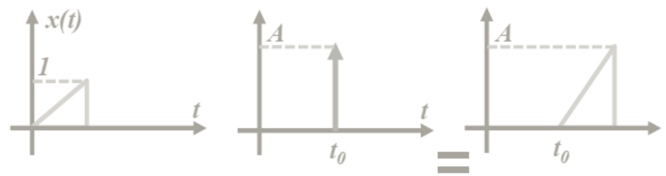
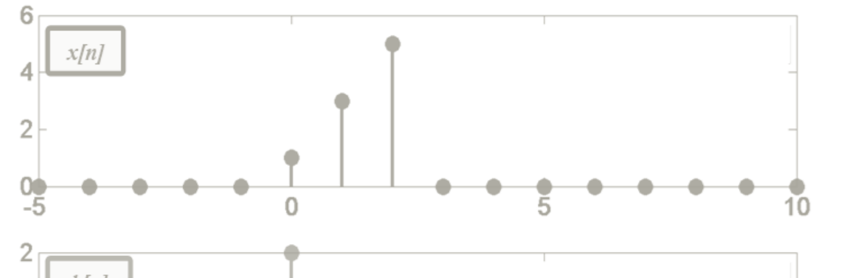
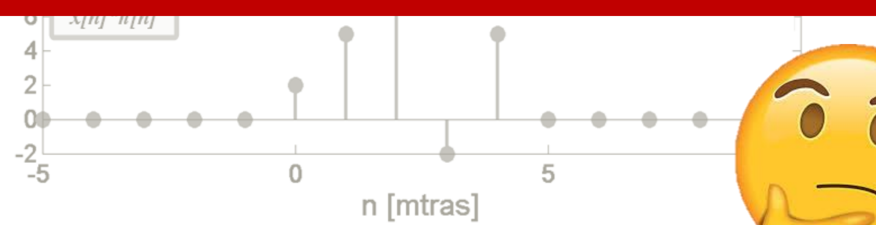




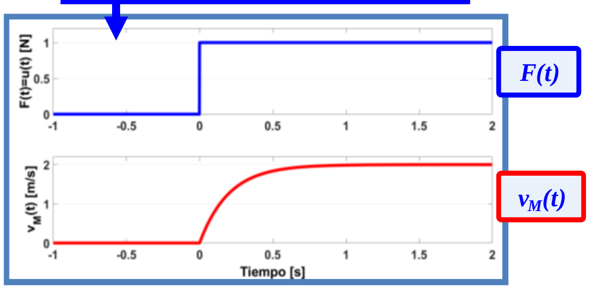
Unidad 3: Convolución y Correlación

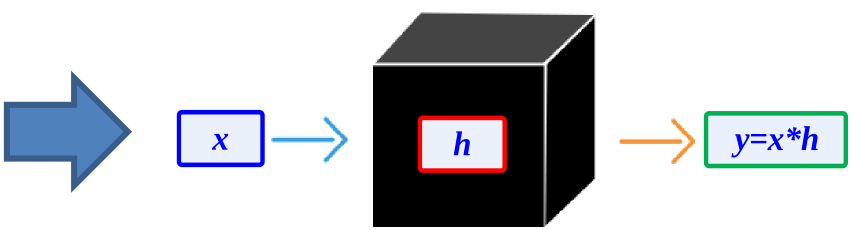
•Introducción a la Convolución•



En el apartado anterior se llevó a cabo la ***evaluación de la respuesta de un sistema LIT*** en virtud de una excitación, a partir de la ***resolución de la ecuación diferencial*** que lo caracteriza. Si bien la metodología es apropiada, ***existe una forma más sistemática*** de determinar ***cómo responden los sistemas a las excitaciones*** (considerando condiciones iniciales nulas), a partir de la implementación de una ***operación matemática que hace uso de la Respuesta Impulsional del sistema "h"…***

$$\boxed{10F(t) = v_M{}'(t) + 5v(t)}$$





Se ha demostrado previamente que ***cualquier señal temporal***, ya sea continua o discreta, puede expresarse como un ***conjunto de funciones impulso escaladas y desplazadas***:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta(n-k)=\ldots+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+\ldots$$

$$x(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Recordar que la función impulso constituye la base fundamental de representación de cualquier tipo de señal, ya sea continua o discreta

y que la ***respuesta*** de un sistema a una ***señal impulso se define en términos de la Transferencia como***:

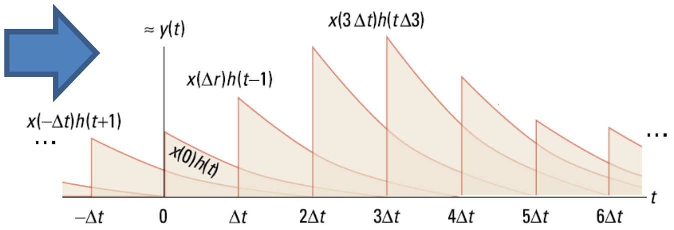
$$\boxed{\begin{aligned}T[\delta(t)]&=y(t)\big|_{x(t)=\delta(t)}=h(t)\\T[\delta[n]]&=y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]}=h[n]\end{aligned}}$$

h(t), h[n]
RESPUESTA IMPULSIONAL

Recordar que ***h(t)*** (***h[n]***) ***constituye una "radiografía" del sistema*** y <u>sólo depende de sus elementos constitutivos</u> (característica intrínseca)

h(t) y h[n] se determinan para condiciones iniciales nulas

$$\boxed{\sum K\delta()} \longrightarrow \boxed{h(t) = e^{-t}u(t)} \longrightarrow \boxed{\sum Kh()}$$



Conociendo entonces la ***respuesta impulsional*** de un sistema, ***se puede determinar su respuesta ante cualquier tipo de excitación***, siempre y cuando estén presentes las propiedades de ***linealidad*** e ***invariancia temporal.*** La ***operación matemática*** entre ***x*** y ***h*** (tanto en tiempo continuo como discreto) que posibilita llevar a cabo dicha determinación se denomina ***"CONVOLUCIÓN"***

Implementación de la "Sumatoria de Convolución"

Considérese una ***señal discreta*** representada por señales impulso ***δ[n]*** escalados y desplazados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

si se ***aplica Transferencia*** de modo obtener la ***respuesta y[n]*** (por propiedad de ***linealidad***) se obtiene:

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right]$$

como ***el único factor*** que depende de "***n***" es ***δ[n-k],*** el operador ***T[]*** ***puede incluirse en la sumatoria***:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\left[\delta[n-k]\right]$$

Sumatoria de Convolución

y donde si el sistema considerado ***resulta invariante en el tiempo***:

$$T\left[\delta[n]\right] = h[n] \Rightarrow T\left[\delta[n-k]\right] = h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\left[\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Si la respuesta del sistema a una excitación impulso es h[n], la respuesta a una excitación impulso desplazada en k será h[n-k] por INVARIANCIA TEMPORAL

Se obtiene entonces una ***expresión matemática*** que permite obtener ***y[n]*** en virtud de ***h[n]***, la ***Sumatoria de Convolución***:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]}$$

OPERADOR CONVOLUCIÓN

Integral de Convolución

¿Y qué sucede en relación al tiempo continuo?

Análogamente al tiempo discreto:

$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

y aplicando ***Transferencia*** se obtiene:

$$y(t) = T\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Para finalmente obtener la ***"Integral de Convolución"***:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Convolución

La <u>respuesta</u> "y" de un sistema LIT se determina en virtud de la CONVOLUCIÓN entre la <u>excitación</u> "x" y su <u>respuesta impulsional</u> "h"

$$x(t) \quad x[n] \longrightarrow \boxed{h(t) \quad h[n]} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \quad y[n] = x[n] * h(n)$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]}$$

SUMATORIA DE CONVOLUCIÓN (tiempo discreto)

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN (tiempo continuo)

<u>Para CADA INSTANTE TEMPORAL</u> n_0 (t_0), el valor de la respuesta $y[n_0]$ ($y(t_0)$) <u>es el resultado de efectuar una sumatoria en k (integral en τ)</u> del PRODUCTO entre la excitación x y la respuesta impulsional h (reflejada y desplazada en n_0, t_0)

Propiedades de la Convolución (ambos dominios)

$$\{x * h_1\} * h_2 = x * \{h_1 * h_2\}$$

1. LA CONVOLUCIÓN ES ASOCIATIVA

$$x * h = h * x$$

2. LA CONVOLUCIÓN ES CONMUTATIVA

$$\{x_1 + x_2\} * h = x_1 * h + x_2 * h$$

3. LA CONVOLUCIÓN ES DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA

$$\alpha\left(x_1 * x_2\right) = \left[\alpha x_1\right] * x_2 = x_1 * \left[\alpha x_2\right]$$

4. EL PRODUTO POR UN ESCALAR afecta SOLAMENTE a UNA de las señales intervinientes

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \Rightarrow x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \Rightarrow x_1\left[n - n_1\right] * x_2\left[n - n_2\right] = y\left[n - n_1 - n_2\right]$$

5. El DESPLAZAMIENTO TEMPORAL de una (o ambas señales) da como resultado el desplazamiento de la convolución EN LA MISMA PROPORCIÓN

Convolución por un Impulso

¿Qué sucede al <u>convolucionar</u> una <u>señal con una función impulso</u> $\delta(t)$ escalada y desplazada?:

$$x(t) * A\delta\left(t - t_0\right) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) A\delta(t - t_0 - \tau) d\tau = A \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t - t_0)\delta(t - t_0 - \tau) d\tau$$

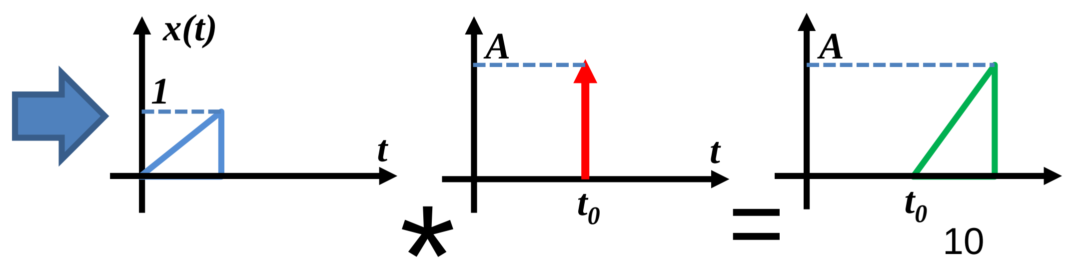
$$x(t) * \delta\left(t - t_0\right) = Ax(t - t_0) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = Ax(t - t_0)$$

Al efectuar la integral de convolución <u>EN LA VARIABLE τ (el tiempo "t" resulta un parámetro constante)</u>, la función $\delta[t-t_0-\tau)$ "captura" en su área el valor de $x(\tau)$ en el instante "$t-t_0$". Es por ello que "$x(t-t_0)$" (constante en el domínio τ) <u>se convierte en un factor que sale fuera de dicha integral</u>

Se observa que la ***convolución*** entre ***x(t)*** y una función impulso de ***área "A"*** ubicada en el ***instante t_0*** ***genera como resultado*** el ***desplazamiento de $x(t)$ en t_0***, ***escalada*** por el valor A. ***Para la operación en tiempo discreto, el resultado es el mismo***:

$$\boxed{x(t) * A\delta(t - t_0) = Ax(t - t_0)}$$

$$\boxed{x[n] * A\delta[n - n_0] = Ax[n - n_0]}$$



Sumatoria de Convolución: Cálculo

Sumatoria de Convolución: Ejemplo de Cálculo

Sea un sistema cuya respuesta impulsional es $h[n]=\{\underline{2},-1,1\}$. Hallar su salida $y[n]=x[n]*h[n]$ para $x[n]=\{\underline{1},3,5\}$.

La operación de convolución requiere que se implemente la siguiente sumatoria, **para cada valor de n** (*pues constituye el parámetro*), ***donde k*** (*la variable*) ***varía en el rango*** -∞ a +∞:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

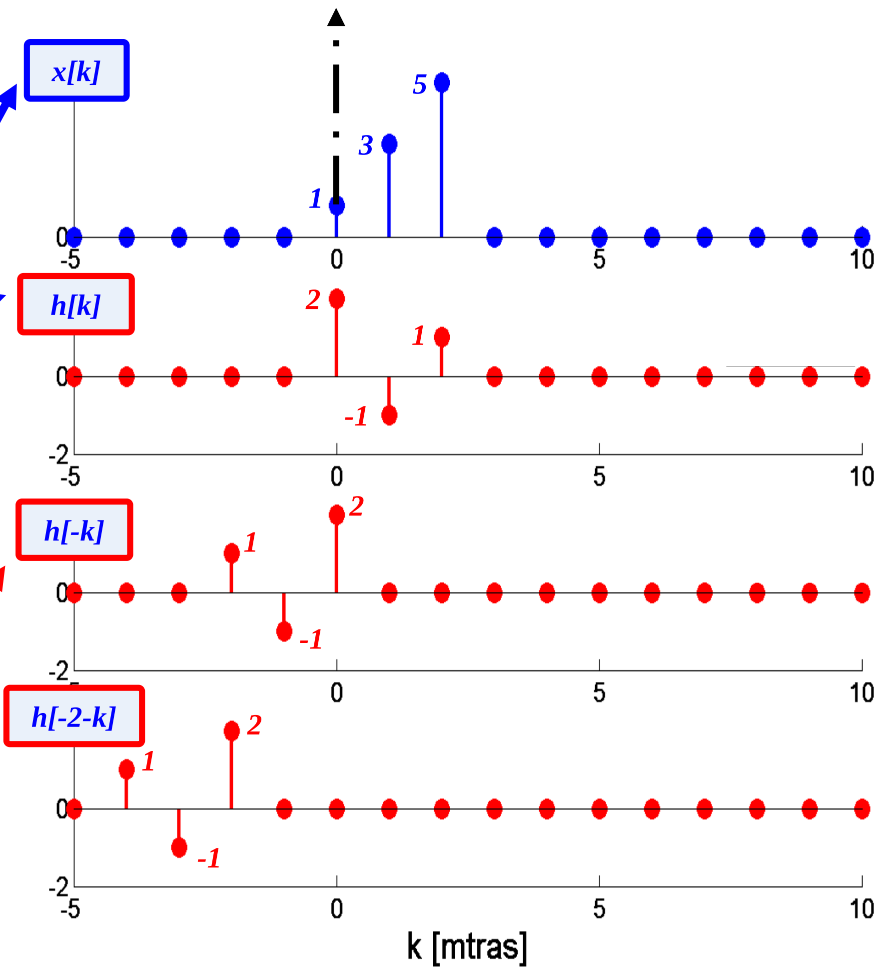
En términos prácticos, debe llevarse a cabo LA SUMA TOTAL en k de todas las muestras resultates del producto $x[k]h[n-k]$ (k -∞ a +∞) para cada instante temporal n

Sumatoria de Convolución: Cálculo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Para EFECTUAR LA CONVOLUCIÓN $x[n]*h[n]$, deben trabajarse en el dominio temporal k. Conforme puede advertirse, $x[k]$ mantiene la morfología de $x[n]$ (sólo se efectúa un cambio de variables). Lo mismo sucede con h[k]

La secuencia $h[-k]$ es la reflexión de $h[k]$ respecto del eje de ordenadas, que luego es desplazada según el valor de n a considerar para el cálculo ($h[n-k]$). Para valores negativos de n, $h[n-k]$ se desplaza a izquierda (ej. $h[-2-k]$), mientras que para valores positivos a derecha (ej. $h[1-k]$).

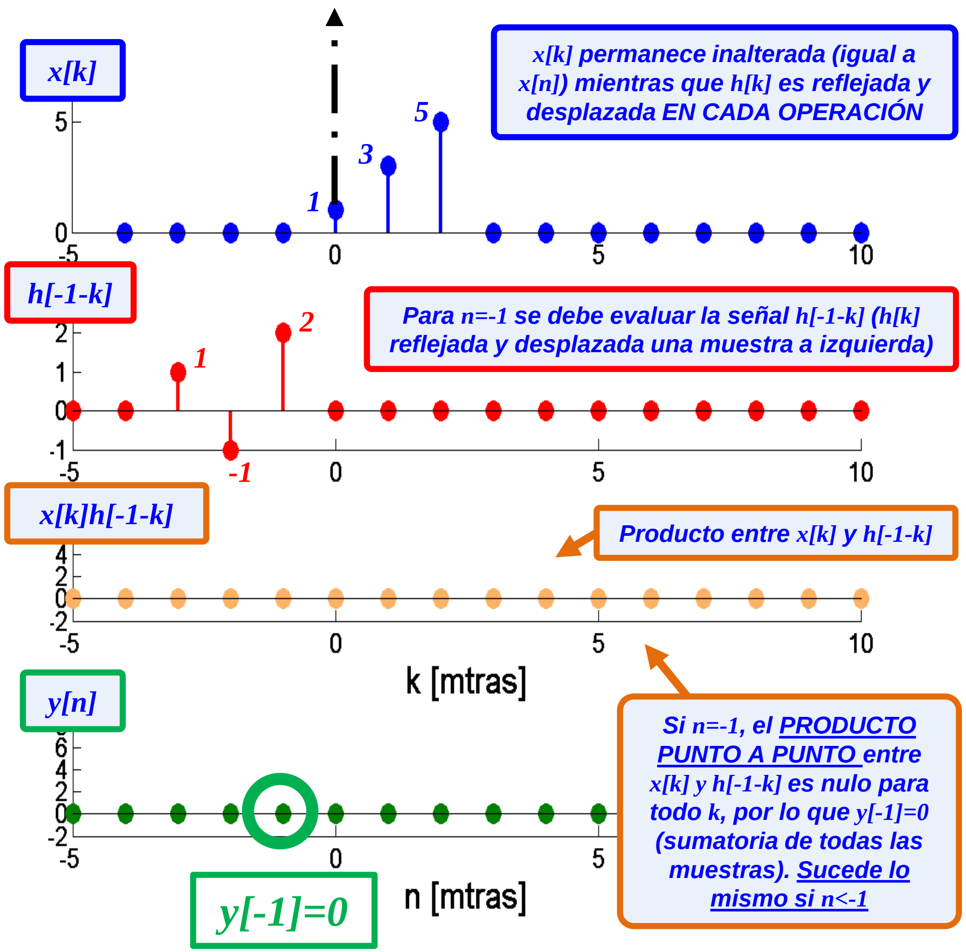


Sumatoria de Convolución: Cálculo

***Para cada valor de n** (de modo de obtener la respuesya $y[n]$) se debe efectuar LA SUMA DEL PRODUCTO RESULTANTE entre $x[k]$ y $h[n-k]$. Esta última se ve REFLEJADA respecto a su eje de ordenadas ($h[-k]$) y DESPLAZADA ($h[-k+n]$) según el valor de n*

La operación suele iniciarse para valores negativos de n. Observar que para la condición $n \le -1$, el producto $x[k]h[n-k]$ siempre es 0 para todo k. La sumatoria de todas las muestras resulta nula para dichos valores, lo cual implica: $y[n]=0$ si $n \le -1$

$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-1-k]=0$$

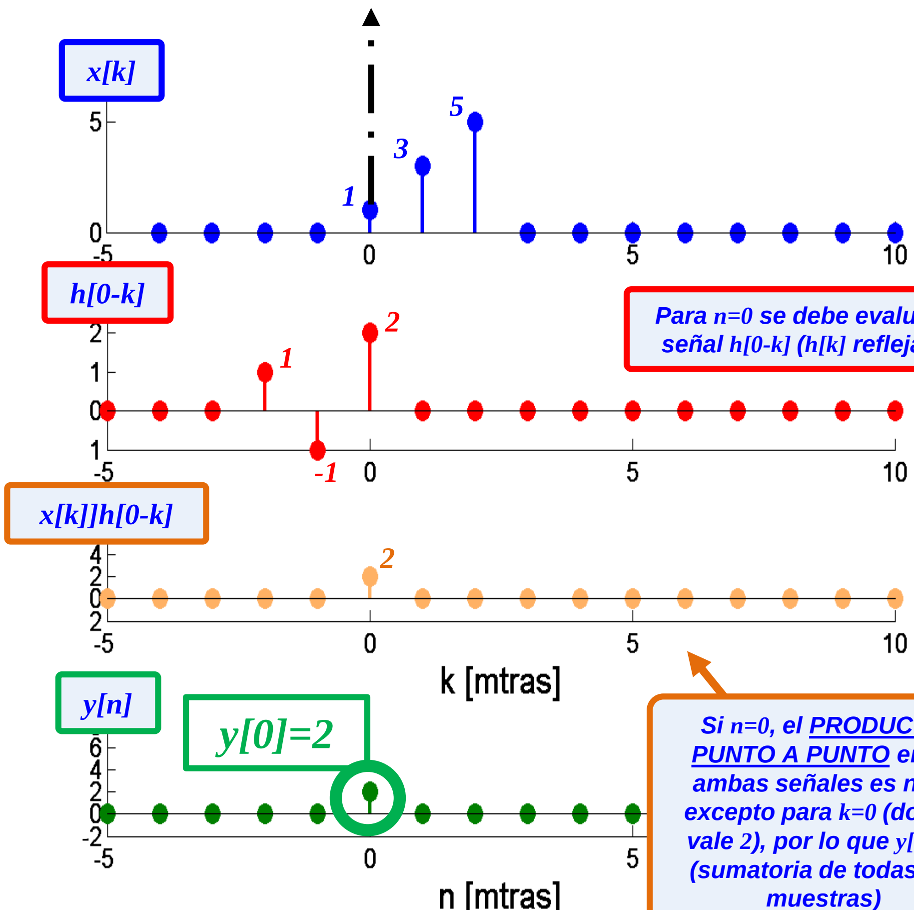


Sumatoria de Convolución: Cálculo

Para $n=0$, el producto $x[k]h[0-k]$ da como resultado $1.2=2$ en $k=0$, mientras que las muestras restantes son nulas. Al efectuar la suma total se obtiene $y[0]=2$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]=1.2=2$$

Observar que $h[-n-k]$ se va "<u>desplazando muestra a muestra</u>" respecto de $x[k]$ conforme se incrementa n



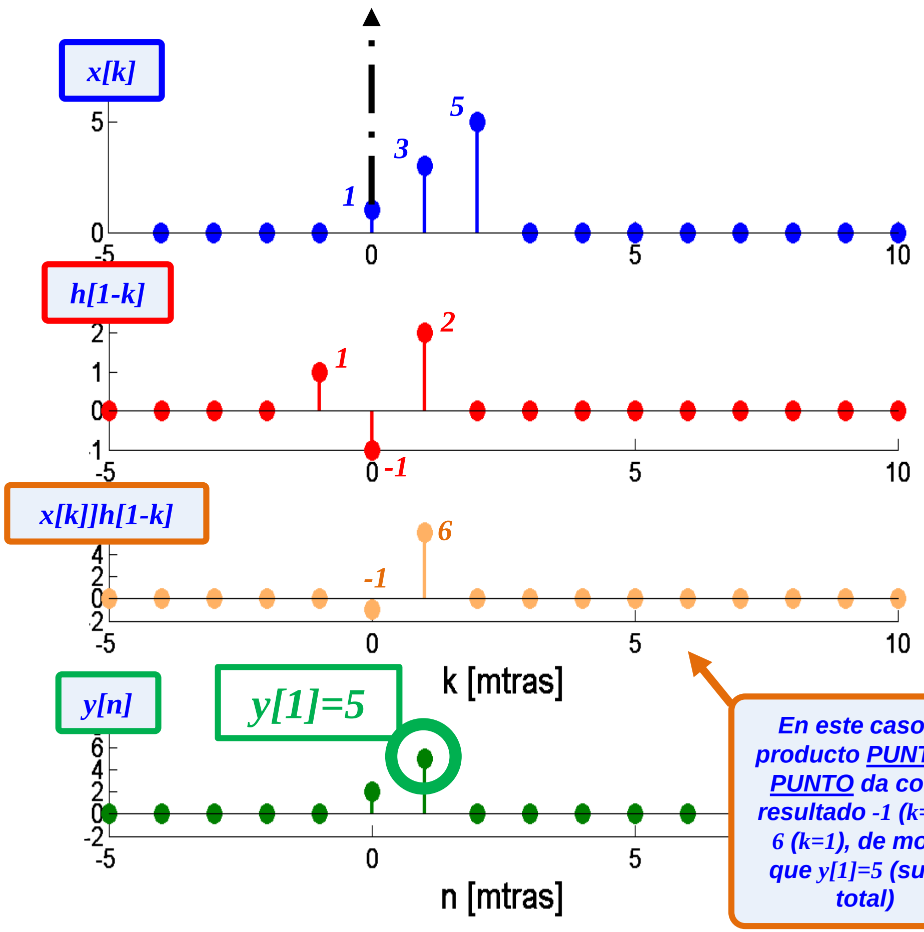
Para $n=0$ se debe evaluar la señal $h[0-k]$ ($h[k]$ reflejada)

Si $n=0$, el <u>PRODUCTO PUNTO A PUNTO</u> entre ambas señales es nulo excepto para $k=0$ (donde vale 2), por lo que $y[0]=2$ (sumatoria de todas las muestras)

Sumatoria de Convolución: Cálculo

Para $n=1$, el producto $x[k]h[1-k]$ resulta $1.-1$ en $k=0$ y 3.2 en $k=1$. El resto de las muestras es nulo. Al efectuar la suma total se obtiene $y[1]=5$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]=1.-1+3.2=5$$



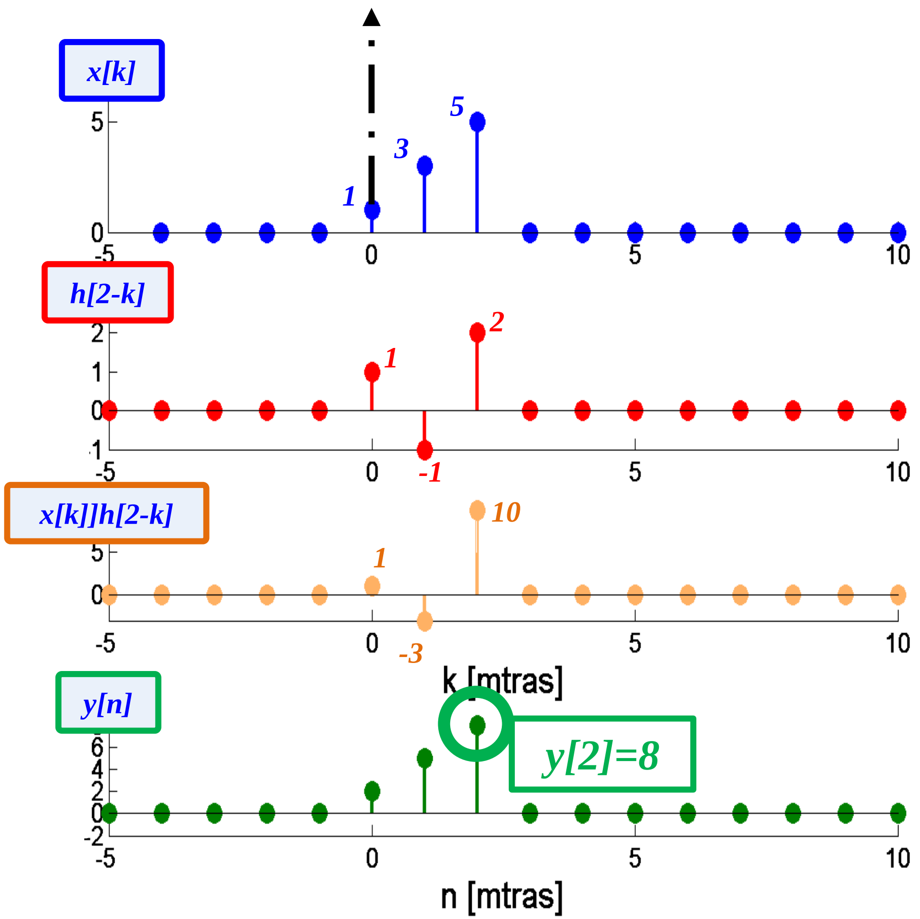
En este caso el producto PUNTO A PUNTO da como resultado -1 ($k=0$) y 6 ($k=1$), de modo que $y[1]=5$ (suma total)

Sumatoria de Convolución: Cálculo

Para n=2, el producto x[k]h[2-k] resulta 1.1 en k=0, 3.-1 en k=1 y 2.5 en k=2. El resto de las muestras son nulas. Al efectuar la suma total se obtiene y[2]=8

$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]=1.1+3.-1+5.2=8$$

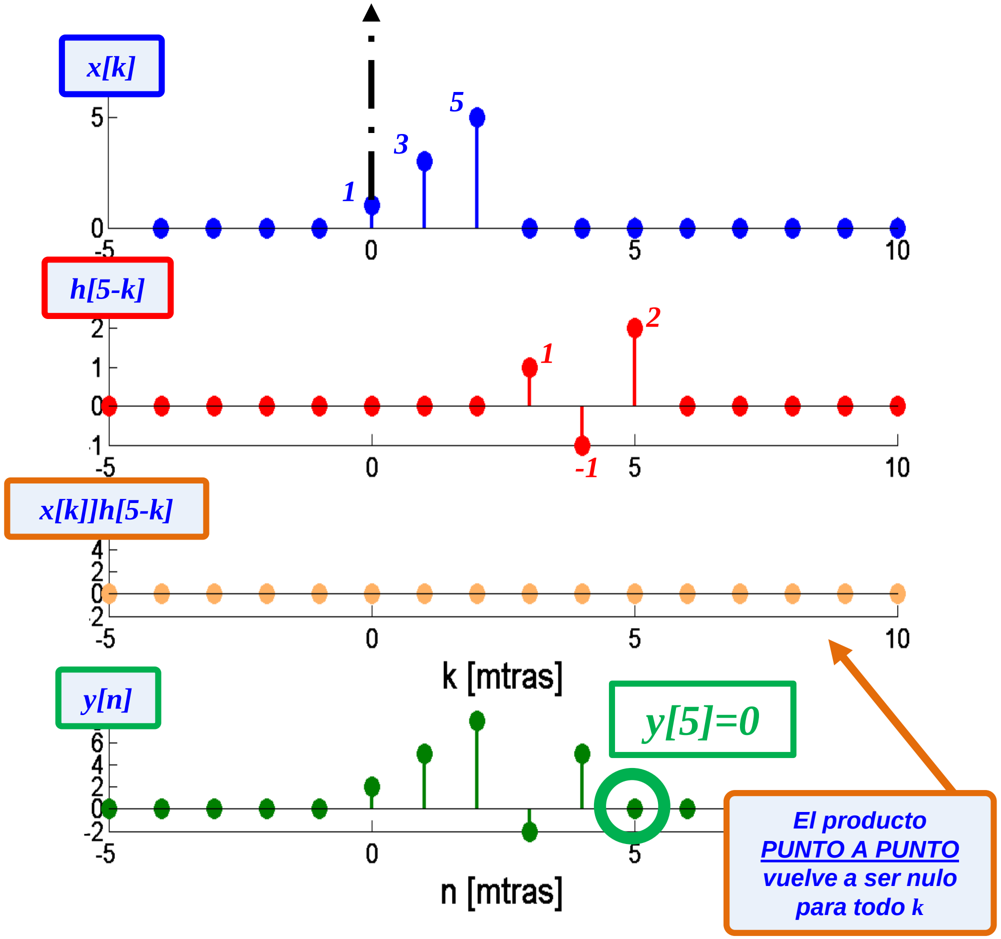
El procedimiento es recursivo e implica efectuar el producto entre una señal "detenida" (x[k]) y la otra reflejada y desplazada (h[n-k]), <u>para luego sumar las muestras del resultado en cada operación</u> (un algoritmo!)



Sumatoria de Convolución: Cálculo

Finalmente, para $n=5$, el producto $x[k]h[5-k]$ vuelve a resultar 0 en todo k. Al efectuar la suma total se obtiene $y[5]=0$, y dicha condición se mantendrá para valores de n superiores ($n \geq 5$)

$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k] = 0$$



Sumatoria de Convolución: Cálculo

$y[n]=x[n]*h[n]$

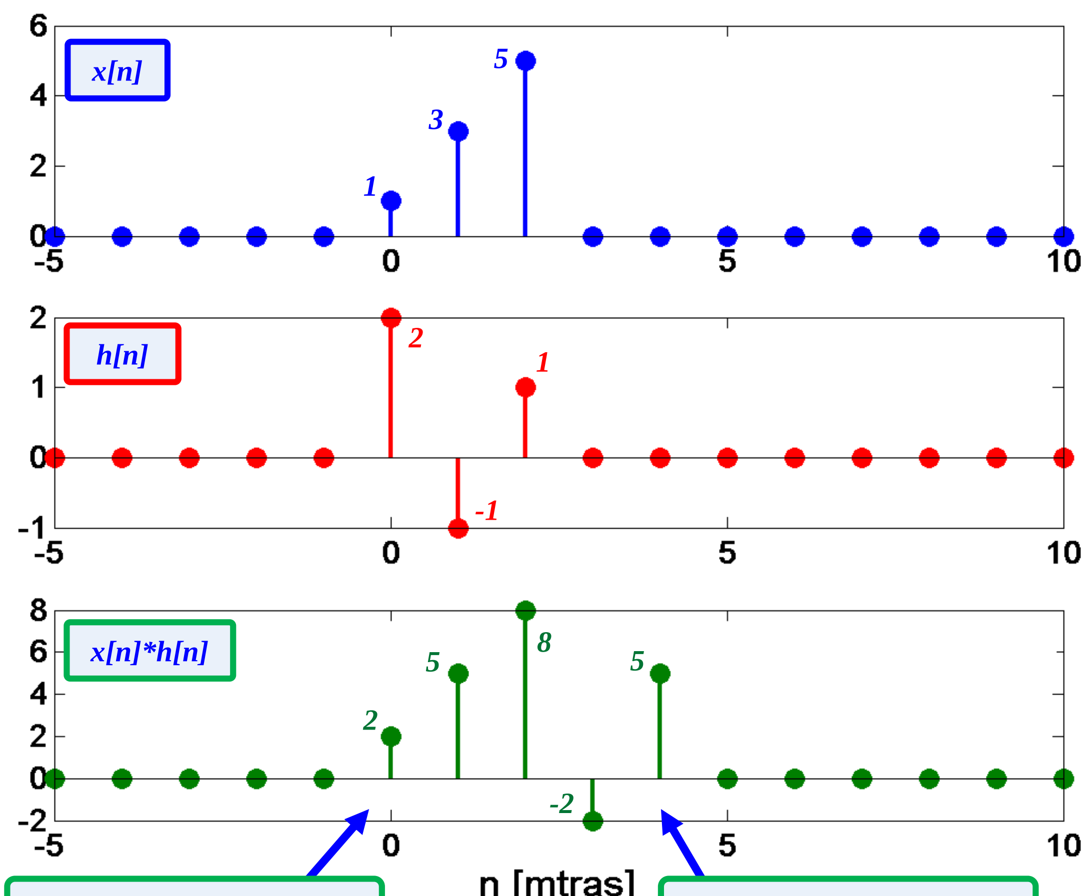
$$y[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \\ [2,5,8,-2,5] & n\in[0,4] \\ 0 & n>4 \end{cases}$$

Observar que EL PRIMER VALOR DE LA RESPUESTA $y[n]$ (<u>resultado de la interacción</u> entre $x[n]$ y $h[n]$) se encuentra ubicado en la SUMA DE LOS INICIOS de ambas señales, mientras que el último valor de dicha respuesta se advierte en la SUMA DE LOS FINALES ($x[n]$ y $h[n]$ poseen duración finita)

Asimismo la DURACIÓN DE LA RESPUESTA $y[n]$ está determinada por las SUMAS DE LAS DURACIONES RESPECTIVAS de $x[n]$ y $h[n]$ menos una unidad:

$Ly=Lx+Lh-1$

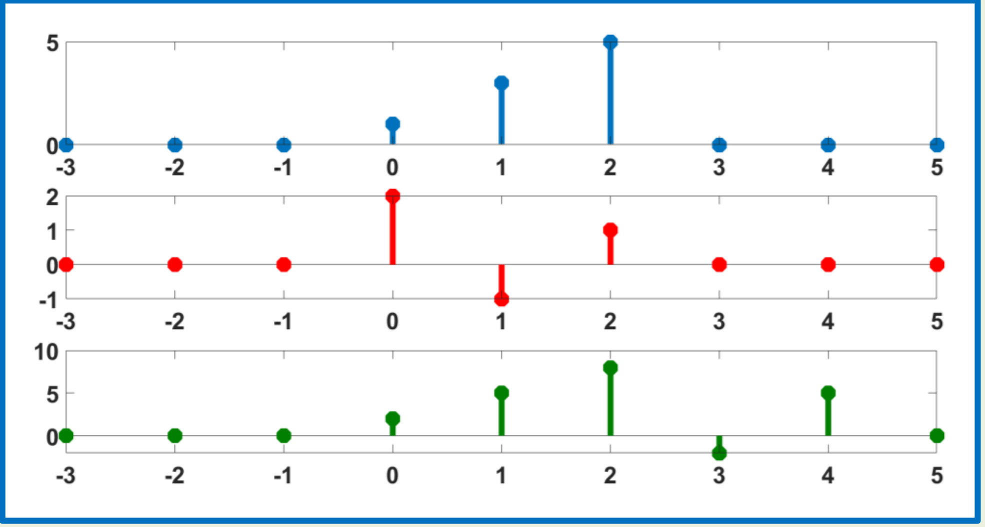
En este caso $Ly=3+3-1=5$ muestras



$y[n]$ <u>inicia en $n=0$</u> (suma de inicios de $x[n]$ (en $n=0$) y $h[n]$ (en $n=0$)

$y[n]$ <u>finaliza en $n=4$</u> (suma de finales de $x[n]$ (en $n=2$) y $h[n]$ (en $n=2$)

```
%CONVOLUCIÓN DISCRETA
%y[n]=x[n]*h[n]
n=-3:5;   %Vector temporal de x y h
x=[0,0,0,1,3,5,0,0,0];
h=[0,0,0,2,-1,1,0,0,0];
y=conv(x,h);
nc=-6:10; %Vector temporal de la respuesta y
%Visualización
subplot(311),stem(n,x);
subplot(312),stem(n,h);
subplot(313),stem(nc,y);
xlim([-3,5]);
```



La sumatoria de CONVOLUCIÓN se encuentra implementada en MatLab/Octave a partir de la función CONV. Se debe tener en cuenta que la misma se lleva a cabo entre los valores que componen las dos señales a convolucionar, <u>sin considerar la referencia temporal n</u> (el algoritmo trabaja específicamente sobre los vectores). Asimismo, el resultado de la operación presenta una duración igual a la suma de las duraciones de ambas las señales (menos una unidad), de modo que debe asignársele un vector de variable temporal diferente al graficarla. El mismo puede generarse fácilmente definiéndolo en virtud de la suma de los inicios y finales de los vectores temporales de las señales intervinientes

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Sea el ***sistema discreto*** definido por la ecuación en recurrencias ***y[n]=x[n]+x[n-1]***, calcular la respuesta para la secuencia de entrada ***x[n]={1,2,3,4}*** ***aplicando convolución***. Verificar el resultado ***efectuando los cálculos recursivos***.

Aplicando entones la definición de ***convolución***:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

y calculando la ***respuesta impulsional h[n]***:

$$h[n] = y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] = \{\underline{1}, 1\}$$

NOTA: Advertir que AL HABER SÓLO OPERACIONES CON LA EXCITACIÓN para determinar la respuesta actual, la obtención de h[n] resulta muy sencilla (se reemplaza x[n] por δ[n])

Ejemplo Práctico

El resultado de la convolución implica ***resolver una sumatoria para cada valor de n***, del producto entre una de las señales y la otra reflejada y desplazada:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k]$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]$$

n	y[n]
0	y[0]=1.1=1
1	y[1]=1.1+2.1=3
2	y[2]=2.1+3.1=5
3	y[3]=3.1+4.1=7
4	y[4]=4.1=4

Obsérvese que si se efectúan los cálculos de manera RECURSIVA SE VERIFICA:
y[0]=x[0]+x[-1]=1+0=1
y[1]=x[1]+x[0]=2+1=3
y[2]=x[2]+x[1]=3+2=5

El cálculo COMIENZA en la "Suma de Inicios"
$x_{ini}+h_{ini}=0+0 \rightarrow n=0$
y FINALIZA en la "Suma de finales"
$x_{fin}+h_{fin}=3+1 \rightarrow n=4$
L=Lx+Lh-1=2+4-1=5 muestras

$$\boxed{y[n] = \{\underline{1},3,5,7,4\}}$$

Consigna de la clase #A (30 minutos)

1. Utilizar MatLab para obtener la salida del siguiente sistema ***LIT***, cuya respuesta impulsional se detalla. ***Verificar*** ambos resultados ***analíticamente*** (las primeras muestras de ser necesario):

$$h[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\right)$$

$$\begin{cases} a)\ x[n] = \{\underline{1}, -2, 3, -4, 5, -6\} \\ b)\ x[n] = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} n\right) u[n] \end{cases}$$

2. Comparar en un único gráfico excitación vs. respuesta, el resultado del ***punto b)*** ***¿Qué efecto impone el sistema LIT sobre una señal de tipo sinusoidal?¿Se modifica su frecuencia?*** (comparar varios ciclos)

3. Efectuar el ***diagrama en bloques*** correspondiente al sistema representado por ***h[n]***

Sumatoria/Integral de Convolución

$x(t)$ → $h(t)$ → $y(t) = x(t) * h(t)$

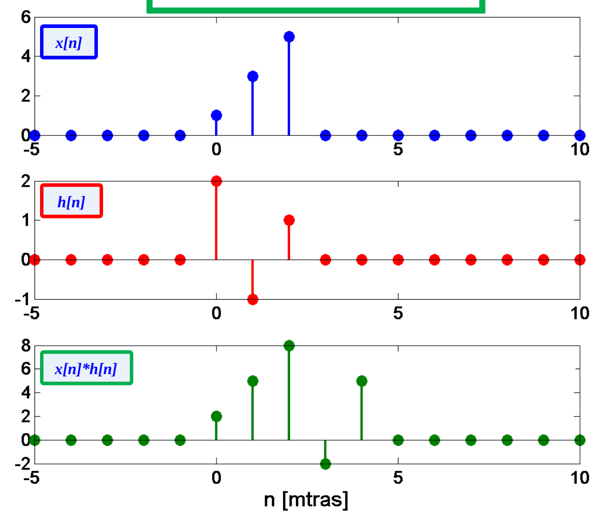
$x[n]$ → $h[n]$ → $y[n] = x[n] * h(n)$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

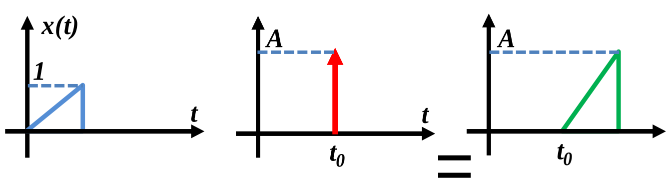
$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Sumatoria de Convolución

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$$



Convolución con una función impulso



$$\boxed{x(t) * A\delta(t-t_0) = Ax(t-t_0)}$$

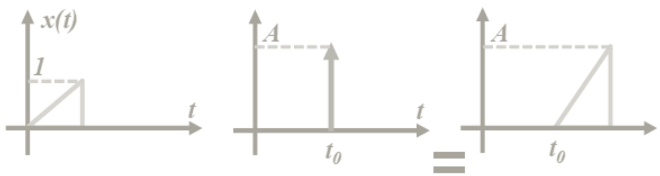
$$\boxed{x[n] * A\delta[n-n_0] = Ax[n-n_0]}$$

Propiedades

$$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

$$x * h = h * x$$

$$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$$



U3 Convolución y Correlación

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Convolución y Correlación