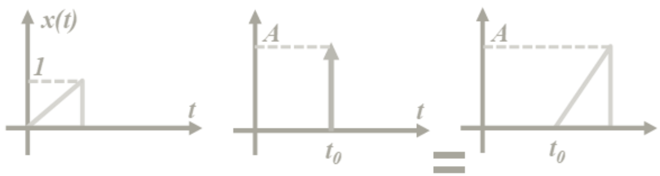
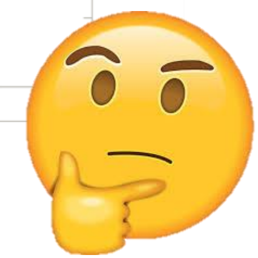


Unidad 3: Convolución y Correlación

•Correlación•



UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Introducción

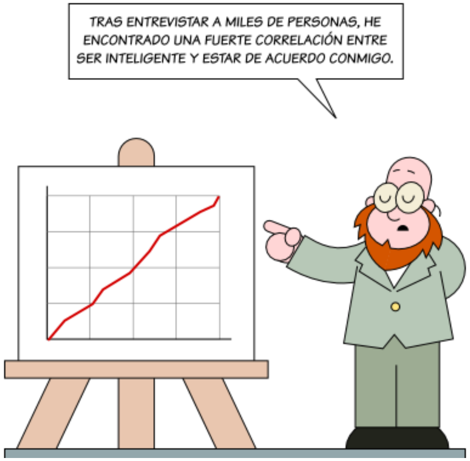
La ***naturaleza*** de las señales es ***diversa*** y su estudio require ***herramientas específicas***. Una de ellas, de vital relevancia en la técnicas de procesamiento, implica el análisis de la ***existencia relaciones entre ellas***, de modo de obtener ***información vinculada a su interacción***:

¿Puede haber un fenómeno que las relaciona? (por ej. un sistema físico)

¿Una de las señales puede ser una versión modificada de la otra?

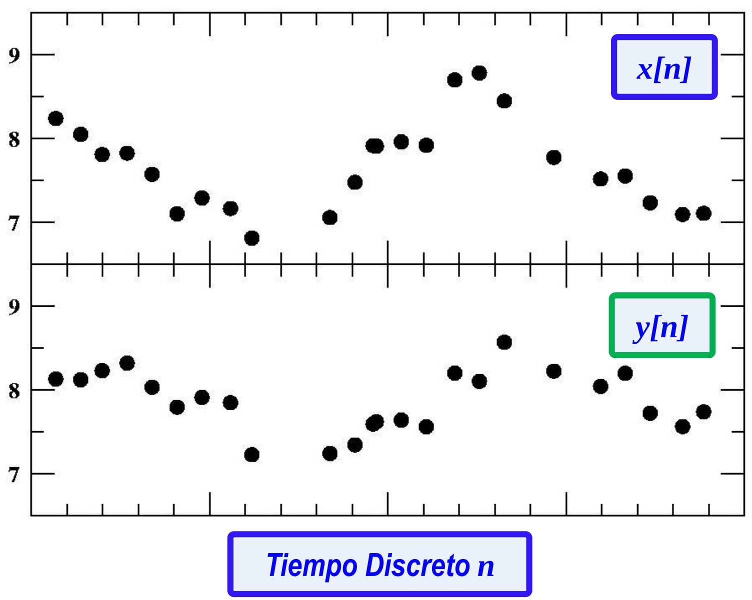
¿Se puede predecir una de ellas a partir de la otra?

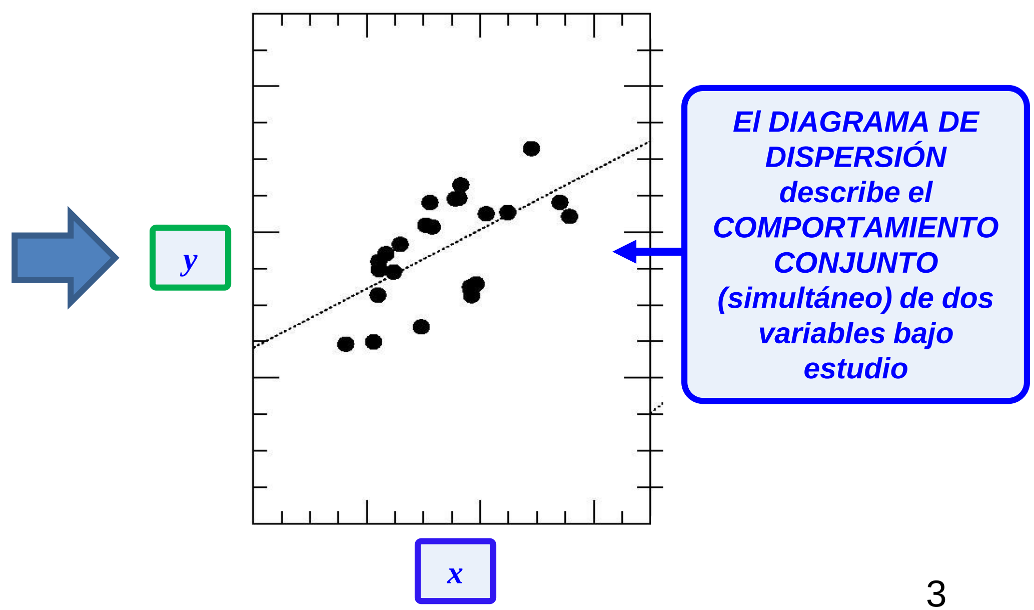
Dichos interrogantes pueden abordarse a partir de un concepto denominado CORRELACIÓN



Correlación

La ***CORRELACIÓN (tendencia) entre dos variables*** (series temporales $x[n]$ e $y[n]$) permite determinar cuantitativamente ***si existe dependencia entre ellas***, ***si ambas dependen de algún fenómeno común*** o si son ***independientes entre si***. Si se efectúa un gráfico donde ***cada instante temporal*** n_0 constituye un ***par ordenado*** $\{x[n_0], y[n_0]\}$, se conforma un ***"Diagrama de Dispersión"***:



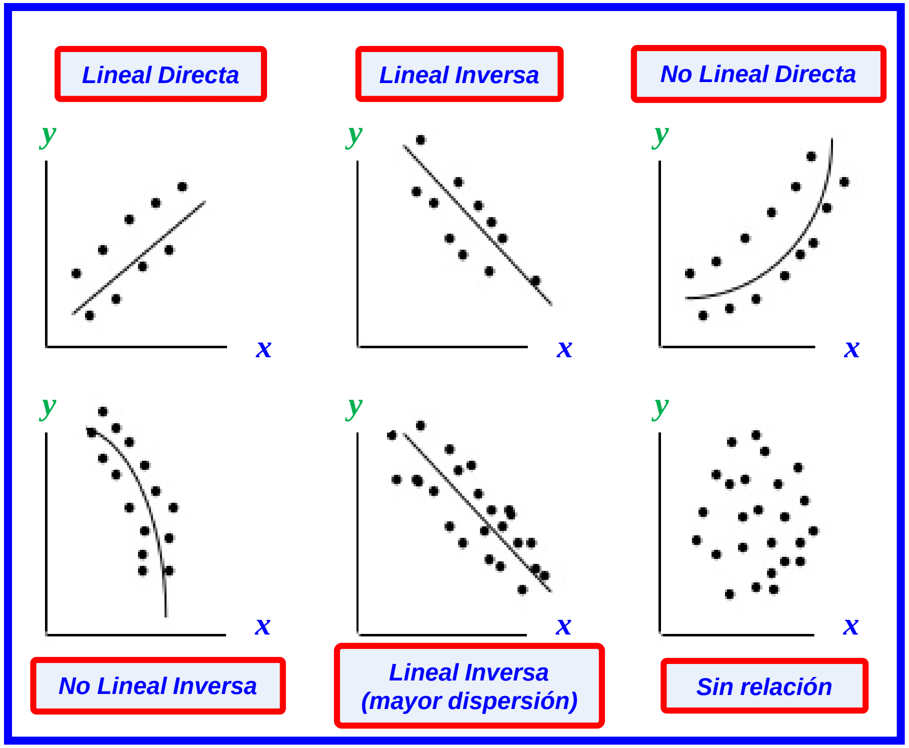


Correlación

Si el diagrama de dispersión tiende a formar una ***linea recta***, ambas variables se encuentran ***correlacionadas en virtud de la existencia de una proporcionalidad simple***: $y[n] \sim kx[n]$.

Si los puntos se situan en una figura ***pseudoelíptica*** y centrados en una linea de pendiente positiva, hay presencia de un ***desplazamiento temporal*** $y[n] \sim kx[n-k]$.

Finalmente, la ***relación*** entre las variables puede estar definida a partir de ***funciones no lineales***



La correlación se define (en general) en términos de LINEALIDAD

Coeficiente de Correlación

¿Qué se require para cuantificar la correlación?

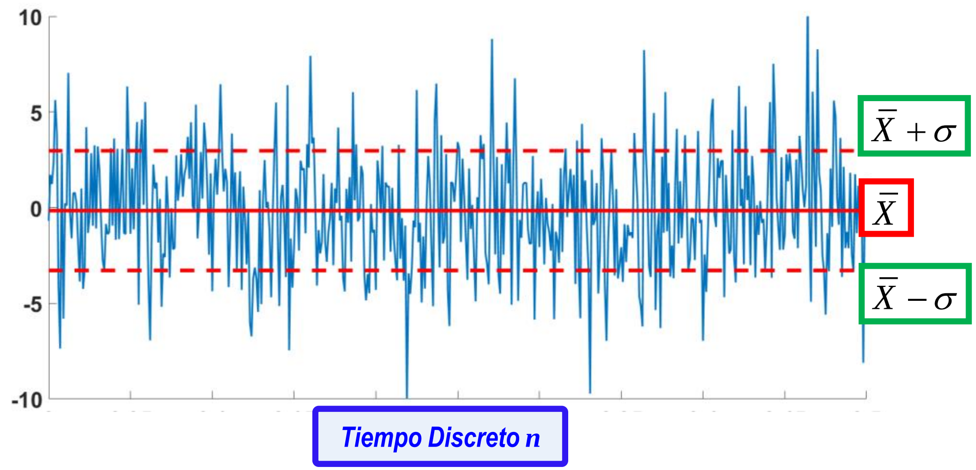
Las ***medidas estadísticas de TENDENCIA CENTRAL*** (valor medio) ***y DISPERSIÓN*** (desviación estándar) posibilitan describir ***en un solo parámetro*** el comportamiento de un conjunto de datos bajo estudio (serie temporal):

VALOR MEDIO (Esperanza Matemática): Constituye el promedio del conjunto de datos evaluado (X_1,X_2,…X_N)

$$E(X) = \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR: Determina cuan "dispersos" se encuentran los valores del conjunto de datos respecto de su valor medio

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)^2}{N}}$$



A partir de la obtención de las medidas estadísticas correspondientes a las series temporales x e y (tanto de manera independiente como conjunta) es factible la definición de un "COEFICIENTE DE CORRELACIÓN"

Coeficiente de Correlación

El Coeficiente de Correlación mide el grado en que ***dos variables tienden a cambiar al mismo tiempo***, tanto en intensidad como en dirección. Particularmente, el ***Coeficiente de Correlación de Pearson*** (r) evalúa la ***RELACIÓN LINEAL*** entre las variables analizadas (no detecta otro tipo):

$$r = \frac{\mathrm{cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2}}$$

$$\mathrm{cov}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(y_i - \bar{Y}\right)}{N}$$

Las desviaciones estándar σ_X y σ_Y actúan a modo de "normalización" del coeficiente de correlación (el mismo es independiente de las unidades)

La COVARIANZA entre x e y indica el GRADO DE VARIACIÓN CONJUNTA de las variables respecto de sus valores medios (DEPENDENCIA en la relación lineal)

donde puede observarse que ***el signo de r*** (determinado por el signo $\mathbf{cov}_{XY}$) indica si la ***presencia de proporcionalidad*** entre x e y resulta ***directa*** o ***inversa***

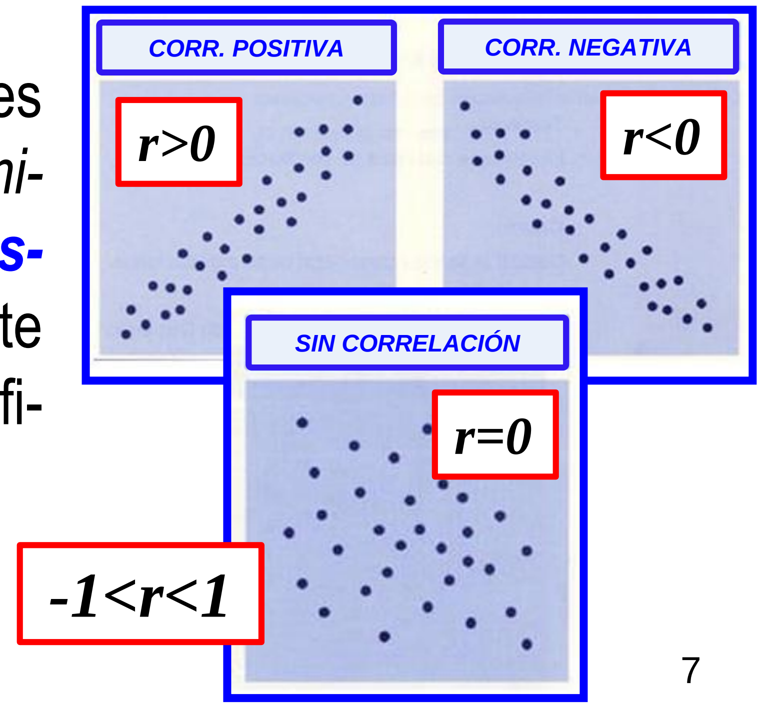
NOTA: Adicionalmente al valor obtenido para el coeficiente r, es necesario calcular su "SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA" (p-valor) para ASEGURAR LA EXISTENCIA DICHO GRADO DE CORRELACIÓN (Ej. $p<0,05$)

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Coeficiente de Correlación

Una correlación ***positiva*** implica una ***tendencia lineal*** de las dos variables a moverse ***en la misma dirección, al mismo tiempo***. Si es ***negativa***, las ***direcciones son opuestas*** (cuando una aumenta la otra disminuye). En caso de no existir relación lineal alguna entre ambas (***nula***), se las denomina ***independientes.***

En términos matemáticos, ***la correlación*** es una ***"Medida de Similaridad"*** ($|S| \rightarrow 1$, *similar*). En cambio, las medidas basadas en ***Distancias*** (como el módulo del error existente entre ambas variables, por ejemplo) cuantifican ***disimilaridad*** o ***divergencia***.



NÓTESE que el "COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN", definido como r^2, da cuenta del porcentaje de la VARIABILIDAD de "y" explicada por "x"

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Determinar el valor del ***Coeficiente de Correlación lineal*** correspondiente a las siguientes series temporales (***N=10***):

$$x[n]=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

$$y[n]=\{1,6,8,10,12,10,12,13,10,22\}$$

Considerando entonces la ***expresiones necesarias*** para el cálculo:

$$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i=11 \qquad \sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{N}}=5{,}745$$

$$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i=10{,}4 \qquad \sigma_Y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)^2}{N}}=5{,}103$$

Cálculo de valores medios y desvíaciones estándar

$$r=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{X}\right)\left(y_i-\bar{Y}\right)}{N}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{246/10}{29{,}31}=0{,}839$$

El grado de SIMILARIDAD depende de la COVARIANZA!!!

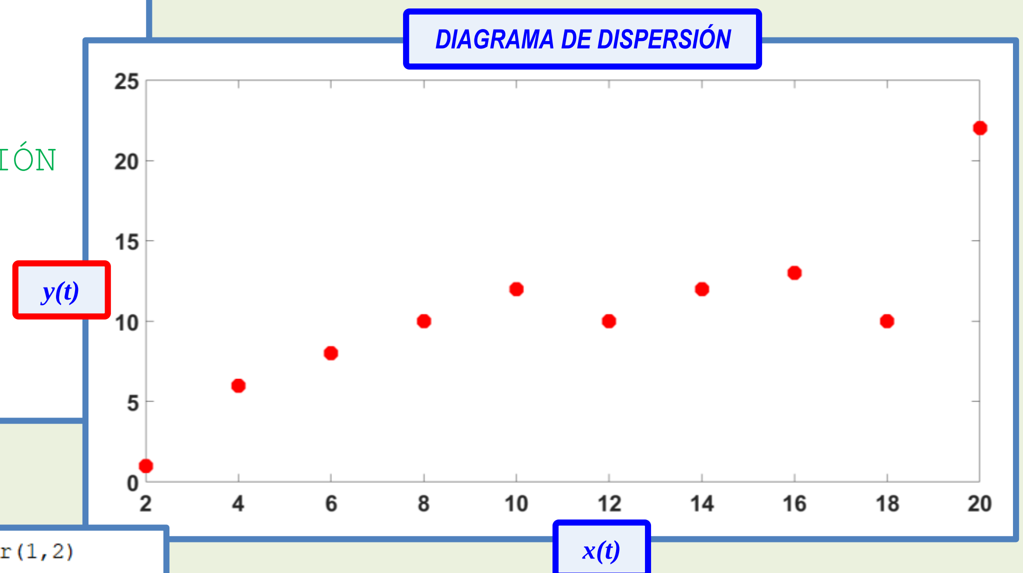
$$\boxed{r=0{,}839}$$

$$\boxed{r^2=0{,}704}$$

El 70% de la variabilidad de y es explicada por x

Aplicación en MatLab

```
%Series temporales a correlacionar
x=[2,4,6,8,10,12,14,16,18,20];
y=[1,6,8,10,12,10,12,13,10,22];
%Diagrama de dispersión
plot(x,y,'o');
%Cálculo del COEFICIENTE DE CORRELACIÓN
[r,p]=corrcoef(x,y);
%Valor de r
r(1,2)
%Significancia estadística
p(1,2)
```



En MatLab/Octave puede determinarse el COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON a partir de la función XCORR. La misma, además, proporciona el valor de significancia estadística. Asimismo pueden utilizarse las funciones MEAN (para el cálculo del valor medio) y STD para el cálculo de la desviación estándar.

```
>> r(1,2)

ans =

    0.8392

>> p(1,2)

ans =

    0.0024

fx >>
```

Función de Correlación Cruzada

Similitud entre señales: La “Función de Correlación Cruzada”

En virtud de lo expuesto, puede definirse la ***Función de Correlación Cruzada (FCC)*** entre dos ***señales temporales*** “x” e “y” (R_{xy}), la cual determina el ***grado de correlación existente*** entre ellas ***en relación a un DESPLAZAMIENTO*** “k o τ”, según sea el ***soporte temporal discreto o continuo*** :

Una covarianza!

$$R_{xy}[k] = E\left[x[n]y[n+k]\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]y[n+k]$$

FCC en tiempo discreto (expresión GENERAL)

El análisis de tendencia (correlación) se efectúa a partir del PROMEDIO del PRODUCTO entre $x(t)$ ($x[n]$) y LA VERSIÓN DESPLAZADA de $y(t)$ ($y[n]$) un instante “τ” (o “k”)
(Es una práctica común omitir normalizar por el desvío estándar y sustraer la media)

$$R_{xy}(\tau) = E\left[x(t)y(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$$

FCC en tiempo continuo (expresión GENERAL)

Se evalúa el promedio del rango temporal $-T$ a T, con $T\to\infty$ (lo mismo en discreta)

Unidad 3: Convolución y Correlación

Función de Correlación Cruzada

En el caso en que ***x*** e ***y*** resulten ***periódicas***, ambas de periódo T_0 (N_0), la evaluación se puede llevar a cabo ***en dicho intervalo temporal***:

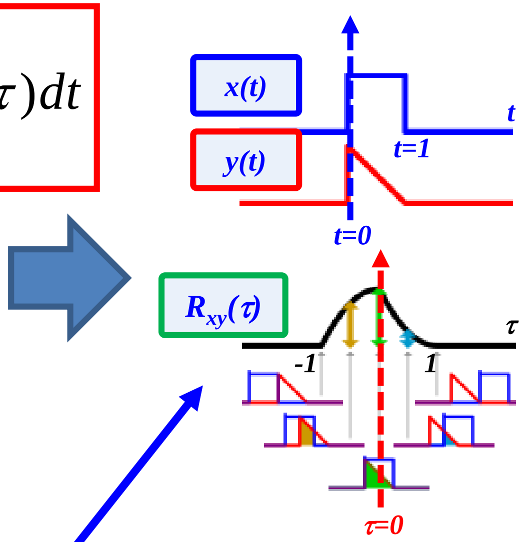
$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]y[n+k]$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

y si las señales ***presentan energía finita***:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+k]$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$



El máximo de la FCC determina el valor de "τ" (o "k") DONDE LAS SEÑALES RESULTAN MAYORMENTE CORRELACIONADAS (SIMILARES) ENTRE SI

Es una operación muy similar a la CONVOLUCIÓN…

Función de Correlación Cruzada

Efectivamente, ***la FCC puede expresarse*** ***<u>en virtud de operación de Convolución</u>*** (resultado que se demuestra efectuando el cambio de variables $\lambda = t + \tau$) de modo que:

$$\boxed{\begin{cases} R_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \\ R_{yx}(\tau) = x(\tau) * y(-\tau) \end{cases} \rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)}$$

La determinación de la FCC implica llevar a cabo una CONVOLUCIÓN ENTRE AMBAS SEÑALES, REFLEJANDO PREVIAMENTE una de ellas respecto al eje de ordenadas (LO MISMO SUCEDE EN SOPORTE DISCRETO)

Observese, además, que $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$, de modo que R_{xy} es la versión reflejada (respecto al eje de ordenadas) de R_{yx}. En el caso de las señales de periódicas (de igual período T_0), se obtiene una ***convolución periódica*** entre x e y:

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \frac{x(-\tau) * y(\tau)}{T_0}}$$

La FCC es una CONVOLUCIÓN!

Ejemplo: Obtener la ***correlación cruzada*** $R_{xy}[k]$ entre las siguientes señales discretas ¿En qué posición temporal k ambas señales presentan mayor grado de correlación?

$$x[n]=\{\underline{1},2,3\} \qquad y[n]=\{\underline{4},5,6\}$$

El cálculo de la ***FCC*** consiste en efectuar la ***correlación*** de $x[n]$ con ***versiones desplazadas en k*** de $y[n]$:

$$R_{xy}[k]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n+k]$$

En primer lugar, se observa que ***el producto*** $x[n]y[n+k]$ sólo será ***distinto de cero*** (para todo n) en la condición $-3<k<3$. Para ***cada valor de k dentro de dicho rango***, se deberá efectuar la ***sumatoria del producto*** $x[n]h[n+k]$.

Ejemplo Práctico

Operando entonces en el intervalo *-3<k<3*, se obtiene:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n+k]$$

$$R_{xy}[-2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-2]$$

$$R_{xy}[-1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-1]$$

$$R_{xy}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]$$

k	$R_{XX}[k]$
<-2	$R_{xy}[k<-2]=0.0=0$
-2	$R_{xy}[-2]=3.4=12$
-1	$R_{xy}[-1]=2.4+3.5=23$
0	$R_{xy}[0]=1.4+2.5+3.6=32$
1	$R_{xy}[1]=1.5+2.6=8$
2	$R_{xy}[2]=1.6=6$
>2	$R_{xy}[k>2]=0.0=0$

$$R_{xy}[k] = \{12, 23, \underline{32}, 17, 6\}$$

Se obtiene el MISMO RESULTADO <u>efectuando la CONVOLUCIÓN</u> entre $x[-k]=\{3,2,\underline{1}\}$ e $y[k]$

El máximo valor de FCC se obtiene para $k=0$ (máxima similaridad)

Ejemplo Práctico

Ejemplo: La señal $x(t)=e^{-2t}u(t)$ sufre un ***desfasaje temporal en*** $T=2s$ al ser aplicada a un sistema ***LTI***. Demostrar que el valor de T puede obtenerse a partir de la ***FCC*** entre $x(t)$ e $y(t)=x(t-2)$

Partiendo entonces de la expresión de la ***FCC*** se obtiene:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t-2+\tau)dt$$

Un primer análisis pone en evidencia que ***el valor máximo de la FCC*** se presentará en $R_{xy}(\tau=2)$, debido a que para dicho corri-miento temporal, ***ambas señales resultarán idénticas***:

$$R_{xy}(2) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t-2+2)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-4t}dt = \frac{1}{4}$$

Ejemplo Práctico

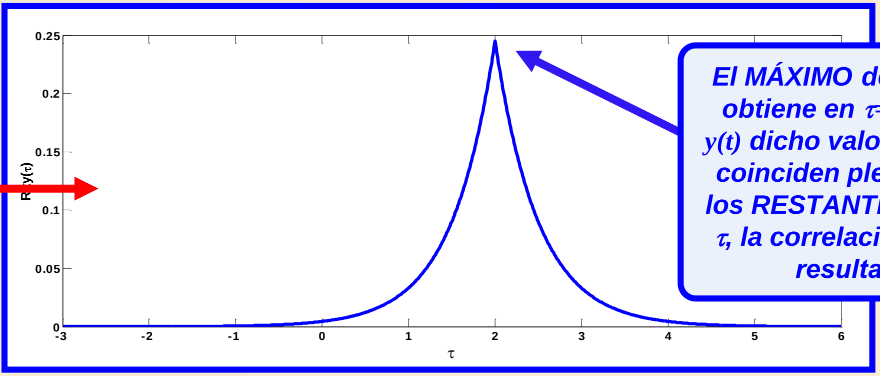
Asmismo, una evaluación de la ***FCC*** en el ***rango completo de τ*** implica:

$$R_{xy}(\tau)=\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = x(-\tau)*y(\tau) = y(\tau)*x(-\tau)$$

$$con \quad \begin{cases} x(-\tau)=e^{2\tau}u(-\tau) \\ y(\tau)=x(\tau-2)=e^{-2(\tau-2)}u(\tau-2) \end{cases}$$

y donde resolviendo la convolución entre $x(-\tau)$ e $y(\tau)$ por el ***método analítico-gráfico,*** se obtiene:

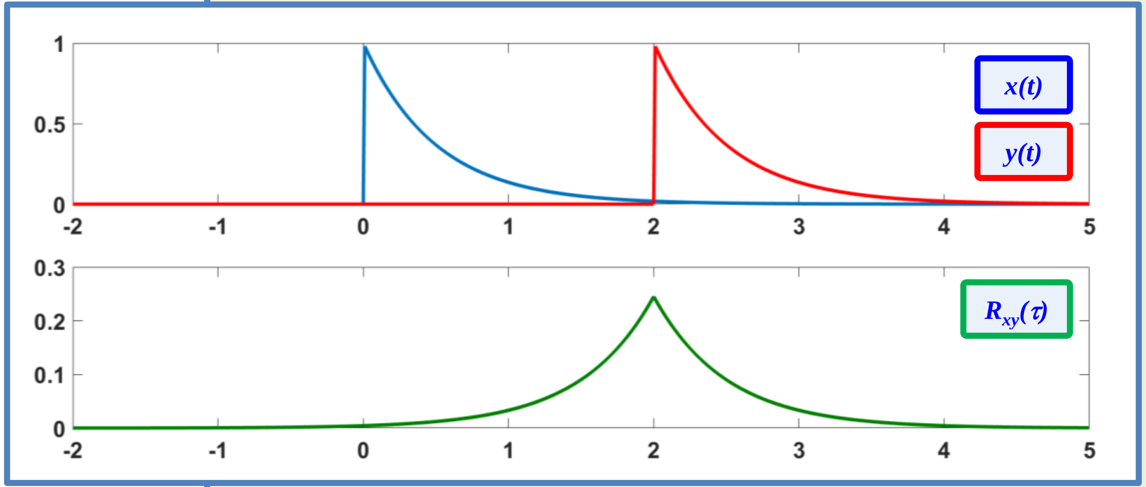
$$\boxed{R_{xy}(\tau)=\begin{cases} \dfrac{e^{-2(-\tau+2)}}{4} & si\ \tau<2 \\ \dfrac{e^{-2(\tau-2)}}{4} & si\ \tau>2 \end{cases}}$$



El MÁXIMO de la FCC (1/4) se obtiene en τ=2 (al desplazar y(t) dicho valor ambas señales coinciden plenamente). Para los RESTANTES VALORES de τ, la correlación (similaridad) resulta menor…

Aplicación en MatLab

```
%Intervalo temporal
Ts=0.01;
t=-10:Ts:10;
%Delay entre señales
T=2;
%Señales desfasadas
x=exp(-2*t).*(t>0);
y=exp(-2*(t-T)).*(t>T);
%CORRELACIÓN CRUZADA Rxy
[Rxy,tau]=xcorr(y,x);
%Visualización
figure;
subplot(211),plot(t,x,t,y);
xlim([-5 5]);
subplot(212),plot(tau*Ts,Rxy*Ts);
xlim([-5 5]);
```



Nótese que en virtud de la definición proporcionada para FCC, los parámetros de la función XCORR deben seguir el orden "y, x" cuando se efectúa el cálculo de R_{xy}

La implementación de la función de correlación cruzada (e incluso la de autocorrelación) puede llevarse a cabo en MatLab/Octave a partir de la función "XCORR". La misma puede utilizarse tanto para él soporte de tiempo discreto como para la SIMULACIÓN en soporte de tiempo continuo. Observar en este caso particular, que la función XCORR devuelve como parámetro la variable de desplazamiento k.

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A (20 minutos)

Se dispone de un sistema para ***medir distancia***, por lo cual ***se emite un pulso ultrasónico*** ***E(t)*** de ***1s*** de duración. Iniciada la emisión, ***el receptor espera la llegada del pulso reflejado por un objeto R(t)***, que ***se contamina*** con interferencia ***r(t)*** durante su recorrido ***e impide su correcto análisis***:

$$E(t) \rightarrow \text{Pulso Emitido}$$

$$R(t) = kE(t - t_0) + r(t) \rightarrow \text{Pulso Recibido}$$

Aplicar en ***MatLab*** la ***función de correlación cruzada FCC*** a las señales medidas (alojadas en el campus virtual, ***T_S=0.001s***), de modo de determinar el ***desfasaje temporal*** (***t_0***) entre ambas (demora en el recorrido de avance y regreso del pulso). Calcular la ***distancia*** al objeto detectado, si la ***velocidad del sonido en el aire*** es de ***344 m/s***

Función de Autocorrelación

¿Correlación sobre una señal temporal única? La "Función de Autocorrelación"

Efectivamente, puede definirse una ***función de autocorrelación*** (***FAC***), donde se efectúa la ***correlación*** de la señal $\boldsymbol{x(t)}$ ($\boldsymbol{x[n]}$) con una ***VERSIÓN DESPLAZADA DE SI MISMA***, en términos de un instante $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{k}$):

$$R_{xx}[k] = E\left[x[n]x[n+k]\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} x[n]x[n+k]$$

$$R_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n+k]$$

$$R_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

FAC en tiempo continuo y discreto (GENERAL)

FAC señales de energía

La FAC constituye una medida de SIMILARIDAD de la señal CONSIGO MISMA, en relación a un desplazamiento temporal "τ" (o "k"). Esencialmente se efectúa un correlación con sus VALORES PASADOS o FUTUROS

Función de Autocorrelación

Si el desplazamiento τ (o ***k***) ***es nulo***, la ***FAC*** manifiesta su ***VALOR MÁXIMO***:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{t=-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)dt \ (P\ Total)$$

Si x(t) resulta una señal periódica de potencia, $R_{xx}(0)$ determina el valor de su POTENCIA PROMEDIO

$$R_{xx}(0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \ (E\ Total)$$

Si x(t) resulta una señal de energía, $R_{xx}(0)$ determina el valor de su ENERGÍA TOTAL

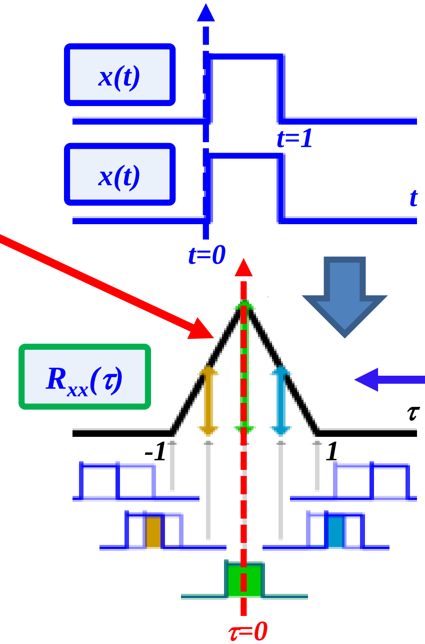
El mismo razonamiento se aplica EN TÉRMINOS DISCRETOS

y ***puede demostrarse*** para $\tau \neq 0$ que :

$$R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)| \quad \rightarrow R_{xx} \text{ es MÁXIMA en el ORIGEN}$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad \rightarrow R_{xx} \text{ es una función PAR}$$

El valor MÁS ELEVADO de R_{xx} es aquel que se logra CON DESPLAZAMIENTO NULO, ya que la SIMILARIDAD ES ABSOLUTA. Por otra parte, si x(t) es PERIÓDICA, R_{xx} también lo será



La función de autocorrelación R_{xx} SIEMPRE RESULTA PAR Y MÁXIMA EN EL ORIGEN ($R_{xx}(0)$)

Finalmente, en términos de la ***convolución***:

$$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) = x(-\tau) * x(\tau)$$

Ejemplo: Obtener los valores de la ***Función de Autocorrelación $R_{XX}[n]$***, correspondiente a la siguiente señal discreta:

$$x[n] = \{\underline{1},2,3\}$$

El cálculo de la ***FAC*** consiste en efectuar la ***correlación*** de ***x[n]*** con ***versiones de si misma desplazadas en k***:

$$R_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n+k]$$

De la misma manera que en la evaluación de la ***FCC***, se puede llevar a cabo ***la siguiente tabla***, considerando que el producto ***x[n]x[n+k]*** ***resulta nulo*** (para todo ***n***) excepto si ***-3<k<3***. Para ***cada valor de k dentro de dicho rango***, se deberá efectuar la ***sumatoria del producto x[n]h[n+k]***.

Ejemplo Práctico

Operando en *-3<k<3* se obtiene:

$$R_{xx}[k]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]x[n+k]$$

$$R_{xx}[-2]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]x[n-2]$$

$$R_{xx}[-1]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]x[n-1]$$

$$R_{xx}[0]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]x[n]\,(Energía\ de\ x[n]!)$$

:

k	$R_{XX}[k]$
<-2	$R_{xx}[k<-2]=0.0=0$
-2	$R_{xx}[-2]=3.1=3$
-1	$R_{xx}[-1]=1.2+3.2=8$
0	$R_{xx}[0]=1.1+2.2+3.3=14$
1	$R_{xx}[1]=3.2+1.2=8$
2	$R_{xx}[2]=1.3=3$
>2	$R_{xx}[k>2]=0.0=0$

Se obtiene el MISMO RESULTADO <u>efectuando la CONVOLUCIÓN</u> entre $x[-k]=\{3,2,\underline{1}\}$ y $x[k]$

$$R_{xx}[k]=\{3,8,\underline{14},8,3\}$$

La señal "se parece más a si misma" (máxima correlación) en $k=0$ (R_{xx} PAR y MAXIMA en el origen)

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Obtener la ***función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$*** correspondiente a la siguiente a la ***función periódica*** $x(t)=A\cos(\omega_0 t)$.

Partiendo de la definición de ***función de autocorrelación***:

$$\boxed{R_{xx}(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt}$$

y debido a que se efectúa la correlación de $x(t)$ con una ***versión desplazada de si misma*** (de igual periodo T_0), se obtiene:

$$R_{xx}(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]=\frac{A^2}{T_0}\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau))dt$$

Aplicando ahora la ***identidad trigonométrica correspondiente al producto de dos cosenos*** y operando:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \Rightarrow R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{T_0}\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}\frac{1}{2}[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)+\cos(-\omega_0\tau)]dt$$

$$R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2T_0}\left[\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)dt+\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}\cos(-\omega_0\tau)dt\right]$$

Se debe tener presente que el parámetro "τ" (desfasaje temporal) ***resulta constante respecto de la variable de integración*** "t". Es por ello que el ***integrando*** $\cos(-\omega_0\tau)$ puede extraerse fuera de la integral. Asimismo, se advierte que el ***integrando*** $\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)$ presenta un período de valor $T_0/2$, de modo que al ser integrado ***sobre el intervalo*** T_0 su resultado es ***nulo***:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2T_0}\left[0+\cos(-\omega_0\tau)\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}dt\right]=\frac{A^2}{2T_0}\cos(-\omega_0\tau)T_0=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

El coseno es una función PAR

Finalmente:

$$\boxed{R_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(-\omega_0\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)}$$

La FAC de una función sinusoidal resulta una función sinusoidal!

Conforme se esperaba, se obtuvo una FAC MÁXIMA en el origen ($\tau=0$) y PERIÓDICA en T_0 ($x(t)$ coincide con $x(t+\tau)$ en $\tau=kT_0$ (k entero))

Coeficiente de Correlación Temporal

Contemplando lo anterior, y a los efectos de definir un ***cálculo de carácter normalizado*** (independiente de las unidades), es posible ajustar la expresión de la función de autocorrelación $\boldsymbol{R_{xx}}$ en términos de un ***"Coeficiente de Autocorrelación"***, dependiente del ***desplazamiento*** $\boldsymbol{\tau}$ (o $\boldsymbol{k}$):

$$r_{xx}(\tau)=\frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} \quad r_{xx}[k]=\frac{R_{xx}[k]}{R_{xx}[0]}, \quad -1<r_{xx}<1$$

Se normaliza la FAC por su valor en el origen (τ=0, k=0) (máxima similaridad)

Análogamente, la función de correlación cruzada $\boldsymbol{R_{xy}}$ da lugar a un ***"Coeficiente de Correlación Cruzada"***:

$$r_{xy}(\tau)=\frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0)}\sqrt{R_{yy}(0)}} \quad r_{xy}[k]=\frac{R_{xy}[k]}{\sqrt{R_{xx}[0]}\sqrt{R_{yy}[0]}}, \quad -1<r_{xy}<1$$

Función de Autocorrelación

Correlación y Sistemas LIT

Las funciones de correlación pueden ser ***implementadas en los sistemas LIT***, ya sea en términos del comportamiento de las ***FAC*** de excitación y respuesta $R_{xy}(\tau)$ y $R_{yy}(\tau)$, o incluso en virtud de su ***FCC***:

Analizando entonces la ***FAC correspondiente a la respuesta*** $y(t)$ puede demostrarse que:

$$\boxed{R_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]} \Rightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{hh}(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}}$$

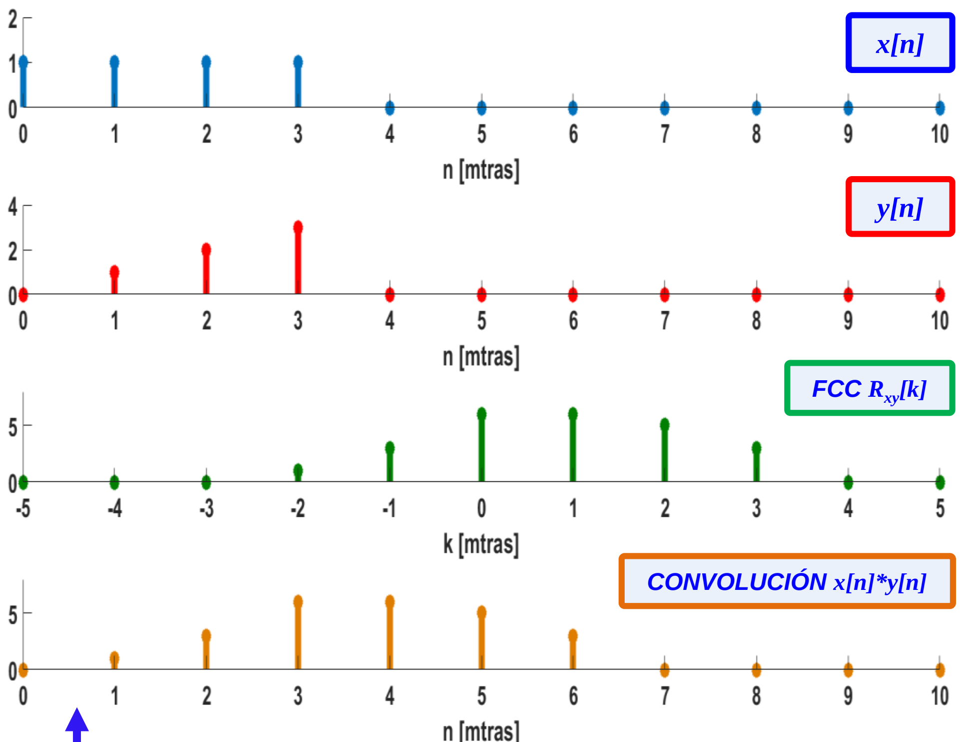
La FAC correspondiente a la RESPUESTA del sistema LIT es el resultado de la CONVOLUCIÓN entre las FAC de x y h

Y analizando la ***FCC entre excitación y respuesta*** se obtiene:

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]} \Rightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= h(\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) &= h(-\tau) * R_{xx}(\tau) \end{aligned}}$$

La CORRELACIÓN CRUZADA ente EXCITACIÓN y RESPUESTA está vinculada DIRECTAMENTE con la respuesta impulsional h(t)

¿Correlación o Convolución? Diferencias Conceptuales



$$R_{xy}[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+k] \quad vs \quad x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

En términos matemáticos, las funciones de CORRELACIÓN y CONVOLUCIÓN entre las señales x[n] e y[n] podrían ser implementadas por el MISMO ALGORITMO. La ÚNICA DIFERENCIA radica en que si se toma como base la convolución, una de las señales intervinientes deberá ser previamente REFLEJADA en términos temporales para obtener la correlación: $R_{xy}[k]=x[-k]*y[k]$

La operación de CORRELACIÓN se define en virtud de un DESFASAJE TEMPORAL "τ" (k), de modo de evaluar la "SIMILARIDAD" existente entre dos señales, habiendo aplicado a una de ellas dicho desfasaje

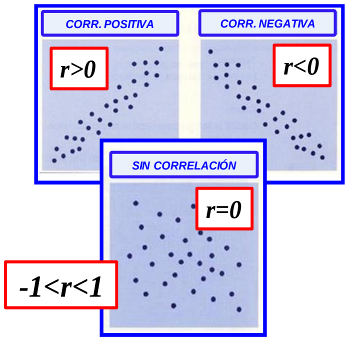
La operación de CONVOLUCIÓN se define en virtud de del parámetro temporal "t" (n), de modo de evaluar la "RESPUESTA" de un sistema LIT en términos de una operación entre la "EXCITACIÓN" y su "RESPUESTA IMPULSIONAL", llevada a cabo en el dominio de la variable temporal "τ"

El resultado de la operación de CONVOLUCIÓN INICIA en $n=0$ y FINALIZA en $n=6$, mientras que el correspondiente a la CORRELACIÓN INICIA en $k=-3$ y FINALIZA en $k=3$. <u>CONCEPTUALMENTE son diferentes</u>.

Resumen General

Coeficiente de Correlación

$$r=\frac{\operatorname{cov}_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}}$$

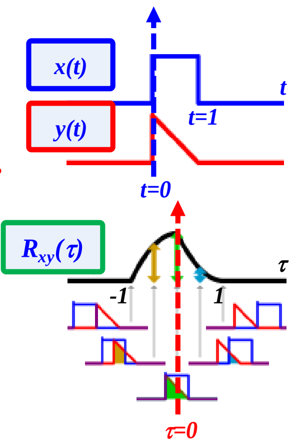


Función de Correlación Cruzada

$$R_{xy}[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y[n+k]$$

$$R_{xy}(\tau)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt$$

$$\begin{cases}R_{xy}(\tau)=x(-\tau)*y(\tau)\\ R_{yx}(\tau)=x(\tau)*y(-\tau)\end{cases}\rightarrow R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$$



Función de Autocorrelación

$$R_{xx}[k]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]x[n+k]$$

$$R_{xx}(\tau)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)x(t+\tau)dt$$

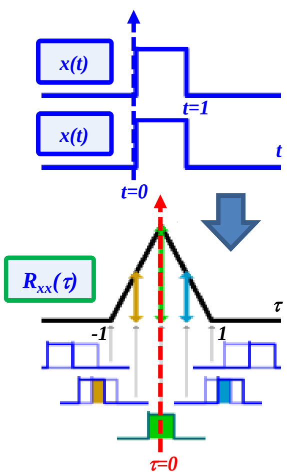
$$R_{xx}(0)\geq|R_{xx}(\tau)| \quad \rightarrow R_{xx} \text{ es MÁXIMA en el ORIGEN}$$

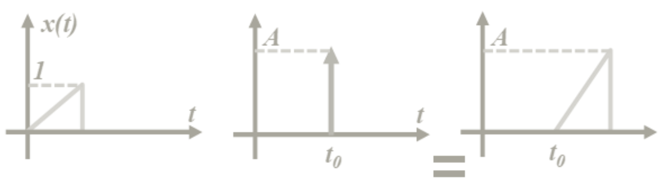
$$R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau) \quad \rightarrow R_{xx} \text{ es una función PAR}$$

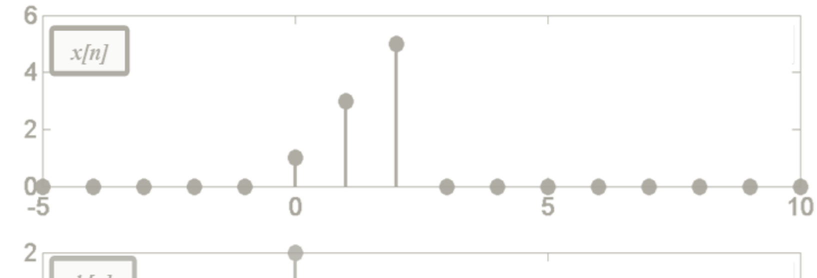
$$R_{xx}(0)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x^2(t)dt \;(E\ Total)$$

$$R_{xx}(0)=\frac{1}{T_0}\int_{t=-T_0/2}^{T_0/2}x^2(t)dt \;(P\ Total)$$

$$R_{xx}(\tau)=x(\tau)*x(-\tau)=x(-\tau)*x(\tau)$$







U3 Convolución y Correlación

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Convolución y Correlación