Coseno de fase y amplitud aleatoria

Procesos estocásticos

Análisis de Señales y Sistemas

UTN-FRBA

Contenido

Contenido

Para aquellos procesos donde pueden obtenerse las infinitas muestras del ensamble la estadística del ensamble puede calcularse de la siguiente manera:

- **Valor Esperado:** $$\boxed{E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) f_{x(t_1)} dx(t_1)}$$
- **Valor Cuadrático:** $$\boxed{E[x^2(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t_1) f_{x(t_1)} dx(t_1)}$$
- **Autocorrelación:** $$\boxed{\varphi_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) x(t_2) f_x[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2)}$$

Estacionariedad

SSS - Strict-Sense Stationarity

Dependen solo de los tiempos relativos en los que se toman las muestras, no de los tiempos absolutos. Es decir, estacionario de orden n $\forall n$

WSS - Wide-Sense Stationarity

- $\eta_x(t) = E[X(t)] = \eta_x = \text{cte}$ (Orden 1)
- $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$ (Orden 2)

Contenido

Ejemplo 1

Coseno con fase aleatoria

- Determinar si un tono con fase aleatoria $X(t) = A.\cos(\omega.t + \theta)$ con θ uniforme en $[-\pi, \pi]$ es un proceso estacionario en sentido amplio.

media

$$\eta_x(t) = \mathrm{E}[A.\cos(\omega.t + \theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A.\cos(\omega.t + \theta)\mathrm{d}\theta = 0 \Rightarrow cte$$

autocorrelación

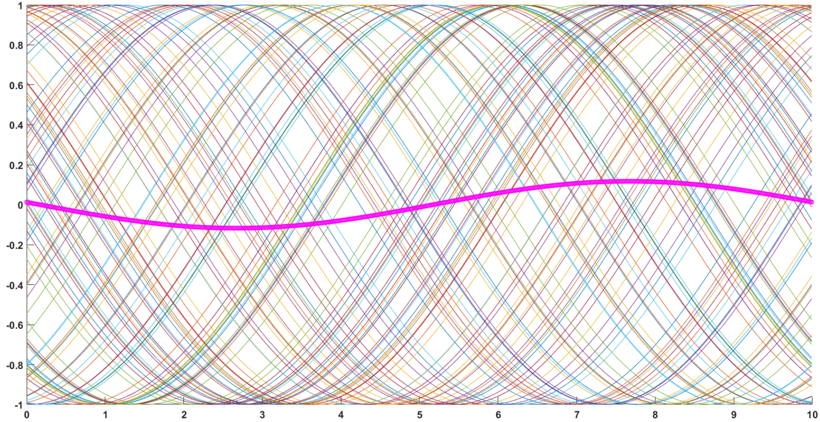
$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}[A.\cos(\omega.t_1+\theta).A.\cos(\omega.t_2+\theta)] \\
R_X(t_1,t_2) &= \frac{A^2}{2}.\left\{\underbrace{\mathrm{E}[\cos(\omega.(t_1+t_2)+2\theta)]}_{=0}+\mathrm{E}[\cos(\omega.(t_1-t_2))]\right\} \\
R_X(t_1,t_2) &= \frac{A^2}{2}.\frac{\cos(\omega.(t_1-t_2))}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
R_X(t_1,t_2) &= \frac{A^2}{2}.\cos(\omega.(\tau))
\end{aligned}
$$

autocovarianza

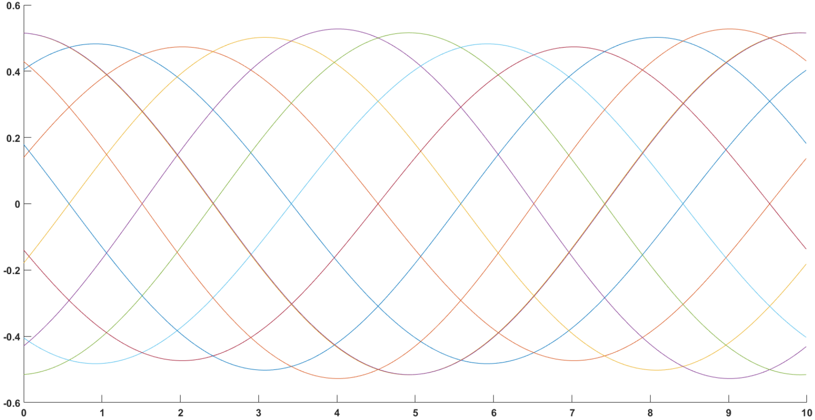
$$
\begin{aligned}
C_X(t_1,t_2) &= R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) = R_X(t_1,t_2) \\
C_X(t_1,t_2) &= \frac{A^2}{2}.\cos\left(\omega.(\tau)\right)
\end{aligned}
$$

estacionariedad

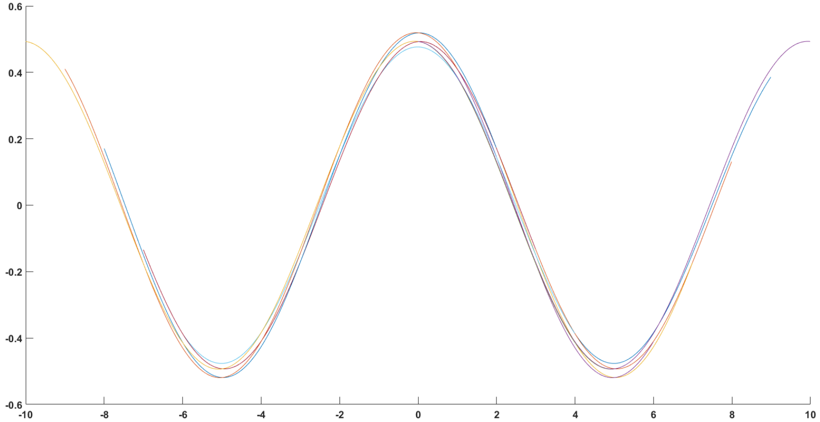
- La media es constante (independiente del tiempo absoluto)
- La autocorrelación es dependiente de tiempos relativos
- El coseno con fase como variable aleatoria es WSS


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

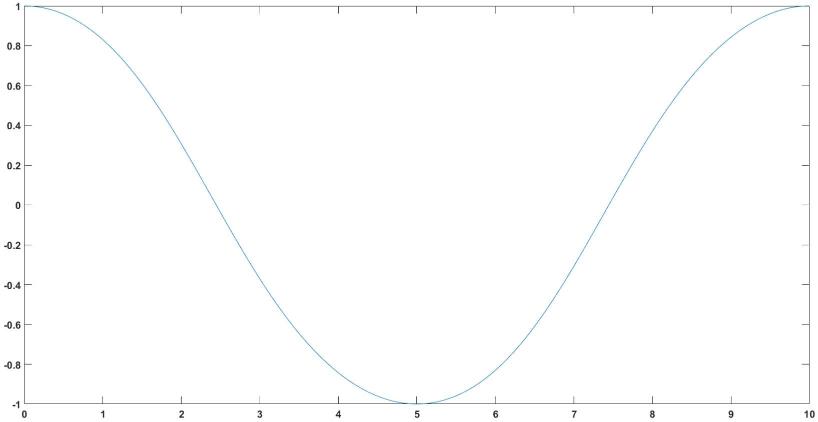
Autocorrelación



Autocorrelación (τ)



coeficiente de correlación



Contenido

Ejemplo 2

Coseno con amplitud aleatoria

- Determinar si un tono con amplitud aleatoria $X(t) = A.\cos(\omega.t + \theta)$ con A centrado en 10 y distribución normal es un proceso estacionario en sentido amplio.

media

$$\eta_x(t) = \mathrm{E}[A.\cos(\omega.t)] = E[A].\cos(\omega.t) \nRightarrow cte$$

autocorrelación

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}[A.\cos(\omega.t_1+\theta).A.\cos(\omega.t_2+\theta)] \\ R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}[A^2].\cos(\omega.t_1).\cos(\omega.t_2) \end{aligned}$$

autocovarianza

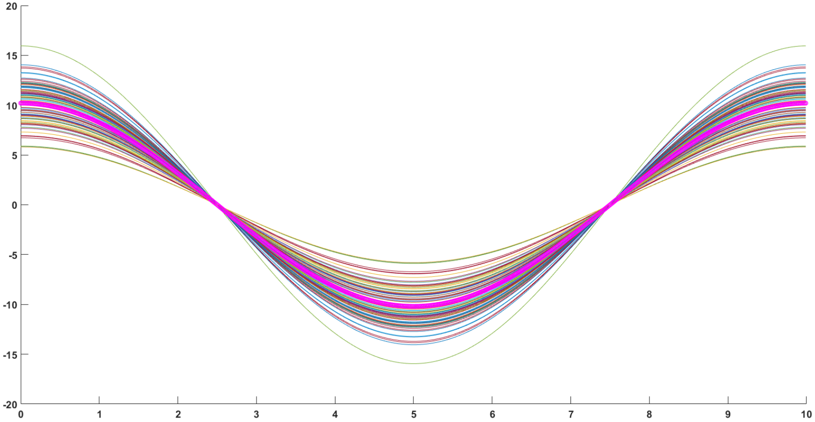
$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= R_x(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2) \\ C_X(t_1,t_2) &= (\mathrm{E}[A^2] - \mathrm{E}[A]^2).\cos(\omega.t_1).\cos(\omega.t_2) \\ C_X(t_1,t_2) &= \sigma^2(A).\cos(\omega.t_1).\cos(\omega.t_2) \end{aligned}$$

varianza

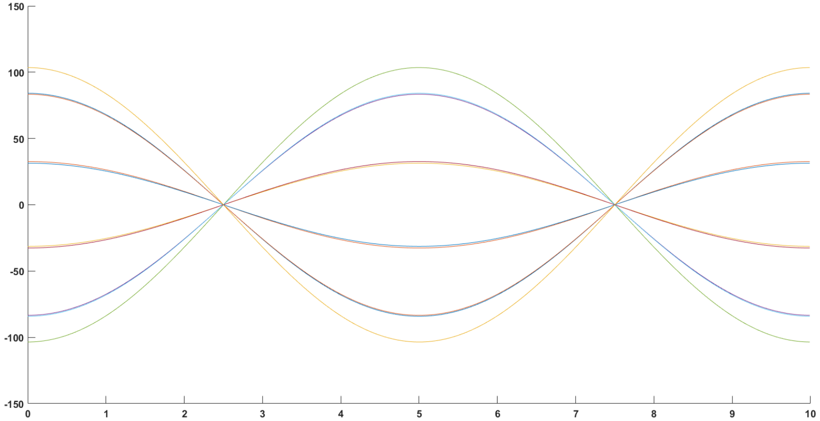
$$\begin{aligned}
\sigma^2(X(t)) &= \mathrm{E}[X^2(t)] - \eta_X^2(t) \\
\sigma^2(X(t)) &= \mathrm{E}[A^2].\cos^2(\omega.t) - (\mathrm{E}[A].\cos(\omega.t))^2 \\
\sigma^2(X(t)) &= \sigma^2(A).\cos^2(\omega.t)
\end{aligned}$$

coeficiente de correlación

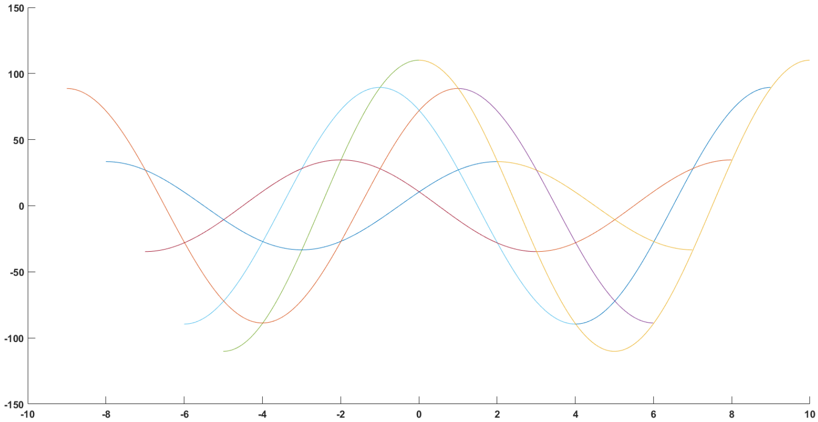
$$\begin{aligned}
\rho_X(t_1,t_2) &= \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma^2(X(t_1)).\sigma^2(X(t_2))}} \\
\rho_X(t_1,t_2) &= \frac{\sigma^2(A).\cos(\omega.t_1).\cos(\omega.t_2)}{\sqrt{\sigma^2(A).\cos^2(\omega.t_1).\sigma^2(A).\cos^2(\omega.t_2)}} \\
\rho_X(t_1,t_2) &= \frac{\cos(\omega.t_1).\cos(\omega.t_2)}{|\cos(\omega.t_1)|\,.\,|\cos(\omega.t_2)|}
\end{aligned}$$


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

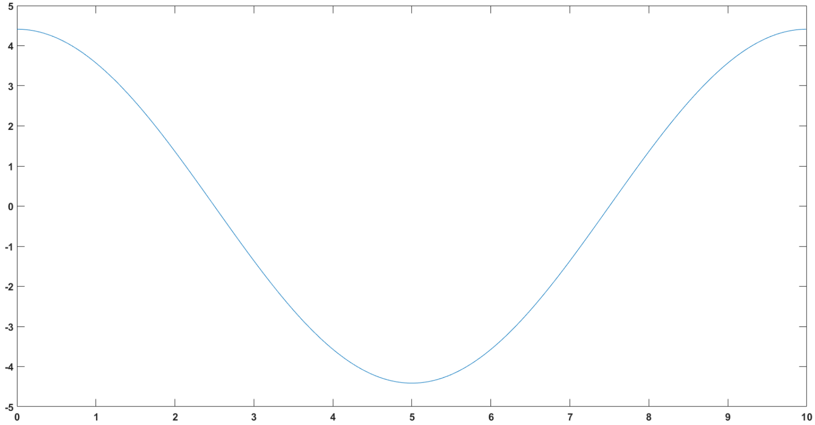
Autocorrelación



Autocorrelación (τ)



Autocovarianza



coeficiente de correlación