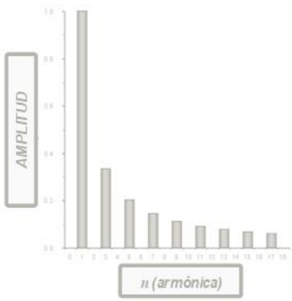
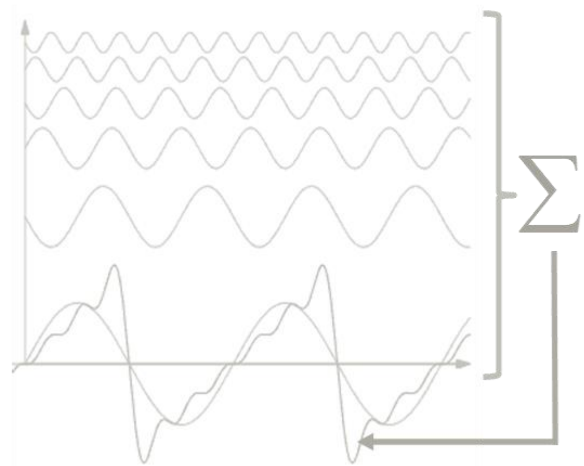



$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)]$$

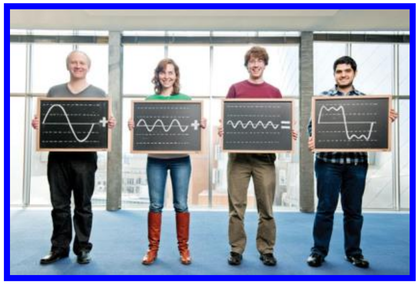
# Unidad 5: Series de Fourier

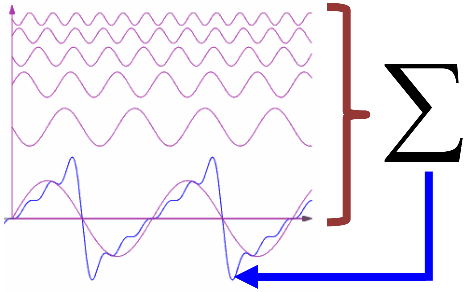
# •Introducción a las Series de Fourier•




# Unidad 5: Series de Fourier
## Intoducción

La idea ***esencial*** de la operación de ***convolución***, se fundamenta en la obtención de la respuesta de un sistema ***LIT*** ante cualquier excitación arbitraria, a partir de la ***descomposición*** de dicha excitación en una ***sumatoria de funciones impulso***. Sin embargo, ***una señal puede ser descompuesta utilizando una base de funciones diferente***, como es el caso de las ***sinusoides***, principio básico de las **Series de Fourier**. Recordar que los sistemas ***LIT responden con sinusoides*** afectadas en amplitud y fase, si la excitación es de naturaleza sinusoidal…





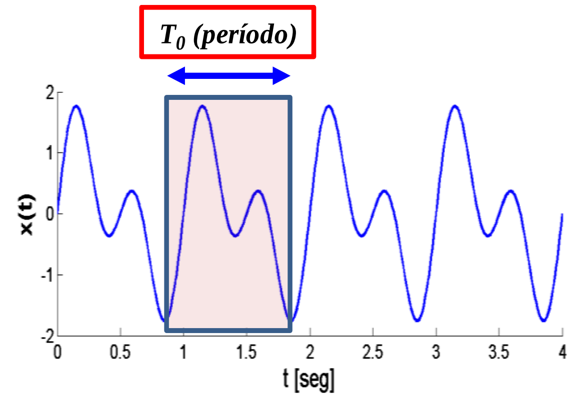
*El matemático y astrónomo Neugebauer (1952) descubrió que los BABILONIOS utilizaron una forma primitiva de las SERIES DE FOURIER en la PREDICCIÓN de ciertos eventos celestiales…*

# Repaso: Funciones Periódicas

En apartaos previos, se definió el concepto de "***función periódica f(t)***", la cual verifica ***para todo valor*** de $t$:

$$x(t) = x(t + kT_0) \; con \; k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

***La señal $x(t)$ manifiesta patrones repetitivos de duración $T_0$***

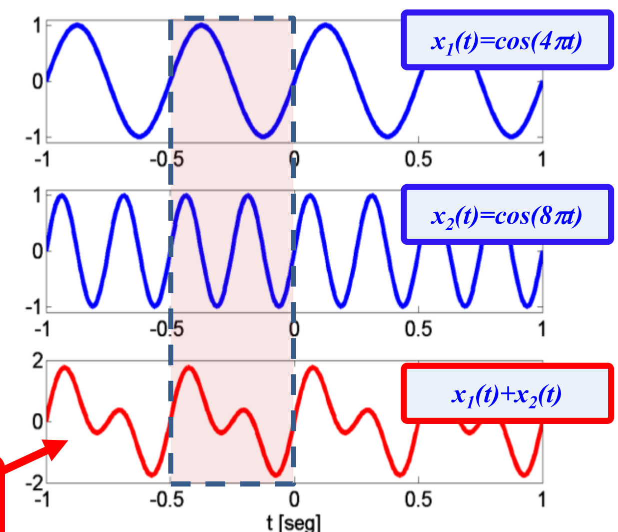



donde el ***valor mínimo de $T_0$*** (mayor que cero) que responde a la premisa anterior se denomina ***período fundamental***.

Asimismo, se estableció que ***la suma*** de dos funciones periódicas continuas ***sólo resulta periódica*** si el cociente entre los períodos de ambas señales es ***racional:***

$$x(t) = \cos(4\pi t) + \cos(8\pi t)$$

***La periodicidad obtenida <u>SE ASEGURA</u> SI LAS FRECUENCIAS SON MÚLTIPLOS ENTRE SI, ya que la frecuencia resultante de la suma es el MÁXIMO COMÚN DIVISOR entre ambas***



# La Función de Euler

## ¿La primera Serie de Fourier de la historia?

En ***1744***, ***Leonhard Euler*** comunica en una carta a su amigo matemático ***Christian Goldbach***, ***la siguiente expresión:***

***Leonhard Euler***
***1707-1783***

$$\boxed{x(t) = \frac{\pi - t}{2} = sen(t) + \frac{sen(2t)}{2} + \frac{sen(3t)}{3} + \ldots}$$

$$\boxed{\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nt)}{n}}$$

***La función $x(t)$ se expresa como una suma INFINITA de FUNCIONES SINUSOIDALES, de frecuencias MÚLTIPLO de una "FRECUENCIA PRINCIPAL" (NÓTESE que que el MCM de la combinación resulta $\omega_0=1$)…***

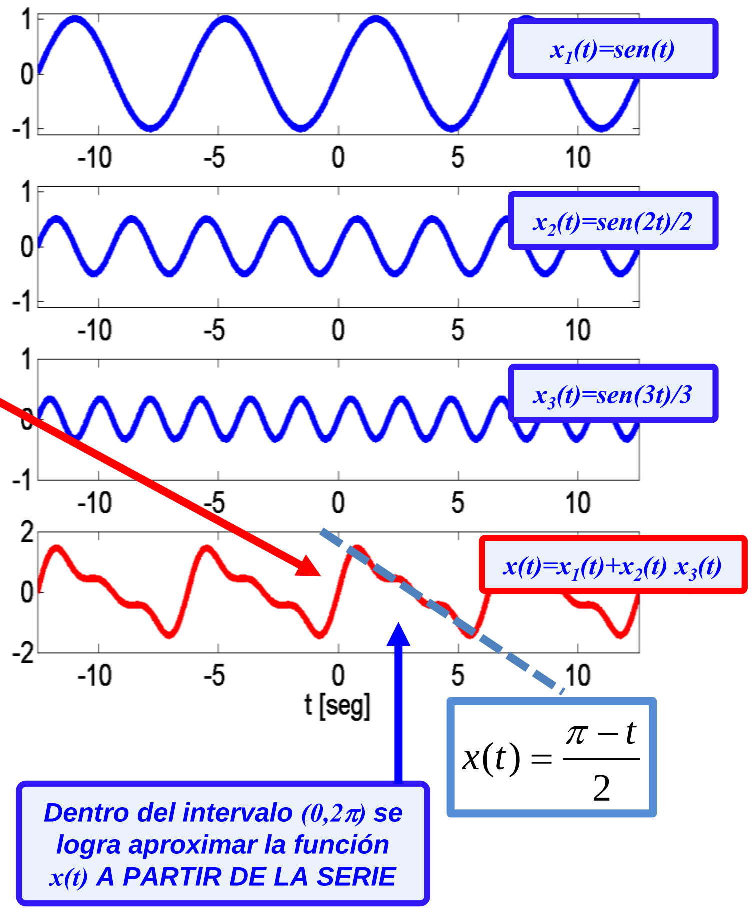
***¿ES DEL TODO CORRECTA?***

***Inmediatamente se observa que en $t=0$ hay una primera inconsistencia en la igualdad: $\pi/2 \neq 0$!!!***

***La clave del problema está en el concepto de FUNCIÓN PERIÓDICA***

# Unidad 5: Series de Fourier
## La Función de Euler

- ***La serie*** propuesta por Euler ***RESULTA PERIÓDICA*** en $T_0=2\pi$ $(\omega_0=1)$
- Es una ***función impar***. No es llamativo, pues se trata de suma de funciones ***senoidales de períodos múltiplo***.
- En el intervalo $0<t<2\pi$, la serie aproxima a $(\pi-t)/2$. ***Pero NO fuera del intervalo…***
- Da ***saltos bruscos*** entre valores positivos y negativos, por lo que dicha aproximación ***"falla en los extremos"***.
- ***Euler no termina de concluir*** que dos expresiones que coinciden en un intervalo ***no coinciden necesariamente*** en todo el rango temporal…

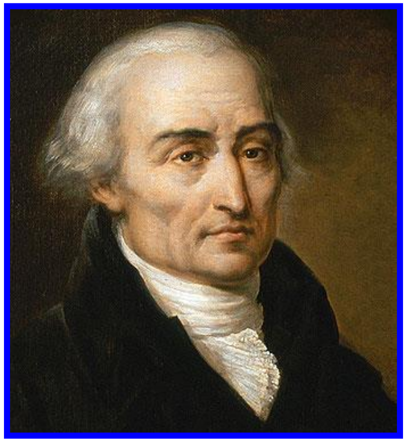


# La Serie de Fourier

En diciembre del año ***1807***, ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** presentó un sorprendente artículo a la ***Academia de Ciencias en París***:

***En el mismo afirmaba que CUALQUIER FUNCIÓN MATEMÁTICA ARBITRARIA PODÍA SER ESCRITA EN FORMA DE SERIE TRIGONOMÉTRICA, de manera semejante al ejemplo de Euler…***

***Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830***



***Joseph-Louis Lagrange 1736-1813***

***POLÉMICA: Joseph-Louis Lagrange (uno de sus maestros junto a Pierre-Simon Laplace y Gaspard Monge) era uno de los muchos que OPINABA QUE DICHA PROPUESTA NO RESULTABA SOSTENIBLE (si bien los resultados ajustaban notablemente a las observaciones). Es por ello que la publicación fue RECHAZADA debido a su falta de "Rigor Matemático" (cuestión no lejana a la realidad, considerando el rigor contemplado en la época, muy diferente al actual)…***

# La Serie de Fourier

Fourier basó su artículo ***en el estudio físico de la ecuación del calor o de difusión en cuerpos sólidos***, que describe la manera en la que la ***temperatura*** $u(x,t)$ se distribuye en una barra de longitud ***L***. Propuso el siguiente ***modelo matemático***, inspirado en la ***ecuación de propagación de ondas mecánicas*** (derivada del problema de la cuerda vibrante), obra de ***Jean le Rond d'Alembert*** en ***1746***:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}}$$

***Para llevar a cabo la resolución, utilizó una solución de variables separadas del tipo $u(x,t)=F(x)G(t)$, de modo de PROPONER luego la siguiente combinación:***

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} sen(nx)}$$

***El problema principal redundó en la DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES $b_n$, de modo de AJUSTAR LA SOLUCIÓN PROPUESTA A LAS OBSERVACIONES EXPERIMENTALES… En dicha búsqueda, y al evaluar el instante $t=0$ (Condición Inicial), ve la luz la "SERIE DE FOURIER" (SdF)***

Dicha propuesta tiene sus ***antecedentes*** ***en la solución esbozada por el mismo d'Alembert*** para su ***ecuación de onda***, constituida por dos ondas viajeras en dirección opuesta a igual velocidad:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} \quad \text{donde} \quad f(x) = CI}$$

***$f(x)$ constituye la forma inicial que adquiere la cuerda al estirarla antes de vibrar (ej. un triángulo). El valor "$a$" depende del tipo de cuerda***

y ***<u>principalmente</u> en la solución*** propuesta años mas tarde por ***Daniel Bernoulli*** (responsable de la ecuación de fluidos que lleva su nombre) en ***1753***:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n a \pi t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

***A partir de esta solución se plantea la POSIBILIDAD DE DESARROLLAR FUNCIONES EN SERIES TRIGONOMÉTRICAS INFINITAS, de distintas frecuencias, a partir de la determinación de los COEFICIENTES $b_n$.***

***La expresión de Bernuolli RECIBIÓ CRÍTICAS de d'Alambert y Euler quiénes <u>no aceptaban que "CUALQUIER FUNCIÓN ARBITRARIA" $f(x)$ pudiera cumplir dicha condición</u>. Si bien Bernoulli tenía razón, NO CONTABA CON LA EXPRESIÓN DE CÁLCULO DE LOS $b_n$ para demostrarlo, <u>HASTA LA APARICIÓN DE FOURIER…</u>***

# La Serie de Fourier

Como ***resultado de su trabajo***, ***Fourier propuso*** que toda función ***periódica*** $x(t)$ de período $T_0$, puede expresarse a través de una serie trigonométrica infinita, denominada posteriormente ***Serie Trigonométrica de Fourier:***

$$\boxed{x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)]}$$

***SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER***

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos(\omega_0 t)+a_2\cos(2\omega_0 t)+\ldots+b_1 sen(\omega_0 t)+b_2 sen(2\omega_0 t)+\ldots}$$

***Considerando la SERIE DE EULER,*** $a_0=0$, $a_n=0$ y $b_n=1/n\ldots$

donde $\omega_0=2\pi/T_0=2\pi f_0$, se denomina ***"Frecuencia Fundamental"***. Como consecuencia de ello, ***$x(t)$ puede expresarse como la suma de funciones sinusoidales de frecuencia múltiplo de $\omega_0$ ($n\omega_0$)***, denominadas ***ARMÓNICAS***. Pero eso no es todo, Fourier proporcionó, además, ***las expresiones para el cálculo de los coeficientes*** $a_n$ y $b_n$...

# La Serie de Fourier

- La academia decide ***no publicar*** el trabajo de Fourier de ***1807***
- Fourier continuó trabajando y publica su libro "***La teoría Analítica del calor***" en ***1822***
- Al poco tiempo es nombrado ***Secretario de la Academia*** y publica su trabajo en ***1826***, prácticamente sin cambio alguno

***A Fourier se le reconoce***:

- El ***modelo matemático*** de la ***ecuación del calor*** (uno de los pilares de la física teórica)
- El ***método de separación de variables*** para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales
- La ***solución de la ecuación mediante series trigonométricas*** (idea original de Bernoulli) de las que deduce la expresión de sus coeficientes $b_n$…

# Obtención de la SdF

Dada entonces una función periódica $x(t)$, ***¿Cómo se obtiene formalmente su SdF?***

$$x(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right] \Rightarrow a_n=?,\quad b_n=?$$

***Deben calcularse los coeficientes $a_n$ y $b_n$ los cuales definen, para cada valor de $n$, la AMPLITUD de los infinitas funciones seno y coseno que constituyen la expresión en serie***

Esencialmente, la obtención de los coeficientes implica la ***aproximación*** de $x(t)$ en términos de su serie $x_s(t)$. El criterio utilizado por Fourier se basó en la ***minimización del error cuadrático medio*** entre ambas, ***en el intervalo de un período $[t_1,t_2]$*** :

$$\boxed{error\ (\varepsilon)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)-x_s(t)\right]^2 dt}$$

***Error cuadrático medio existente entre la función $x(t)$ y su serie, durante un período***

A modo de ejemplo, puede considerarse $x_s(t)=C sen(\omega_0 t)$, de manera de determinar ***un único coeficiente*** $C$ para llevar a cabo la aproximación (el error $\varepsilon$ debe resulta mínimo respecto de $C$):

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t) - C sen(\omega_0 t)\right]^2 dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = 0$$

*Para obtener el error mínimo, se deriva "$\varepsilon$" respecto de "$C$" y se idendifica el valor de $C$ que anula dicha derivada*

Elevando entonces el integrando al cuadrado, efectuando la derivada respecto de $C$ e igualando a cero:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \frac{2}{t_2 - t_1}\left[C\int_{t_1}^{t_2} sen^2(\omega_0 t)dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) sen(\omega_0 t)dt\right] = 0$$

que efectivamente ***resultará un mínimo*** pues se cumple la condición:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C^2} = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} sen^2(t)dt \geq 0$$

*El valor de $C$ determinado constituye UN MÍNIMO, pues la derivada segunda resulta mayor que cero, independientemente de $C$*

## Obtención de la SdF

Finalmente, ***despejando*** $C$ se obtiene:

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)sen(\omega_0 t)\right]dt}{\int_{t_1}^{t_2} sen^2(\omega_0 t)dt}$$

***donde puede advertirse que:***

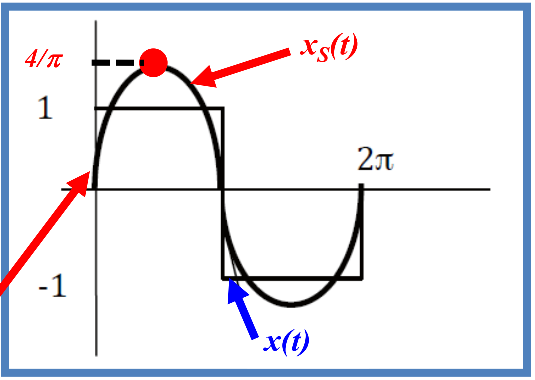
$$C = \frac{\left\langle x(t), sen(\omega_0 t)\right\rangle}{\left\| sen(\omega_0 t)\right\|^2}$$

***PRODUCTO INTERNO o ESCALAR (proyección de $x(t)$ sobre $sen(\omega_0 t)$)***

***NORMA correspondiente a $sen(\omega_0 t)$***

Asumiendo ahora $x(t)$ como una ***señal cuadrada*** de período $2\pi$ y amplitud $\pm 1$, se advierte que:

$$C = \frac{\int_0^{\pi} 1.sen(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1.sen(t)dt}{\int_0^{2\pi} sen^2(t)dt} = \frac{4}{\pi} = 1,2732$$




***La sinusoide DE LA MISMA FRECUENCIA que MINIMIZA el error cuadrático medio respecto de $x(t)$ tiene AMPLITUD $4/\pi$***

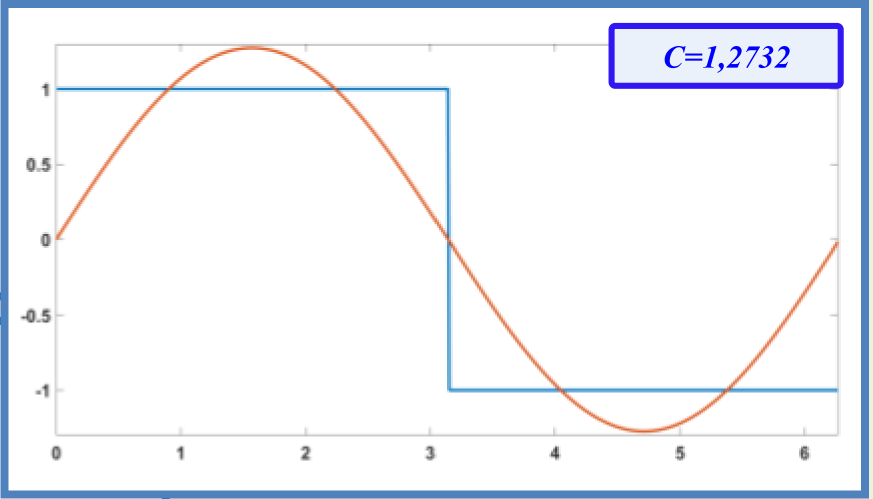
$$x_s(t) = \frac{4}{\pi} sen(t)$$

# Unidad 5: Series de Fourier
## Aplicación en MatLab

```
%AJUSTE POR MINIMIZACIÓN ECM
%Intervalo Temporal [0,2π] (un período)
Ts=0.01;
t=0:Ts:2*pi-Ts;
%Señal Cuadrada a ajustar (0<t<2pi)
x=escalon(t)-2*escalon(t-pi);
%Condición inicial del valor de ajuste
C0=1;
%Ajuste de ambas funciones (x y xs)
C=lsqnonlin(@Aj_xs,C0,[],[],[],t,x);
%Generación de la señal ajustada
xs=C*sin(t);
%Visualización
plot(t,x,t,xs);axis tight;
legend(['Valor ajustado=' num2str(C)]);
```

***Matlab/Octave dispone de una función de ajuste (LSQNONLIN), que implementa la minimización del error cuadrático medio. El error que surge de la diferencia entre la función de ajuste y la función a ser ajustada (según los valores que vayan adquiriendo los coeficientes de análisis), debe ser definido en una función aparte. Se observa que el ajuste de la expresión $C*\sin(t)$ a una señal cuadrada de amplitud unitaria de igual frecuencia, da como resultado $1{,}2732$***

```
%Función de Ajuste C*sin(t)
function error=Aj_xs(C,t,x)
  error=C*sin(t)-x;
end
```



# Obtención de los Coeficientes

## *¿Y cómo se obtiene la totalidad de los coeficientes?*

Efectivamente, ***puede extenderse el procedimiento*** anteriormente descripto ***a una serie completa***, donde los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ caracterizan ***amplitudes de sinusiodes*** de frecuencia ***múltiplo de la fundamental***. Dicha extensión ***resulta factible*** justamente en virtud de ***la ORTOGONALIDAD presente en las funciones seno y coseno utilizadas por Fourier***:

Se dice que las funciones del ***conjunto infinito*** $\{x_n(t)\}$ son ***ortogonales*** en el intervalo $a<t<b$, ***si dos funciones cualesquiera*** $x_m(t)$, $x_n(t)$ de dicho conjunto cumplen la ***siguiente condición***:

$$\boxed{\int_a^b x_m(t)x_n(t)dt = \begin{cases} 0 & para\ m \neq n \\ r_n & para\ m = n \end{cases}}$$

***En esencia, DOS FUNCIONES DISTINTAS resultan ORTOGONALES si su PRODUCTO INTERNO es NULO***

***Valor constante***

# Ejemplo Práctico

**Ejemplo**: El conjunto de funciones $\{f_{1,2}(t)=t;\ t^2\}$ resulta ***orto-gonal*** en el intervalo $-1<t<1$, ya que:

$$\int_{-1}^{1} t\,t^2 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} t\,t dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

CASO $m \neq n$ (1,2 y 2,1)

CASO $m=n$ (1,1 y 2,2)

**Ejemplo**: El conjunto de funciones $\{f_n(t)=\cos(nt)\}$ resulta ***or-togonal*** en el intervalo $-\pi<t<\pi$, ya que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos(2t)dt = \left.\frac{sen(2t)}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(t)dt = \left.\frac{t+sen(2t)}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

CASO $m \neq n$ (0,2 y otros)

CASO $m=n$ (1,1 y otros)

# Ortogonalidad en SdF

Particularmente, Fourier utilizó ***la base de funciones ortogonales*** $\{f_n(t)=\cos(n\omega_0 t),\ sen(n\omega_0 t)\}$, evaluadas en un período $T_0$:

***$f_n(t)=\{1,\ \cos(\omega_0 t),\ \cos(2\omega_0 t),\ \cos(3\omega_0 t),\ldots,\ sen(\omega_0 t),\ sen(2\omega_0 t),\ sen(3\omega_0 t),\ldots\}$ con $\omega_0=2\pi/T_0$***

***Funciones seno y coseno de frecuencia MÚLTIPLO de $\omega_0$***

donde en efecto ***se verifica***:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq m \neq 0 \\ \dfrac{T_0}{2} \ si \ n = m \neq 0 \\ T_0 \ si \ n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} sen(m\omega_0 t)sen(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq m \neq 0 \\ \dfrac{T_0}{2} \ si \ n = m \neq 0 \\ 0 \ si \ n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} sen(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0 \ \ para \ m, n \ arbitrarios$$

***La METODOLOGÍA DE OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES de la serie tomará ventaja (principalmente) de que la integral del PRODUCTO CRUZADO ($sen \times cos$) resulta NULA (ortogonal), independientemente de los valores de $m$ y $n$***

# Ortogonalidad en SdF

Considerando entonces la ***ortogonalidad*** del conjunto de funciones seno y coseno, la obtención de las ***fórmulas que definen los coeficientes*** $a_n$ y $b_n$ de la ***SdF*** se ***demostrará*** en términos del ***siguiente procedimiento matemático***, equivalente al de la minimización del error cuadrático medio anteriormente presentado (nótese que se utilizará temporalmente la variable $k$).

Sea entonces la ***Serie propuesta por Fourier*** para la señal ***periódica*** $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k sen(k\omega_0 t) \right]$$

***$x(t)$ es periódica, de período $T_0$ y frecuencia $\omega_0$***

Multiplicando ahora ambos miembros de la expresión por la función $\cos(n\omega_0 t)$:

$$x(t)\cos(n\omega_0 t) = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k sen(k\omega_0 t) \right] \right\} \cos(n\omega_0 t)$$

***Se multiplican ambos miembros por $\cos(\omega_0 t)$***

# Obtención de los Coeficientes

para luego integrar sobre cualquier período $T_0=[t_1, t_2]$:

*Integral sobre cualquier período $T_0$*

$$\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{\langle T_0\rangle} \cos(n\omega_0 t)dt}_{\substack{0,\ si\ n\neq 0\\ T_0\ si\ n=0}} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{\langle T_0\rangle} \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt}_{\substack{0,\ si\ n\neq 0\ y\ n\neq k\\ 0,\ si\ n=0\\ T_0/2,\ si\ n=k}} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{\langle T_0\rangle} sen(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt}_{=0\ para\ todo\ k,\ n}$$

y donde en virtud de ***todos los posibles valores*** de $n$ $(0$ $a$ $+\infty)$ ***se advierte***:

- La sumatoria de los $b_k$ es ***siempre nula***, dada la ortogonalidad seno-coseno:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\langle T_0\rangle} sen(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0$$

# Obtención de los Coeficientes

La expresión queda entonces:

$$\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{<T_0>} \cos(n\omega_0 t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{<T_0>} \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

*0, si $n \neq 0$; $T_0$ si $n = 0$*

*0, si $n \neq 0$ y $n \neq k$; 0, si $n=0$; $T_0/2$, si $n = k$*

- Si $n=0$, se obtiene el resultado: $\int_{<T_0>} x(t)dt = \frac{a_0}{2}T_0$ ➡ $\boxed{a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt}$
- Para ***cada valor*** de $n \neq 0$, los términos de la sumatoria correspondiente a los $a_k$ son nulos excepto ***para la condición $k=n$***, de modo que ***la suma total*** resulta $a_n T_0/2$:

$$\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = a_n \frac{T_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt}$$

# Obtención de los Coeficientes

De manera que finalmente se obtiene ***la expresión correspondiente al cálculo*** de los coeficientes $\boldsymbol{a_n}$:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)dt}$$

***NÓTESE que $a_0/2$ representa el VALOR MEDIO de $x(t)$***

Aplicando la misma metodología, pero multiplicando ambos miembros de la expresión de la ***SdF*** por la función ***$sen(n\omega_0 t)$*** e integrando en ***cualquier*** período ***$T_0$***, se obtiene el resultado correspondiente al ***cálculo de los coeficientes*** $\boldsymbol{b_n}$:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)sen(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots}$$

$$\boxed{b_0 = 0}$$

***El valor de "$n$" identifica el NÚMERO DE ARMÓNICA correspondiente al PAR SENO-COSENO, de frecuencia "$n\omega_0$": $n=1$→PRIMERA armónica → frecuencia $\omega_0$ (Fundamental), $n=2$ → SEGUNDA armónica → frecuencia $2\omega_0$,...)***

# Obtención de los Coeficientes

***Increiblemente***, existe una ***memoria de Euler de 1777*** (<u>desconocida en su totalidad por Fourier</u>, quién efectúa su presentación en ***1807***), donde ***admite la posibilidad*** que la condición inicial del problema de la cuerda vibrante ***f(x), pueda estar descripta por***:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$$

***Deduce la igualdad a partir expresar $f(x)$ como una función de variable compleja $F(z)$ y expandirla en series...***

y donde calcula los coeficientes $a_k$ ***aprovechando la <u>ortogonalidad de de las funciones coseno</u>!!!*** (Fórmula parcial de Fourier):

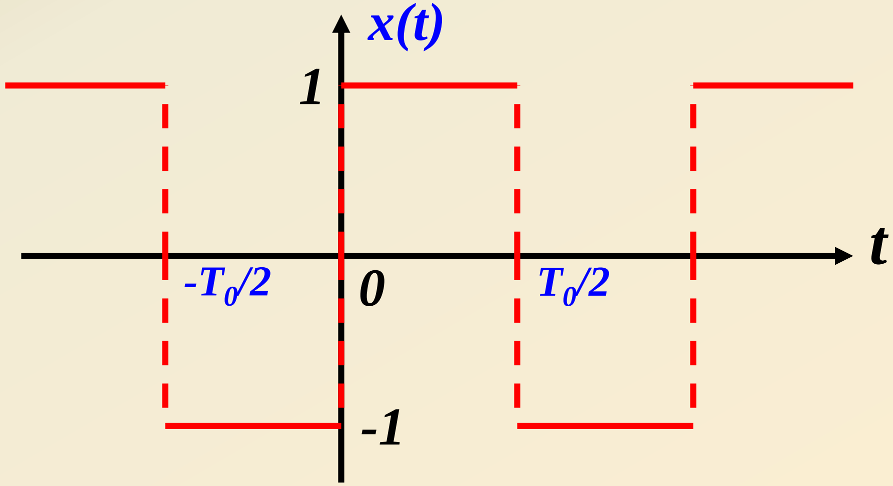
$$\boxed{a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx}$$

# Ejemplo Práctico

**Ejemplo**: Encontrar la expresión de la ***Serie de Fourier*** correspondiente a la siguiente ***SEÑAL PERIÓDICA*** $x(t)$, de periodo $T_0$:

$$x(t) = \begin{cases} -1 & para \; -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ 1 & para \; 0 < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$x(t)$ *PERIÓDICA de frecuencia* $\omega_0 = 2\pi/T_0$




Se procederá entonces a determinar ***los coeficientes*** $a_n$ y $b_n$, que constituyen la expresión de $x(t)$ en ***SdF***:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

*Los coeficientes $a_n$ y $b_n$ determinan las AMPLITUDES de las SINUSOIDES de la serie*

# Ejemplo Práctico

**1.** Obtención del ***Coeficiente*** $a_0$:

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T_0/2}^{0} -1.dt + \int_{0}^{T_0/2} 1.dt\right] = \frac{2}{T_0}\left[-t\Big|_{-T_0/2}^{0} + t\Big|_{0}^{T_0/2}\right] \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

*x(t)* **posee VALOR MEDIO NULO**

**2.** Obtención de la expresión general de los ***coeficientes*** $a_n$:

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0} -1.\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} 1.\cos(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\left[-\frac{1}{n\omega_0} sen(n\omega_0 t)\Big|_{-T_0/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0} sen(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T_0/2}\right] \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

*x(t)* **no requiere de coeficientes** $a_n$ **para su representación en SdF**

**3.** Obtención expresión general de los ***coeficientes*** $b_n$:

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)sen(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0} -1.sen(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} 1.sen(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\left[\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-T_0/2}^{0} - \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T_0/2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{T_0 n\omega_0}\left[(1-\cos(-n\omega_0\frac{T_0}{2})) - (\cos(n\omega_0\frac{T_0}{2})-1)\right]$$

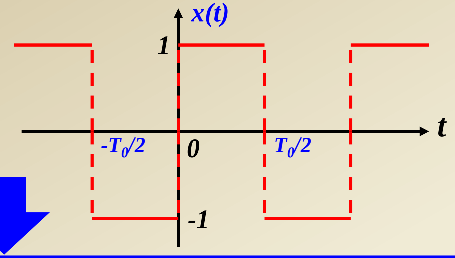
**OBSERVAR que:** $\omega_0=2\pi/T_0 \rightarrow \omega_0 T_0=2\pi$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n\pi}\left[2-2\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]}$$

**Recordar que la expresión de los $b_n$ corresponde a $n>0$, pues $b_0=0$ por definición.**
**Asimismo, se observa**
$\cos(n\pi)=(-1)^n$
**LAS ARMÓNICAS PARES RESULTAN NULAS**

# Ejemplo Práctico

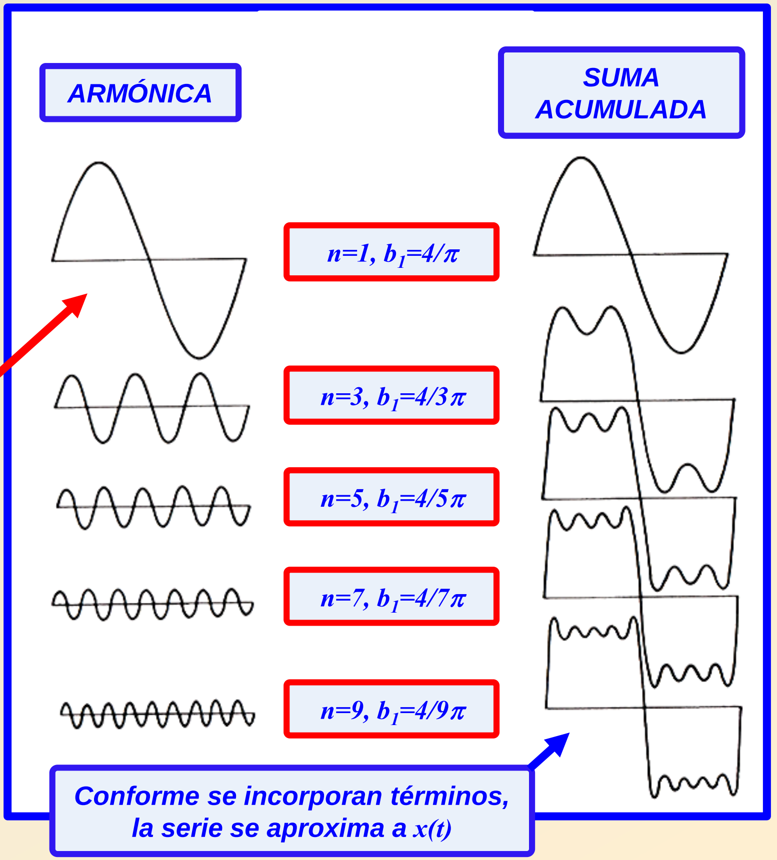
Finalmente, ***x(t)*** ***queda expresada*** en su ***SdF*** como:




$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right] sen(n\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[\begin{array}{l} sen(\omega_0 t) + \frac{1}{3} sen(3\omega_0 t) + \\ \frac{1}{5} sen(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} sen(7\omega_0 t) + \ldots \end{array}\right]$$



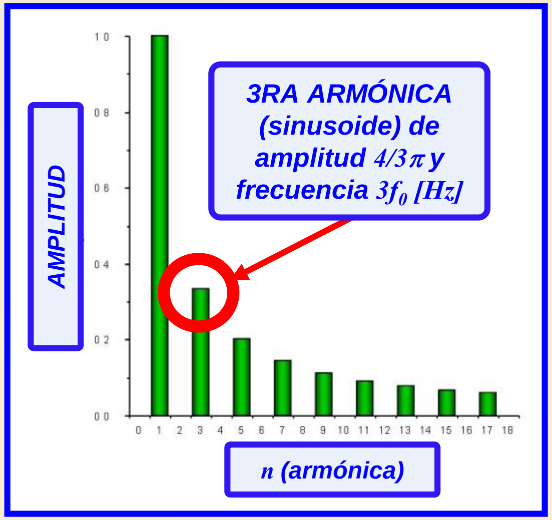
# Ejemplo Práctico

## ¿Qué se observa en el resultado de la SdF obtenida?

- La señal $x(t)$ **es de tipo impar**, por lo que resultó suficiente la utilización de ***funciones seno para representarla*** (los coeficientes $a_n$ ***se anularon***).

- La señal $x(t)$ presenta una "***simetría media onda***" (condición $x(t \pm T_0/2) = -x(t)$), razón por la cual ***se anularon*** las ***componentes armónicas*** correspondientes a los "$n$" ***pares***.

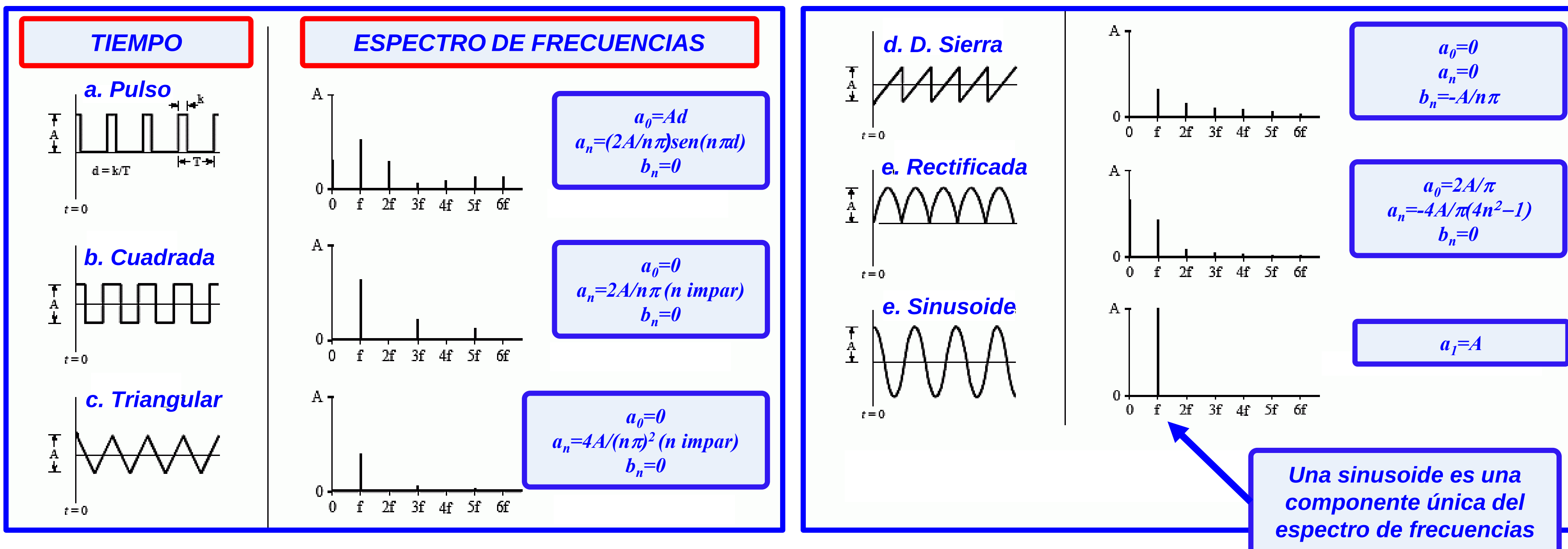
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1-(-1)^n}{n} \right] sen(n\omega_0 t)$$




*El gráfico denominado "ESPECTRO DE FRECUENCIAS" describe los valores de los coeficientes (sólo los $b_n$ en este caso) en relación a la ARMÓNICA ($n$) o FRECUENCIA ($nf_0$) que representan*

# Otros Ejemplos

En la tabla pueden apreciarse las diversas expresiones de los coeficientes $a_n$ y $b_n$ en virtud del tipo de señal, junto con sus ***Espectros Frecuenciales***:



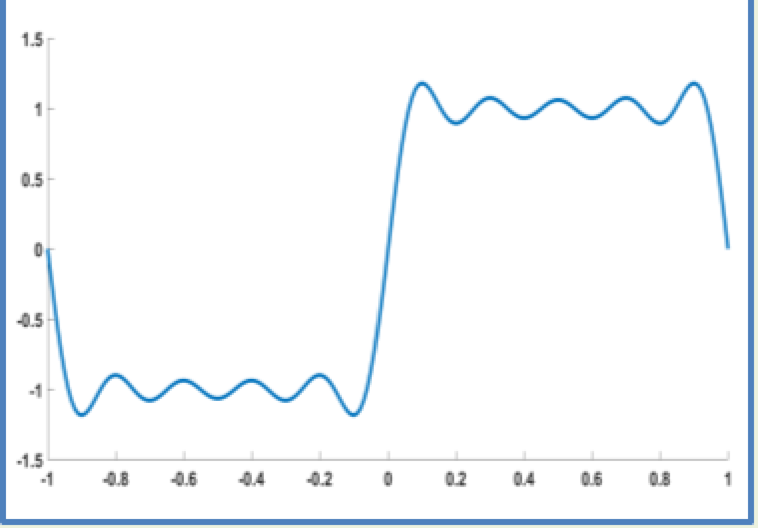

***Según las DISTINTAS SIMETRÍAS PRESENTES EN LAS SEÑALES, pueden llegar a anularse los coeficientes $a_n$, los $b_n$ o componentes armónicas pares o impares***

# Unidad 5: Series de Fourier
## Aplicación en MatLab

```
%SÍNTESIS DE UNA SERIE DE FOURIER
Ts=0.01;
T0=2;
t=-T0/2:Ts:T0/2;
w0=2*pi/T0;
%Sumatoria de N=10 Coeficientes
N=10;
x_N=0;
for n=1:N
  x_N=x_N+(2/pi)*(1-(-1)^n)*sin(n*w0*t)/n;
end
plot(t,x_N);
```

***Una vez obtenidos los coeficientes de la expresión en SdF de una señal $x(t)$, puede llevarse a cabo una reconstitución parcial (utilizando N coeficientes) a través de un ciclo FOR en Matlab/Octave. Dicho procedimiento se denomina SÍNTESIS***

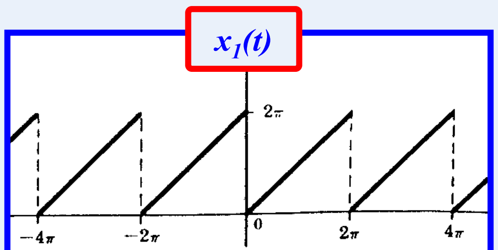
$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[ sen(\omega_0 t) + \frac{1}{3} sen(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} sen(5\omega_0 t) + \ldots \right]$$

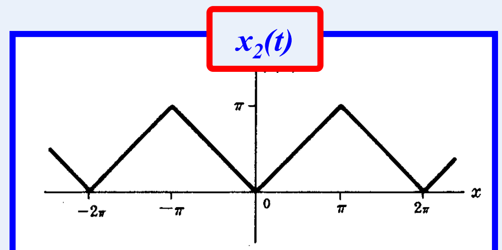



***Expresión de $x(t)$ utilizando $N=10$ coeficientes de su SdF***

## Consigna de la clase #A (30 minutos)

Utilizar ***Matlab*** para ***sintetizar las siguientes expresiones*** en Series de Fourier, identificando los coeficientes $a_n$ y $b_n$. Efectuar el gráfico de su ***Espectro de Frecuencias*** ($N=10$ coeficientes), con el ***eje de abscisas en Hz***. Verificar ***analíticamente*** los desarrollos en serie, partiendo de sus definiciones correspondientes.




$$x_1(t) = \pi - 2\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\right)$$

$$x_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots\right)$$

# Serie de Fourier de Sinusoides

## ¿La Serie de Fourier aplicada a funciones sinusoidales?

Sea la siguiente señal periódica ***x(t)***:

$$\boxed{x(t) = 1 + \cos(3t)}$$

*$x(t)$ **se encuentra constituida por una sinusoide más una constante y su frecuencia es** $\omega_0=3\ 1/s$*

donde los ***coeficientes de su SdF*** resultan:

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1+\cos(3t)\right]dt = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} = 1$$

*$x(t)$ **presenta un término independiente y el valor medio de la sinusoide es nulo. Asimismo,** $T_0=2\pi/\omega_0=2\pi/3\ s$*

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1+\cos(3t)\right]\cos(3nt)dt = \begin{cases} 1, & \text{si } n=1 \\ 0, & \text{si } n\neq 1 \end{cases}$$

*$x(t)$ **presenta sólo una función coseno, es por ello que hay un único coeficiente** $a_1$*

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)sen(n\omega_0 t)dt = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1+\cos(3t)\right]sen(3nt)dt = 0 \quad \text{para todo } n$$

*$x(t)$ **no presenta funciones seno, es por ello que los** $b_n$ **resultan nulos***

y la ***SdF*** queda entonces expresada como: $\boxed{x(t) = 1 + \cos(1.3t)}$

***¡LA SERIE ES LA PROPIA FUNCIÓN PUES ESTÁ DEFINIDA EN SINUSOIDES MÚLTIPLOS DE UNA FRECUENCIA $\omega_0$! NO ES NECESARIO EFECTUAR EL CÁLCULO:***

$\omega_0=3,\ a_0/2=1,\ a_1=1,\ b_n=0$

# Simetría y Coeficientes de la SdF

***A partir de ahora se ENTENDERÁ que $x(t)$ está definida SÓLO EN EL INTERVALO QUE SE ESPECIFIQUE. Y que la SdF LA EXTIENDE PERIÓDICAMENTE, con periodo $T_0$ igual al intervalo de definición (similar a expresado por Euler, sin advertirlo)***

A la vista de los resultados previos, y en virtud de que la función $sen(n\omega_0 t)$ es ***impar*** y la función $cos(n\omega_0 t)$ es ***par***, para todo $n$, puede demostrarse formalmente que:

- Si $x(t)$ es una función ***IMPAR***, ***su SdF SÓLO CONTENDRÁ términos de FUNCIONES SENO***, por lo tanto $a_n=0$ para todo $n$:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0$$

***El producto de una función impar $x(t)$ por otra par $cos(\omega_0 t)$ da como resultado una función IMPAR en el período $T_0$, cuyo valor al ser integrada es NULO***

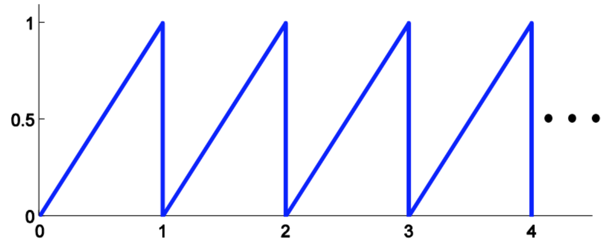
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)sen(n\omega_0 t)dt \neq 0$$

***El producto de una función impar $x(t)$ por otra impar $sen(\omega_0 t)$ da como resultado una función PAR en el período $T_0$, cuyo valor al ser integrada es distinto de cero***

# Simetría y Coeficientes de la SdF

- Si $x(t)$ es una función ***PAR***, ***su SdF SÓLO CONTENDRÁ términos de FUNCIONES COSENO***, por lo tanto $b_n=0$ para todo $n$.
- Si $x(t)$ no es ***NI PAR***, ***NI IMPAR*** ***su serie de Fourier contendrá términos de funciones seno y coseno***.

Un caso particular es aquel donde las ***funciones impares*** ***son afectadas por la suma de un término independiente***, perdiendo dicha condición (existencia de simetría encubierta). En tal situación, los coeficientes $b_n$ ***serán exactamente los mismos***, mientras que los coeficientes $a_n$ seguirán siendo nulos, ***excepto*** $a_0$, debido a que el ***valor medio*** de la función resultará distinto de cero.




$a_0=1/2$

$a_n=0$

$b_n=-1/n\pi$

## Serie Trigonométrica de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) sen(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

***$a_0/2$ VALOR MEDIO de $x(t)$***

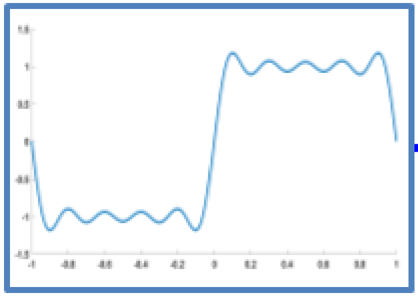
$$b_0 = 0$$

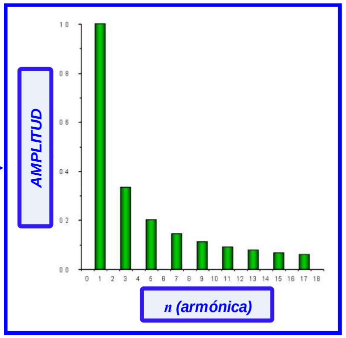
## Propiedades de Paridad de la SdF

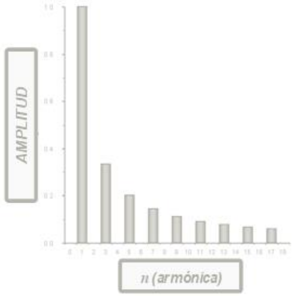
***Si $x(t)$ es IMPAR, su SdF SÓLO CONTENDRÁ funciones SENO, por lo tanto $a_n = 0$ para todo $n$***

***Si $x(t)$ es PAR, su SdF SÓLO CONTENDRÁ funciones COSENO, por lo tanto $b_n = 0$ para todo $n$***

## Síntesis y Espectro de Frecuencias








$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

## U5 Series de Fourier

# ¿CONSULTAS?

## Foro Campus Virtual: Series de Fourier