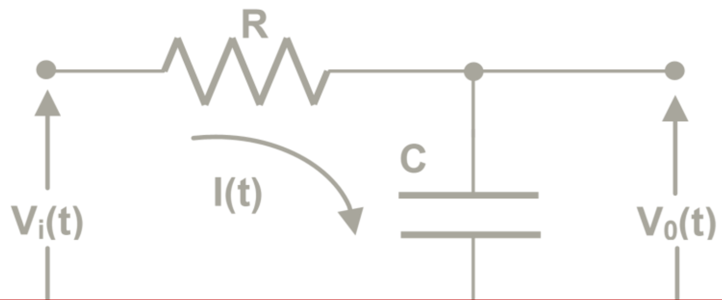
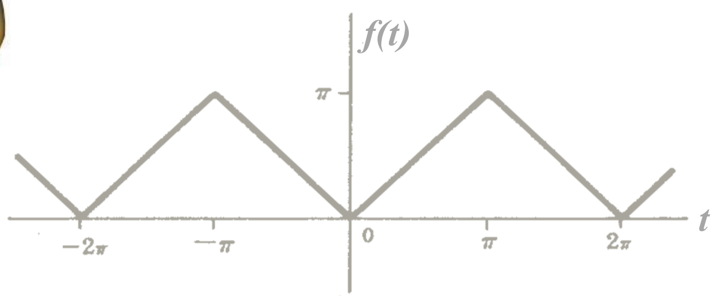
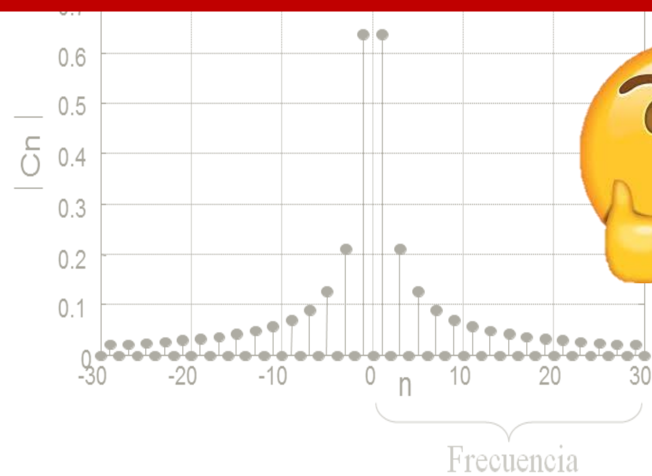


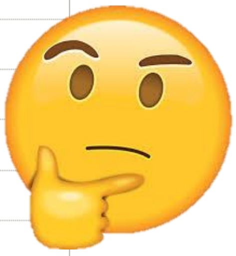


Actividad Práctica

●Serie de Fourier●







UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Serie Trigonométrica de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

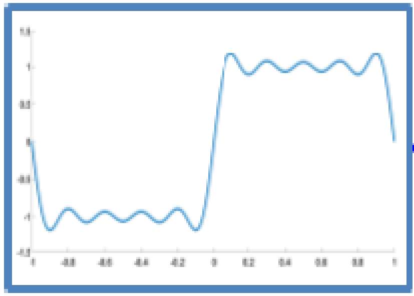
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) sen(n\omega_0 t) dt \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

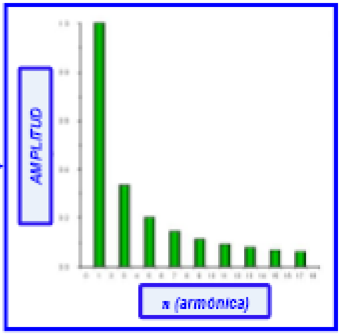
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) dt$$

$a_0/2$ VALOR MEDIO de $x(t)$

$$b_0 = 0$$

Síntesis y Espectro de Frecuencias





Propiedades de Paridad de la SdF

Si $x(t)$ es IMPAR, su SdF SÓLO CONTENDRÁ funciones SENO, por lo tanto $a_n = 0$ para todo n

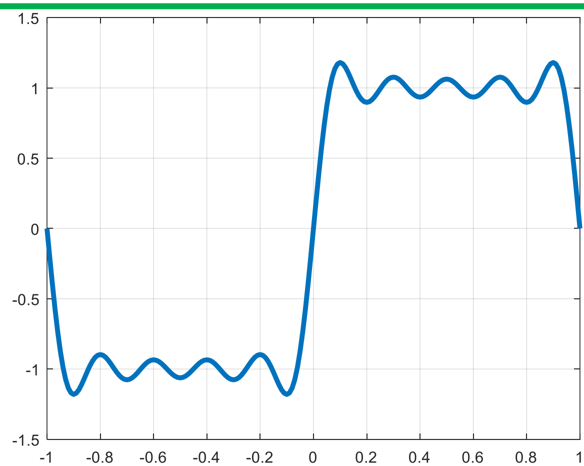
Si $x(t)$ es PAR, su SdF SÓLO CONTENDRÁ funciones COSENO, por lo tanto $b_n = 0$ para todo n

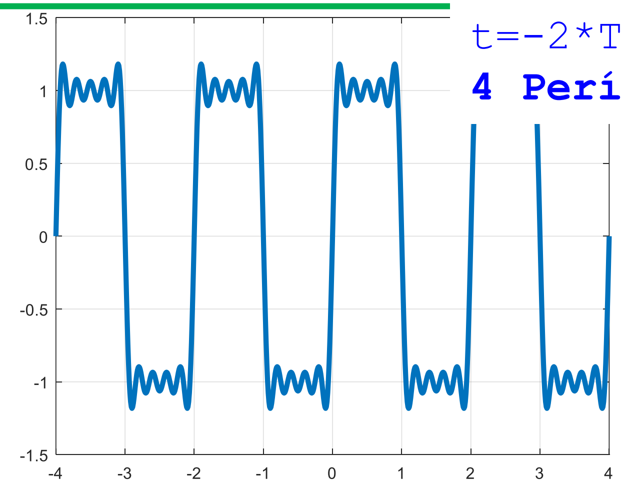
Actividad Práctica EN MATLAB...

```
%  Toolbox
Ts=0.01 ; T0=2;
t=-T0/2: Ts: T0/2 ;
ft = -escalon(-t) + escalon(t) ;
N=10 ;
a0 = STF_a0(t, ft); % ft:  Usar un solo período
an = STF_an(N, t, ft); % Usar un solo período
bn = STF_bn(N, t, ft) ; % Usar un solo período
%t=-4*T0/2: Ts: 4*T0/2 ; % Podemos tomar varios Períodos
serie = ISTF( N, t, a0, an, bn, T0) ;
figure; plot(t,serie, 'linewidth',3); grid on
```

Ejemplo Función cuadrada Con Toolbox

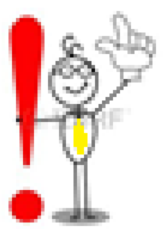
Ídem anterior Señal reconstruida desde <u>ao, an y bn</u> Toolbox



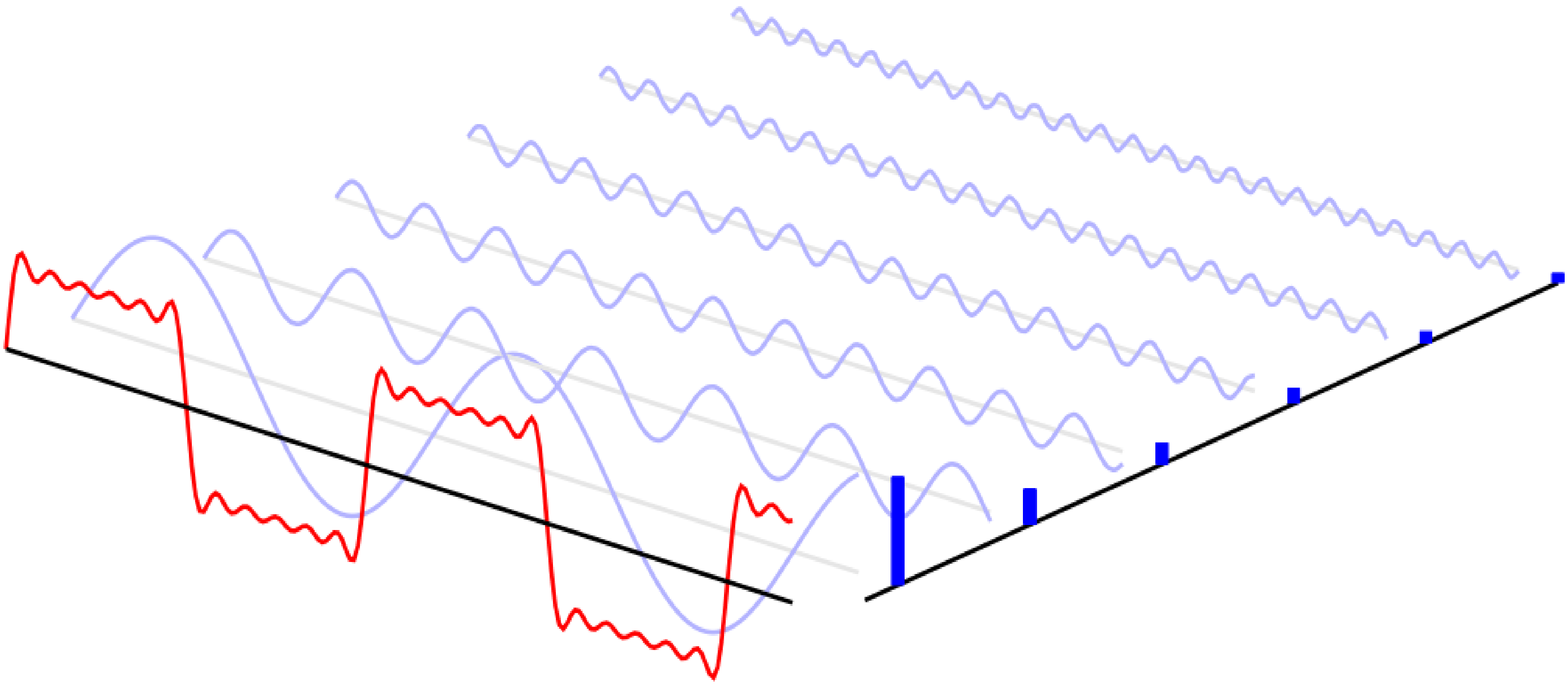



```
Si Utilizo:
t=-2*T0:Ts:2*T0
```

4 Períodos !



Actividad Práctica



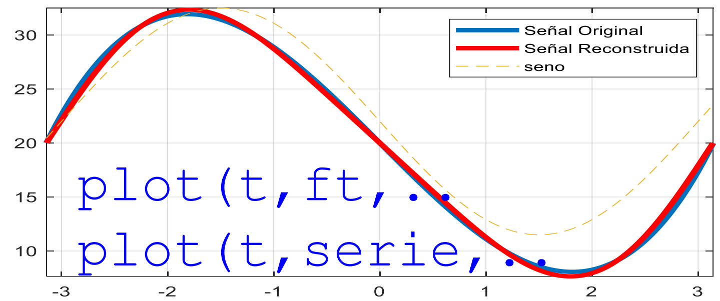
Reproducir la siguiente señal mediante STF (serie trigonométrica de Fourier).

Sin ***cálculos analíticos***, con Toolbox ASYS

Toolbox ASYS

$f(t) = t * (t^2 - \pi^2) + 20$; $[-\pi,\ \pi)$; Periódica

es un seno deformado




```
clc; close all; clear all
Ts=0.001 ; T0=2*pi;
t=-T0/2: Ts: T0/2-Ts ;
ft = t.* (t.^2 -pi^2) +20 ;
N=2 ;
a0 = STF_a0(t, ft);
an = STF_an(N, t, ft);
bn = STF_bn(N, t, ft) ;
serie = ISTF( N, t, a0, an, bn, T0)
figure; plot(t,ft, 'linewidth',3) ;hold on
plot(t,serie, 'linewidth',3, 'color', 'r');
grid on ;axis tight
plot(t, -10.5*sin(1/3*pi*t) +22, '--')
legend('Señal Original','Señal Reconstruida', 'seno')
```

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t).dt \\ a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t).cos(n.w_0.t).dt \\ b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t).\mathrm{sen}(n.w_0.t).dt \end{cases}$$

$$;f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n.\cos(n.w_0.t) + b_n.\mathrm{seno}(n.w_0.t)]$$

Similar ejercicio anterior con:

$$f(t) = t^4 - 1000; \quad [-\pi,\ \pi)$$

Utilizar 40 armónicos

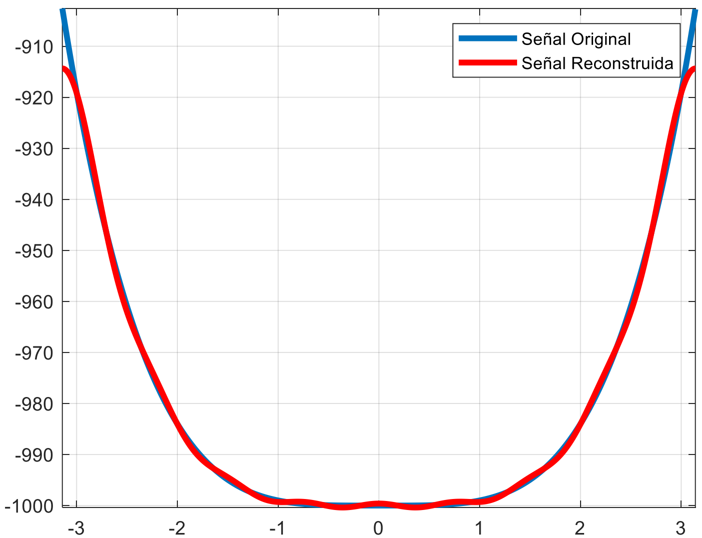
Toolbox ASYS

Resolución:

En programa anterior modificamos:

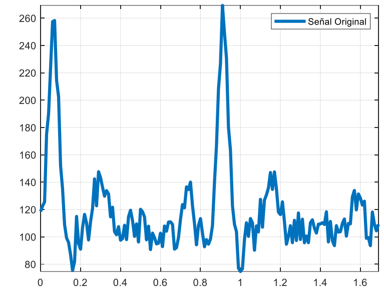
```
ft = (t.^4) -1000 ;
N=8 ;
```

```
Ts=0.001 ; T0=2*pi;
t=-T0/2: Ts: T0/2-Ts ;
ft = (t.^4) -1000 ;
N=8 ;
a0 = STF_a0(t, ft);
an = STF_an(N, t, ft);
bn = STF_bn(N, t, ft) ;
serie = ISTF( N, t, a0, an, bn, T0) ;
figure; plot(t,ft, 'linewidth',3) ;hold on
plot(t,serie, 'linewidth',3, 'color', 'r');
grid on ;axis tight
legend('Señal Original','Señal Reconstruida')
```



Se pide analizar y probar el siguiente programa

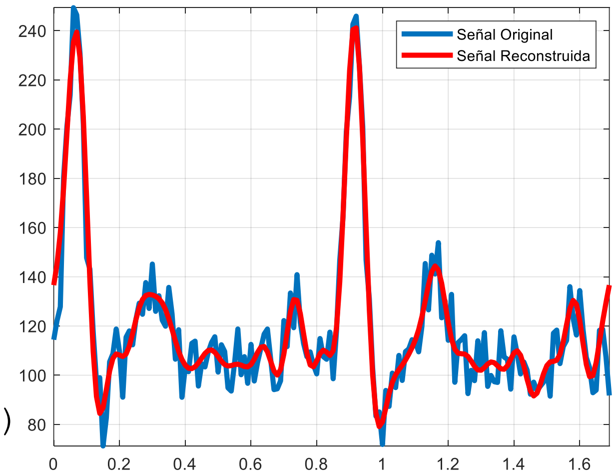
```
% Señal de ECG: Electrocardiograma
ECG = [90,  95, 124, 153, 182, 211, 241, 230, 202, 173, 143, 114, ...
       89,  83,  75,  67,  70,  78,  85,  90,  90,  90,  90,  90, ...
       92, 100, 107, 113, 118, 122, 124, 125, 124, 121, 117, 111, 104, ...
       97,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  92,  93, ...
       93,  92,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  90, ...
       90,  90,  90,  90,  90,  90,  90,  97, 104, 109, 112, 113, 111, ...
      107, 100,  91,  90,  90,  90,  90,  90,  90]  ;
x= [ECG ECG] ; % Tomo 2 períodos de ECG
fs = 100 ;  dt = 1/fs ;  % Debo conocer fs para generar el vector de tiempo
t =(0: size(x,2)-1 ) *dt ;
x= x + 30*rand(size(t)); % Le sumo ruido
% Calculamos coeficientes STF y reconstruimos la señal
N=20 ;
a0 = STF_a0(t, x);
an = STF_an(N, t, x);
bn = STF_bn(N, t, x) ;
T0= t(end)
serie = ISTF( N, t, a0, an, bn, T0) ;
figure; plot(t,x, 'linewidth',3) ;hold on
plot(t,serie, 'linewidth',3, 'color', 'r');
grid on ;axis tight
legend('Señal Original','Señal Reconstruida')
```



plot(t,ft,..)

Toolbox ASYS

¿Que frecuencia le corresponde a N=20 ?



Serie Trigonométrica de Fourier (STF)

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.\cos(n.w_0.t) + b_n.\text{seno}(n.w_0.t)]$$

w_0

$n.w_0$

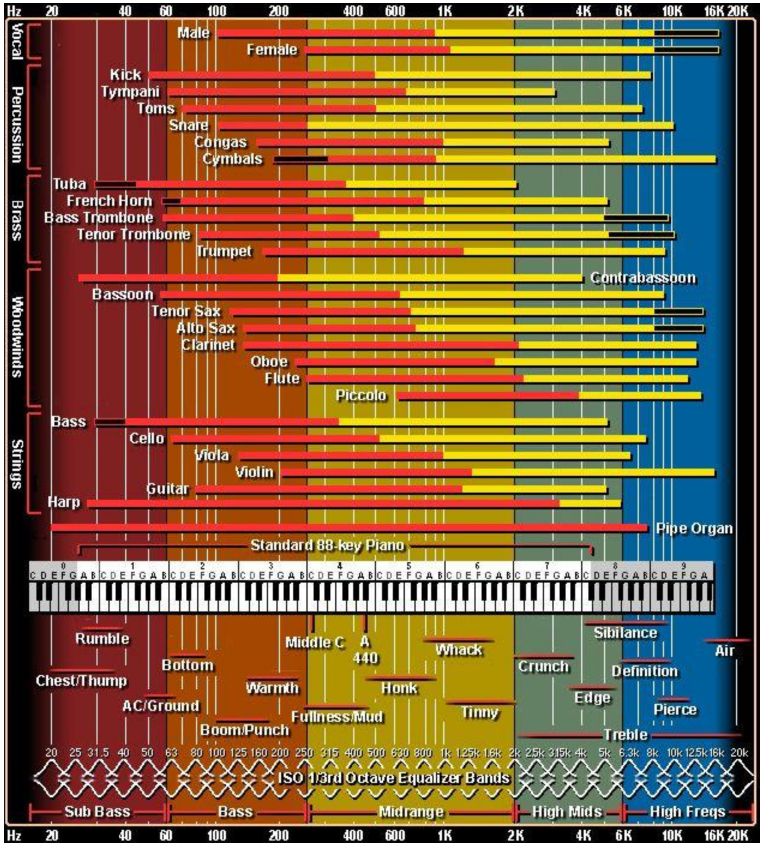
$n = 1 \rightarrow w_0$

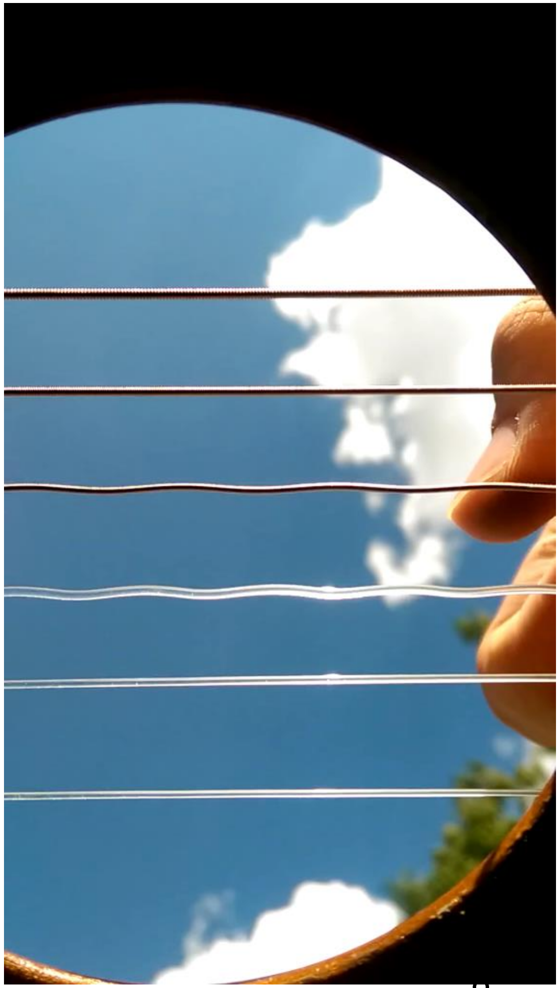
$n = 2 \rightarrow\ 2 * w_0$

$n = 3 \rightarrow\ 3 * w_0$

$n =$….

Guitarra acústica
Fundamental: 82-988 Hz
Armónicos: 1-15 KHz



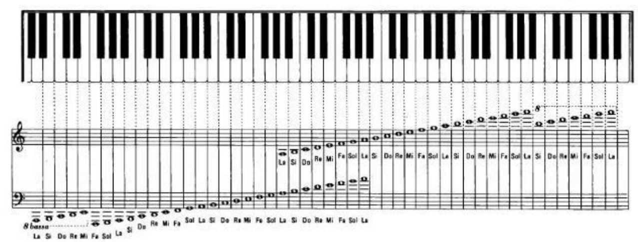


https://topaudioprofesional.blogspot.com/2012/09/rango-de-frecuencias-de-los.html

Actividad Práctica

Generador de Melodías

```
 fm=8120;   % fm= Fsampling, Frecuencia de Muestreo
%% Elaboración de las notas musicales
    r=2^(1/12);
    fr=440; % frecuencia de referencia LA
    fr= r^-9*fr; % Tomamos la frecuencia del do para definir las octavas de mejor manera
    c= r^0*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Do
    cs= r^1*fr*[1/4 1/2 1 2 4];% Do sostenido
    d= r^2*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Re
    ds= r^3*fr*[1/4 1/2 1 2 4];% Re sostenido
    e= r^4*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Mi
    f= r^5*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Fa
    fs= r^6*fr*[1/4 1/2 1 2 4];% Fa sostenido
    g= r^7*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Sol
    gs= r^8*fr*[1/4 1/2 1 2 4];% Sol sostenido
    a= r^9*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % La
    as=r^10*fr*[1/4 1/2 1 2 4];% La sostenido
    b= r^11*fr*[1/4 1/2 1 2 4]; % Si
    s=0;  %El Silencio, su frecuencia es cero
    n=.5; % Definimos la duración en segundos de la negra tomada como 1 tiempo
%% Hacemos un vector N = [ nota , duración ]
    NOTAS=[g(3),e(3),s,e(3),f(3),g(3),e(4),e(4),c(4)]; % sol(3),mi(3),silencio,mi(3),fa(3),...
    DURACION=[n/2,n/2,3*n/2,n/2,n/2,n/2,n,n,2*n];
    N=[NOTAS',DURACION'];       y=[];
%% Armamos la señal
    for i=1:length(N)
      fr=N(i,1);    tf=N(i,2);
      x=(0:(1/fm):tf);
      y=[y  sin(fr*2*pi.*x)]; % Armamos el vector de notas
    end
sound(y) % % Reproducimos el sonido, en este comando esta toda la magia
audiowrite( 'Melodia1.wav', y, fm); % Guardamos en archivo
```



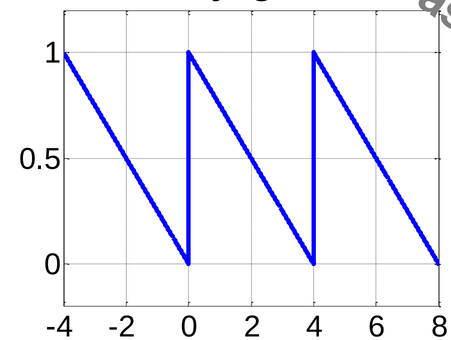
Anexo

Generador de Melodías

Repasar en casa

Ej 1)

Calcular la Serie de Fourier para cada una de las siguientes funciones y graficar el espectro de módulo si el período es T0=4



Resuelvo con STF

$$f(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n.\cos(n.w_0.t)+b_n.\mathrm{seno}(n.w_0.t)]$$

$$w_0=\frac{2.\pi}{T_0}=\frac{2.\pi}{T_0}=\frac{\pi}{2} \quad ; T_0=4$$

Si a la señal le resto una constante, resulta una señal Impar $\longrightarrow a_n=0 \quad para\, n\neq 0$ (excepto en a_0 que es el valor de continua)

$$\int_{T_0}\underbrace{g_{impar}(t)}_{impar}.\underbrace{m_{par}(.t)}_{par}.dt=0$$ periódicas en T_0

$$\boldsymbol{f(t)=f(-t)\quad \rightarrow par}$$
$$\boldsymbol{f(t)=-f(-t)\quad \rightarrow impar}$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t).\cos(n.w_0.t).dt=0$$, Excepto en $n=0$

$$a_0=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t).dt \quad ; \quad \frac{a_0}{2}:\ Valor\ medio\ de\ f(t)$$

Ej 1) cont.

Repasar en casa

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 \left(\frac{-t}{4}+1\right).1.dt = \frac{1}{2}.\left[\frac{-t^2}{8}+t\right]\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2}.\left[\frac{-16}{8}+4-0-0\right] = 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t).\operatorname{sen}(n.w_0.t).dt = \frac{2}{T_0}\int_0^4 \left(\frac{-t}{4}+1\right).\operatorname{sen}(n.w_0.t).dt$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^4 \left(\frac{-t}{4}\right).\operatorname{sen}(n.w_0.t).dt + \int_0^4 \operatorname{sen}(n.w_0.t).dt\right]$$

Usamos tablas de integrales

La segunda Integral da cero, ya que integro un seno en 1 período

$$b_n = -\frac{1}{8}\left[\int_0^4 (t).\operatorname{sen}(n.w_0.t).dt\right] = -\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}(n.w_0.t)}{(n.w_0)^2} - \frac{t.\cos(n.w_0.t)}{n.w_0}\right]_0^4$$

$$b_n = -\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}(n.w_0.t)}{(n.w_0)^2} - \frac{t.\cos(n.w_0.t)}{n.w_0}\right]_0^4 = -\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(n.\frac{\pi}{2}.t\right)}{(n.\frac{\pi}{2})^2} - \frac{t.\cos\left(n.\frac{\pi}{2}.t\right)}{n.\frac{\pi}{2}}\right]_0^4$$

Ej 1) cont.

Repasar en casa

$$b_n = -\frac{1}{8}\left[\frac{0}{\left(n.\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{4.\cos(n.2.\pi)}{n.\frac{\pi}{2}} - \frac{0}{\left(n.\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{0x1}{n.\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{-1}{4.n.\pi}[0+4+0+0]$$

$$\boxed{b_n = \frac{-1}{n.\pi}}$$

$$\cos(n.2.\pi) = 1$$

Ej 2)

Dada la siguiente función: $\boldsymbol{f(t) = 2.cos(5.t) - sen(2.t)}$

Hallar la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), sin utilizar la fórmula integral.

Resolución:

$w_{01} = 5.rad/seg \quad ; \quad w_{02} = 2.rad/seg$

$\longrightarrow$ MCD(Máximo Común Divisor) Se deduce: $w_0 = 1.rad/seg$

Comparo la función dada con S.T.F:

$$f(t) = 2.cos(5.t) - sen(2.t) \equiv$$

$$f(t) \equiv \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.cos(n.w_0.t) + b_n.seno(n.w_0.t)]$$

$$f(t) \equiv 0 + \sum_{n=5}^{5}[a_n.cos(n.w_0.t)] + \sum_{n=2}^{2}[b_n.seno(n.w_0.t)]$$

Comparo las ecuaciones y obtengo:

$$f(t) = a_5.cos(5.t) + b_2.seno(2.t) = 2.cos(5.t) - 1.seno(2.t)$$

$$\boldsymbol{a_5 = 2 \quad ; \quad b_2 = -1 \quad ; \quad w_0 = 1.rad/seg}$$

Ej 3)

$f(t) = cos(2.\pi.1000.t) - 3.cos(2.\pi.3000.t)$

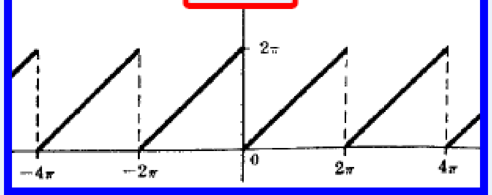
Hallar el módulo de su Espectro

Ayudas de Consignas

Consigna de la clase #A (30 minutos)

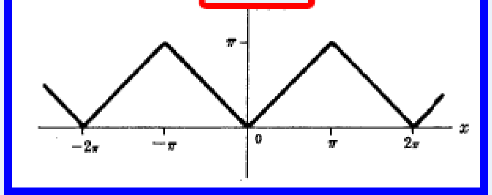
Utilizar ***Matlab*** para ***sintetizar las siguientes expresiones*** en Series de Fourier, identificando los coeficientes a_n y b_n. Efectuar el gráfico de su ***Espectro de Frecuencias*** ($N=10$ coeficientes), con el ***eje de abscisas en Hz***. Verificar ***analíticamente*** los desarrollos en serie, partiendo de sus definiciones correspondientes.

$x_1(t)$

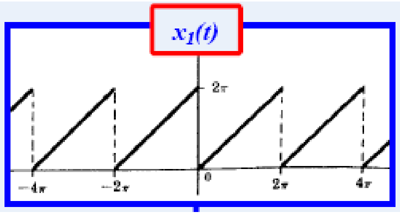


$$x_1(t) = \pi - 2\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\right)$$

$x_2(t)$



$$x_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots\right)$$



Ayudas -

Señal 1: período $T_0 = 2.\pi$, Amplitud $2.\pi$

$$x_1(t) = \pi - 2.\left(\frac{seno\ x}{1} + \frac{seno\ 2x}{2} + \frac{seno\ 3x}{3} + \cdots..\right)$$

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\cancel{a_n.\cos(n.w_0.t)} + b_n.\text{seno}(n.w_0.t)]$$

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + b_1.\text{seno}(1.w_0.t) + b_2.\text{seno}(2.w_0.t) + b_3.\text{seno}(3.w_0.t) + \cdots.$$

$$x_1(t) = \pi - 2.\frac{seno\ x}{1} \qquad - 2.\frac{seno\ 2x}{2} - \qquad -2.\frac{seno\ 3x}{3} \qquad - 2 ....$$

a) Sin calcular la integral, deducir los coeficientes de la Serie de Fourier de las siguientes señales

Si resto valor continuo a la función se vuelve Impar, entonces $a_n = \ldots$

$b_n = \cdots..$; $a_0 = \cdots.$

En clases

$$a_n = 0 \quad ; n \neq 0$$

$$b_n = \frac{-2}{n} \quad ; \quad a_0 = 2.\pi$$

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

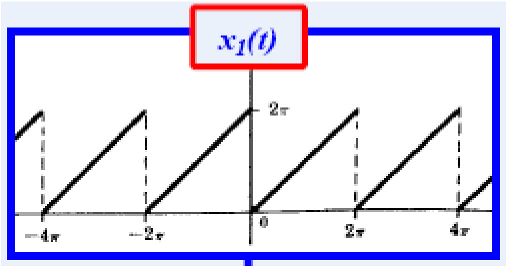
Ayudas b) Mediante Integral (S.T.F.)

Resolver Integrales, Escanear, subir analítico y Matlab

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.\cos(n.w_0.t) + b_n.\text{seno}(n.w_0.t)]$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} \underbrace{f(t)}.\underbrace{\cos(n.w_0.t)}_{par}.dt \ ; \qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} \underbrace{f(t)}.\underbrace{\text{sen}(n.w_0.t)}_{impar}.dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t).dt \quad ; \quad \frac{a_0}{2}: \ Valor\ medio\ de\ f(t)$$



$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t).dt =$ completar

$b_n =$ completar

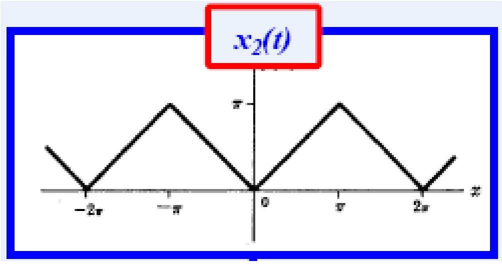
Resolver Integrales en forma Analítica

Rta: $b_n = \frac{-2}{n}$; $a_0 = 2.\pi$

Ayudas

<u>Señal 2:</u> Triangular, período $T_0 = 2.\pi$, Amplitud π

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots..\right)$$



Resolver

a) Sin calcular la integral

Resultado analítico:

Función Par, entonces $b_n = 0$

$a_n = \frac{2}{\pi . n^2}[(-1)^n - 1]$; $a_0 = \pi$

$(-1)^n - 1$

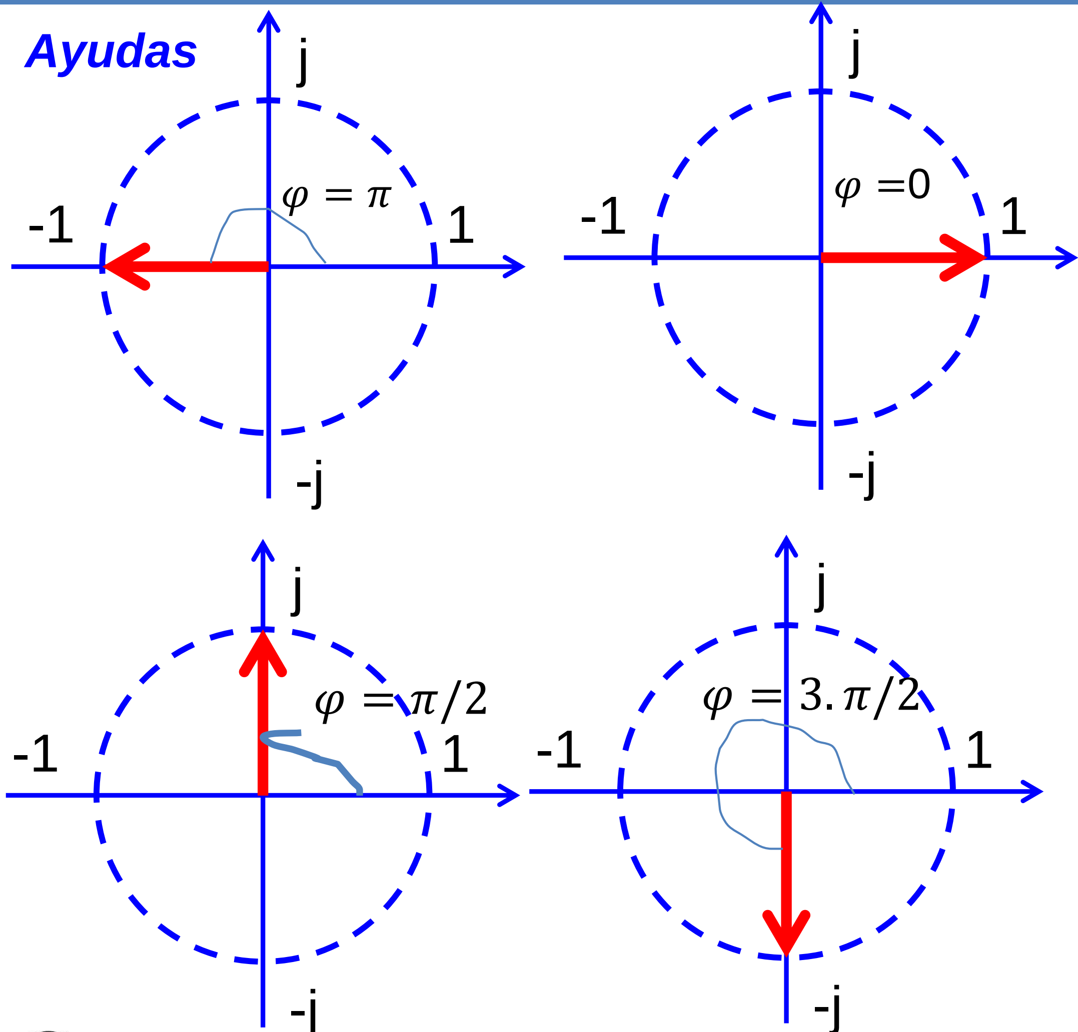
para n impar da -2

Para n par da0

n	$(-1)^n - 1$	$a_n = \frac{2}{\pi . n^2}[(-1)^n - 1]$
0	0	$\frac{2}{\pi . n^2}[0] = 0$
1	-2	$\frac{2}{\pi . n^2}(-2)$
2	0	
3	-2	

Actividad Práctica
Ayudas de Consigna

Ayudas



Euler

$$e^{j.\varphi} = \cos(\varphi) + j.sen(\varphi)$$

Si $\varphi = n.\pi$

$$e^{j.n.\pi} = \cos(n.\pi) + j.sen(n.\pi)$$

$$e^{j.n.\pi} = \cos(n.\pi) = \cdots$$

Si $n = 1$; $e^{j.\pi} = \cos(\pi) = -1$

Si $n = 2$; $e^{j.2.\pi} = \cos(2.\pi) = 1$

$$e^{j.\varphi} = \cos(\varphi) + j.sen(\varphi)$$

Si $\varphi = \pi/2$

$$e^{j.\pi/2} = \cos(\pi/2) + j.sen(\pi/2) = j$$

Si $\varphi = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$

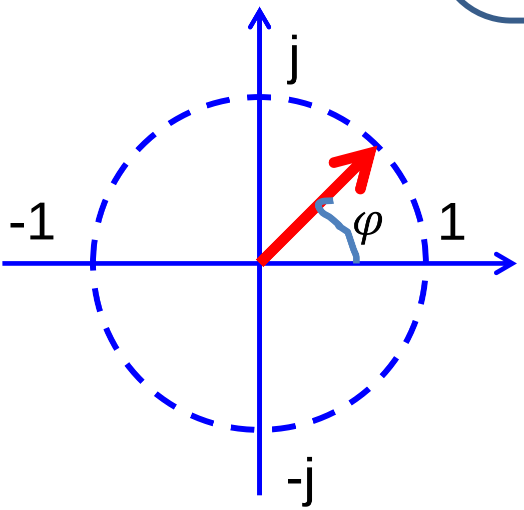
$e^{j.\pi} = -1 + 0$

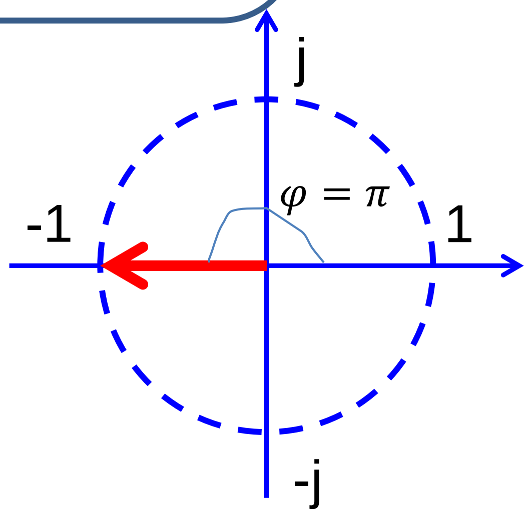
Si $\varphi = 3.\frac{\pi}{2}$

$$e^{j.3.\pi/2} = \cos(3.\pi/2) + j.sen(3.\pi/2) = -j$$

Ayudas

n	$\mathbf{cos(n.\pi)}$	$\mathbf{(-1)^n}$	$cos(n.2.\pi)$	$cos(n.\pi/2)$	
0	1	1	1	1	
1	-1	-1	1	0	
2	1	1	1	-1	
3	-1	-1	1	0	
4	1	1	1	1	





Euler

$$e^{j.\varphi} = \cos(\varphi) + j.sen(\varphi)$$

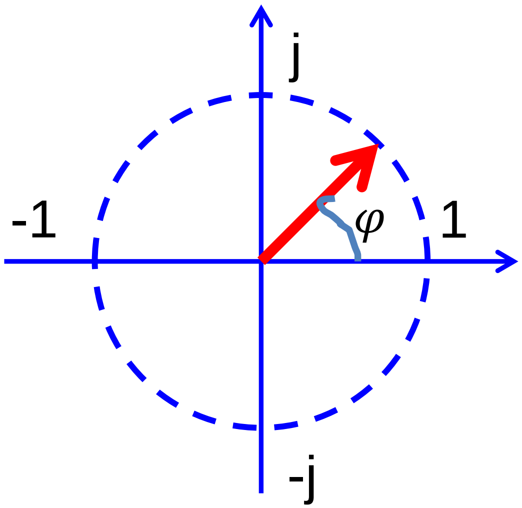
Si $\varphi = n.\pi$

$$e^{j.n.\pi} = \cos(n.\pi) + j.sen(n.\pi)$$

$$e^{j.n.\pi} = \cos(n.\pi) = \cdots$$

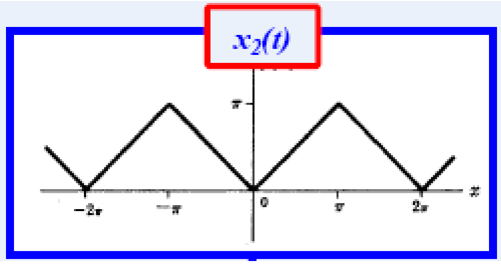
Ayudas

n	$sen(n.\pi)$		$sen(n.2.\pi)$	$sen(n.\pi/2)$	$(-1)^n$
0	0		0		
1	0		0		
2	0		0		
3	0		0		
4	0		0		



Ayudas

<u>Señal 2:</u> b) **Mediante integral**



Resultado analítico:
Función Par o Impar ..., entonces....

$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t).\cos(n.w_0.t)\,.dt$; $b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t).\mathrm{sen}(n.w_0.t)\,.dt$

Completar….Resolver integrales

Se obtiene:

$a_n = \frac{2}{T_0.(n.w_0)^2}[-2 + 2.\boldsymbol{\cos(n.w_0.\pi)}]$; $w_0 = \cdots..completar = 1$

$\cos(n.\pi) = \cdots.completar$ en clases

Respuesta: $a_n = \frac{2}{\pi.n^2}[(-1)^n - 1]$; $a_0 = \pi$

Análisis de Señales y Sistemas R2041 – R2072

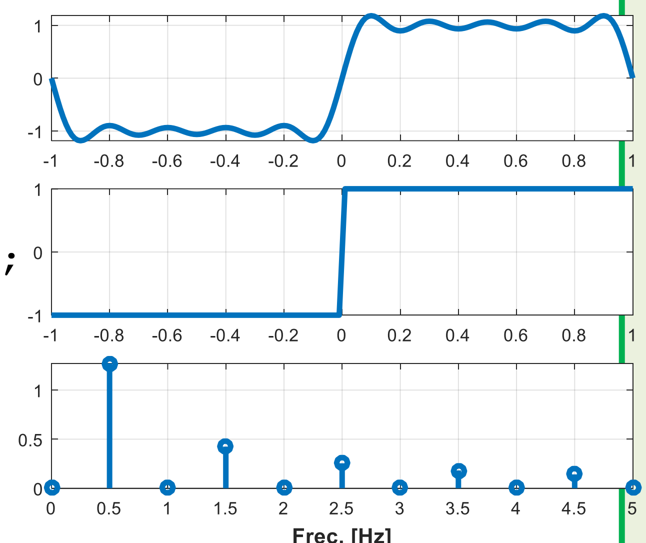
Actividad Práctica EN MATLAB...

```
Ts=0.01 ;  T0=2; w0 = 2*pi/T0 ;
t=-T0/2: Ts: T0/2 ;
% Serie Trigonométrica de Fourier para N Coeficientes
N=10; a0=0;  x=a0/2 ;
for n=1:N
   x = x + (2/pi)*(1-(-1)^n)/n  *sin(n*w0*t)  ;
end
% Graficamos
subplot(311)
plot(t,x, 'linewidth',3); grid on ;axis tight
x_analitica = -escalon(-t) + escalon(t) ;
subplot(312)
plot(t,x_analitica, 'linewidth',3); grid on ;
n=1:N ;
bn =  (2/pi)*(1-(-1).^n)./n ;
n= [0  n] ;   bn =[0  bn] ;
f=1/T0 ;
subplot(313)
stem(n*f, bn, 'linewidth',3); grid on ; axis tight
xlabel('Frec. [Hz]')
```

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.\cos(n.w_0.t) + b_n.\mathrm{seno}(n.w_0.t)]$$

Ejemplo Función Distinta a la Tarea

Cuadrada Sin Toolbox

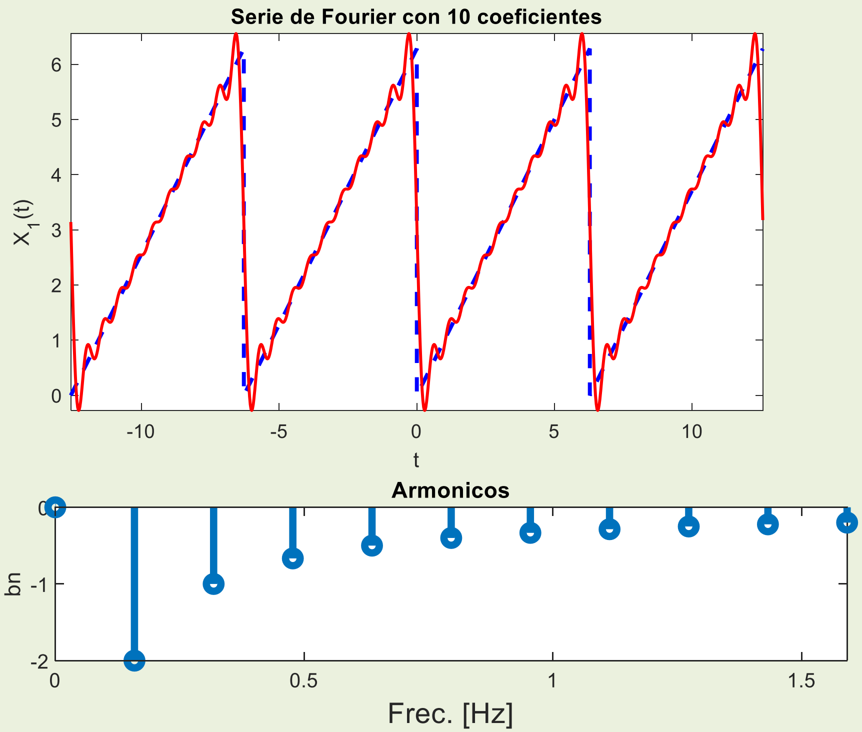


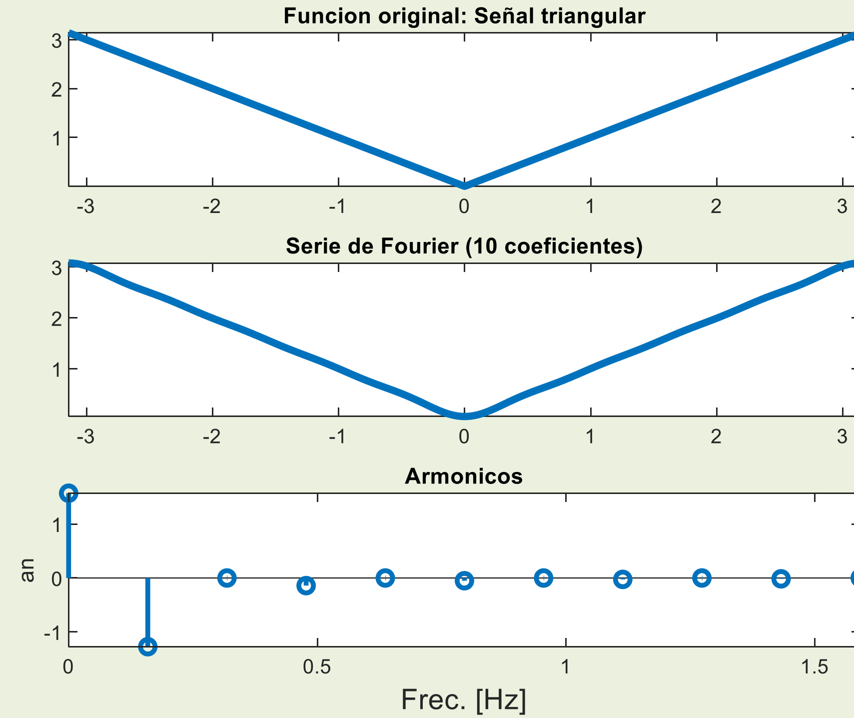
Completar etiquetas

```
%   Completar….
…. .
```

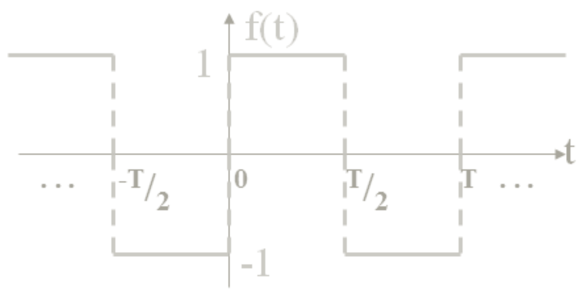
Completar Tarea, ambas funciones
Sin toolbox
Con toolbox
Subir Analítico y Matlab Completo

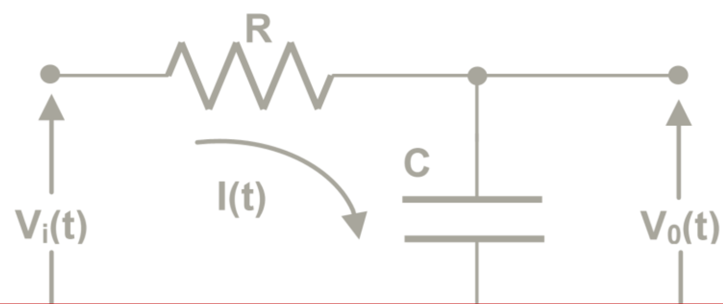
Resultados de la Tarea





Actividad Práctica: Resolución de Consignas

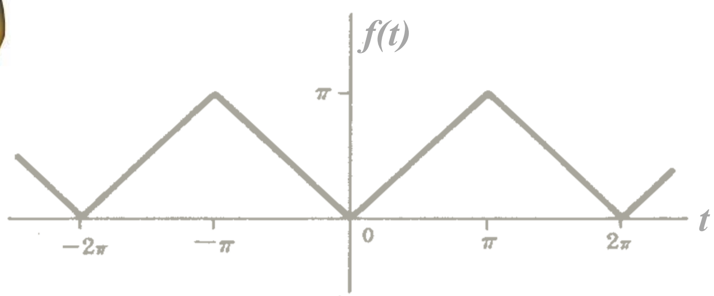


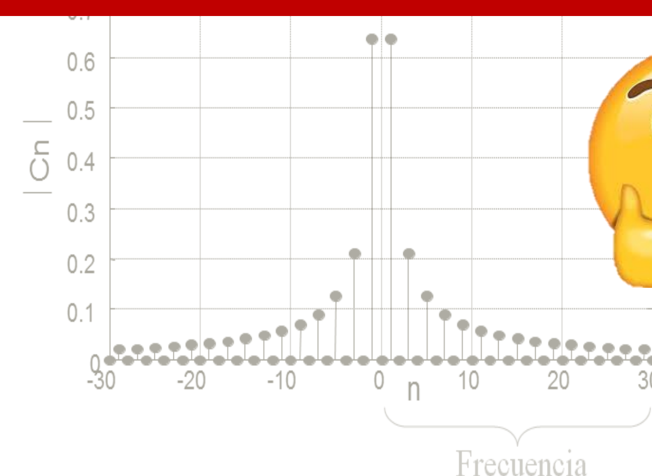


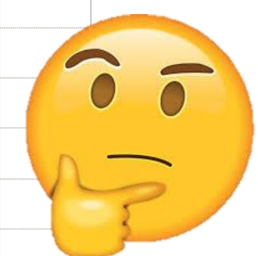
Actividad Práctica

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual







UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES