Universidad Tecnológica Nacional

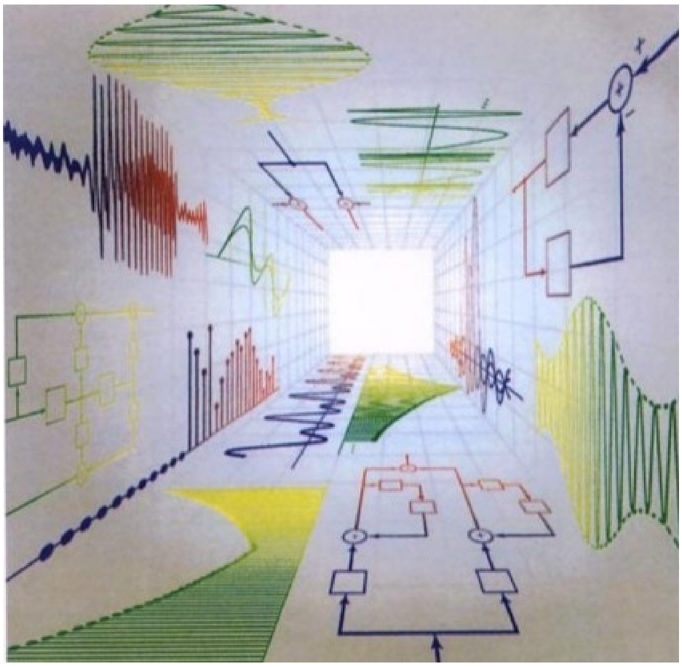
Facultad Regional Buenos Aires

Departamento de Electrónica

Análisis de Señales y Sistemas

Ejercicios modelo de Convolución

Año 2017



1. Convolución Discreta

1.1. Introducción

La convolución es una operación matemática más que se agrega al kit de operaciones de un ingeniero electrónico. En esta unidad en particular, la convolución permite conocer la salida de un sistema LTI sabiendo únicamente su *h(t)* o *h[n]* (su respuesta impulsional).

Definición:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot y[k]$$

donde x[n] e y[n] son dos funciones discretas.

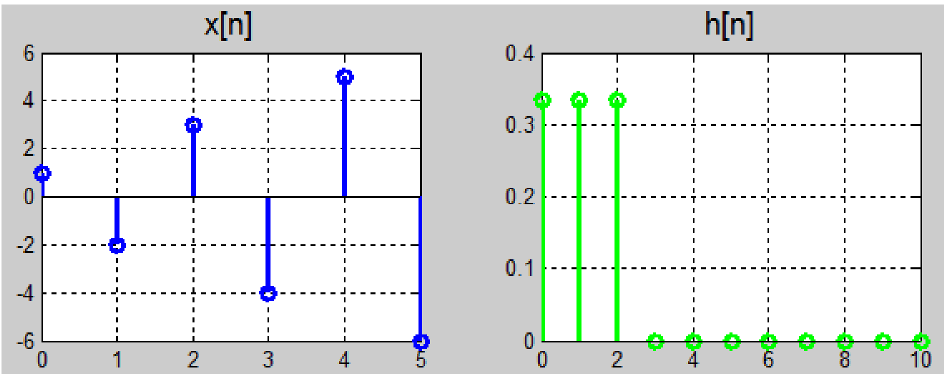
Aplicado a sistemas LTI:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

donde h[n] es la respuesta al impulso del sistema, x[n] la excitación de entrada e y[n] su correspondiente salida.

1.2. Ejemplo

Dado el sistema caracterizado por $h[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\right)$, hallar la salida del mismo al excitarlo con $x[n] = \{\,\underline{1}; -2;\ 3; -4;\ 5; -6\}$.

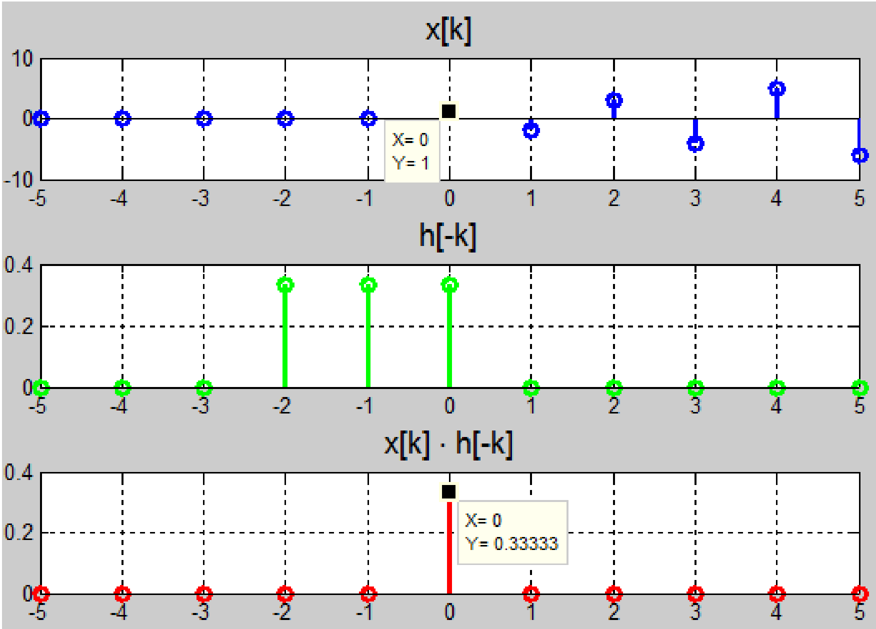


Qué es lo que estamos buscando? Debemos hallar $y[n]$ aplicando la definición de convolución, la cual nos dice que debemos hacer una sumatoria infinita para cada n. Esto en principio suena alarmante pero luego resulta bastante mecánico.

Primero debemos decidir qué función vamos a rotar y trasladar. En este caso será $h[n]$, sólo porque es más corta y más simple.

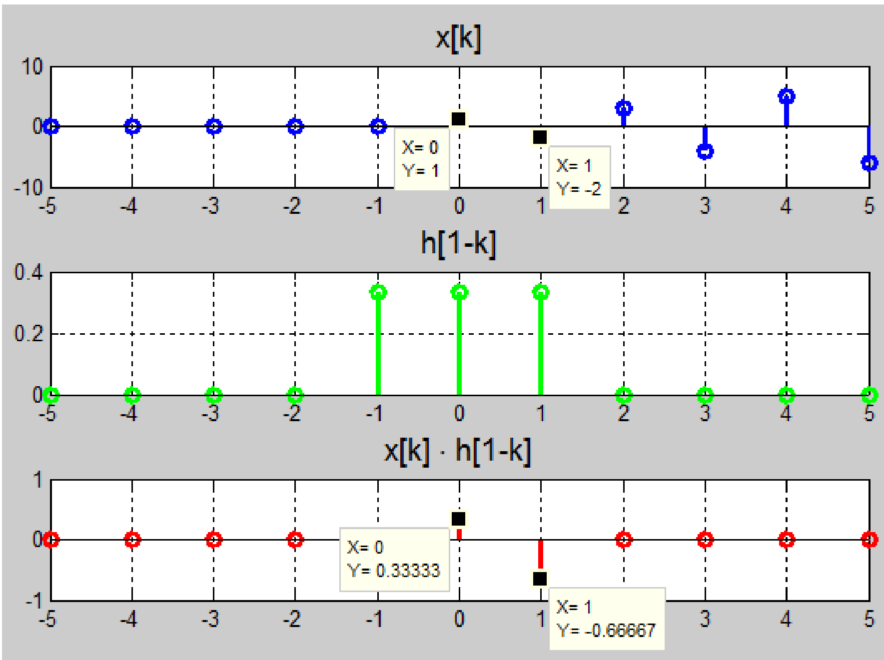
Por otro lado, hay que ver cuáles son los puntos (los n) de inicio y fin de la convolución: éstos son los valores de n a partir de los cuales la salida deja de ser cero y vuelve a ser cero respectivamente. En el caso de la convolución discreta estos puntos corresponden a la suma de los inicios y a las sumas de los finales de las señales; ojo, no es la suma de la cantidad de muestras sino hasta qué muestra hay señal, de todas maneras se aclarará en el ejemplo. Con esta última aclaración tenemos como *n inicial*: $n_i = 0 + 0 = 0$ y como *n final*: $n_f = 5 + 2 = 7$. Por lo tanto $y[n]$ tendrá 8 puntos en total, lo que serían 8 traslaciones de $h[n]$.

Ahora lo que sigue es rotar la función elegida y trasladarla según el n que estemos calculando. Veamos el caso de $n = 0$:



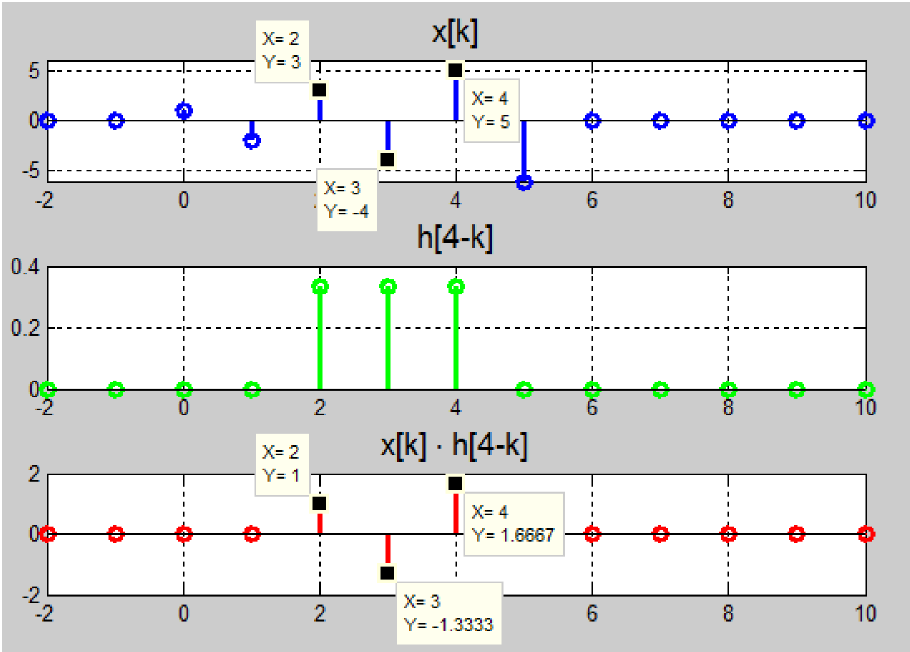
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[0-k] = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

Para $n = 1$:



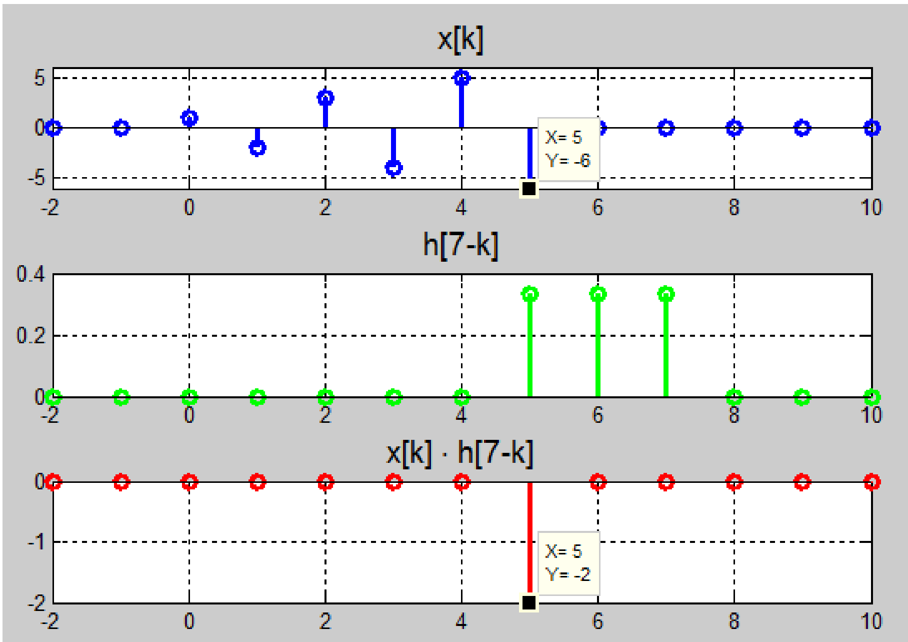
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[1-k] = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot 0 = -\frac{1}{3}$$

Y así sucesivamente. Por ejemplo, para $n = 4$:



$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[4-k] = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-4) + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3}$$

Y con $n = 7$:

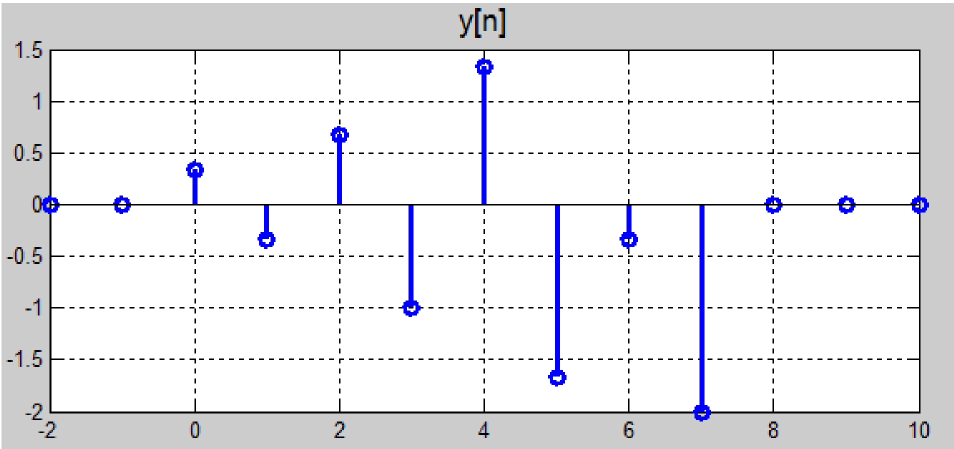


$$y[7] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[7-k] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$$

Ahora podemos ver claramente a partir de los gráficos que para n's menores que 0 y mayores que 7 alguna de las dos funciones (ya sea $x[k]$ o $h[n-k]$) posee valores nulos, por lo que el resultado de la convolución es 0.

Finalmente, uno puede expresar el resultado de la operación de cualquiera de las siguientes maneras:

$$y[n] = \begin{cases} y[0] = \frac{1}{3} \cdot (1 + 0 + 0) = \frac{1}{3} \\ y[1] = \frac{1}{3} \cdot (1 + (-2) + 0) = -\frac{1}{3} \\ y[2] = \frac{1}{3} \cdot (1 + (-2) + 3) = \frac{2}{3} \\ y[3] = \frac{1}{3} \cdot ((-2) + 3 + (-4)) = -1 \\ y[4] = \frac{1}{3} \cdot (3 + (-4) + 5) = \frac{4}{3} \\ y[5] = \frac{1}{3} \cdot ((-4) + 5 + (-6)) = -\frac{5}{3} \\ y[6] = \frac{1}{3} \cdot (5 + (-6) + 0) = -\frac{1}{3} \\ y[7] = \frac{1}{3} \cdot ((-6) + 0 + 0) = -2 \end{cases}$$



$$y[n] = \{...;\ 0;\ 0;\ \underline{1/3};\ -1/3;\ 2/3;\ -1;\ 4/3;\ -5/3;\ -1/3;\ -2;\ 0;\ 0; ...\}$$

2. Convolución continua

2.0.1. Introducción

La convolución continua no es muy diferente a la discreta: como siempre, lo que hay que modificar es la sumatoria por una integral con los mismos límites y agregar el diferencial sobre la variable traslacional.

Definición:

$$x(t) * y(t) = (x * y)_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau$$

Aplicado a sistemas LTI, análogamente a la convolución discreta:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

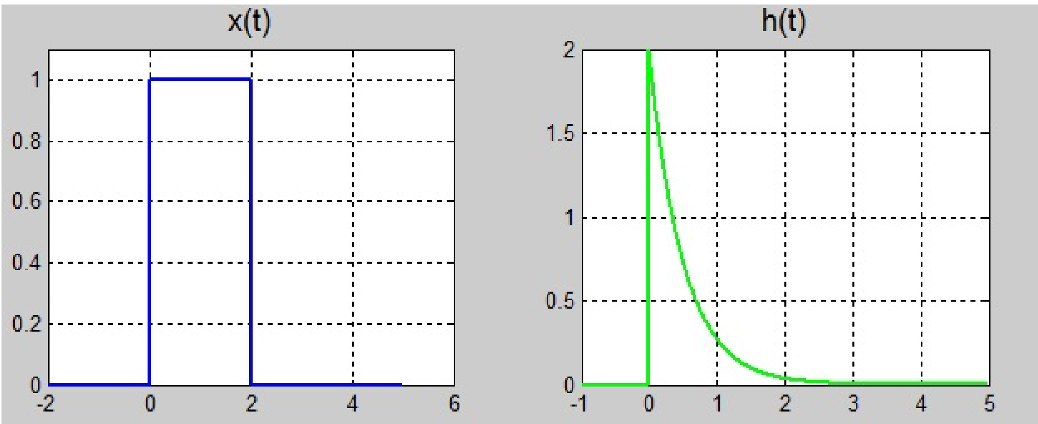
donde h(t) es la respuesta al impulso del sistema, x(t) la excitación de entrada e y(t) su correspondiente salida.

Una de las principales diferencias con su versión discreta es que los puntos *"clave"* ya no son sólo el inicio y fin del de la señal de salida, sino que aparecen nuevos puntos en donde la función cambia de comportamiento y esto se debe reflejar en los límites de integración de la señal: la convolución dejará de ser la integral de una única función sino que pasará a ser varias integrales de la misma función pero con límites distintos, los cuales pueden ser constantes o depender de la variable independiente. Esto así explicado en el aire puede resultar confuso, pero una vez que pasemos al ejercicio se verá más claro (o eso espero). El resultado de la operación quedará expresado como una función partida en la que cada región estará limitada por estos puntos clave.

Otro dato importante es que el resultado de una convolución continua (casi)***SIEMPRE*** es continua. La única excepción a esta regla es que alguna de las funciones presente una $\delta(t)$.

2.1. Ejemplo

Dado el sistema caracterizado por $h(t) = 2\,e^{-2\,t}u(t)$, hallar la salida del mismo al excitarlo a la entrada con $x(t) = u(t) - u(t-2)$.



Bueno, primero debemos elegir la función que vamos a rotar y trasladar; el operación se puede hacer con cualquiera de las dos y va a dar lo mismo, pero para no complicarnos vamos a dejar fija $h(t)$ y movemos $x(t)$.

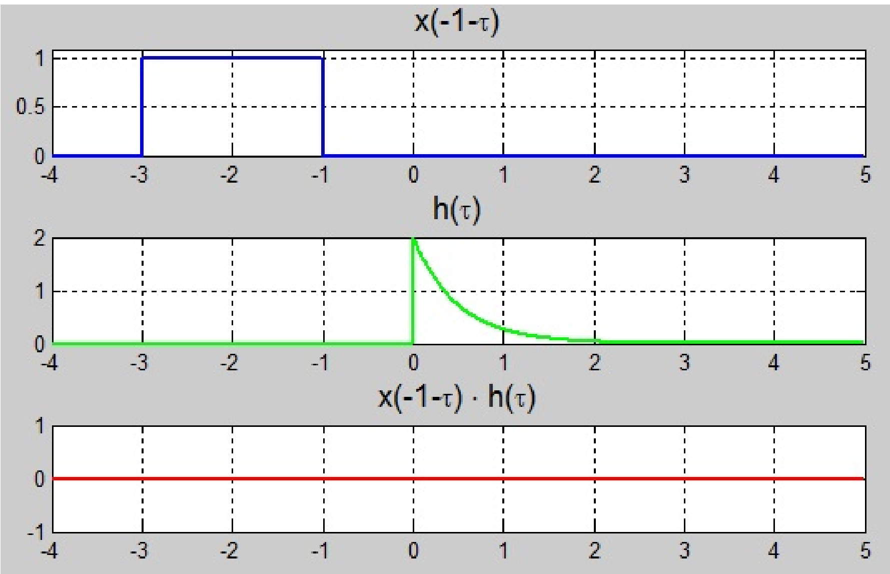
Ahora podemos ver lo de los puntos "clave". Para el inicio y final se sigue cumpliendo lo mismo que con la convolución discreta: el inicio es la suma de los inicios, y el final, la suma de los finales. En este ejemplo, ambas señales inician en $t = 0$, por lo que el instante en el que la salida deja de ser cero es $t_i = 0$. Ahora, dónde termina la salida? Nótese que la respuesta al impulso tiene duración infinita, por lo tanto la salida del sistema también lo será. Ya conocemos el inicio y fin de la salida, pero quedan ver los puntos complicados que mencioné antes, los cuales la mejor manera de verlos es gráficamente.

La forma de la expresión de la convolución continua era:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot y(\tau) d\tau$$

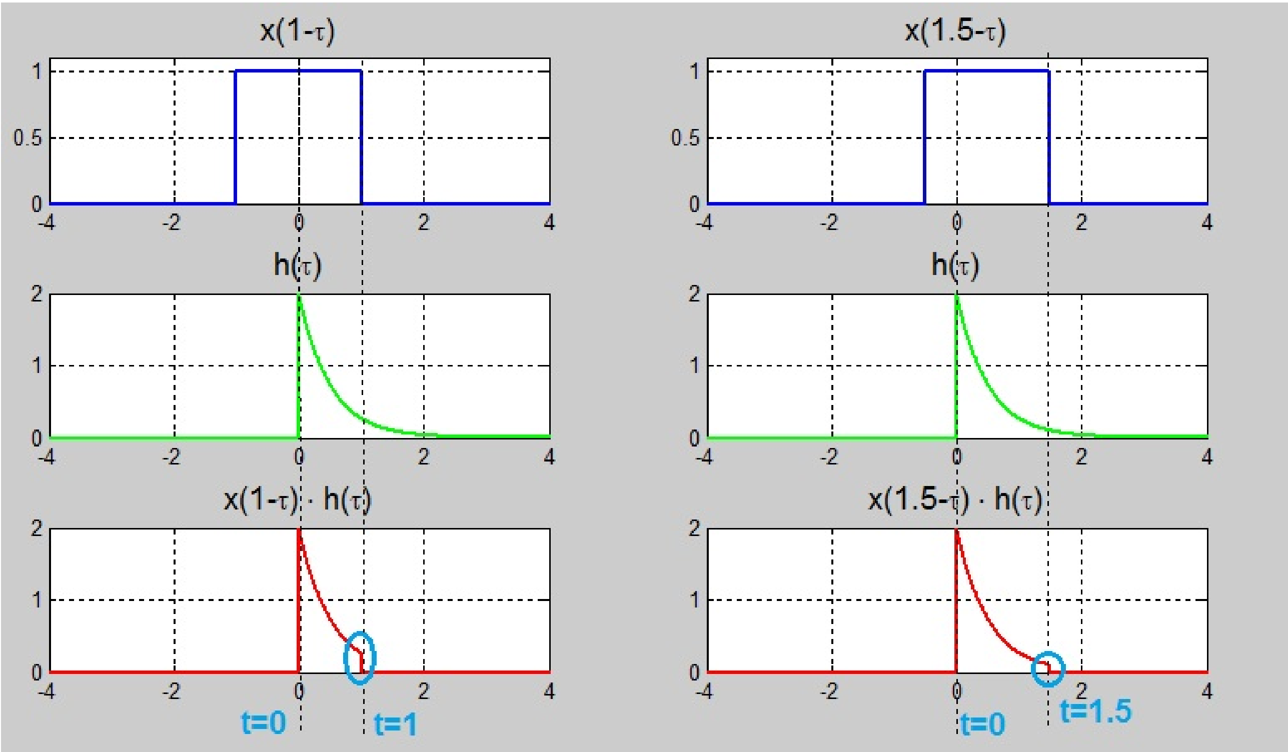
Entonces, análogo a la convolución discreta, graficamos ambas señales en función de τ, con la entrada espejada (por lo dicho en los párrafos anteriores) y para un instante $t = t_0$ fijo.

Por ejemplo, para $t = -1$:



Como era de esperarse, no hay área compartida entre las dos funciones, por lo que no hay función que integrar. Digo que era de esperarse porque ya habíamos visto que la salida del sistema iba a empezar en $t = 0$. Por lo tanto, el resultado de la convolución será 0 $\forall t < 0$.

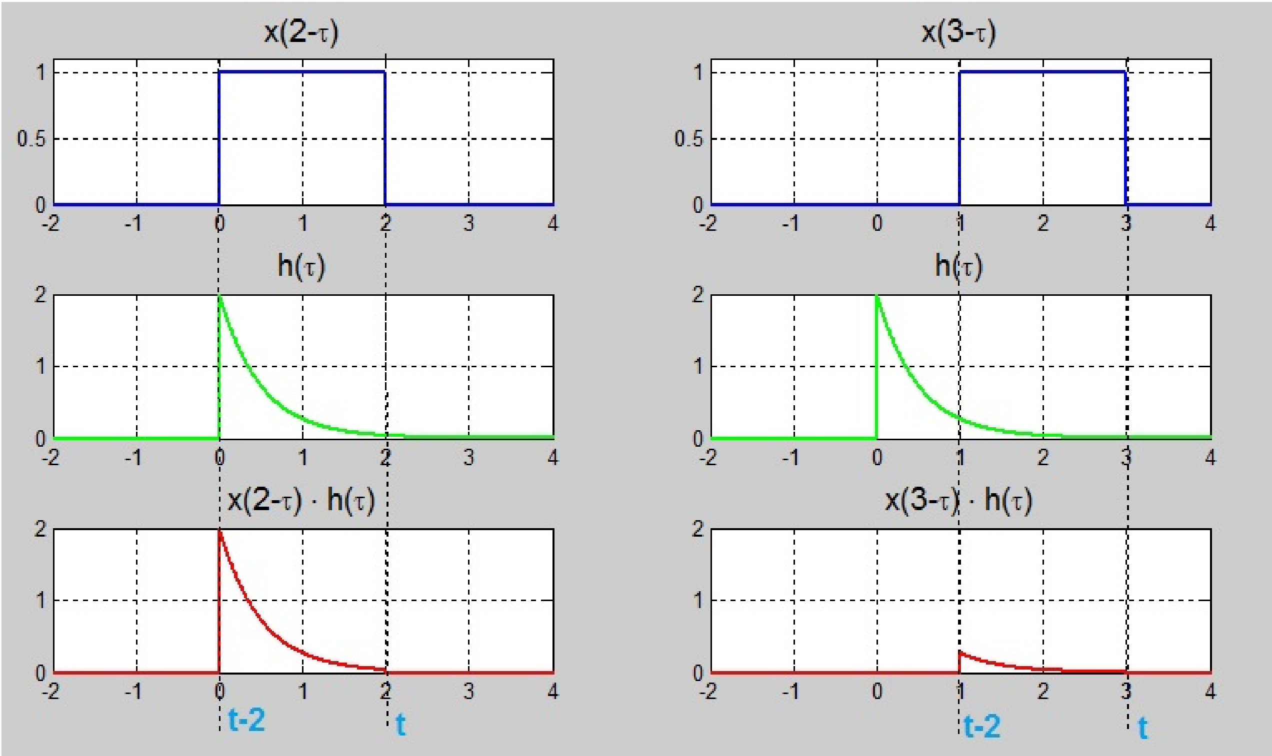
Veamos para un $t > 0$, por ejemplo $t = 1$ y $t = 1{,}5$:



Acá ya estamos corroborando que empieza a haber área conjunta en $t = 0$, por lo cual ese será nuestro límite inferior de integración. Pero, hasta dónde hay que integrar? Como pueden ver, ese valor no es un punto fijo, sino que depende de t. Por lo tanto la integral quedaría:

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau) \cdot h(\tau) = \int_0^t 1 \cdot 2e^{-2\tau} d\tau = 1 - e^{-2t} \tag{1}$$

Bien, ya tenemos la expresión con la cual se comporta la salida del sistema para $t > 0$, pero hasta cuándo? Hasta $t \to \infty$? La respuesta es **NO**, pero conviene verlo de forma gráfica. Veamos los casos de $t = 2$ y $t = 3$:



A la izquierda parecería que el límite inferior sigue siendo 0, como en el caso anterior, pero cunado uno sigue avanzando para t posteriores, se ve que el límite inferior se va corriendo conforme aumentamos t y su valor es $t - 2$. Por otro lado, el límite superior sigue siendo t.

Si comparamos estos gráficos con los anteriores podemos ver que a partir de $t = 0$ vamos aumentando el área que tienen en común ámbas curvas y esta área es máxima para $t = 2$, momento en el cual el ancho de $x(t)$ queda completamente embebida en $h(t)$. Luego de ese punto, debido a la naturaleza monótonamente decreciente de $h(t)$ esta área concatenada empieza a disminuir.

Por lo tanto, la expresión (1) es válida para $0 < t < 2$. Para $t > 2$ debemos resolver la integral entre los nuevos límites de integración:

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} x(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{t-2}^{t} 1 \cdot 2e^{-2\tau} d\tau = e^{-2(t-2)} - e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-2t}(e^4 - 1) \qquad \forall t \geq 2 \tag{2}$$

Quedaría ver que la función sea continua para todo t. Para el caso $t < 0$, $y(t)$ debe ser 0, por lo que $y(t = 0)$ también debe serlo. Evaluando la ecuación (1) en $t = 0$:

$$y(0) = 1 - e^{-2 \cdot 0} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow Verificado$$

Faltaría verificar la continuidad en $t = 2$, por lo que debemos evaluar las expresiones (1) y (2) para ese instante.

En la expresión (1):

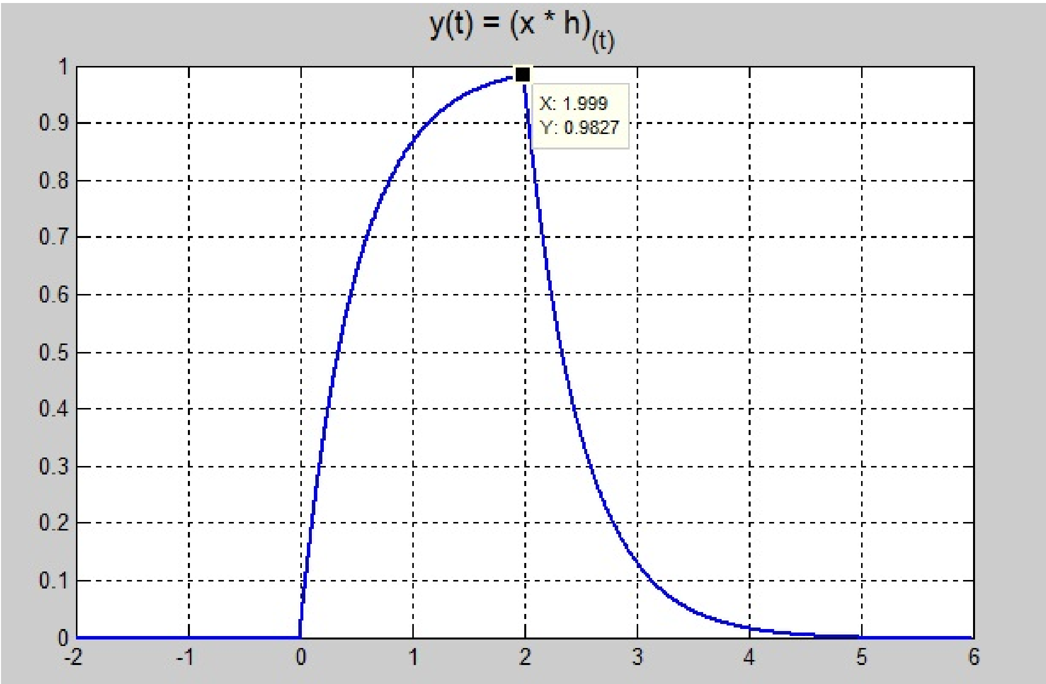
$$y(2) = 1 - e^{-2\cdot 2} = 1 - e^{-4}$$

En la expresión (2):

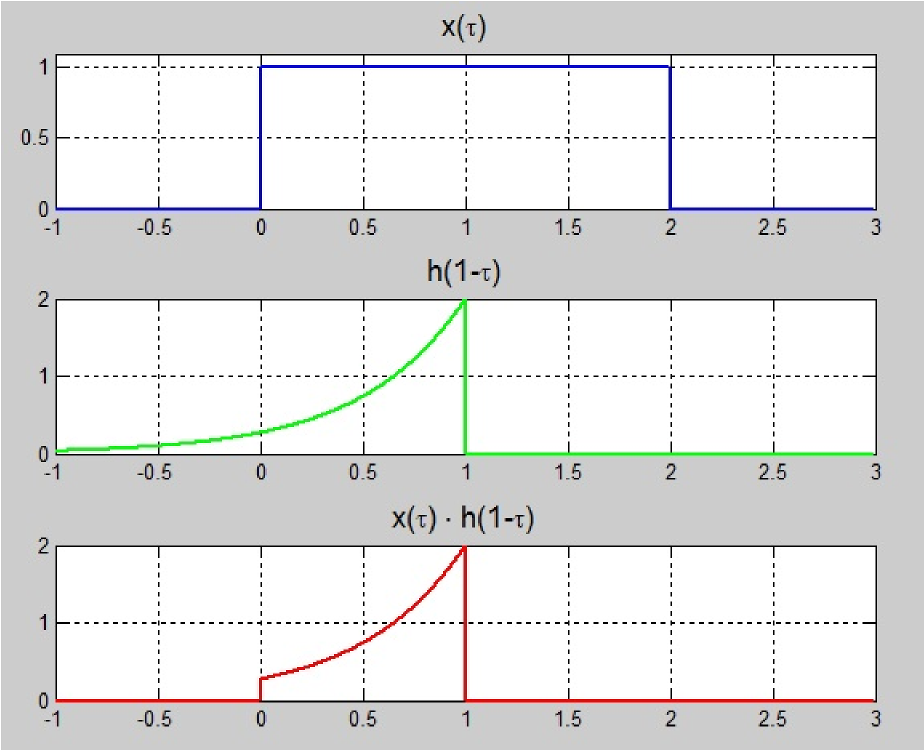
$$y(2) = e^{-2\cdot 2}(e^4 - 1) = e^{-4}(e^4 - 1) = 1 - e^{-4} \Rightarrow Verificado$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1 - e^{-2t}, & \forall t \in [0;2) \\ e^{-2t}(e^4 - 1), & \forall t \geq 2 \end{cases}$$



Cómo hubiese sido la operatoria si en vez de mover $x(t)$ movíamos $h(t)$? Por ejemplo, para $t = 1$ y espejándola (es decir, graficando $h(1-\tau)$):



Vemos que los límites de integración son los mismos que en el primer caso: van de 0 a t para todo t entre 0 y 2. Luego el área conjunta empieza a disminuir nuevamente. Por lo tanto, la integral para este tramo sería:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot 2e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

Haciendo un cambio de variables

$$u = t - \tau$$

$$du = -d\tau$$

$$\tau = 0 \Rightarrow u = t$$

$$\tau = t \Rightarrow u = 0$$

$$y(t) = \int_t^0 2e^{-2u}(-du) = e^{-2u} \Big|_t^0 = 1 - e^{-2t}$$

que es el mismo resultado que obtuvimos de la manera fácil.