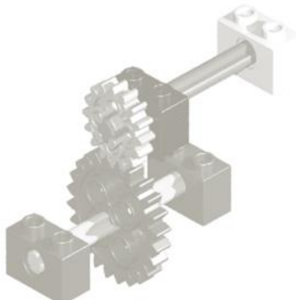
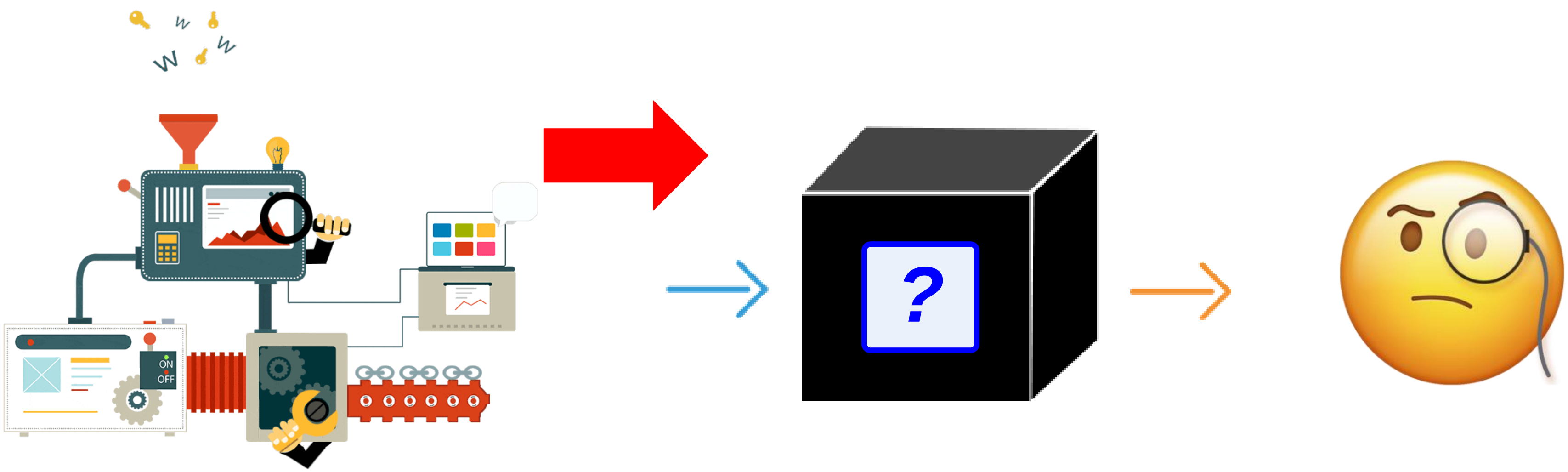


U2: Sistemas Continuos y Discretos

●Introducción a los Sistemas●

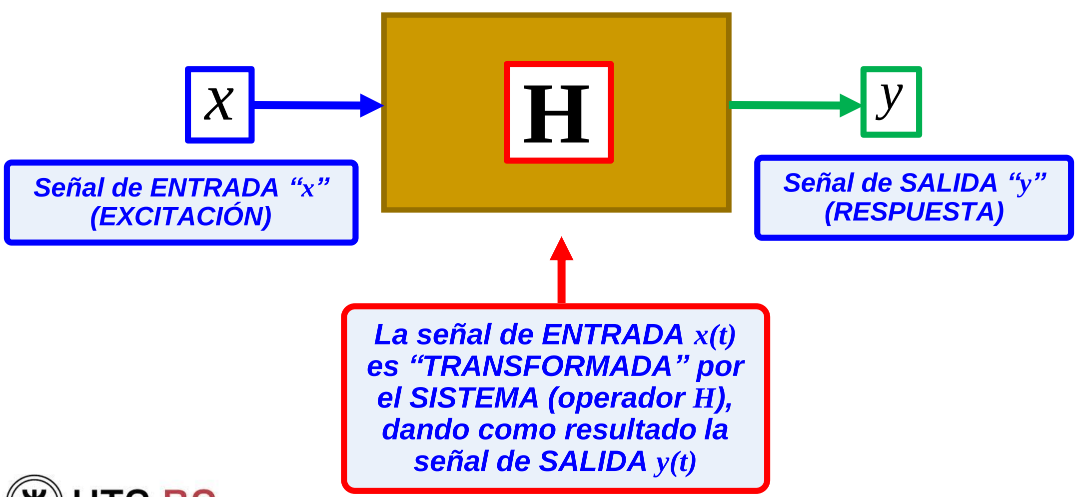
Introducción

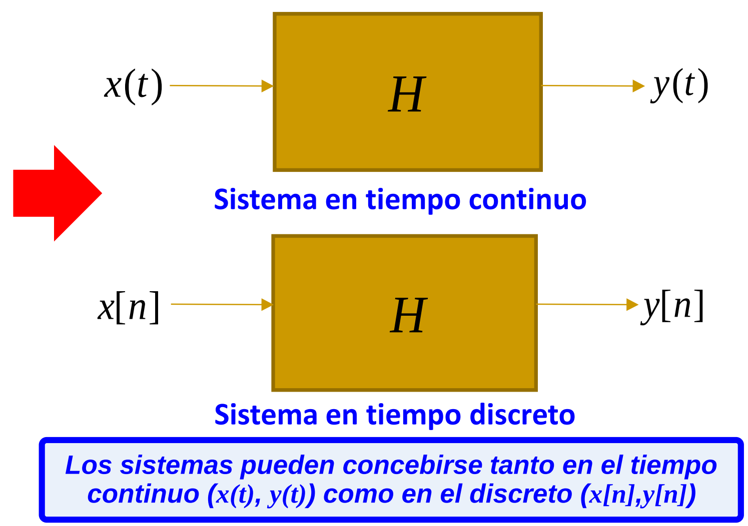
El ***término sistema*** es sumamente ***amplio*** y ***abstracto***. Sin embargo, un enfoque general lo concibe como una ***estructura o diseño*** que ***opera sobre señales***, de modo de ***producir*** algo más. Particularmente ***no resulta necesario*** determinar la constitución física del sistema sino sus ***relaciones funcionales***, de modo que el mismo puede ser considerado una ***caja negra***…



¿A qué se denomina formalmente “SISTEMA”?

Un sistema constituye un ***proceso que transforma señales temporales*** que ingresan a su ***entrada*** (***x(t)***, ***x[n]***) en otras que egresan de su ***salida*** (***y(t)***, ***y[n]***), mediante la ***interco-nexión*** de ***componentes***, ***dispositivos*** o ***incluso subsis-temas*** (***H***):

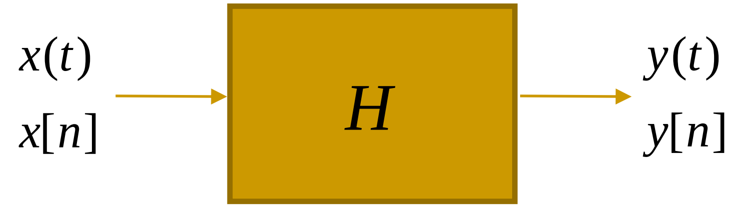




¿Cómo se evalúa un sistema?

El análisis de un sistema implica el ***estudio*** de su ***respuesta*** a ***excitaciones conocidas***. La determinación de la especificaciones "***entrada vs. salida***" se denomina ***identificación***. En virtud del ***campo de aplicación***, los sistemas pueden resultar:

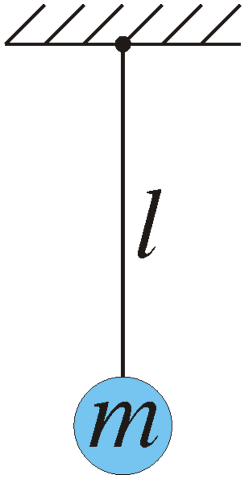
- *Eléctricos*
- *Mecánicos*
- *Biológicos*
- *Políticos*
- *Económicos*
- *Computacionales*

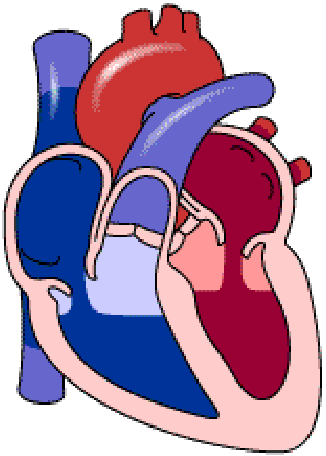


La respuesta de un sistema no sólo dependerá la excitación $x(t)$ presente en su entrada, sino que estará CONDICIONADA por el ESTADO de la salida $y(t)$ EN EL INSTANTE t_0 en el que dicha excitación es aplicada $y(t_0)$:

ESTADO O CONDICIÓN "INICIAL" DEL SISTEMA

Algunos sistemas físicos…



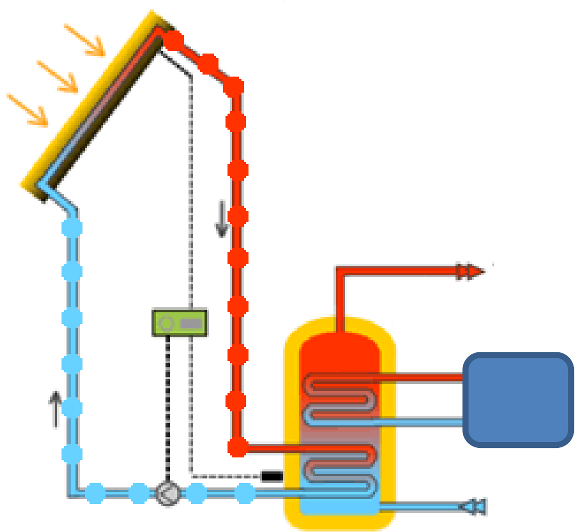


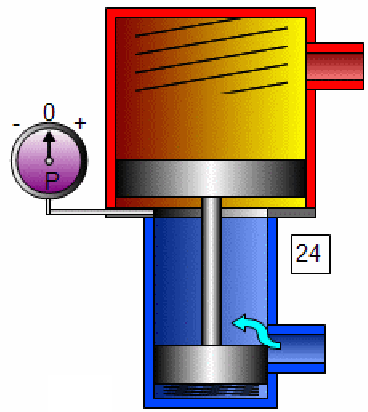
INTERACCIÓN MASA-RESORTE
Relación entrada-salida: Peso vs. Velocidad lineal o desplazamiento

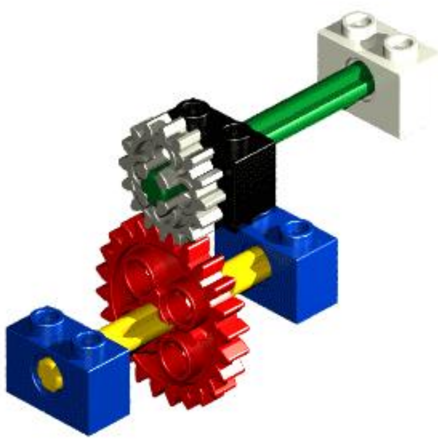
MOVIMIENTO PENDULAR
Relación entrada-salida: Fuerza vs. Velocidad angular

SISTEMA CARDIOVASCULAR
Relación entrada-salida: Presión vs. Flujo o Volumen

Algunos sistemas físicos…







SISTEMA DE CALENTAMIENTO
Relación entrada-salida:
Potencia vs. Temperatura

PROCESO TERMODINÁMICO
Relación entrada-salida:
Presión vs. Volumen

MANEJO DE CARGAS
Relación entrada-salida:
Torque vs. Velocidad angular

¿Cómo se describen matemáticamente los sistemas?

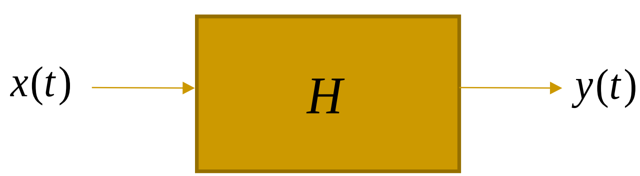
Los sistemas suelen ser complejos. Es por ello que se utilizan ***modelos*** ***o*** ***abstracciones*** que representan las características ***esenciales*** de los mismos, ***simplificando*** su evaluación. Matemáticamente, dicho análisis contempla el uso de ***ecuaciones algebraicas*** ***o*** ***ecuaciones diferenciales***:

$$y(t) = 2x^2(t-1)$$

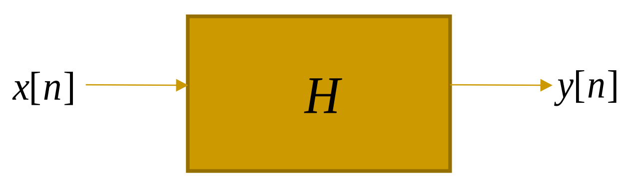
SISTEMA 1 (continuo): Ecuación ALEGBRAICA

$$y[n] = 2x^2[n-1]$$

SISTEMA 2 (discreto): Ecuación ALGEBRAICA



Sistema en tiempo continuo



Sistema en tiempo discreto

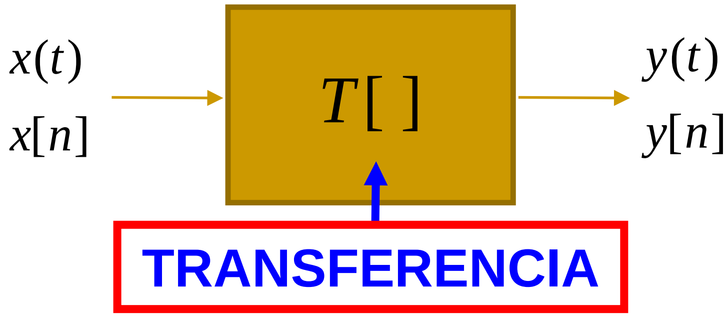
$$y'(t) + 2y(t) = 4x(t)$$

SISTEMA 3 (continuo): Ecuación DIFRENCIAL ordinaria

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

SISTEMA 4 (discreto): Ecuación EN DIFERENCIAS

En virtud de lo anterior, ***la acción del sistema sobre la excitación $x(t)$*** (que generará como consecuencia la respuesta $y(t)$) se denomina ***operador "TRANSFERENCIA"*** y puede expresarse ***matemáticamente*** como:



$$y(t) = T[x(t)]$$

Tiempo Continuo

$$y[n] = T[x[n]]$$

Tiempo Discreto

$$\boxed{y(t) = T\left[x(t)\right] = 2x^2(t-1)}$$

La acción $T[x(t)]$ implica:

a) Atrasar $x(t)$ en $1s$

b) Elevar $x(t-1)$ al cuadrado

c) Multiplicar $x^2(t-1)$ por 2

Clasificación de Sistemas

¿Cómo se caracterizan los sistemas en términos de su comportamiento?

Los ***sistemas*** pueden ***clasificarse*** de diversas formas:

- ***Lineales o No Lineales***
- ***Con o Sin Memoria***
- ***Invertibles o No invertibles***
- ***Causales o No Causales***
- ***Estables o No Estables***
- ***Invariantes o Variantes en el tiempo***

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t) \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

LA MISMA CLASIFICACIÓN SE APLICA TANTO A SISTEMAS CONTINUOS COMO A DISCRETOS

Sistemas Lineales

1. <u>Sistema LINEAL</u>: Un sistema es considerado ***lineal*** cuando cumple con el ***principio de superposición*** (propiedades de *aditividad* y *homogeneidad*):

$$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

Propiedad de ADITIVIDAD

Si para la entrada x_1 corresponde la salida y_1 y para la entrada x_2, corresponde la salida y_2, entonces la entrada $x_1 + x_2$ da como resultado $y_1 + y_2$

$$\alpha x_1(t) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow \alpha y_1(t)$$

α ESCALAR

Propiedad de HOMOGENEIDAD

Si se ESCALA la entrada $x(t)$ por un factor "α", LA SALIDA $y(t)$ SE ESCALA EN LA MISMA PROPORCIÓN

$$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

α, β ESCALARES

Si se cumplen SIMULTÁNEAMENTE Aditividad y Homogeneidad el sistema resulta LINEAL

Habida cuenta ***la condición*** $\boldsymbol{\alpha=0}$ se encuentra dentro de los ***valores posibles*** que puede asumir el ***factor de escala*** (propiedad de homogeneidad), se verifica entonces:

$$0x(t)=0 \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow 0y(t)=0$$

En términos de lo anterior, puede inferirse que ***en los sistemas lineales debe cumplirse*** la condición $\boldsymbol{T[0]=0}$, de modo que los mismos presentan <u>***salida nula a entrada nula***</u>:

$$\boxed{\text{Ya que } T[0]=0 \;\Rightarrow\; si\ x(t)=0 \text{ (entrada nula)},\ y(t)=0 \text{ (salida nula)}}$$

Consideraciones de relevancia

- En los ***sistemas lineales***, la expresión matemática que los caracteriza está constituida por ***operadores lineales*** (sumas, restas, producto por un escalar, derivadas, integrales…)
- Habida cuenta de su ***linealidad***, es posible evaluarlos ***conociendo su respuesta a señales elementales*** ***(impulsos, escalones, sinusoides)*** para luego determinar cualquier otra respuesta como ***combinación*** de las mismas.
- El sistema ***sólo*** se comporta linealmente ***si el estado inicial del mismo es nulo*** ($y(t_0)=0$, donde t_0 es el instante a partir del cual aplica la entrada $x(t)$). De otro modo, no podría cumplirse con el principio entrada nula, salida nula.

Ejemplo Práctico

Ejemplo: ¿$y(t)=2x(t)$ es lineal?¿Qué sucede con $y(t)=x^2(t)$?

$$\boxed{\text{Si es lineal: } T\left[x(t)\right]=y(t) \Rightarrow T\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)=y_C(t)}$$

Primer caso: $y(t)=2x(t)$

$$\begin{cases} y_1(t)=2x_1(t) \\ y_2(t)=2x_2(t) \end{cases} \Rightarrow y_C(t)=T[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=2\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]=\alpha\underbrace{2x_1(t)}_{y_1(t)}+\beta\underbrace{2x_2(t)}_{y_2(t)}$$

$$\boxed{y_C(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)}$$

SISTEMA LINEAL

Segundo caso: $y(t)=x^2(t)$

$$\begin{cases} y_1(t)=x_1^{\,2}(t) \\ y_2(t)=x_2^{\,2}(t) \end{cases} \Rightarrow y_C(t)=T\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]=\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]^2$$

$$=\alpha^2 x_1^{\,2}(t)+2\alpha\beta x_1(t)x_2(t)+\beta^2 x_2^{\,2}(t)$$

$$\boxed{y_C(t)\neq\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)}$$

SISTEMA NO LINEAL

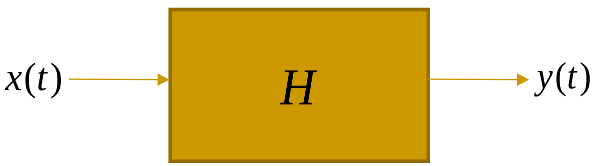
Ejemplos adicionales:

1. $y(t) = 2x(t) + x'(t) \rightarrow \mathit{Lineal}$
2. $y(t) = 4x(t) + 2 \rightarrow \mathit{No\ Lineal}$ (hay un término independiente de valor 2)
3. $y(t) = e^{x(t)} \rightarrow \mathit{No\ Lineal}$ (no cumple aditividad ni homogenieidad)
4. $y(t) = x(t)x'(t) \rightarrow \mathit{No\ Lineal}$ (producto entre funciones de entrada)
5. $y'(t) + 2y(t) = x'(t) \rightarrow \mathit{Lineal}$ (operadores lineales)

Recordar que el sistema se comportará linealmente bajo CONDICIONES INICIALES NULAS (<u>valor nulo de la salida $y(t)$ al momento de aplicar la entrada $x(t)$</u>). Por otra parte, NO SE ADVERTIRÁ LINEALIDAD ante la presencia de términos independientes (ejemplo 2), operadores no lineales (ejemplo 3) o productos de funciones (ejemplo 4)

Sistemas Con y Sin Memoria

2.a *Sistema SIN MEMORIA*: El valor de su ***respuesta*** en un ***instante $t=t_0$*** depende del valor de la excitación ***en dicho instante***



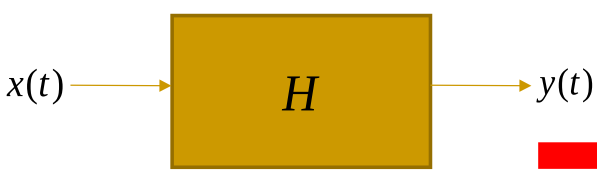
$$\boxed{y(t) = 4x(t) + 2}$$

$$y(t) = 4x(t) + 2 \begin{cases} y(t=0) = 4x(t=0) + 2 \\ \vdots \\ y(t=8) = 4x(t=8) + 2 \end{cases}$$

Se observa que para $t=0$, la salida $y(0)$ SÓLO depende del valor de la entrada en ese mismo instante ($x(0)$)!

***SIN MEMORIA* (ESTÁTICO)**

2.b *Sistema CON MEMORIA*: El valor de su ***respuesta*** en un ***instante $t=t_0$*** depende del valor de la excitación ***en instantes diferentes***



$$\boxed{y(t) = x(t) - x(t-1)}$$

$$y(t) = x(t) - x(t-1) \begin{cases} y(t=0) = x(t=0) - x(t=-1) \\ \vdots \\ y(t=8) = x(t=8) - x(t=7) \end{cases}$$

En este caso se advierte que para $t=0$, la salida $y(0)$ depende del valor de la entrada en $t=0$ y del valor de la entrada en $t=-1$!!!

***CON MEMORIA* (DINÁMICO)**

El sistema ALMACENA información PASADA, ya que debe utilizar valores anteriores de la entrada para calcular la salida actual

Sistemas Con y Sin Memoria

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(t)$$

Los sistemas definidos por ***ecuaciones diferenciales*** poseen ***memoria***, ya que dependen de ***valores pasados de su entrada o salida***:

$$y'(t) = 4x(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

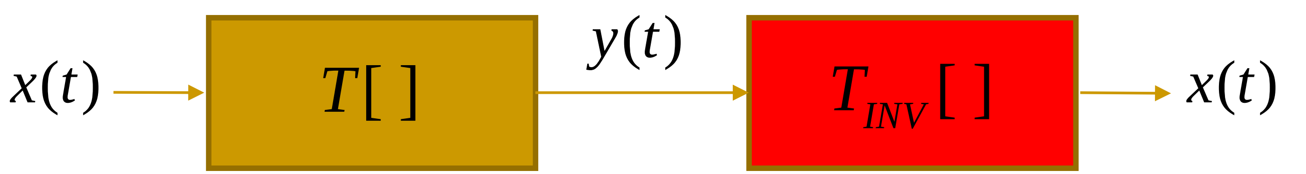
El modelado de un sistema en términos de una ecuación diferencial implica la existencia de elementos almacenadores de energía (MEMORIA)

Los sistemas definidos por ***ecuaciones algebraicas*** y ***mismo argumento***, ***no presentan memoria***:

$$y[n] = 4x^2[n]$$

Sistemas Invertibles

3. Sistema INVERTIBLE: Un sistema es ***invertible*** si existe un ***sistema inverso***, tal que al conectarlo en cascada con el sistema original, produce una ***respuesta idéntica a la excitación***:



$$y(t) = 10x(t) \qquad z(t) = 0.1y(t)$$

Si un sistema es invertible, debe existir otro que, tomando la salida y(t), y[n] como entrada, genere como resultado la excitación x(t),x[n]

Por ejemplo, el sistema discreto $y[n]=x^2[n]$ ***no resulta invertible***, ya que produce la ***misma respuesta*** para dos entradas distintas (excitaciones únicas deben producir respuestas únicas)

Sistemas Causales

4. <u>Sistema CAUSAL</u>: Un sistema es considerado ***causal*** si su ***respuesta sólo depende del valor actual de la excitación y de valores previos*** (el sistema responde el principio de <u>*causa-efecto*</u>):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$\boxed{y(t) = 2x(t) - x(t-2) \rightarrow Causal}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{x[n+1] + x[n-1]}{2} \rightarrow No\ causal}$$

La respuesta ACTUAL de la salida $y(t)$ depende del valor ACTUAL de la excitación $x(t)$ y del valor ocurrido dos segundos ANTES ($x(t-2)$)

La respuesta ACTUAL $y[n]$ depende del valor de la excitación $x[n]$ una muestra ANTES ($x[n-1]$) y una muestra DESUPUÉS (hacia el futuro, $x[n+1]$)!!!

Conforme puede observarse, la ***causalidad se determina fijando un instante*** $t=t_0$ ($n=n_0$) y analizando si la respuesta en dicho instan-te ($y(t_0)$) depende ***sólo*** de entradas ***actuales*** o ***anteriores*** a t_0:

$$\boxed{y(1) = 2x(1) - x(0) \rightarrow Causal}$$

La causalidad implica que el sistema no resulta ANTICIPATIVO, es decir, que su respuesta depende de SÓLO estados actuales o pasados

Sistemas Estables

5. *Sistema ESTABLE:* Un sistema resulta ***estable*** si para ***toda entrada acotada*** su ***respuesta*** resulta ***acotada*** (estabilidad ***BIBO***: ***B**ounded **I**nput-**B**ounded **O**utput*):

$$\text{Si para } |x(t)| < K, \quad |y(t)| < M \;\Rightarrow\; \text{El sistema es ESTABLE } (K \text{ y } M \text{ entreros positivos})$$

La condición debe cumplirse para todo el rango t (n)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t) \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$y(t) = \begin{cases} 2x(t) \rightarrow \mathit{Estable}\ (|x(t)| < K, |y(t)| < 2K) \\ A\cos[x(t)] + c \rightarrow \mathit{Estable}\ (|\cos[x(t)]| < 1) \\ 1/x(t) \rightarrow \mathit{No\ estable}\ (x(t) = 0, y \rightarrow \infty) \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \;\rightarrow\; \mathit{No\ Estable}$$

$$y[n] \rightarrow \infty \text{ (diverge) } si\ x[n] = u[n] \text{ (acotada)}$$

Una primera evaluación consiste en encontrar una entrada acotada que genere una respuesta divergente

UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Determinar la condición de ***estabilidad*** de los siguientes sistemas continuos:

Primer Caso: $y(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) \rightarrow |y(t)| = |x(t)||\cos(\omega_0 t)|$$

Para evaluar ESTABILIDAD se debe determinar $|y(t)|$ de modo de relacionarlo con $|x(t)|$

$$como \ |\cos(\omega_0 t)| < 1 \Rightarrow |y(t)| \leq |x(t)|$$

Si $|x(t)|<M$ (acotada), entonces $|y(t)|<M \rightarrow$ ***ESTABLE***

Segundo Caso: $y''+3y'+2y=x$

En este caso el sistema resulta ***ESTABLE*** dado que:

- *La **derivada de mayor orden** de la **entrada** es **menor** que la de mayor orden de la **salida***
- *Las raíces de la **ecuación característica** presentan **parte real negativa**, condición que asegura una respuesta compuesta por **exponenciales decrecientes** ante entradas acotadas.*

Sistemas Invariantes en el Tiempo

6. Sistema INVARIANTE EN EL TIEMPO: Un sistema es ***invariante temporal*** si el comportamiento y características del mismo ***no cambian*** con el transcurso del tiempo. Para ello debe suceder que ***al desplazar su entrada*** un instante t_0 (n_0) ***la respuesta original se vea desplazada en la misma proporción, sin cambios***:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t) \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$\boxed{T[x(t)] = y(t) \Rightarrow T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)} \qquad \boxed{T[x[n]] = y[n] \Rightarrow T[x[n-n_0]] = y[n-n_0]}$$

En los sistemas físicos, la invariancia temporal implica que la respuesta de un sistema será exactamente la misma independientemente del instante en que se aplique una determinada señal a su entrada

Los ELEMENTOS que definen la estructura del sistema NO SE MODIFICAN CON EL TIEMPO (la variable independiente "t" sólo actúa como argumento de la excitación y la respuesta). El sistema "NO ENVEJECE" o no se ve afectado por factores externos (ej. temperatura)

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Sean los sistemas ***y(t)=x(t)+1 e y(t)=tx(t)*** ¿Pueden considerarse ***invariantes temporales***?

$$\boxed{Si\ es\ IT:\ T\left[x(t)\right]=y(t)\rightarrow T\left[x(t-t_0)\right]=y(t-t_0)}$$

Primer caso: $y(t)=x(t)+1$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ Se\ desplaza\ \ la\ entrada:y_1(t)=x(t-t_0)+1\\ 2)\ Se\ desplaza\ \ la\ salida:y_2(t)=y(t-t_0)=x(t-t_0)+1\end{array}\right\}y_1(t)=y_2(t)$$

INVARIANTE EN EL TIEMPO

Segundo caso: $y(t)=tx(t)$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ Se\ desplaza\ \ la\ entrada:y_1(t)=tx(t-t_0)\\ 2)\ Se\ desplaza\ \ la\ salida:y_2(t)=y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0)\end{array}\right\}y_1(t)\neq y_2(t)$$

VARIANTE EN EL TIEMPO

Para evaluar INVARIANCIA TEMPORAL se deben analizar dos instancias. Primero se DESPLAZA SÓLO LA EXCITACIÓN y se determina la respuesta $y_1(t)$. Luego se evalúa la condición de DESPLAZAMIENTO DE LA RESPUESTA $y(t-t_0)=y_2(t)$. Si ambos resultados coinciden ($y_1=y_2$) el sistema resulta INVARIANTE EN EL TIEMPO

$$y(t)=2x(t)+x'(t)\rightarrow \text{Invariante en el tiempo}$$

$$y(t)=x(2t)\rightarrow \text{Variante en el tiempo}$$

SISTEMAS LIT: Esencialmente, se focalizará el estudio sobre los sistemas ***Lineales*** e ***Invariantes en el Tiempo*** (***LIT***). Los mismos, además de poder ser expresados por ***ecuaciones algebraicas*** (tal como se analizó anteriormente), suelen estar descriptos por ***Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias a Coeficientes Constantes*** (***EDO$_{CC}$***), debido a que caracterizan ***sistemas físicos***:

$$\boxed{y^{n}(t)+a_1 y^{n-1}(t)+\ldots+a_n y(t)=b_0 x^{m}(t)+b_1 x^{m-1}(t)+\ldots+b_m x(t)}$$

donde a_n, b_n ***no dependen del tiempo*** (*invariancia temporal*)

$y'(t)+3y(t)=x(t) \Rightarrow LIT$ **EDO a coeficientes constantes**

$y'(t)+3ty(t)=x'(t) \Rightarrow Lineal$, pero variante en el tiempo **EDO a coeficientes variables (término $3ty(t)$)**

$y'(t)+3y^{2}(t)=x'(t) \Rightarrow No\ Lineal$, pero invariante en el tiempo **EDO No lineal (término $3y^2(t)$)**

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A (30 minutos)

1. Evaluar los siguientes sistemas en términos de ***linealidad***, ***memoria***, ***causalidad***, ***estabilidad*** e ***invariancia temporal***:

$$a)\quad y[n] = sen\left[x[n-2]\right]$$

$$b)\quad y(t) = 2e^{-4x(t+1)}$$

$$c)\quad y(t) = 2x(3t)$$

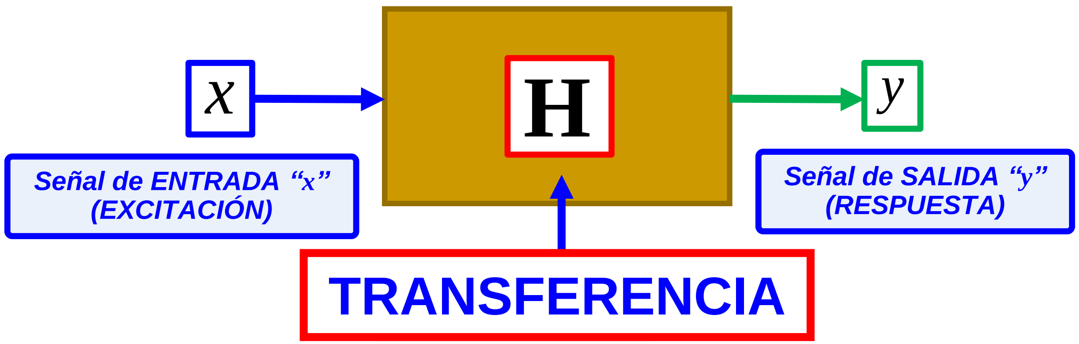
$$d)\quad y[n] = nx^2[n]$$

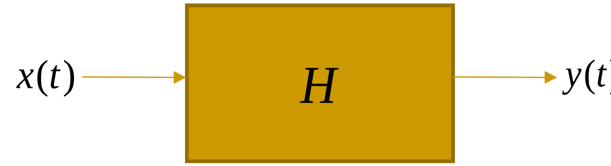
$$f)\quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

2. Generar ***dos funciones*** en ***MatLab***, de modo de simular los sistemas ***c)*** y ***d)*** (***$S_C[x(t)]$***) y ***$S_D[x(t)]$***) y determinar ***si se los puede considerar LIT, analizando sus respuestas a entradas tipo escalón u(t).***

Resumen General

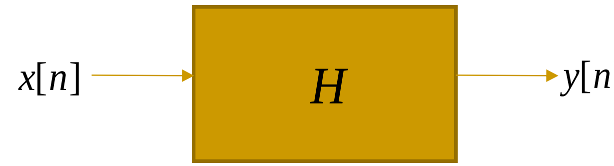
SISTEMA





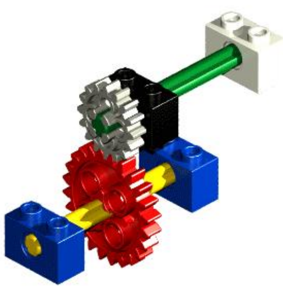
Sistema en tiempo continuo

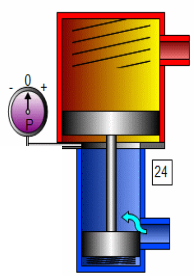
$$y(t) = 2x^2(t-1)$$



Sistema en tiempo discreto

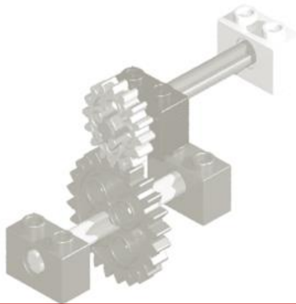
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$





- *Lineales o No Lineales*
- *Con o Sin Memoria*
- *Invertibles o No invertibles*
- *Causales o No Causales*
- *Estables o No Estables*
- *Invariantes o Variantes en el tiempo*

SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO (LIT)



U2: Sistemas Continuos y Discretos

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Sistemas Continuos y Discretos