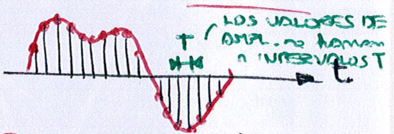
FOURIER EN TIEMPO DISCRETO : TEOREMA DEL MUESTREO

¿CÓMO SE OBTIENEN LAS SEÑALES DIGITALES?

⇒ MEDIANTE una técnica llamada MUESTREO → posibilita la CONVERSIÓN de una SEÑAL CONTINUA en otra de carácter DISCRETO

⇒ P/ello toma VALORES DE AMPLITUD de la misma en INSTANTES temporales ESPECÍFICOS (INTERVALO DE MUESTREO)

⇒ ¿Se preserva INFORMACIÓN independientem. del T elegido?



PROCESO DE MUESTREO IDEAL → se puede hacer MULTIPLICANDO una SEÑAL CONTINUA $x(t)$ por UN TREN DE IMPULSOS DE PERÍODO T_S, DE MODO DE CAPTURAR los VALORES MUESTRA $x_p(t)$

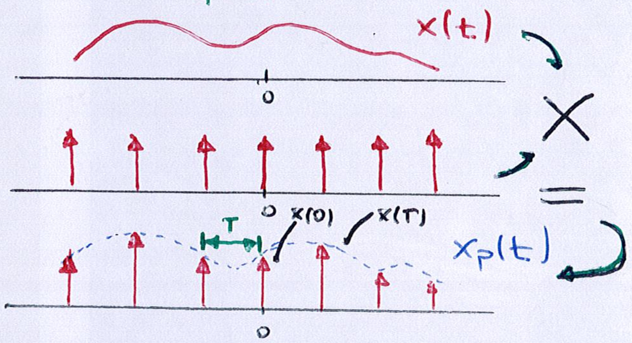
MULTIPL.

$x(t) \rightarrow \otimes \rightarrow x_p(t) = x(t)p(t)$

$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$

SEÑAL DE MUESTREO —

$F_S = \frac{1}{T_S}$ → FREC. DE MUESTREO



$$\left[x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S)\,\delta(t - nT_S) \right] \Longleftrightarrow \text{SEÑAL MUESTREADA}$$

⇒ Aplicamos TF a $x_p(t)$ ⇒ $x_p(t) = x(t)p(t)$ ⇒ $\left[X_p(w) = \frac{1}{2\pi} X(w) * P(w) \right]$

¿Qué FORMA LE CORRESPONDE AL ESPECTRO DEL TREN DE IMPULSOS $P(w)$ → APLICAMOS TF p/PERIÓDICA

$$F(w) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(w - nw_s) \quad \text{donde} \quad C_n = \frac{1}{T_S}\int_{-T_S/2}^{T_S/2} \delta(t) e^{-jnw_s t} \overset{\text{PROP. }\delta}{=} \int_{-T_S/2}^{T_S/2} \delta(t).1dt = \frac{1}{T_S}$$

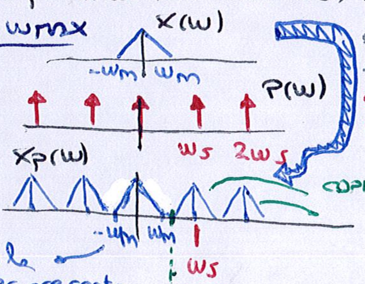
efectuando el reempl.: $\left[P(w) = \frac{2\pi}{T_S} \sum_K \delta(w - Kw_s) = w_s \sum_K \delta(w - Kw_s) \right]$ LA TF DE UN TREN DE IMPULSOS ESPACIADOS en T_S, es un TREN DE IMPULSOS ESPACIADO en w_s

efectuando por último CONVOLUCIÓN entre los espectros obtenemos $X_p(w)$:

$$\left[X_p(w) = \frac{1}{2\pi} X(w) * P(w) = \underbrace{\frac{w_s}{2\pi}}_{1/T_S} \sum_K \underbrace{X(w) * \delta(w - Kw_s)}_{F(w) * \delta(w - w_s) = F(w - w_s)} = \frac{1}{T_S} \sum_K X(w - Kw_s) \right]$$

Si $x(t)$ es UNA SEÑAL DE BANDA LIMITADA $[0, w_m]$, los espectros resultantes de aplicar el proceso de MUESTREO (conv. en F) SE REPLICAN : w_m es w_{max}

⇒ LA INFORMACIÓN SE PRESERVA en las MUESTRAS y puede RECONSTRUIRSE



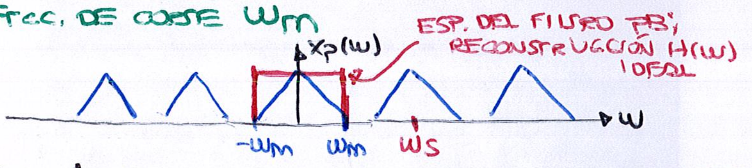
el MUESTREO genera un ESPECTRO CONTINUO PERIÓDICO en el dom. frec

COPIAS DE X(w) cada w_s

w_m es la máx frec presente en $X(w)$

¿CÓMO SE RECUPERA ENTONCES UNA SEÑAL CONTINUA A PARTIR DE LA MUESTREADA? ($x(t)$ a partir de $x_p(t)$)

⇒ consiste en APLICAR a $x_p(t)$ UN FILTRO PASABAJOS con Frec. DE CORTE w_m



$$\Rightarrow \left[H(w) \begin{cases} 1 & \text{si } |w| \leq w_m \\ 0 & \forall w \end{cases} \Rightarrow X(w) = X_p(w) H(w) \right]$$

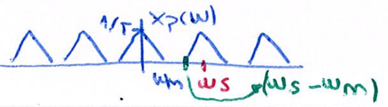
⇒ cuanto más cercanos los ESPECTROS ENTRE SI ($w_s \sim 2w_m$) MÁS ABRUPTO DEBERÁ SER EL FILTRO DE RECUPERACIÓN EN SU CAÍDA ⇒ por ello se ~~~~ ELIGE w_s en VALORES SUPERIORES al DOBLE DE w_m (F. MAX)

¿Qué se DESPRENDE DE LO ANTERIOR? ⇒ como el ESPECTRO se REPLICA CADA w_s, se INFIEREN LAS SIGUIENTES CONDICIONES, DEF. POR EL TEOREMA DE NYQUIST SINO se PRODUCE ALIASING

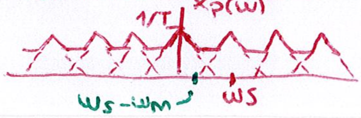
(A) ⇒ SI $w_s \geq 2w_m$ ⇒ LA INFORMACIÓN se PRESERVA y se puede RECUPERAR ($w_s - w_m \geq w_m$; $w_s \geq 2w_m$)

(B) ⇒ SI $w_s < 2w_m$ ⇒ LA INFORMACIÓN NO SE PUEDE RECUPERAR (muestreo lento, se pierden VARIACIONES RÁPIDAS)

(A)

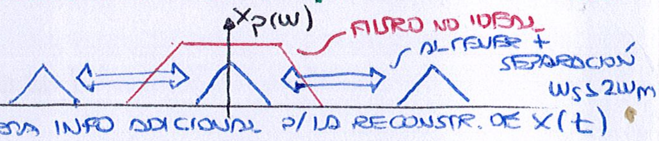


(B)



¿EL AUMENTO DE LA FREC DE MUESTREO GARANTIZA LA PRESERVACIÓN DE INFO. ADICIONAL DE LA SEÑAL?

DEFINITIVAMENTE NO. Su aumento GARANTIZA mayor dist. entre los ESPECTROS REPLICADOS por lo cual el FILTRO DE RECONSTRUCCIÓN NO NECESITA SER TAN ABRUPTO, Y POR ENDE MENOS COMPLEJO Y COSTOSO en su REALIZACIÓN)

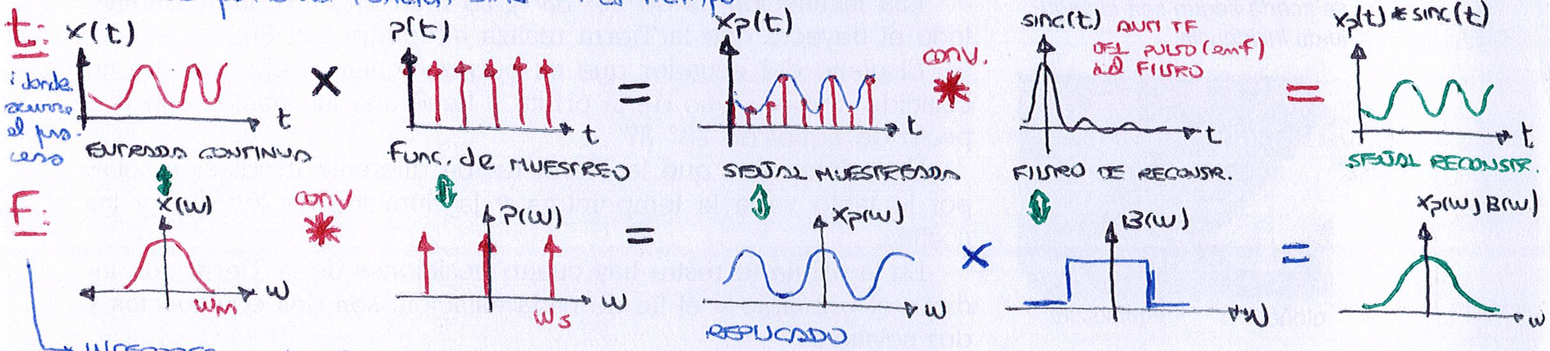


⇒ El costo de aumentar fs IMPLICA el ALMACENAMIENTO DE MAYOR CANTIDAD DE MUESTRAS por seg PERO NO APORTA INFO ADICIONAL P/ LA RECONSTR. DE X(t)

INTERPRETANDO LA APLICACIÓN DEL FILTRO PB A LA SEÑAL MUESTREADA EN LA RECONSTR. DE LA S. ANALÓGICA

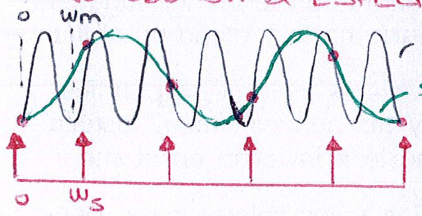
⇒ La aplic. de un FILTRO PB IDEAL conlleva una MULTIPL. por un PULSO RECTANG. en frec.

⇒ Dicha operación implica que LOS IMPULSOS que CONSTITUYEN las MUESTRAS TEMPORALES serán CONVOLUCIONADOS por una función sinc en el tiempo



¿CÓMO PERJUDICA EL HECHO DE NO LIMITAR EN BANDA LA SEÑAL AL SER MUESTREADA?

⇒ Si la fs (frec. muestreo (ws)) NO CUMPLE con la ESTABLECIDA POR NYQUIST ($w_s \geq 2w_m$) SE GENERAN COMPONENTES ERRÓNEAS en el ESPECTRO (ALIAS)



ES COMO SI SE OBTUVIERAN MUESTRAS DE UNA SEÑAL DE MENOR FRECUENCIA QUE LA QUE SE QUIERE MUESTREAR (FRECUENCIAS DE REFLEXIÓN)

EFECTO REFLEXIÓN

⇒ Si fs no es MAYOR a 2fm, es como si se muestreara una frec. DE MENOR VALOR INEXISTENTE

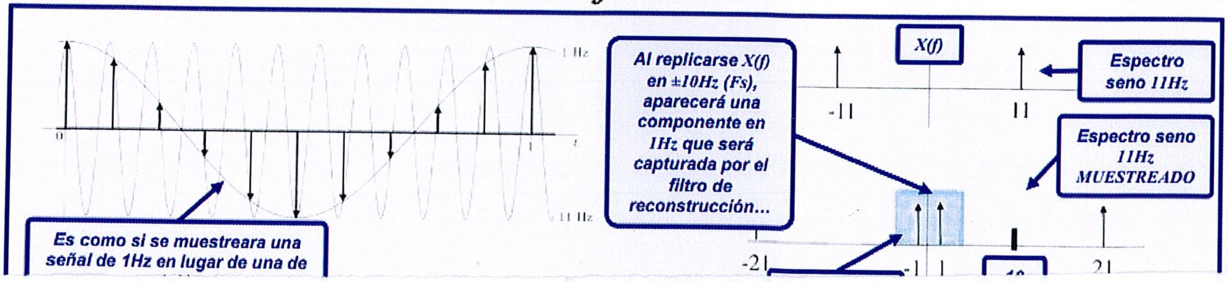
⇒ La fs ADECUADA ASEGURA que no haya VARIACIONES BRUSCAS entre MUESTRAS CONSECUTIVAS (se presentarán todas las frec)

⇒ Teniendo esto en cuenta: SI ANALIZAMOS el MUESTREO DE SEÑALES SINUSOIDES de frec Fo (toda señal se puede ver como comb. de ellas) se ve que: "REFLEJADA" por SOLAP. ESPECTRAL

- Si $f_s < 2f_o$ (SUBMUESTREO) ⟶ en el ESPECTRO se ve una SINUSOIDAL DE MENOR frecuencia
  ↳ su valor resulta $f_R = f_o - f_s$ en vez de la orig. F_o
- Si $f_s = 2f_o$ (2 MUESTRAS por ciclo) ⟶ puede darse el caso DE INICIAR el proceso en un cruce por cero Y POR ENDE NO OBTENER INFO

∴ DEBE ASEGURARSE LA LIMITACIÓN EN BANDA de la señal ANTES DE HACER EL PROCESO DE MUESTREO COLOCANDO UN FILTRO PASA BAJOS

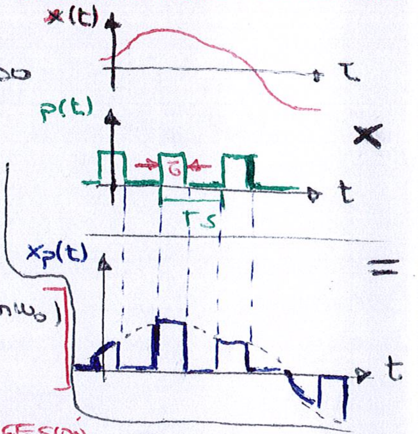
Ejemplo: Se muestrea una ***señal sinusoidal*** de *11Hz* a una *fs=10Hz* (por debajo de la frecuencia de muestreo) ¿Qué se observa en el espectro?¿Qué sucede si se aplica el filtro de recuperación con ***BW*** menor a *fs/2*?



¿Qué sucede cuando el muestreo no es ideal?

⇒ El muestreo ideal tiene estas características en la práctica (muestreo real):
- La señal de muestreo $p(t)$ se compone de pulsos angostos y no de $\delta(t)$ (deltas)
- Los filtros de reconstr. no son ideales (caída gradual y no abrupta)
- La señal temporal debe limitarse previamente en banda

⇒ El tren de impulsos (ideal) debe ser reemplazado por un tren de impulsos periódico $p(t)$, cuyo período es T_S y la duración de c/ pulso τ ⇒ ciclo de actividad $CA = \tau / T_S$

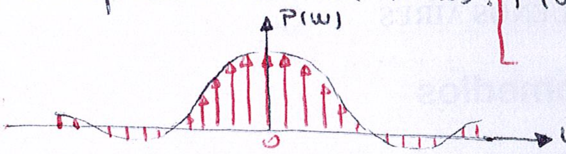


⇒ Las componentes P_n de su SEF corresponden entonces a:

$$\left[P_n = \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \tau/2)}{(n\omega_0 \tau/2)} \right]$$

y la expresión de su TF es:

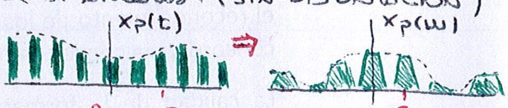
$$\left[P(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} P \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \frac{P}{2})}{(n\omega_0 P/2)} \delta(\omega - n\omega_0) \right]$$



En este caso queda una sucesión de func. impulso, pero con ≠ área capturada (ideal era ↑↑↑↑↑) por estar trabajando con pulsos en el t

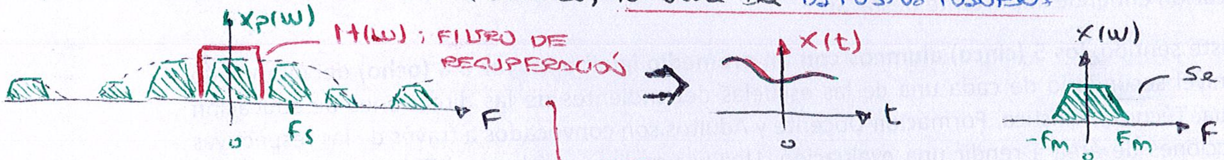
⇒ Este $P(\omega)$ es ≠ al ideal pero se siguen manifestando "funciones impulso" en su espectro, espaciadas en ω_S.

⇒ Por ello, al muestrear $x(t)$, se obtendrá un espectro similar al anterior (sin deformación) pero con réplicas de $X(\omega)$ de distintas amplitudes



Sólo cambian las amplitudes pero no hay deformación

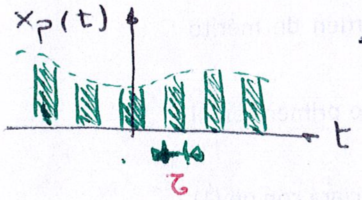
⇒ Al no haber deformación espectral, la recuperación de la info (espectro de $x(t)$ centrado en el origen) se hace de la misma manera



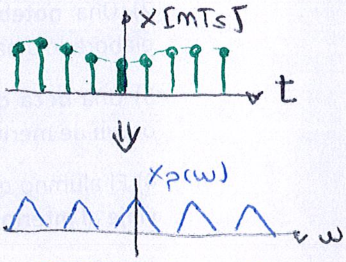
Se recupera el espectro central.

Mismas caract. y restric. que p/ muestreo ideal

⇒ Si el ancho τ de los pulsos de muestreo → 0 ⇒ los coef. P_n tienden a adoptar la misma amplitud (la sinc. se aplana). De ese modo en el dom. temporal se obtienen "muestras" ($X[mT_S]$, sin impulsos) y en el dom. frecuencial un espectro periódico



⇒ Si $\tau \to 0$ ⇒ $X_p(t) \to X[mT_S]$ (muestras discr.) ⇒



Espectro periódico

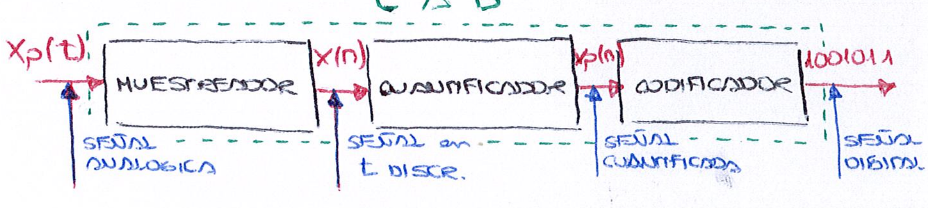
Obtención de una señal digital

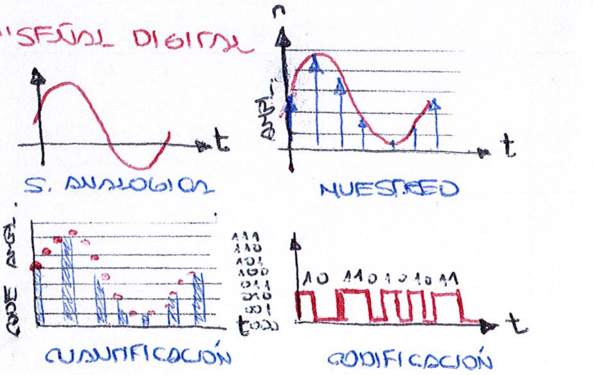
→ p/ trabajar en términos discretos con la misma y luego volver al sist. analógico

⇒ Se implementa a través de un conversor analógico digital (CAD)

⇒ Éste asigna (a interv. T_S) un valor a c/ atributo (cuantificación), que dependerá del momento y tiempo que le tome al sist. efectuar la conversión.

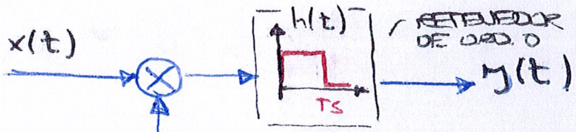
⇒ Luego, este valor es codificado y se obtiene así la "señal digital"



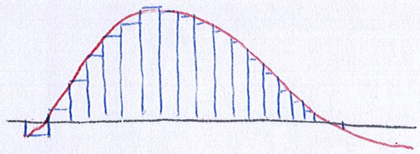


RETENEDOR DE ORDEN CERO → p/hacer posible el proceso anterior es necesario

⇒ Se adiciona un bloque cuyo $h(t)$ es un PULSO DE DURACIÓN T_s, de modo que se toma el valor de la entrada $x(t)$ Y SE LO RETIENE HASTA el PRÓXIMO (T_s segundos)



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$



⇒ $\left[h(t)=P_{T_s}\left(t-\frac{T_s}{2}\right)\right]$ ∴ $\left[H(\omega)=2e^{-j\omega\frac{T_s}{2}}\frac{\operatorname{sen}\left(\omega\frac{T_s}{2}\right)}{\omega}\right]$ SU INCONVENIENTE es que al aplicar el SISTEMA (SINC. en la frec.) SE DEFORMA EL espectro ORIGINAL

⇒ P/ resolver ESTA DEFORMACIÓN, el filtro de recuperación debe ser DIFERENTE, de modo que OPERE EN FORMA INVERSA A TAL DEFORMACIÓN

∴ debemos ANULAR el $H(\omega)$ DEL RETENEDOR DE ORDEN CERO

⇒ $H_R(\omega)=\frac{1}{H(\omega)}$ (recup.) (pues $H_r(\omega).H(\omega)=1$) ⇒ $\left[H_R(\omega)=e^{j\omega\frac{T_s}{2}}\cdot\frac{\omega}{2\operatorname{sen}\left(\omega\frac{T_s}{2}\right)}\right]$