2017

UTN.BA

Procesos Estocásticos

Parte 1

Guia de Trabajos Practicos

ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS

Contenido

Repasando Conceptos Teóricos

<u>Dominio del tiempo:</u>

- Dada señal x(t):

  - Función de Autocorrelacion (FAC): $$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = E\left[x(t).x(t+\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T}\int_{t=-T}^{T} x(t).x(t+\tau).dt}$$

$$\boxed{\varphi_{XX\,(\tau)} = x_{(\tau)} * x_{(-\tau)}}$$

- Dada un sistema:

$$x \longrightarrow \boxed{T[\,]} \longrightarrow y$$

  - Autocorrelacion de señal de entrada (FAC entrada): $$\varphi_{xx}(\tau) = E\left[x(t).x(t+\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T}\int_{t=-T}^{T} x(t).x(t+\tau).dt$$

$$\varphi_{XX\,(\tau)} = x_{(\tau)} * x_{(-\tau)}$$

  - Autocorrelacion de señal de salida (FAC salida): $$\varphi_{yy}(\tau) = E\left[y(t).y(t+\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T}\int_{t=-T}^{T} y(t).y(t+\tau).dt$$

$$\varphi_{YY\,(\tau)} = y_{(\tau)} * y_{(-\tau)}$$

  - Función de correlación cruzada #1 (FCC): $$\varphi_{xy}(\tau) = E\left[x(t).y(t+\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T}\int_{t=-T}^{T} x(t).y(t+\tau).dt$$

$$\varphi_{xy\,(\tau)} = x_{(-\tau)} * y_{(\tau)}$$

  - Función de correlación cruzada #2 (FCC): $$\varphi_{yx}(\tau) = E\left[y(t).x(t+\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T}\int_{t=-T}^{T} y(t).x(t+\tau).dt$$

$$\varphi_{yx\,(\tau)} = x_{(\tau)} * y_{(-\tau)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xy\,(\tau)} = \varphi_{yx\,(-\tau)}$$

Convolución: $y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau)d\tau$;

- Valor cuadrático medio a la entrada: $\boxed{\overline{X^2} = R_{xx(0)}}$ **(Ec. 11)**
- Valor cuadrático medio a la salida: $\boxed{\overline{Y^2} = R_{yy(0)}}$ **(Ec. 12)**

Esperanza

Esperanza para variable aleatoria discreta

Esperanza: $E_{[x]} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ **(Ec. 14)**

Ejemplo para un dado: $E_{[x]} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

La esperanza es un operador lineal:

$E_{[x+y]} = E_{[x]} + E_{[y]}$ **(Ec. 15)** $E_{[a \bullet x]} = a \cdot E_{[x]}$ **(Ec. 16)**

Esperanza para variable aleatoria continua

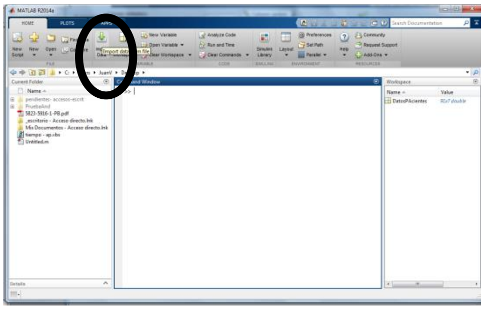
Esperanza: $E_{[x]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$ **(Ec. 17)** con $f(x)$: función de densidad espectral

1. Ejercicios con Matlab

Bajar de campus: Variable Aleatoria 1.zip:

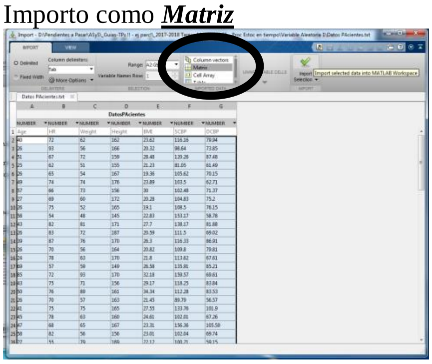
Ej_Histograma.m
Datos Pacientes.txt
Modamedianapromedio.m
EstacionarioYErgodico

Importo datos:



Idem `uiimport( 'Datos PAcientes.txt' )`

Selecciono Archivo: Datos Pacientes.txt (descomprimir Variable Aleatoria 1.zip)
Importo como ***Matriz***



Age: edad, BMI: índice de masa corporal , Systolic and diastolic central blood pressure (SCBP, DCBP)
Nota BMI: se calcula dividiendo los kilogramos de peso por el cuadrado de la estatura en metros (IMC = peso [kg]/ estatura [m2]). Se considera que una persona es obesa si su IMC es superior a 30.
M = mean(A) returns the mean of the elements of A along the first array dimension whose size does not equal 1.

```
function modamedianapromedio(datos)
        media=mean(datos);
        mediana=median(datos);
        moda=mode(datos);
        ……
```

hist(x) creates a histogram bar chart of the elements in vector x.
hist(x,nbins): nbins: cantidad de rectángulos
bar(bean,zero,'y');

- La media aritmética es la suma de todos los datos dividida entre el número total de datos
- La moda de un conjunto de datos es el dato que más veces se repite
- La mediana es el valor que ocupa el lugar central entre todos los valores del conjunto de datos, cuando estos están ordenados en forma creciente o decreciente.

Consigna de Tarea:

Sobre cada columna de datos proporcionados en el archivo correspondiente, calcular su histograma, media, moda, mediana y desvío estándar

Tarea:

%% Ejercicio 1

```
clear all; clc
%Ejercicio 1
filename = 'Datos PAcientes.txt';
delimitador = '\t';
titulos = {'Age','HR','Weight','Height','BMI','SCBP','DCBP'};
encabezado = 1;
A = importdata( filename, delimitador, encabezado );
A.textdata;
Pacientes = A.data;
    % Otra forma de importar
    % uiimport('Datos PAcientes.txt' )
    % Pacientes= DatosPAcientes
for i=1:7
      figure;
      modamedianapromedio( Pacientes(:,i) );
      desvio = std( Pacientes(:,i) ); title('Desvio estandar: ');
      suptitle( titulos(i) );
end
% Analizar graficos !!
```

%% Ejercicio 2

```
    % Intervalo temporal
        dt= 0.01 ;    t= -10:dt:10 ;
    % Delay entre señales
        T=2 ;
    % Señales desfazadas
        x = exp(-2*t) .*(t>0) ;
        y = exp(-2*(t-T)) .*(t>T) ;
    % Correlacion cruzada
        [Rxy, tau] = xcorr(y,x) ;
    % Graficos
      figure(100)
        subplot(211), plot(t,x,t,y);
        xlim([ -5 5] );
        subplot(212), plot(tau*dt , Rxy*dt );
        xlim([ -5 5] );

     %  COMPLETAR: Calcular autocorrelación para  x(t) = u(t)-u(t-2)
```

%% Ejercicio 3

```
 X= [2 4 6 8 10 12 14 16 18 20];
 Y= [1 6 8 10 12 10 12 13 10 22];
 %  EN CLASE ...   apps -->  Curve Fitting:    Xdata   Ydata ...
 %     f(x) = p1*x + p2
 %  Escribir cuanto vale   p1   y  p2
```

2. Ejercios de Parcial/Final

EJERCICIO 4	2 puntos	

Sea x(t) = e^{-at} u(t), se pide:

a. Calcular la función de autocorrelación $Rxx_{(\tau)}$

b. Calcular su Energía

Resolución:

a) $x(t) = e^{-a.t}.u(t)$

$$Rxx_{(\tau)} = \varphi_{xx(\tau)} = E\{x(t).x(t+\tau)\}$$

$$\varphi_{xx(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a.t}.u(t).e^{-a.(t+\tau)}.u(t+\tau).dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a.t}.u(t).e^{-a.t}e^{-a..\tau}.u(t+\tau).dt$$

$$\varphi_{xx(\tau)} = e^{-a..\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2.a.t}.u(t).u(t+\tau).dt$$

Caso $\underline{\tau < 0}$

$$\varphi_{xx(\tau)} = e^{-a..\tau}\int_{-\tau}^{\infty} e^{-2.a.t}.dt = e^{-a..\tau}.\left.\frac{e^{-2.a.t}}{-2.a}\right|_{-\tau}^{\infty}$$

$$\varphi_{xx(\tau)} = e^{-a..\tau}\left(\frac{0-e^{2.a.\tau}}{-2.a}\right) \quad ; \qquad \boxed{Rxx_{(\tau)} = \frac{e^{a.\tau}}{2.a}} \quad ; \qquad \underline{\tau < 0}$$

Caso $\underline{\tau > 0}$

$$\varphi_{xx(\tau)} = e^{-a..\tau}\int_{0}^{\infty} e^{-2.a.t}.dt = e^{-a..\tau}.\left.\frac{e^{-2.a.t}}{-2.a}\right|_{0}^{\infty}$$

$$\varphi_{xx(\tau)} = e^{-a..\tau}\left(0-\frac{1}{-2.a}\right) \quad ; \qquad \boxed{Rxx_{(\tau)} = \frac{e^{-a.\tau}}{2.a}} \quad ; \qquad \underline{\tau > 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{xx(\tau)} = \frac{e^{-a.|\tau|}}{2.a}}$$

b) $$\boxed{Energía = E = \varphi_{xx(0)} = \left.\frac{e^{-a.|\tau|}}{2.a}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2.a}}$$

EJERCICIO 5	2 puntos	

Ej. De teoría ppt

La señal $x(t)=e^{-a.t}.u(t)$ sufre un desfasaje temporal en ***T*** segundos al ser aplicada a un sistema ***LTI***. Demostrar que el valor ***T*** puede obtenerse a partir de la ***FCC*** entre ***x(t)*** e **y(t)**

Resolución:

Dado que x(t) es determinística y aperiódica:

$$\varphi_{xy}(\tau)=E\left[x(t).y(t+\tau)\right]=\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t).y(t+\tau)dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-a.t}.u(t).e^{-a.(t-T+\tau)}.u(t-T+\tau).dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t)=1 & si \quad t>0 \\ u(t-T+\tau)=1 & si \quad t-T+\tau>0 \quad \rightarrow \quad t>T-\tau \end{cases}$$

Si $T-\tau>0$ (hacia tiempos negativos, $\tau<T$):

$$\varphi_{xy}(\tau)=\int_{T-\tau}^{+\infty} e^{-a.t}.e^{-a.(t-T+\tau)}.dt=e^{-a.(+\tau-T)}\int_{T-\tau}^{+\infty} e^{-2.a.t}.dt=e^{-a.(+\tau-T)}\left.\frac{e^{-2.a.t}}{-2.a}\right|_{T-\tau}^{+\infty}=e^{-a.(+\tau-T)}.\left[0-\frac{e^{-2.a.(T-\tau)}}{-2.a}\right]$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\frac{e^{-a.(\tau-T)}.e^{-2.a.(T-\tau)}}{2.a}=\frac{e^{a.\tau}.e^{-a.T}}{2.a}=\frac{e^{-a.(T-\tau)}}{2.a}\;; \qquad \varphi_{xy}(\tau)=\frac{e^{-a.(T-\tau)}}{2.a} \quad \text{si} \quad \tau<T$$

Si $T-\tau<0$ (hacia tiempos positivos, $\tau>T$):

$$\varphi_{xy}(\tau)=\int_{0}^{+\infty} e^{-a.t}.e^{-a.(t-T+\tau)}.dt=e^{-a.(+\tau-T)}\int_{0}^{+\infty} e^{-2.a.t}.dt=e^{-a.(\tau-T)}\left.\frac{e^{-2.a.t}}{-2.a}\right|_{0}^{+\infty}=e^{-a.(\tau-T)}.\left[0-\frac{1}{-2.a}\right]$$

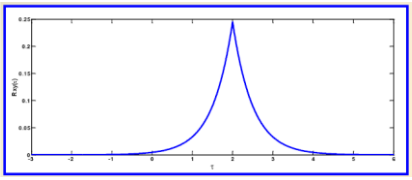
$$;\qquad \varphi_{xy}(\tau)=\frac{e^{-a.(\tau-T)}}{2.a} \quad \text{si} \quad \tau>T$$

La FCC resulta máxima en $\tau=T$

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau)=\begin{cases} \dfrac{e^{-a.(T-\tau)}}{2.a} & si \quad \tau<T \\ \dfrac{e^{-a.(\tau-T)}}{2.a} & si \quad \tau>T \end{cases}}$$

$$\varphi_{xy(\tau)}=x_{(-\tau)}*y_{(\tau)}$$

Ver: `%% Ejercicio de Tarea Matlab`



EJERCICIO 6	2 puntos	

Ej. De teoría ppt

Calcular la FAC de la función determinística $x(t) = u(t) - u(t-T)$

Resolución:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t).x(t+\tau)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T} \int_{t=-T}^{T} x(t).x(t+\tau).dt$$

Como la función es determinística y aperiódica, la FAC puede calcularse como:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t).x(t+\tau).dt = x(\tau) * x(-\tau)$$

$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau - T) \qquad ; \qquad x(-\tau) = u(-\tau) - u(-\tau - T)$$

$x(\tau)$: Pulso que inicia en ***0*** y finaliza en ***T***

$x(-\tau)$: Pulso que inicia en -***T*** y finaliza en ***0***

Hago la convolución de ambos pulsos…… realizar convolución…. Obtengo señal triangular que arranca en ***–T*** y termina en ***T***, con máximo en el origen de amplitud ***T*** (señal par)

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) = \rho(\tau + T) - 2.\rho(\tau) + \rho(\tau - T)}$$

EJERCICIO 7	2 puntos	

Ej. De teoría ppt

Calcular la FAC de la función periódica: $x(t) = A.\cos(w_0.t)$

Resolución:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t).x(t+\tau)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.T} \int_{t=-T}^{T} x(t).x(t+\tau).dt$$

Como la función es periódica: $\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t).x(t+\tau)] = \frac{1}{2.T} \int_{t=-T}^{T} x(t).x(t+\tau).dt$

Reemplazo: $\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2.T} \int_{t=-T}^{T} \cos(w_0.t).\cos(w_0.(t+\tau)).dt$

Tablas: $\int \cos(p.x).\cos(q.x).dx = \frac{sen((p-q).x)}{2.(p-q)} + \frac{sen((p+q).x)}{2.(p+q)}$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2.T} \int_{t=-T}^{T} \cos(w_0.t).\cos(w_0.(t+\tau)).dt$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2.T} \int_{t=-T}^{T} \frac{1}{2}\left[\cos\left(w_0.t - w_0.(t+\tau)\right) + \cos\left(w_0.t + w_0.(t+\tau)\right)\right].dt$$

$$\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2.T}\int_{t=-T}^{T}\frac{1}{2}\left[\cos\left(-w_0.\tau\right)+\cos\left(2.w_0.t+w_0.\tau\right)\right].dt$$

$$\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{4.T}\left[\int_{t=-T}^{T}\left[\cos\left(-w_0.\tau\right)\right].dt+\int_{t=-T}^{T}\left[\cos\left(2.w_0.t+w_0.\tau\right)\right].dt\right]$$

$$\cos(x\pm y))=\cos(x)\cos(y)\mp sen(x).sen(y)$$

$$\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{4.T}\left[\cos\left(-w_0.\tau\right)\int_{t=-T}^{T}.dt+\int_{t=-T}^{T}\left[\cos\left(2.w_0.t\right)\cos\left(w_0.\tau\right)-sen\left(2.w_0.t\right)sen\left(w_0.\tau\right)\right].dt\right]$$

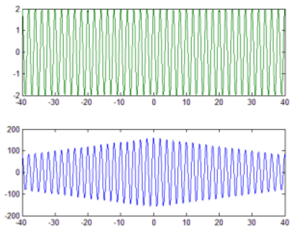
La segunda integral vale cero, debido a que se efectua en 2 períodos

$\cos\left(-w_0.\tau\right)=\cos\left(w_0.\tau\right)$ no depende de t

$$\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{4.T}\left[\cos\left(w_0.\tau\right).\int_{t=-T}^{T}.dt+0\right]$$

$$\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{4.T}.\cos\left(w_0.\tau\right).\int_{t=-T}^{T}.dt=\frac{A^2}{4.T}.\cos\left(w_0.\tau\right).2T \quad ; \qquad \boxed{\varphi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}.\cos\left(w_0.\tau\right)}$$ Revisar !

```
% Ej. xx
  dt= 0.01 ; t= -40:dt:40 ;   A=2 ; w0= pi ;
  x = A * cos(w0 * t) ;
% Correlacion cruzada
  [Rxy, tau] = xcorr(x) ;
figure(102)
  subplot(211), plot(t,x,t,x);
  xlim([ -40 40] );
  subplot(212), plot(tau*dt , Rxy*dt );
  xlim([ -40 40] );
```



EJERCICIO 8	2 puntos	

Ej. De teoría ppt

Determinar si $x(t)=A.\cos(w_0.t+\phi)$ es un proceso ergódico, si A y w_0 son constantes y ϕ se distribuye uniformente en $\left[-\pi,\pi\right]$ (es un generador con fase estocástica)

<u>Resolución:</u>

Ver resolución teoría ppt

3. Cuestionario Teórico

1) Definir Proceso ergódico y Función de Autocorrelación. Ejemplifique su uso según un tipo de ruido
2) Un proceso estocástico se consider estacionario si la media temporal y la de ensamble son coincidentes (Falso). Justificar