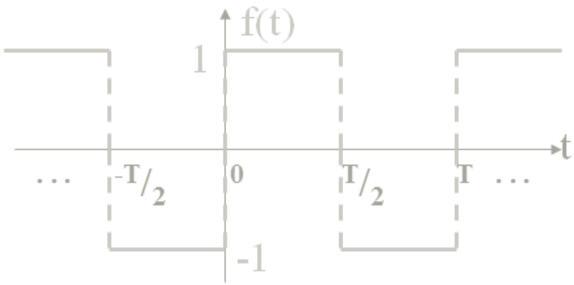
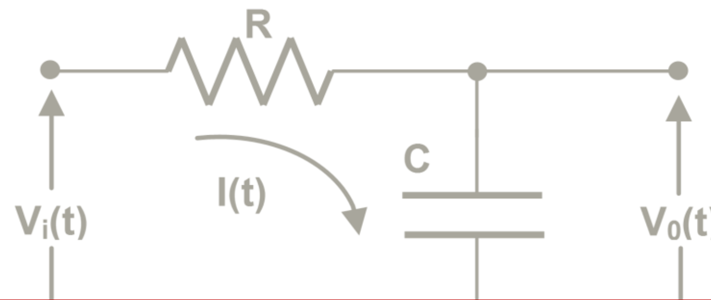
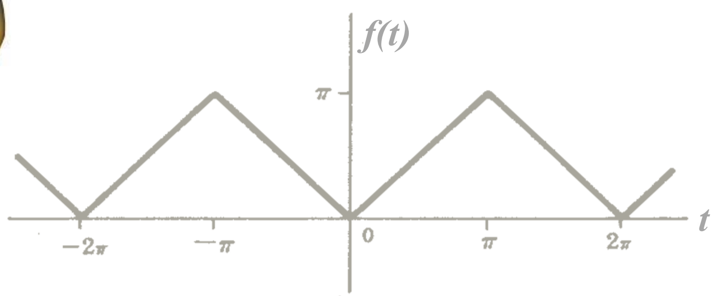
Actividad Práctica: Resolución de Consignas

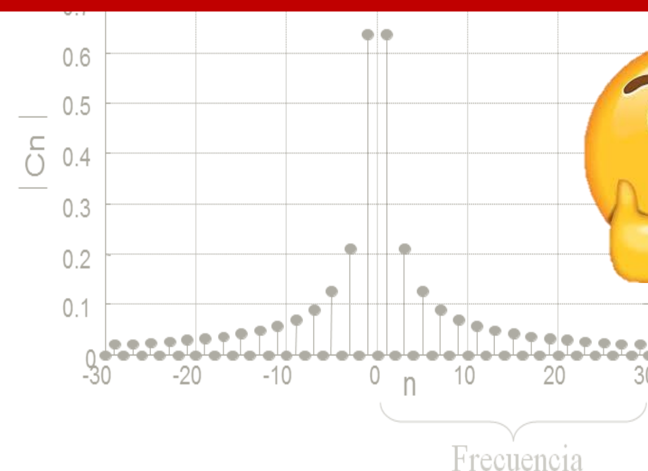


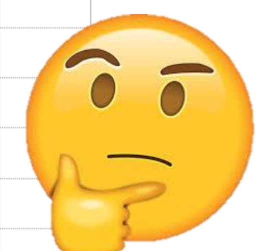


Actividad Práctica

●Evaluación de Sistemas●





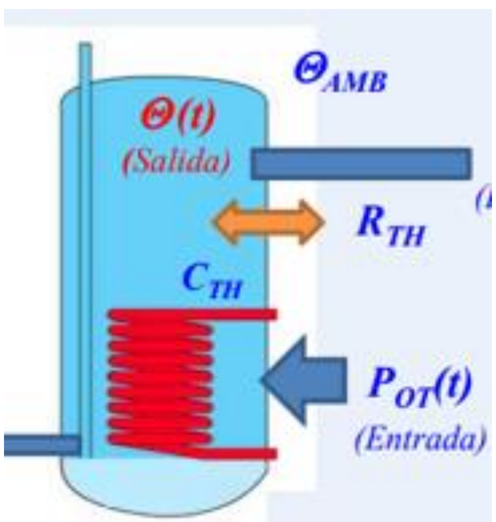


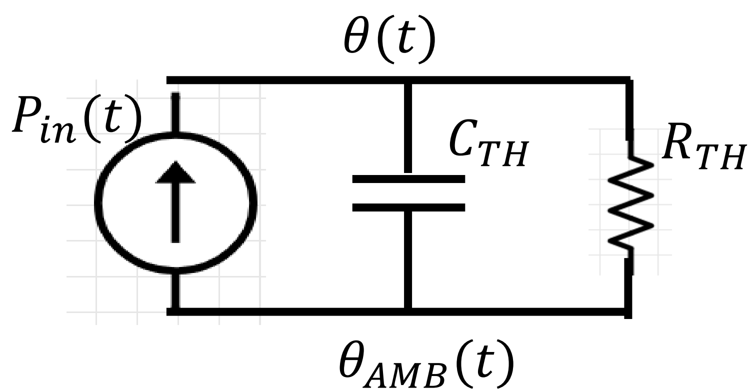
Sistema térmico

Variantes:

$$\begin{cases} P_{in}(t) = 2[\rho(t) - \rho(t-20)][W] \\ C_{TH} = 4\,Ws/°C \\ R_{TH} = 0{,}25\,°C/W \\ \theta_{AMB} = 20°C \end{cases}$$

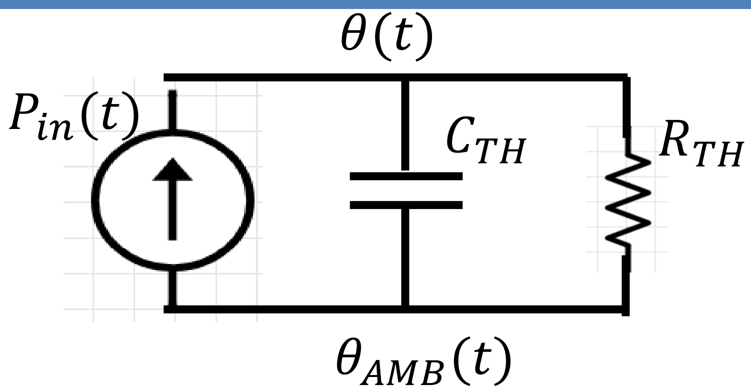
Modelo





$$P_{in}(t) = C_{TH} \cdot \frac{d}{dt}[\theta(t) - \theta_{AMB}] + \frac{\theta(t) - \theta_{AMB}}{R_{TH}}$$

$$P_{in}(t) = C_{TH}\,\dot{\theta}(t) + \frac{\theta(t)}{R_{TH}} - \frac{\theta_{AMB}}{R_{TH}}$$



Datos:

$$P_{in}(t) = 2[\rho(t) - \rho(t-20)][W]$$

$$C_{TH} = 4\ Ws/°C$$

$$R_{TH} = 0{,}25\ °C/W$$

$$\theta_{AMB} = 20°C$$

EDO

$$P_{in}(t) = C_{TH}\ \dot{\theta}(t) + \frac{\theta(t)}{R_{TH}} - \frac{\theta_{AMB}}{R_{TH}}$$

$$P_{in}(t) = 4\ \dot{\theta}(t) + \frac{\theta(t)}{0{,}25} - \frac{20}{0{,}25}$$

$$P_{in}(t) = 4\ \dot{\theta}(t) + 4\ \theta(t)\ - 80$$

¿Cómo hacíamos para resolverla?

Solución homogénea + particular

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$$

$$P_{in}(t) = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)\; - 80$$

Solución homogénea $\theta_h(t)$

Al ser una EDO de primer orden propongo como solución $\theta_h(t) = Ke^{\lambda t}$

Para poder aplicar la solución, es necesario que la EDO esté expresada como

$$K_n\theta^{(n)} + K_{n-1}\theta^{(n-1)} + \cdots + K_1\dot{\theta}(t) + K_0\theta(t) = 0$$

$$0 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)\; \underline{-\,80}$$ **No cumple**

$$K_n\theta^{(n)} + K_{n-1}\theta^{(n-1)} + \cdots + K_1\dot{\theta}(t) + K_0\theta(t) = 0$$

$$P_{in}(t) = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)\ - 80$$

Pequeño trucazo: $\underbrace{P_{in}(t) + 80}_{0} = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$

$$4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t) = 0$$

Solución propuesta: $\theta_h(t) = Ke^{\lambda t}$

Reemplazo $\theta_h(t)$ en la EDO

$$4\frac{d}{dt}\left(Ke^{\lambda t}\right) + 4\left(Ke^{\lambda t}\right) = 0$$

$$4\lambda\,Ke^{\lambda t} + 4\,Ke^{\lambda t} = 0 \qquad \Rightarrow (4\lambda + 4)\,Ke^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -1 \qquad \boxed{\Rightarrow \theta_h(t) = Ke^{-t}}$$

$$P_{in}(t) + 80 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

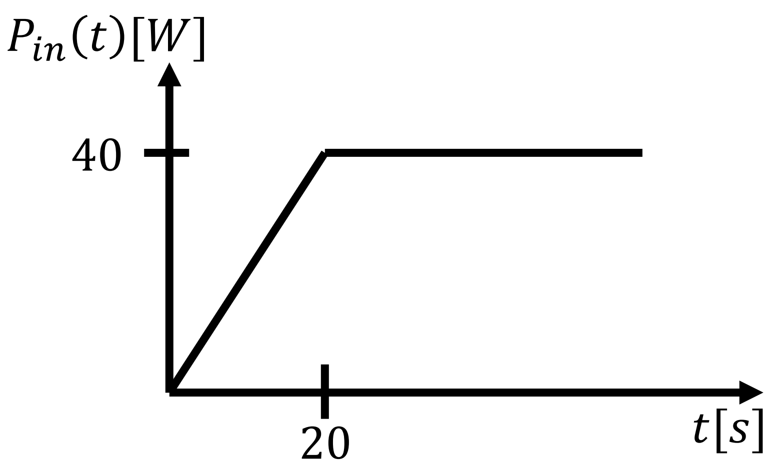
Solución particular

Constaba en proponer una solución similar a la entrada

¿Cómo es la entrada del sistema?

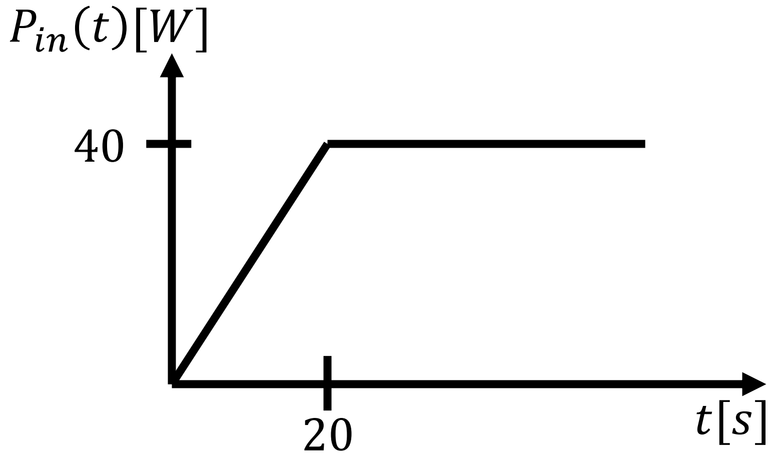
$$P_{in}(t) = 2[\rho(t) - \rho(t-20)][W]$$

La entrada es una función partida



Deberíamos resolver la ecuación para
$0s \leq t < 20s$
y luego para
$t \geq 20s$

$$P_{in}(t) = 2[\rho(t) - \rho(t-20)][W]$$



Resolviendo para $0 \leq t < 20$ podemos decir que $P_{in}(t) = 2 \cdot t$

$$P_{in}(t) + 80 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

$$2t + 80 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

Tengo que proponer algo de la forma $\theta_p(t) = At + B$

Reemplazo $\theta_p(t)$ en la EDO

$$2t + 80 = 4\frac{d}{dt}(At + B) + 4(At + B)$$

$$2t + 80 = 4A + 4A\,t + 4B$$

$$\begin{cases} 2t = 4At & \Rightarrow A = 0{,}5 \\ 80 = 4A + 4B & \Rightarrow B = 19{,}5 \end{cases}$$

$$\boxed{\theta_p(t) = \frac{t}{2} + 19{,}5}$$

¿Qué tenemos hasta ahora?

$$\theta_1(t) = Ke^{-t} + \frac{t}{2} + 19{,}5$$

¿Cuál es nuestra condición inicial? $\theta_1(t=0) = \theta_{AMB} = 20°$

$$\theta_1(0) = Ke^{0} + \frac{0}{2} + 19{,}5 = 20$$

$$\Rightarrow K = 0{,}5$$

$$\theta_1(t) = 0{,}5\, e^{-t} + \frac{t}{2} + 19{,}5 \qquad 0 \leq t < 20$$

$$\boxed{\theta_1(t) = \left(0{,}5\, e^{-t} + \frac{t}{2} + 19{,}5\right) \cdot [u(t) - u(t-20)]}$$

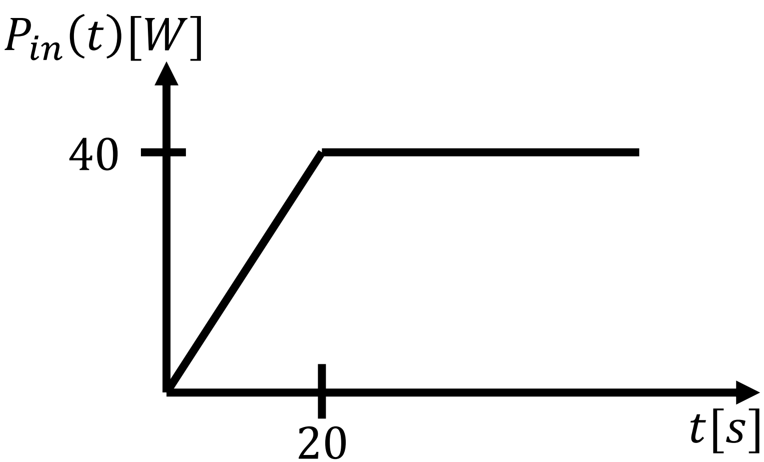
¿ Y qué pasa para $t \geq 20$?

La solución homogénea queda igual:

La impone el sistema, no se tiene en cuenta la entrada

$$\theta_h(t) = K' e^{-(t-20)}$$

Sólo cambia la solución particular:



Podríamos decir que para $t \geq 20, \; P_{in}(t) = 40$

$$P_{in}(t) + 80 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

$$40 + 80 = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

$$\theta_p(t) = 30$$

$$\theta_2(t) = K' e^{-(t-20)} + 30$$

¿Cuál es ahora la condición inicial? $\theta_1(t = 20) = \theta_2(t = 20)$

¿Cuál es ahora la condición inicial? $\theta_1(t=20)=\theta_2(t=20)$

$$\theta_1(t)=\left(0{,}5\,e^{-t}+\frac{t}{2}+19{,}5\right)\cdot[u(t)-u(t-20)]$$

$$\theta_1(20)=\left(0{,}5\,e^{-20}+\frac{20}{2}+19{,}5\right)\cdot 1$$

$$\theta_1(20)\approx 29{,}5 \qquad \Rightarrow \theta_2\,(20)\approx 29{,}5$$

$$\theta_2(t)=K'e^{-(t-20)}+30$$

$$\theta_2(20)=K'\,e^{-(20-20)}+30=29{,}5$$

$$K'=-0{,}5$$

$$\theta_2(t)=-0{,}5\,e^{-(t-20)}+30 \qquad t\geq 20$$

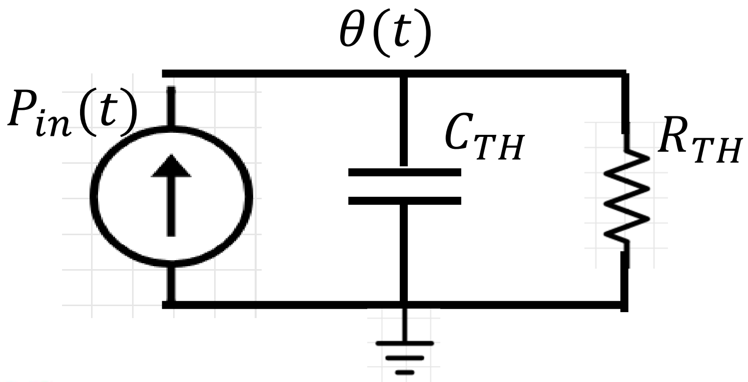
$$\boxed{\theta_2(t)=\left[-0{,}5\,e^{-(t-20)}+30\right]\cdot u(t-20)}$$

¿Podríamos habernos evitado calcular todo de nuevo?

Sí… Si el sistema es LTI, si conozco la salida para la entrada $x(t)$, también conozco la salida para cualquier entrada de la forma $\alpha \cdot x(t-t_0)$

Además, las condiciones iniciales (CI) deben ser nulas.

Si el problema hubiese tenido la temperatura referenciada a $0°C$:



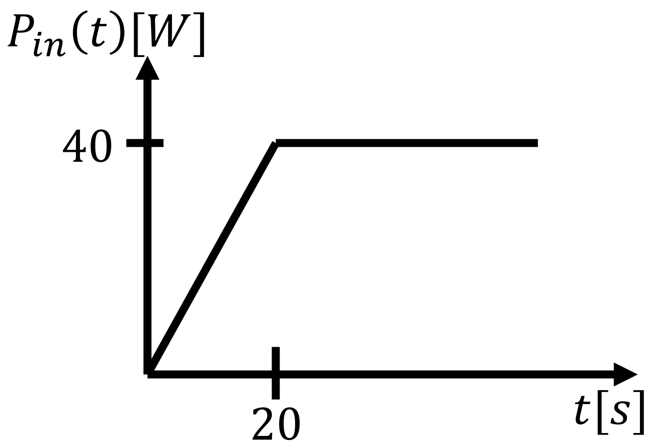
$$P_{in}(t) = C_{TH}\dot{\theta}(t) + \frac{\theta(t)}{R_{TH}}$$

$$P_{in}(t) = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t)$$

$$CIN:\ \ \theta(t)\Big|_{t=0} = 0°C$$

Actividad Práctica
Consigna #A

$$P_{in}(t) = 4\,\dot{\theta}(t) + 4\,\theta(t) \qquad CIN:\ \theta(t)\Big|_{t=0} = 0°C$$



$$P_{in}(t) = 2[\rho(t) - \rho(t-20)][W]$$

$$P_{in}(t) = 2\rho(t) + [-2\rho(t\text{-}20)]$$

$P_{in}(t) = 2\rho(t)$: $\quad \theta_1(t) = \left(0{,}5e^{-t} + \frac{t}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t)$

$P_{in}(t) = -2\rho(t-20)$: $\quad \theta_2(t) = -\left(0{,}5e^{-(t-20)} + \frac{t-20}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t-20)$

$$\theta(t) = \left(0{,}5e^{-t} + \frac{t}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t) - \left(0{,}5e^{-(t-20)} + \frac{t-20}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t-20)$$

¿Y no hay un *trucazo* para trabajar con la propiedad de linealidad por más que no tenga CI nulas?

¡Sí!

Podemos hacer de cuenta que el sistema tiene CI nulas y luego sumarle a parte la condición inicial como una constante

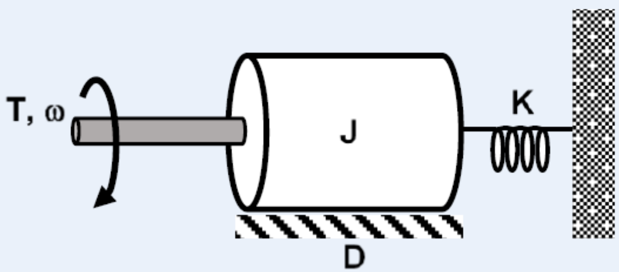
Para CI nulas teníamos:

$$\theta(t) = \left(0{,}5e^{-t} + \frac{t}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t) - \left(0{,}5e^{-(t-20)} + \frac{t-20}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t-20)$$

$$\boxed{\theta(t) = \left(0{,}5e^{-t} + \frac{t}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t) - \left(0{,}5e^{-(t-20)} + \frac{t-20}{2} - 0{,}5\right) \cdot u(t-20) + 20}$$

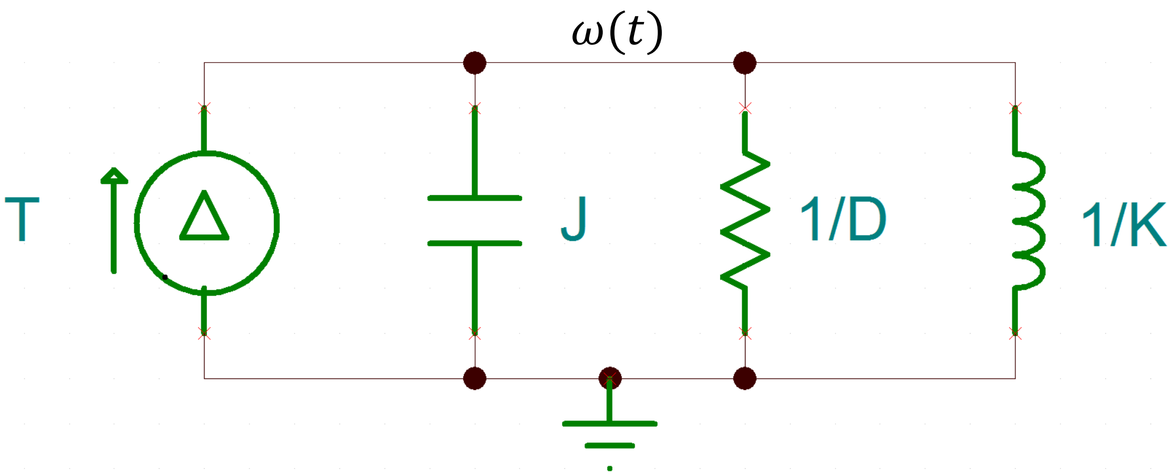
Consigna de la clase #B (30 minutos)

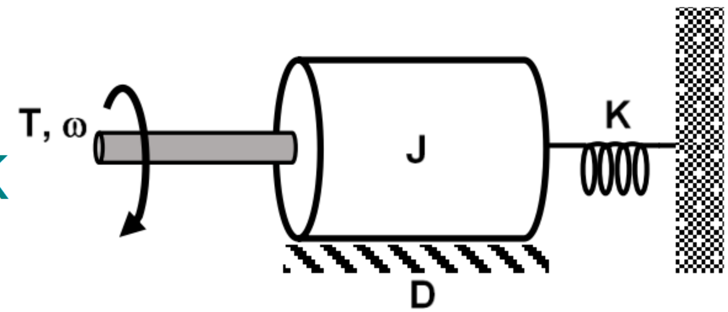
1. Obtener las respuestas ***indicial*** (al escalón, $g(t)$) e ***impulsional*** (al impulso, $h(t)$) correspondientes al siguiente sistema físico, al que se le aplica un torque $T(t)$. ***Considerar a)*** el resorte K desconectado (respuesta $\omega(t)$) y ***b)*** el resorte K conectado (respuesta $\theta(t)$). Utilizar ***MatLab*** para verificar numéricamente el resultado.



$$J = 1\ Kgm^2$$
$$D = 0,5\ Nms/rad$$
$$K = 2\ Nm/rad$$

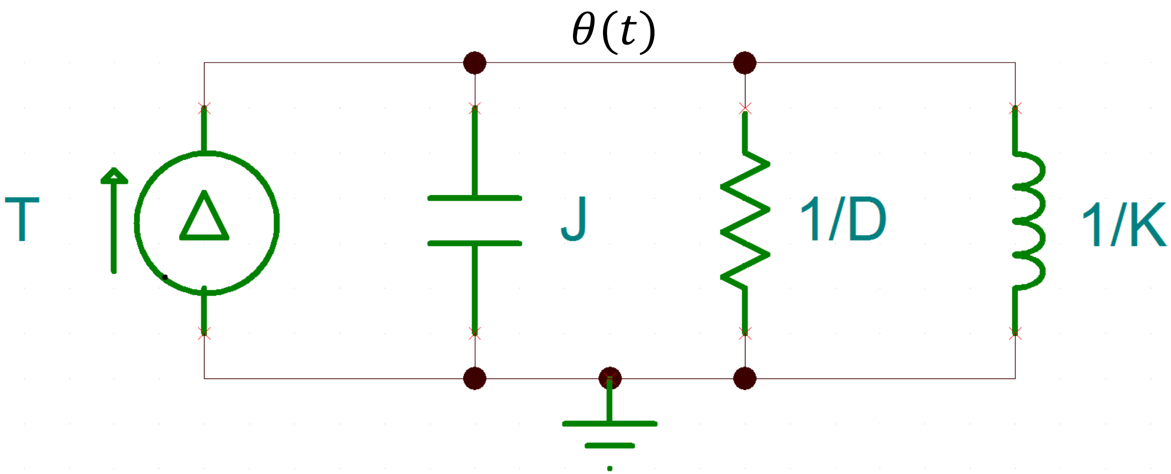
2. ***Discretizar el sistema obtenido en a)*** a una tasa de muestreo $T_S = 0,1s$. Calcular los primeras 5 muestras de su respuesta indicial $g[n]$, determinar el error respecto de $g(nT_S)$ y graficar su ***diagrama en bloques***.

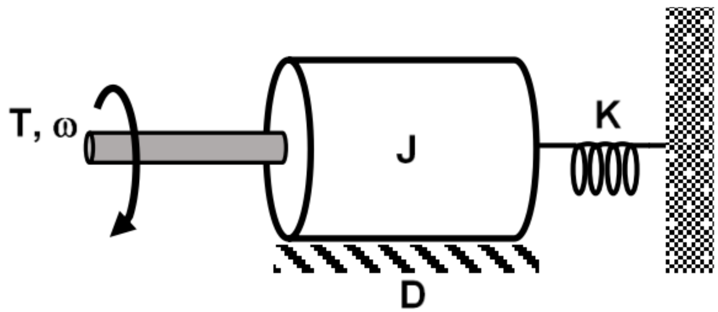




$$T(t) = J.\dot{\omega}(t) + D.\omega(t) + K.\int \omega(t)$$

Actividad Práctica
Consigna #B





$$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$T(t) = J.\dot{\omega}(t) + D.\omega(t) + K.\int \omega(t)$$

$$\boxed{T(t) = J.\ddot{\theta}(t) + D.\dot{\theta}(t) + K.\theta(t)}$$

Respuesta indicial

$$\boxed{T(t) = J.\ddot{\theta}(t) + D.\dot{\theta}(t) + K.\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$$

1) Solución Particular: Entrada escalón unitario $\Rightarrow$ $T(t) = u(t)$

$$\theta_p(t) = C_0$$

$$u(t) = \cancel{J.\ddot{\theta}_p} + \cancel{D.\dot{\theta}_p} + K.\theta_p$$

$$1 = K.\theta_p = K.C_0 \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{1}{K}}$$

Respuesta indicial

$$\boxed{T(t) = J.\ddot{\theta}(t) + D.\dot{\theta}(t) + K.\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$$

2) Solución Homogénea: $\theta_h(t) = Ke^{\lambda t}$

$$0 = J.\ddot{\theta}_h + D.\dot{\theta}_h + K.\theta_h$$

$$0 = J.\lambda^2 Ke^{\lambda t} + D.\lambda Ke^{\lambda t} + K.Ke^{\lambda t}$$

$$0 = [J.\lambda^2 + D.\lambda + K]Ke^{\lambda t}$$

$$0 = J.\lambda^2 + D.\lambda + K \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4JK}}{2J}$$

Respuesta indicial

$$J = 1$$
$$D = 0.5$$
$$K = 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4JK}}{2J}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{4} + j\dfrac{\sqrt{31}}{4} \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{4} - j\dfrac{\sqrt{31}}{4} \end{cases}$$

Command Window

```
>> roots([1 0.5 2])

ans =

  -0.2500 + 1.3919i
  -0.2500 - 1.3919i
```

Respuesta indicial

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{4} + j\,\frac{\sqrt{31}}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{4} - j\,\frac{\sqrt{31}}{4} \end{cases}$$

Raíces complejas conjugadas

$$y_h(t) = e^{at}\,[K_1\cos(bt) + K_2\sin(bt)]$$

$$\theta_h(t) = e^{-1/4\,t}\left[K_1\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + K_2\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right]$$

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$$

$$\theta(t) = e^{-t/4}\left[K_1\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + K_2\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right] + \frac{1}{2}$$

Respuesta indicial

$$\theta(t) = e^{-t/4}\left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right] + \frac{1}{2}$$

C.I.N.

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\theta(0) = e^0\,[K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\theta}(0) = e^0\left[\left(K_2\frac{\sqrt{31}}{4} - \frac{K_1}{4}\right)\cos(0) - \left(K_1\frac{\sqrt{31}}{4} + \frac{K_2}{4}\right)\sin(0)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_2 = -\frac{1}{2\sqrt{31}}}$$

$$\boxed{g(t) = -\frac{e^{-t/4}}{2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + \frac{1}{\sqrt{31}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right] + \frac{1}{2}}$$

Respuesta impulsional

$$g(t) = e^{-t/4}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) - \frac{1}{2\sqrt{31}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right] + \frac{1}{2}$$

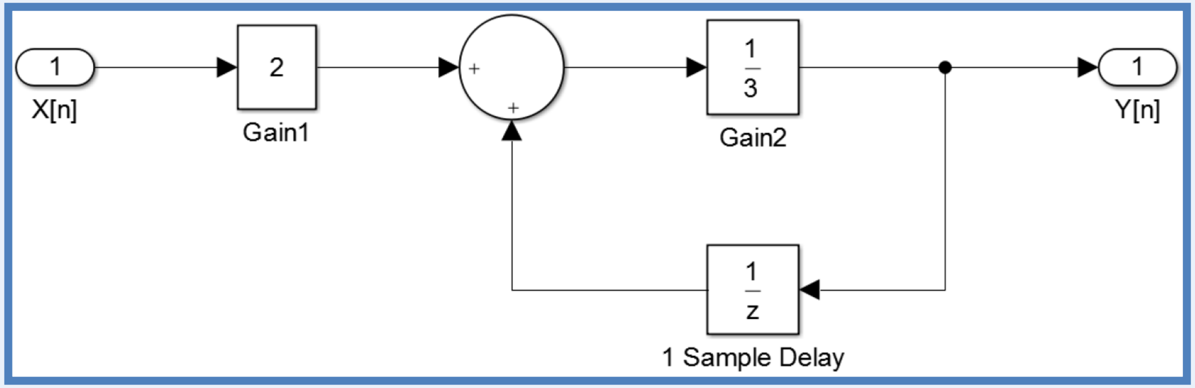
$$\dot{g}(t) = e^{-t/4}\left[\left(K_2\frac{\sqrt{31}}{4} - \frac{K_1}{4}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) - \left(K_1\frac{\sqrt{31}}{4} + \frac{K_2}{4}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right]$$

$$\boxed{h(t) = \frac{4}{\sqrt{31}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)e^{-t/4}.u(\mathrm{t})}$$

Actividad Práctica
EN MATLAB...

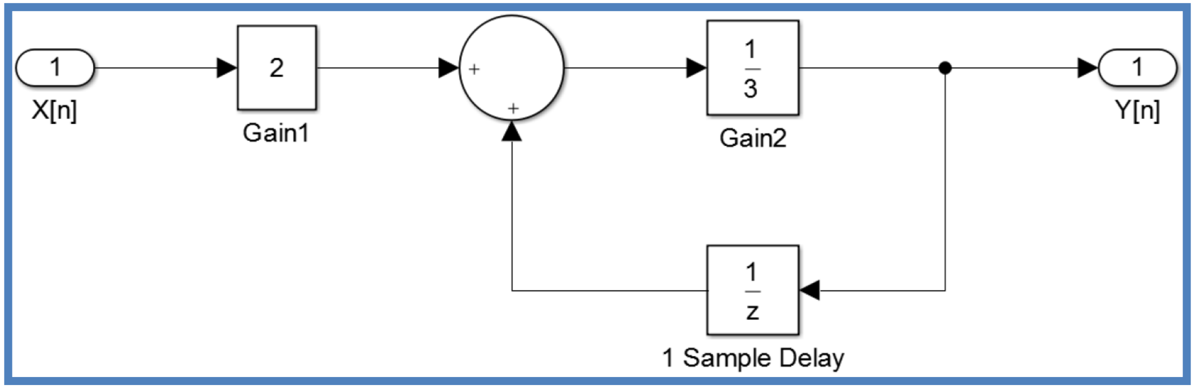
Consigna de ejemplo

Del siguiente diagrama de un sistema discreto:



1. Hallar la ecuación que relaciona Y[n] con X[n]
2. Respuesta impulsional
3. Valor final de la respuesta indicial
4. Graficar Y[n] para una entrada $\boldsymbol{X[n] = u[n] - u[n-4]}$

Ecuación del sistema



$$y[n] = \frac{1}{3}\left(2.x[n] + y[n-1] \right)$$

$$3.y[n] - y[n-1] = 2.x[n]$$

$$\boxed{\frac{3}{2}y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]}$$

Respuesta impulsional

$$y[n] = \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

n	*x[n]*	$\frac{2}{3}x[n]$	*y[n-1]*	$\frac{1}{3}y[n-1]$	*y[n]*
-1	0	0	0	0	0
0	1	$2/3$	0	0	$\frac{2}{3}$
1	0	0	$2/3$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
2	0	0	$2/9$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{27}$
3	0	0	$2/27$	$\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{81}$

y[n]
0
$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$$\boxed{h[n] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

Valor final de la respuesta indicial

$$y[n] = \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

n	$x[n]$	$\frac{2}{3}x[n]$	$y[n-1]$	$\frac{1}{3}y[n-1]$	$y[n]$
-1	0	0	0	0	0
0	1	$2/3$	0	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$2/3$	$2/3$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$
2	1	$2/3$	$8/9$	$\frac{8}{27}$	$\frac{26}{27}$
3	1	$2/3$	$26/27$	$\frac{26}{81}$	$\frac{80}{81}$

$y[n]$
0
$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)$

Valor final de la respuesta indicial

$$y[n] = \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

$y[n]$
0
$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$
$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)$

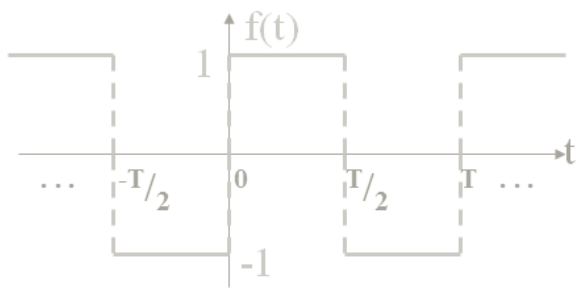
$$\boxed{g[n] = \frac{2}{3}\sum_{0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}}$$

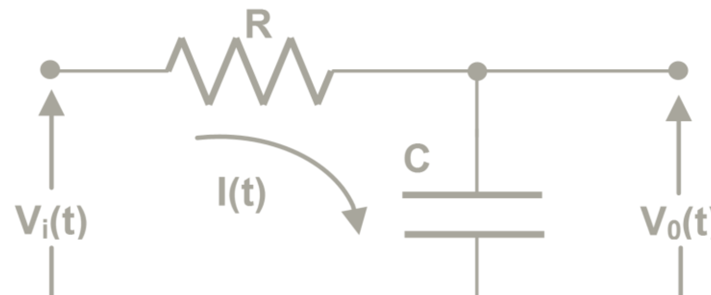
$$g\left[n\to\infty\right] = \frac{2}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{2}{3}.\frac{1}{1-1/3}$$

$$g\left[n\to\infty\right] = \frac{2}{3}.\frac{3}{2} = 1$$

Actividad Práctica
EN MATLAB…

Actividad Práctica: Resolución de Consignas





Actividad Práctica

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Evaluación de Sistemas