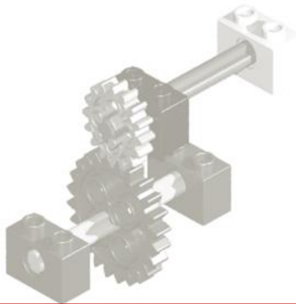


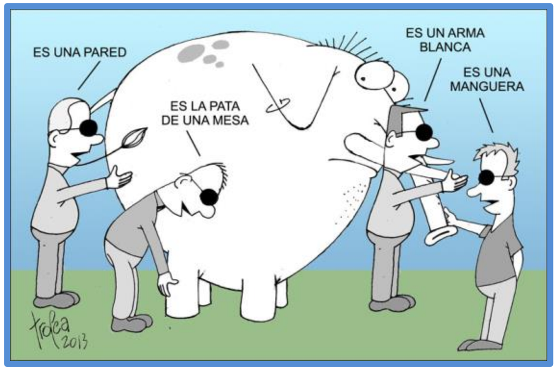
U2: Sistemas Continuos y Discretos

●Modelización de Sistemas Físicos●

Modelización de Sistemas: *¿Qué significa "Obtener un Modelo"?*

*Un modelo matemático es una **construcción matemática abstracta** y **simplificada** que intenta reproducir **parte la realidad**, creada para un **propósito** particular.*

Para ello el mundo se contempla en virtud de **tres visiones**:

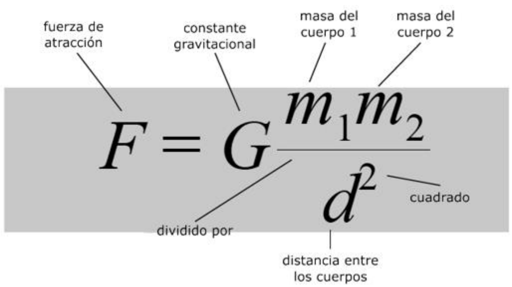


FÁBULA: LOS CIEGOS Y EL ELEFANTE
Modelar implica representar PARTE de la realidad, a partir de la fijación de un OBJETO DE ESTUDIO

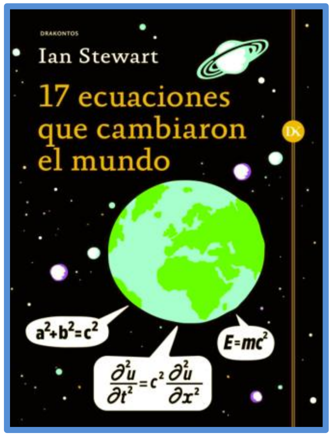
- Las cosas cuyos efectos son despreciados (**el modelo las ignora**)
- Las cosas que afectan al modelo pero cuyo comportamiento no está contemplado en el objeto de estudio (**Excitación** $x(t)$ o variables independientes)
- Las cosas cuyo comportamiento estudia el modelo (**Respuesta** $y(t)$ o variables dependientes)

El potencial de los modelos matemáticos

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL: EL SISTEMA DEL MUNDO

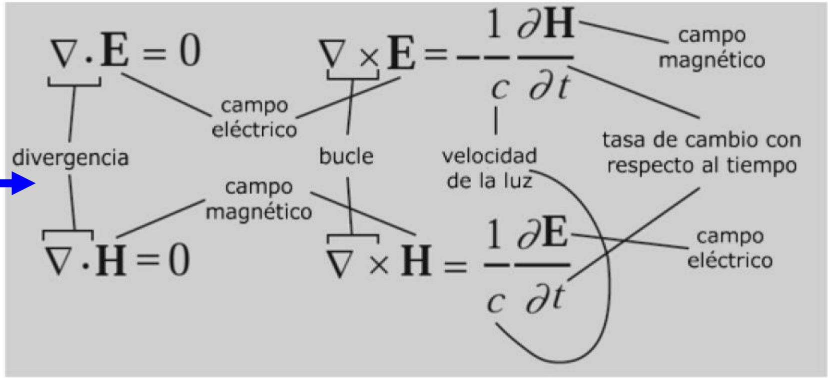


La descripción de la interacción gravitatoria de los cuerpos con masa permitió la PREDICCIÓN precisa de eclipses, ÓRBITAS PLANETARIAS y la reaparición de los cometas, entre otros muchos avances científicos tales como el GPS, por ejemplo



Ondas en el éter: ECUACIONES DE MAXWELL

El agrupamiento llevado a cabo por Maxwell para la descripción del campo electromagnético PREDIJO la existencia de ondas que se desplazan a la velocidad de la luz: Motivó la invención de la radio, el radar, la televisión, el wifi…



¿Qué debemos tener en consideración al diseñar un modelo?

Newton vs. Einstein

Visión diferenciada de la GRAVEDAD

Espacio FIJO de Newton

Espacio-Tiempo FLEXIBLE de Einstein

- Si se ignoran las cosas equivocadas el modelo ***puede ser inadecuado***
- Si se toma mucho en consideración, el modelo se torna ***sumamente complejo***
- Efectuar una elección ***adecuada*** de aquello que se desea describir (variable dependiente)
- La definición de las variables y su interrelación son las ***suposiciones*** que se hacen del modelo, de modo de obtener ***conclusiones*** (predicciones, no explicaciones) del mismo

No se puede pueden maximizar simultáneamente *GENERALIDAD*, *REALISMO* y *PRECISIÓN* (se sacrifica un objetivo en virtud de otro)

Introducción

Recuérdese que el término ***sistema*** se utiliza para describir un conjunto de **componentes que interactúan entre sí** en base a **excitaciones** y **respuestas.** *"**Un sistema es aquello que opera sobre algo para producir algo más**"*

El ***estudio de un sistema bajo excitación*** requiere del ***desarrollo de un modelo matemático conceptual:***

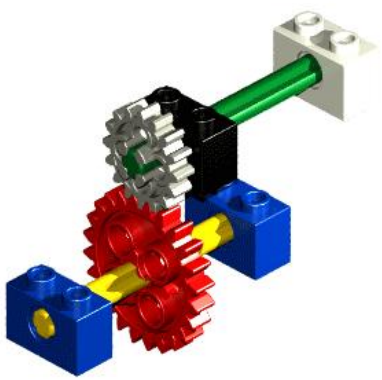
- Descripción matemática de sus **elementos** constitutivos
- Descripción matemática de la **interconexión** dichos elementos

Evaluación del modelo: Resolución matemática de sus ecuaciones conforme su excitación y estado inicial

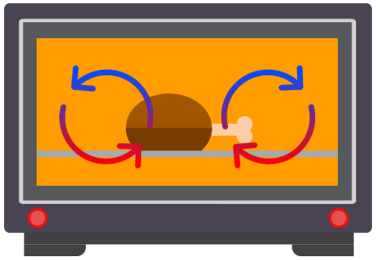
Análisis de sensibilidad: Dependencia ante variaciones de sus parámetros. Discrepancias observación-predicción

Introducción

Debe tenerse presente, además, que un sistema puede ser eléctrico, mecánico, biológico, político, económico, físico… Un sistema puede ser casi todo

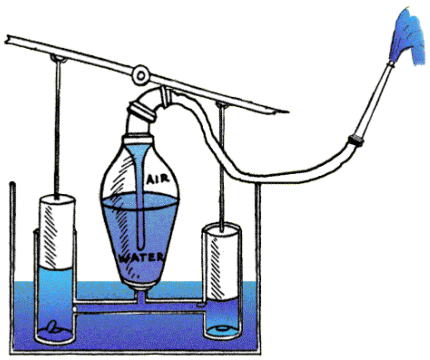


Manejo de Cargas



Control de Temperatura

Velocidad de Descenso



Conversión de Régimen de Flujo

¿Qué tipo de sistemas se modelarán?

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (SLIT)

Muchos fenómenos físicos pueden ser *modelados* mediante estos sistemas (*suposiciones a priori del modelo sobre el fenómeno*)

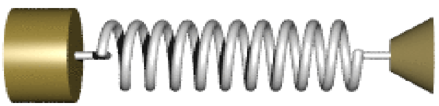
El análisis matemático de su comportamiento puede desarrollarse a través de procedimientos directos

Pueden ser descriptos a partir de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)

***Sistema Lineal*: Aquel que cumple con el principio de superposición (aditividad y homogeneidad)**

***Sistema Invariante temporal*: Aquel cuyas características no se modifican con el paso del tiempo**

REPASO: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOs)



$$\boxed{x(t) = Cy''(t) + By'(t) + Ay(t)}$$

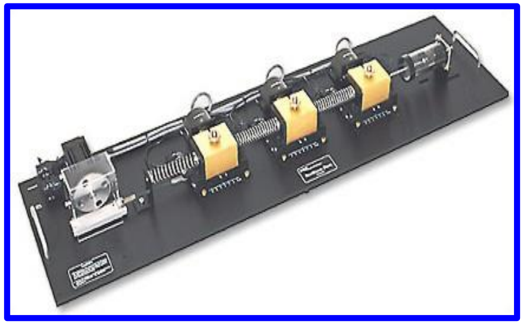
- Comprenden ***una*** *o* ***varias*** derivadas de una función no especificada $y(t)$ donde además pueden aparecer términos constantes. ***La derivada de mayor orden determina el grado de la ecuación (N)***
- El término ***ordinarias*** las distingue de otras ecuaciones en derivadas parciales respecto a otras variables independientes
- Se denominan ***lineales*** sino presentan productos de $y(t)$ consigo misma, con sus derivadas o con la variable independiente
- La solución general se encuentra constituida por una familia de curvas, conjuntamente con N **constantes arbitrarias**
- Los coeficientes A,B y C pueden ser ***constantes*** o dependientes de t

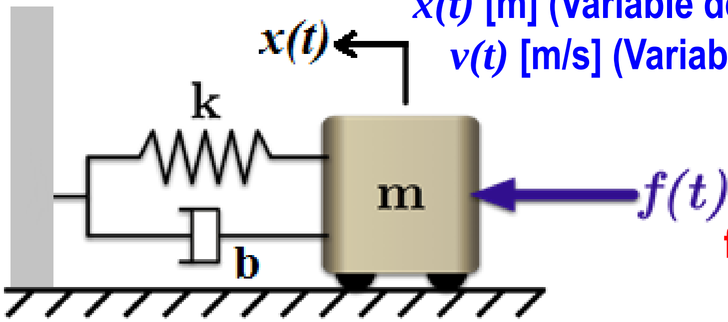
Sistemas Traslacionales

EJEMPLO 1. MODELO MECÁNICO TRASLACIONAL

PREMISA: Se ejerce fuerza ***f(t)*** sobre un móvil vinculado a un resorte y a un amortiguador viscoso en oposición, de modo de desplazarlo una distancia ***x(t)*** a una velocidad ***v(t)***

- *Amortiguador*
- *Tecla piano*
- *Abrochadora*





x(t) [m] (Variable desplazamiento)
v(t) [m/s] (Variable velocidad)

f(t) [N] (Variable fuerza, fuente de energía)

- *M*: Elemento **Masa** (almacenamiento de energía cinética) ***[Kg]***
- *B*: Elemento **Amortiguador Viscoso** (disipación de energía) ***[Ns/m]***
- **K**: Elemento **Resorte** (almacenamiento de energía potencial elástica) ***[N/m]***

Relación *fuerza* vs. *velocidad lineal*

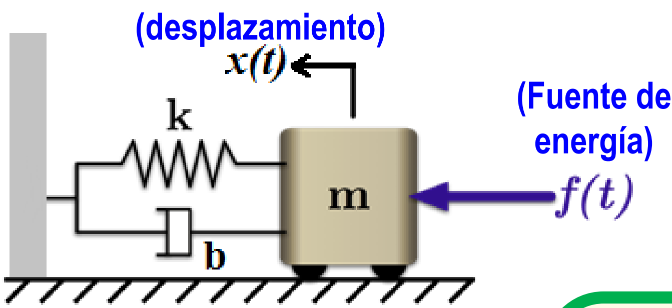
Ecuación que Modela al Sistema

$$f(t)=Mv'(t)+Bv(t)+K\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$$

¿Cómo se obtiene?

EJEMPLO 1. MODELO MECÁNICO TRASLACIONAL

El sistema se analiza aplicando ***la segunda ley de Newton (D'Alambert)***:



$$\boxed{\sum f = ma} \Rightarrow \boxed{f(t) - f_B(t) - f_K(t) = f_M(t)}$$

El elemento ***masa (M)*** *corresponde la constante de proporcionalidad de la segunda ley de Newton:*
$f_M(t)=Ma(t)=Mv'(t)=Mx''(t)$

El elemento ***amortiguador viscoso (B)*** *corresponde al movimiento contra fuerzas de fricción (en un fluido o gas), las cuáles aumentan al incrementarse la velocidad (Ley de Stokes):*
$f_B(t)=Bv(t)=Bx'(t)$

El elemento ***resorte (K)*** *corresponde a la constante elástica de la ley de Hooke. Cuanto más elevada, más rígida resulta la oposición:*
$f_K(t)=Kx(t)= K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$

$$f(t) = Mv'(t) + Bv(t) + K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

$$f(t) = Mx''(t) + Bx'(t) + Kx(t)$$

La relación $f(t)$ vs $v(t)$ se MODELA a partir de una ecuación INTEGRO-DIFERENCIAL mientras que $f(t)$ vs $x(t)$ a partir de una EDO de SEGUNDO ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES

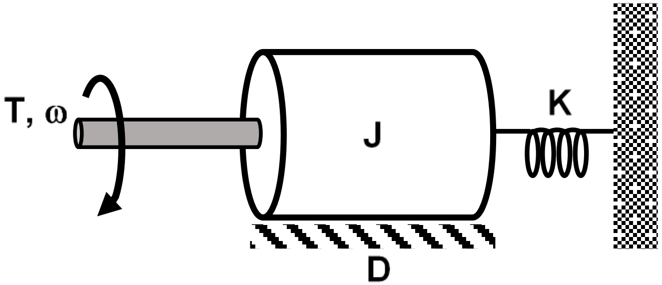
EJEMPLO 2. MODELO MECÁNICO ROTACIONAL

PREMISA: Se ejerce un torque ***T(t)*** sobre un cuerpo rotatorio que roza contra un fluido, a través de una barra de torsión, de modo de desplazarlo un ángulo ***θ(t)*** a velocidad ***ω(t)***

- *Servomotor*
- *Articulaciones en robótica*

T(t) [Nm] (Variable Torque, fuente de energía)

θ(t) [rad] (Variable desplazamiento angular)
ω(t) [rad/s] (Variable velocidad angular)



- **J**: Elemento **Momento de Inercia** (almacenamiento de energía cinética) ***[Kgm²]***
- **D**: Elemento **Amortiguador Viscoso** (disipación de energía, fricción) ***[Nms/rad]***
- **K**: Elemento **Resorte de Torsión** (almacenamiento de energía potencial elástica) ***[Nm/rad]***

$$T(t) \longrightarrow \boxed{T[\;]} \longrightarrow \omega(t)$$

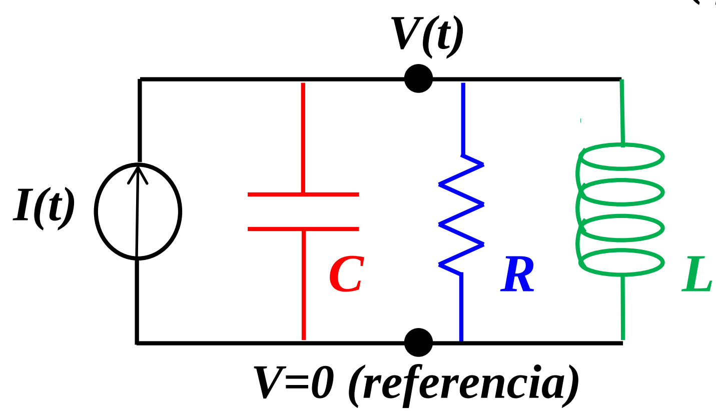
Relación *torque* vs. *velocidad angular*

Ecuación que Modela al Sistema

$$T(t)=J\omega'(t)+D\omega(t)+K\int_{-\infty}^{t}\omega(\tau)d\tau$$
$$T(t)=J\theta''(t)+D\theta'(t)+K\theta(t)$$

EJEMPLO 3. MODELO ELÉCTRICO

PREMISA: Se aplica una corriente $I(t)$ ***a un nodo*** de donde se conectan una resistencia, un inductor y un capacitror, generándose como consecuencia una tensión $V(t)$:



- **C**: Elemento ***Capacidad Eléctrica*** *(Almacenamiento de energía eléctrica)* **[F]**
- **R**: Elemento ***Resistencia Eléctrica*** *(disipación de energía)* **[Ω]**
- **L**: Elemento ***Inductancia Eléctrica*** *(Almacenamiento de energía magnética)* **[Hy]**

$$I(t) \longrightarrow \boxed{T[\,]} \longrightarrow V(t)$$

Relación *corriente* vs. *tensión*

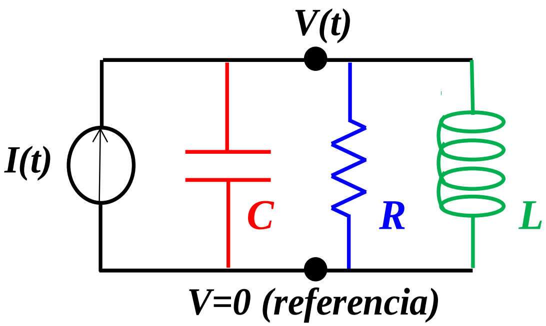
Ecuación que Modela al Sistema

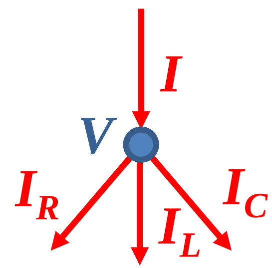
$$I(t)=CV'(t)+\frac{1}{R}V(t)+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}V(\tau)d\tau$$

¿Cómo se obtiene?

EJEMPLO 3. MODELO ELÉCTRICO

El sistema se analiza aplicando la ***primera ley de Kirchhoff en un nodo***:





$$\boxed{\sum i_{entrantes} = \sum i_{salientes}}$$

$$\boxed{I(t) = i_C(t) + i_R(t) + i_L(t)}$$

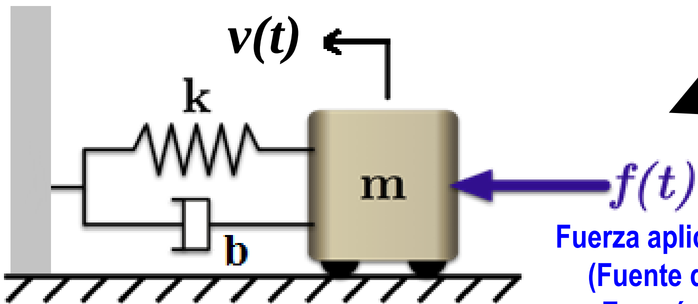
*La **resistencia eléctrica (R)** corresponde a la constante de proporcionalidad entre la tensión aplicada y la corriente que circula como consecuencia (Ley de Ohm):*
$i_R(t)=V(t)/R$

*La **inductancia eléctrica (L)** responde a una relación entre el flujo magnético producido y la corriente que lo atraviesa:*
$\phi(t)=Li_L(t) \rightarrow \phi'(t)=V(t)=Li_L'(t) \rightarrow$
$i_L(t)=1/L \int_{-\infty}^{t} V(\tau)d\tau$

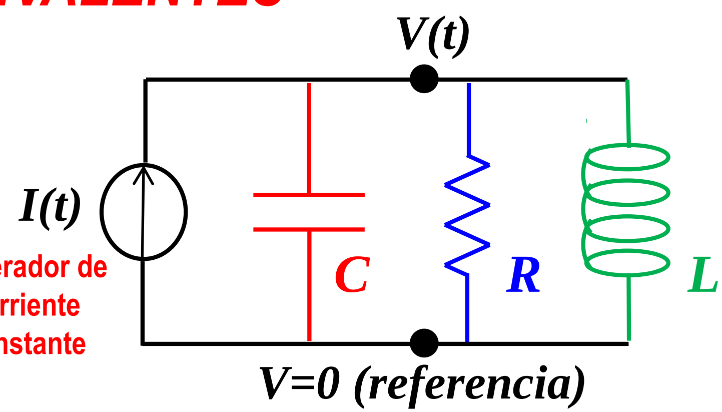
*La **capacitancia eléctrica (C)** corresponde a la relación entre la carga almacenada y la tensión aplicada:*
$q(t)=CV(t) \rightarrow i_C(t)=q'(t)=CV'(t) \rightarrow$
$V(t)=1/C \int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$

$$\boxed{I(t)=CV'(t)+\frac{1}{R}V(t)+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)d\tau}$$

MODELO ELÉCTRICO: CIRCUITOS EQUIVALENTES



Fuerza aplicada (Fuente de Energía)



$$f(t) = M v'(t) + B v(t) + K \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

Análisis por leyes de Newton

$$I(t) = C V'(t) + \frac{1}{R} V(t) + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} V(\tau)\,d\tau$$

Análisis del nodo V(t) por Kirchhoff

MODELO ELÉCTRICO EQUIVALENTE

Debido a que las ecuaciones de ambos modelos resultan HOMÓLOGAS, es factible definir un MODELO ELÉCTRICO EQUIVALENTE del fenómeno físico: un CIRCUITO donde CADA COMPONENTE REPRESENTA UN ELEMENTO DEL SISTEMA (la MASA se comporta como un CAPACITOR, el AMORTIGUADOR como una RESISTNCIA y el RESORTE como un INDUCTOR) y donde las FUERZAS son representadas por CORRIENTES y las VELOCIDADES por TENSIONES

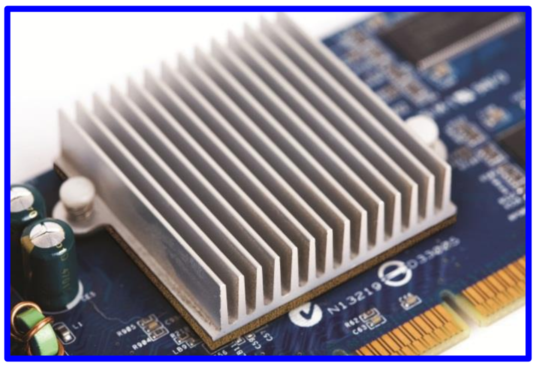
$$\left.\begin{aligned} M &\equiv C \\ B &\equiv 1/R \\ K &\equiv 1/L \\ F(t) &\equiv I(t) \\ v(t) &\equiv V(t) \end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones resultan homólogas (de estructura semejante)

EJEMPLO 4. MODELO TÉRMICO

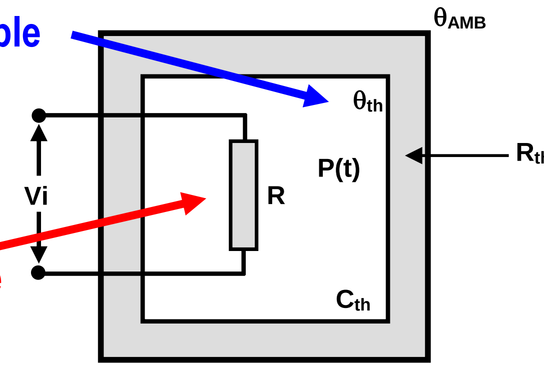
PREMISA: Se inyecta un flujo de calor por unidad de tiempo (potencia ***P(t)***) a un contenedor, de modo de incrementar su temperatura interna ***θ(t)***. Parte del calor se transfiere al ambiente.

- Horno Eléctrico
- Transistor de potencia

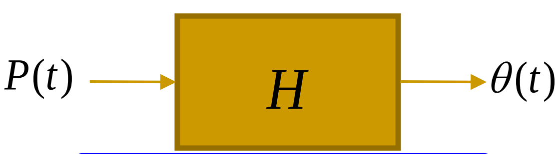


$\theta_{th}(t)$ [ºC] (Variable Temperatura)

$P(t)$ [W] (Variable Potencia, fuente de energía)



- C_{TH}: Elemento ***Capacidad Térmica*** *(Almacenamiento de energía calórica)* ***[Ws/ºC]***
- R_{TH}: Elemento ***Resistencia Térmica*** *(disipación de energía calórica)* ***[ºC/W]***
- θ_{AMB}: **Temperatura ambiente** *(referencia constante)*



Relación *Potencia* vs. *Temperatura*

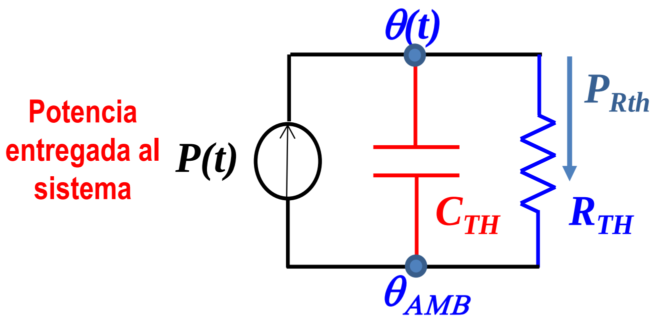
Ecuación que Modela al Sistema

$$P(t) = C_{th}\theta'(t) + \frac{\theta_{th}(t) - \theta_{AMB}}{R_{th}}$$

¿Cómo se obtiene?

EJEMPLO 4. MODELO TÉRMICO

Utilizando la analogía circuital, las ***potencias se modelan como corrientes*** y las ***temperaturas como tensiones***. Parte de la potencia se almacena (P_{Cth}) y el resto se disipa al exterior (P_{Rth}), a través de la resistencia térmica R_{th}:



$$P(t) = P_{C_{TH}}(t) + P_{R_{TH}}(t)$$

Suma de las corrientes en el nodo $\theta(t)$

De la potencia entregada al sistema, parte de ella se almacena (de modo de incrementar la temperatura del contenedor, $\theta(t)$) y el resto se disipa al ambiente través de la resistencia térmica

La ***capacidad térmica*** (C_{TH}) constituye la cantidad de calor requerida por un cuerpo para incrementar su temperatura un grado, en relación a la temperatura ambiente:

$P_{CTH}(t)=C_{TH}d[\theta(t)-\theta_{AMB}]/dt$

*La **resistencia térmica** (R_{TH}) constituye la relación entre el flujo de calor por unidad de tiempo (**P(t)**) evacuado a través de un conductor térmico y la diferencia de temperatura (**θ(t)**) entre dos puntos extremos (salto térmico):*

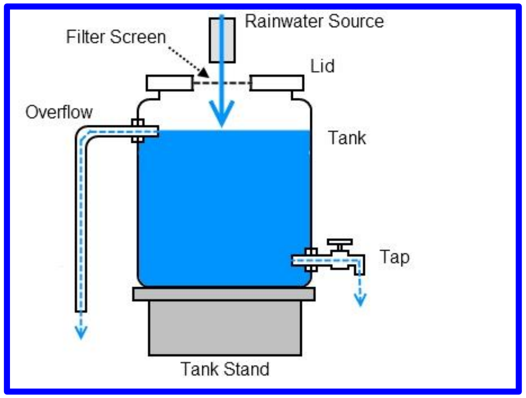
$P_{RTH}(t)= [\theta(t)-\theta_2(t)]/R_{TH}$

$$P(t) = C_{TH} d\frac{[\theta(t)-\theta_{AMB}]}{dt} + \frac{\theta(t)-\theta_{AMB}}{R_{TH}}$$

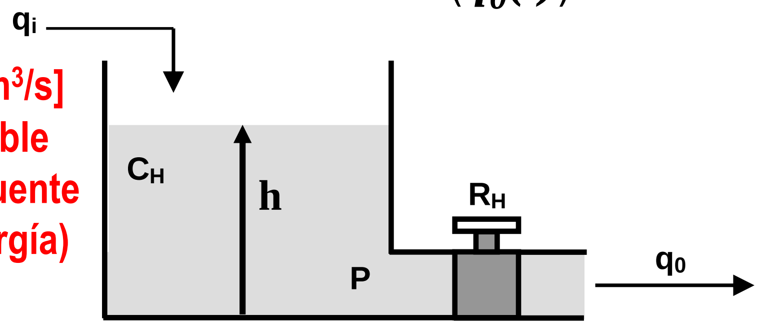
EJEMPLO 5. MODELO HIDRÁULICO

PREMISA: Se inyecta un fluido por unidad de tiempo ($q_i(t)$) a un contenedor, de modo de incrementar su presión interna $p(t)$. Parte del fluido se transfiere al exterior ($q_0(t)$):

- Tanque Edificio
- Depósito Inodoro



$q_i(t)$ [m^3/s] (Variable Flujo, fuente de energía)



$p(t)$ [N/m^2] (Variable presión) P_{ATM}

$h(t)$ [m] (altura líquido), A [m^2] (área del fondo)

- C_H: Elemento ***Capacidad hidráulica*** *(almacenamiento de energía hidráulica)* **[m^5/N]**
- R_H: Elemento ***Resistencia hidráulica*** *(disipación de energía hidráulica)* **[Ns/m^5]**
- P_{ATM}: **Presión atmosférica** *(referencia constante)*

$q_i(t) \rightarrow \boxed{T[\,]} \rightarrow p(t)$

Relación *flujo* vs. *presión*

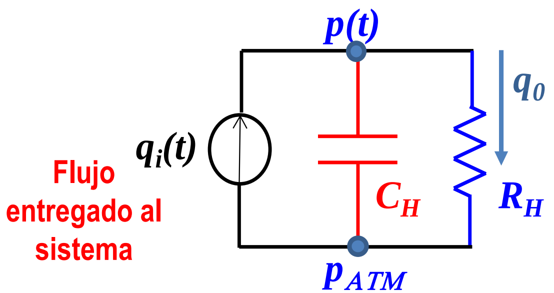
Ecuación que Modela al Sistema

$$q_i(t) = C_H p'(t) + \frac{p(t) - p_{ATM}}{R_H}$$

¿Cómo se obtiene?

EJEMPLO 5. MODELO HIDRÁULICO

En analogía con el fenómeno eléctrico, los ***flujos se consideran corrientes*** y las ***presiones tensiones***. Parte del flujo se almacena (q_{CH}) y el resto se transfiere al exterior (q_0) a través de la resistencia R_H:



$$q_i(t) = q_{C_H}(t) + q_{RH}(t)$$

Suma de las corrientes en el nodo $p(t)$

*__NOTA__: El movimiento de la masa de fluido (en algunos casos despreciable) puede modelarse a través de la **inertancia hidráulica (I_H)**:*

$$p_1(t)-p_2(t)=I_H q'(t)$$

La **capacitancia hidráulica (C_H)** representa la capacidad de almacenamiento de un contenedor (volumen de líquido, energía potencial), en términos de la presión en el fondo (o altura del líquido), respecto de la presión de referencia:

$$q_{CH}(t) = C_H[p(t)-P_{ATM}]' = C_H p'(t) = Ah'(t)$$

*La **resistencia hidráulica (R_H)** constituye la oposición al flujo $q(t)$, como consecuencia de un cambio de diámetro en una cañería, en relación a la diferencia presión entre los dos extremos de la misma:*

$$q_{RH}(t)=[p_1(t)-p_2(t)]/R_H$$

$$q_i(t) = C_H \frac{d\,[p(t) - p_{ATM}]}{dt} + \frac{p(t) - p_{ATM}}{R_H}$$

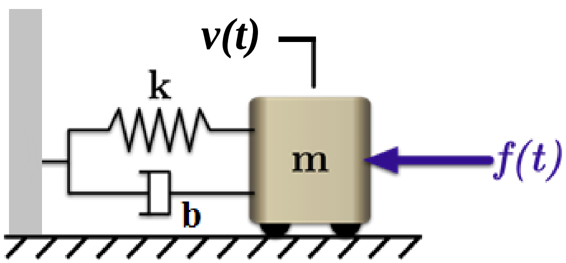
Unidad 2: Sistemas Continuos y Discretos
Obtención del Modelo

¿Se puede establecer una metodología para deducir sistemáticamente las ecuaciones de los diversos modelos físicos?

- Como consecuencia de la ***analogía con los sistemas eléctricos***, se ***modelará*** el comportamiento de los sistemas físicos ***en virtud de un circuito analógico***
- Los ***elementos de interés del sistema*** serán representados por ***resistencias***, ***capacitores, inductores***, ***transformadores (acoplamiento) y fuentes*** según sea su condición: ***almacenamiento***, ***disipación***, ***transformación*** o ***fuente de energía (modelo eléctrico equivalente)***
- Obtenido el circuito, se aplicarán las ***leyes de Kirchhoff,*** de modo de deducir las ***ecuaciones diferenciales que lo caracterizan***

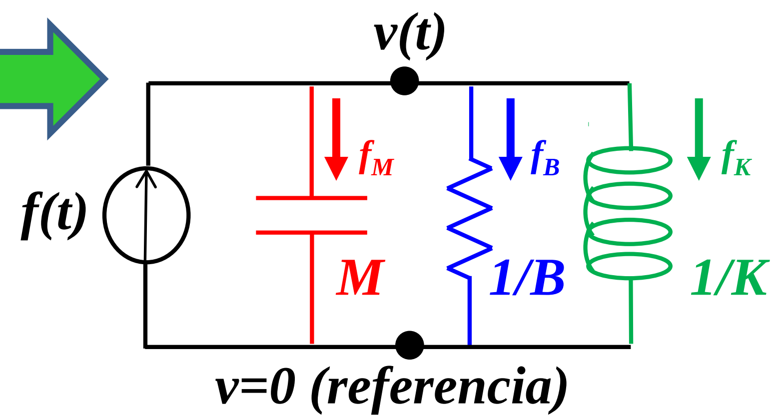
Obtención del Modelo

Esencialmente debe pensarse en ***cómo se distribuye la energía disponible*** entre los elementos y su relación con la ***variable bajo análisis*** (movimiento, temperatura, presión…)



Modelo $f(t)$ vs. $v(t)$

¿Cómo se distribuye la ENERGÍA DISPONIBLE en $f(t)$? Parte en mover la masa M a velocidad $v(t)$ (f_M), parte en vencer el amortiguador B (f_B, disipación dependiente de $v(t)$) y parte se almacena en el resorte (f_K, debido al desplazamiento relacionado a $v(t)$)



$$M \equiv C$$
$$B \equiv 1/R$$
$$K \equiv 1/L$$
$$F(t) \equiv I(t)$$
$$v(t) \equiv V(t)$$

MODELO ELÉCTRICO EQUIVALENTE

Para deducir las ecuaciones del modelo se parte de la analogía eléctrica (SE PIENSA AL SISTEMA COMO UN CIRCUITO). Para el modelo TRASLACIONAL, las FUERZAS son CORRIENTES, las VELOCIDADES TENSIONES y cada elemento (M, B y K) es representado POR UN COMPONENTE

Análisis del nodo $v(t)$ (1ra ley Kirchhoff)

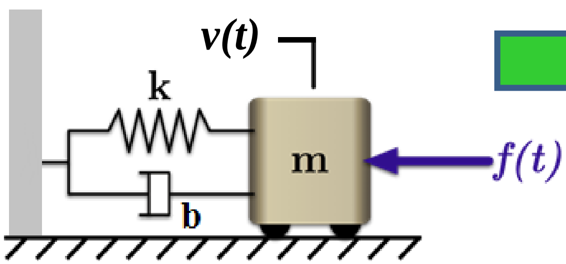
AL ANALIZAR EL NODO $v(t)$ POR KIRCHHOFF, SE OBTIENE LA ECUACIÓN

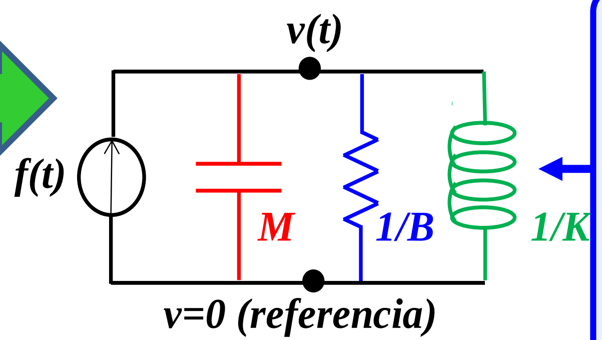
$$f(t)=Mv'(t) + Bv(t) + K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

Unidad 2: Sistemas Continuos y Discretos

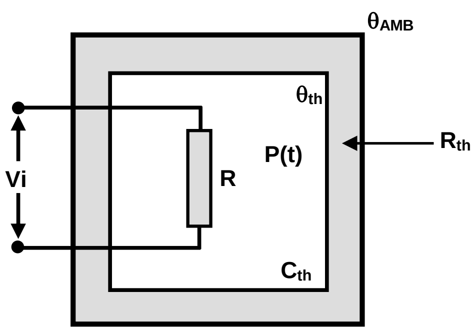
Obtención del Modelo

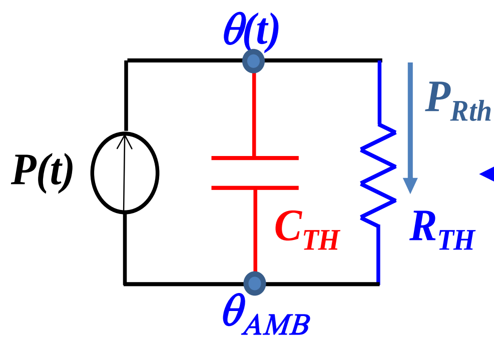
Análisis de Señales y Sistemas R2041



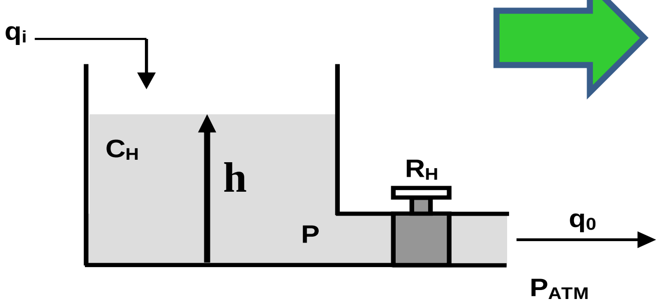


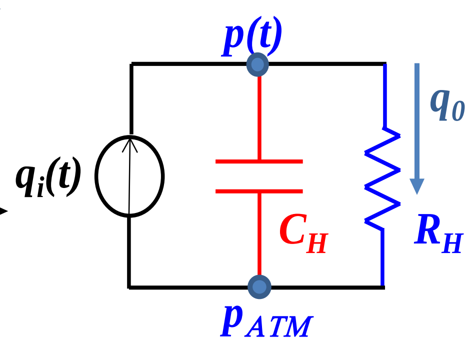
La masa M desarrolla la velocidad $v(t)$ (debido a que se aplica $F(t)$) por lo cual uno de sus extremos se conecta al nodo correspondiente. El extremo restante se refiere a velocidad nula (la velocidad de M es única). El amortiguador viscoso está relacionado con $v(t)$, dado que uno de sus extremos está conectado a la masa M. Su otro extremo está en reposo, razón por la cual se lo conecta a la referencia $v=0$. Con el resorte sucede exactamente la misma situación. A diferencia de la masa, tanto los amortiguadores como resortes pueden ser conectados a distintos nodos de velocidad en sus extremos





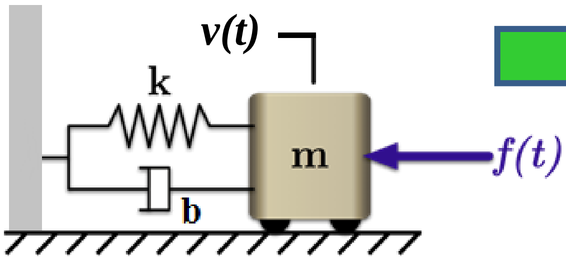
La capacitancia térmica C_{TH} determina la temperatura $\theta(t)$ del recinto (dado que aplica $p(t)$) por lo cual se conecta uno de los extremos a dicho nodo. El restante se lo refiere al valor ambiente (el recinto posee una única temperatura). La resistencia térmica constituye un enlace entre la temperatura del recinto y la temperatura ambiente (por el cual se pierde calor), por lo que se conecta un extremo al nodo y el restante a la referencia (o a otro nodo si se diera el caso)

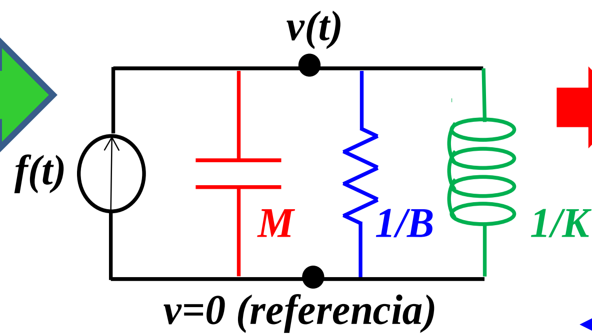




La capacitancia hidráulica C_H determina presión interna del tanque $p(t)$ (dado que ingresa $q_i(t)$) por lo cual se conecta uno de los extremos a dicho nodo. El restante se lo refiere a la presión atmosférica (el tanque posee una sola presión en el fondo). La resistencia hidráulica R_H constituye un enlace entre la presión del recinto $p(t)$ y el ambiente (a presión atmosférica) por el cual se pierde fluido. Por dicha razón se conecta un extremo al nodo y el restante a la referencia (o a otro nodo si se diera el caso)

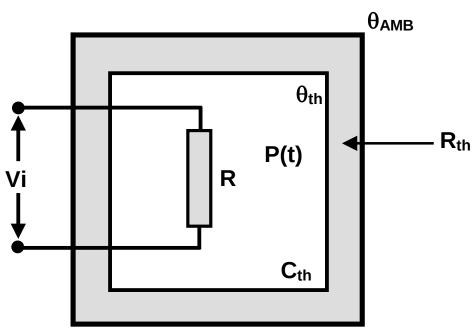
Obtención del Modelo

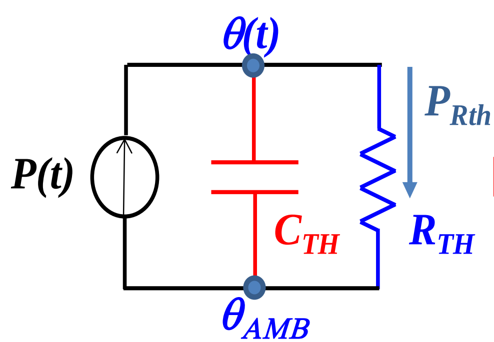




$$f(t) = \mathbf{M}v'(t) + \mathbf{B}v(t) + \mathbf{K}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

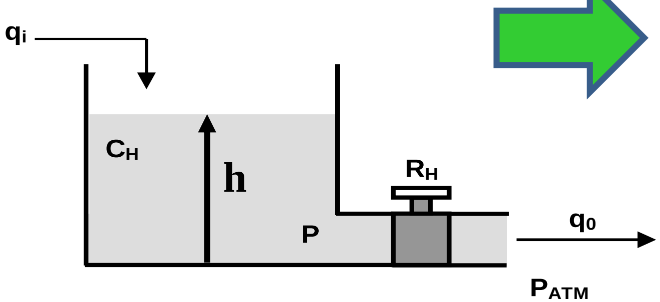
Las ecuaciones de los modelos PUEDEN INFERIRSE en virtud de CIRCUITOS EQUIVALENTES y el planteamiento de las LEYES DE KIRCHHOFF EN UN NODO ($v(t)$, $\theta(t)$ y $p(t)$)

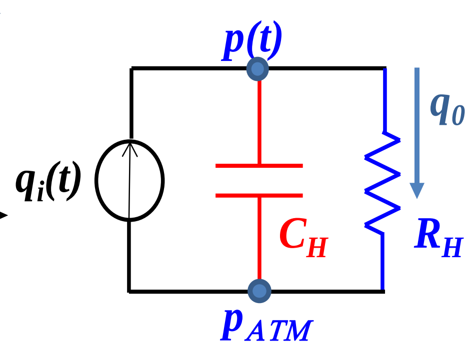




$$P(t) = \mathbf{C_{th}}\theta'(t) + \frac{\theta_{th}(t) - \theta_{AMB}}{\mathbf{R_{th}}}$$

TODO SE RESUME a determinar la CORRIENTE EN UN CAPACITOR (CdV/dt), la CORRIENTE EN UNA RESISTENCIA (V/R) y la CORRIENTE EN UN INDUCTOR ($\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)d\tau$). Cada elemento donde V es la DIFERENCIA DE POTENCIAL en sus extremos

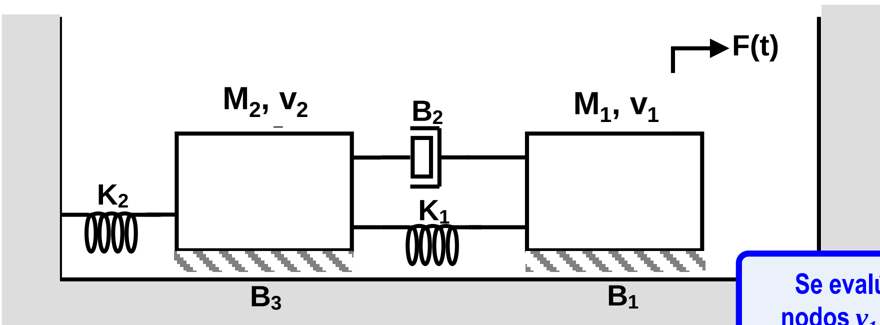




$$q_i(t) = \mathbf{C_H}p'(t) + \frac{p(t) - p_{ATM}}{\mathbf{R_H}}$$

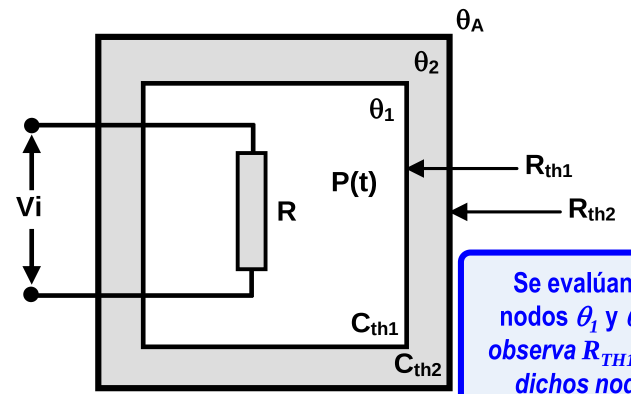
Analizando Modelos

MODELOS MÁS COMPLEJOS:



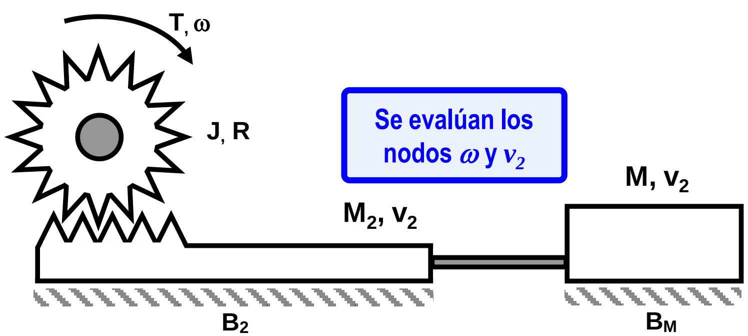
Traslacionales

Se evalúan los nodos v_1 y v_2 (se observan B_2 y K_1 entre dichos nodos)



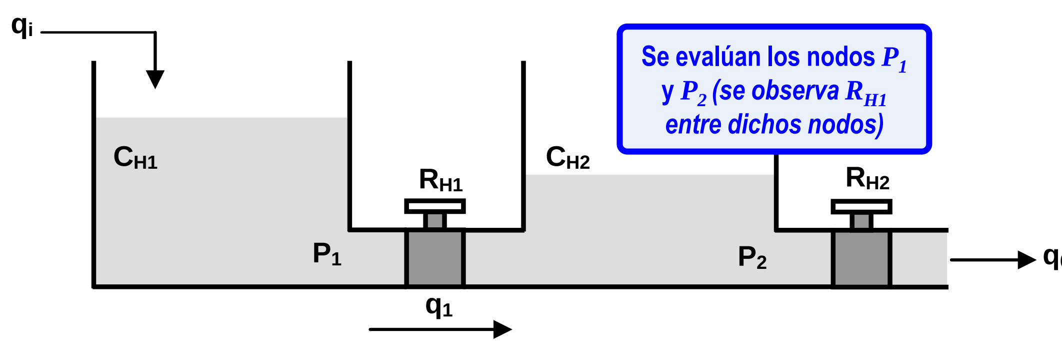
Se evalúan los nodos θ_1 y θ_2 (se observa R_{TH1} entre dichos nodos)

Térmicos



Se evalúan los nodos ω y v_2

Rotacional-Traslacional

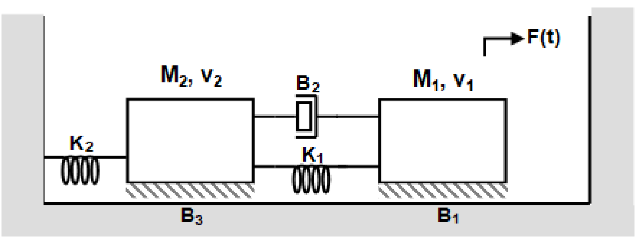


Se evalúan los nodos P_1 y P_2 (se observa R_{H1} entre dichos nodos)

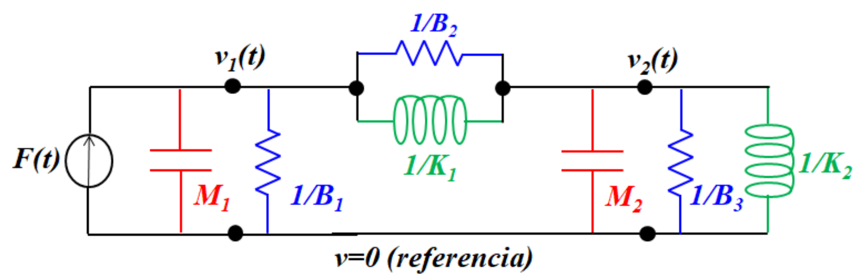
Hidráulicos

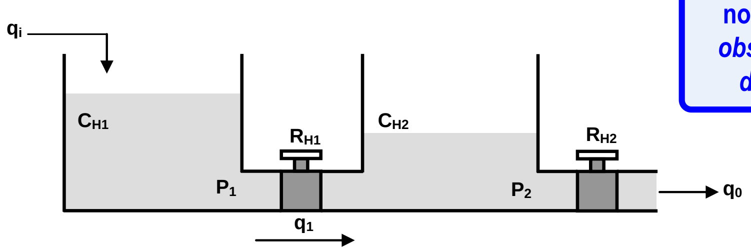
EL MODELADO A PARTIR DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EQUIVALENTES SE APLICA A SISTEMAS DE MAYOR COMPLEJIDAD, DE MODO DE OBTENER SUS ECUACIONES EVALUANDO LOS NODOS CONSTITUTIVOS

MODELOS MÁS COMPLEJOS:

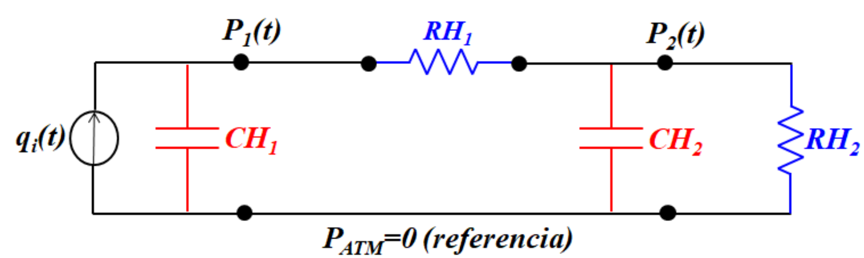


Se evalúan los nodos v_1 y v_2 (*se observan B_2 y K_1 entre dichos nodos)*

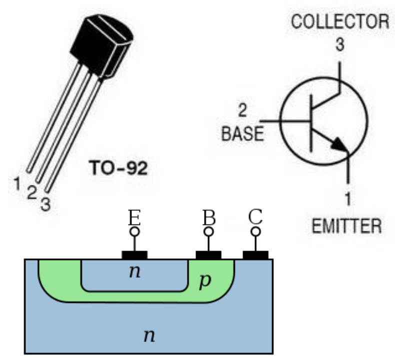


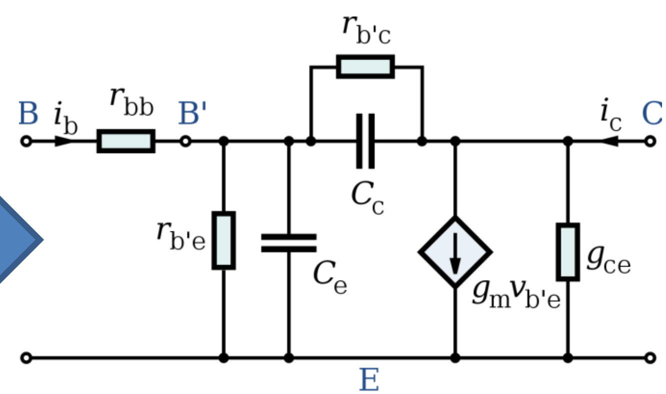


Se evalúan los nodos P_1 y P_2 (*se observa R_{H1} entre dichos nodos)*



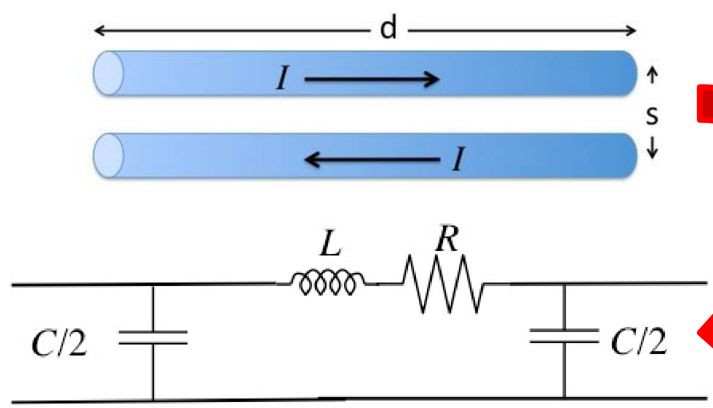
¿Y EN ELECTRÓNICA?





Modelo de Giacoletto (Híbrido Pi) del Transistor Bipolar

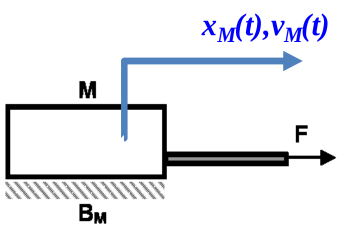
Modelo de Líneas de Transmisión de dos conductores paralelos

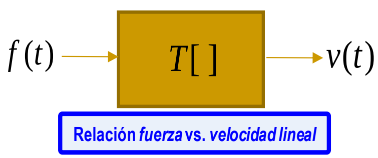


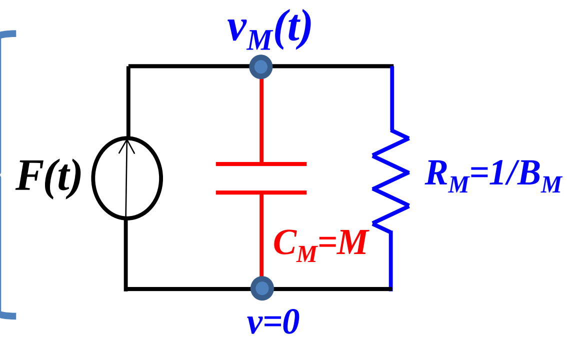
Particularmente en electrónica, puede modelarse el comportamiento de un transistor (modelo de Giacoletto) o de una línea de transmisión de conductores paralelos

Diagrama en Bloques de sistemas LIT

Un sistema ***LIT*** cartacterizado a través de su ***EDO*** puede esquematizarse a partir de un ***diagrama en bloques***, donde se utilizan elementos ***multiplicadores***, ***suma-dores*** e ***integradores*** en el tiempo. Sea entonces un sistema traslacional:

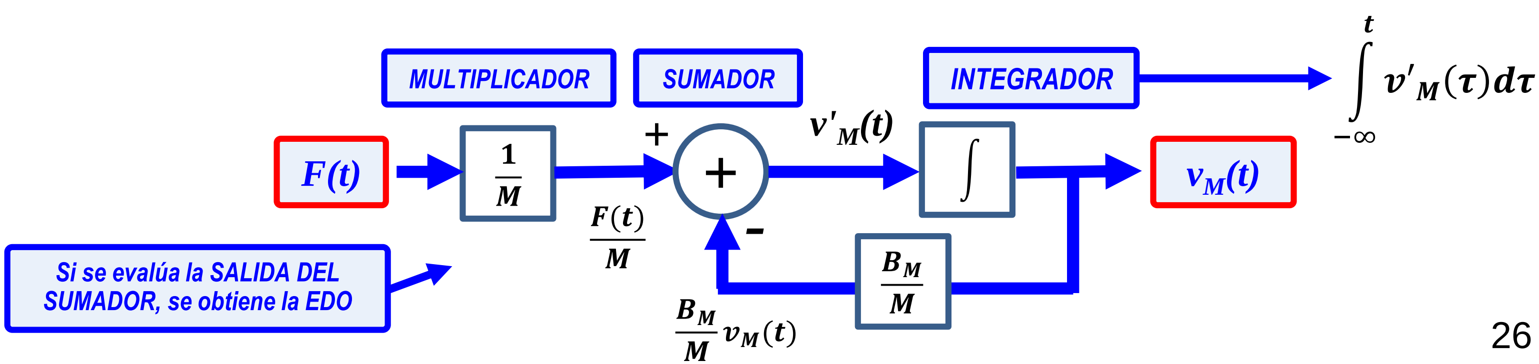






$$\boxed{\frac{F(t)}{M} = v'_M(t) + \frac{B_M}{M} v_M(t)}$$

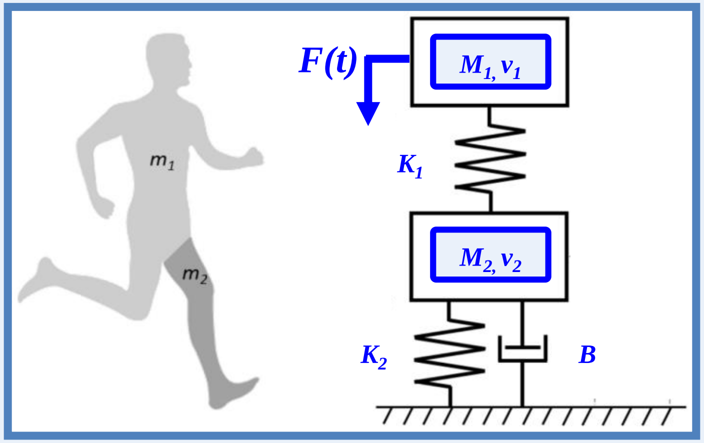
EDO del Sistema (normalizada por el coeficiente de la derivada de mayor orden)



Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A (30 minutos)

1. Obtener las ecuaciones que modelan ***el soporte de la pierna del cuerpo humano,*** en términos de la ***fuerza*** $F(t)$ ejercida por el individuo:

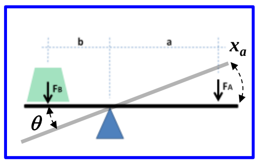


2. ¿Se obtienen las ***mismas ecuaciones*** si se colocan el resorte k_2 y el amortiguador B uno a continuación del otro?

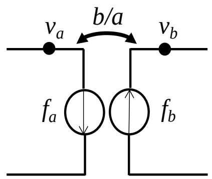
3. Eliminar M_1 y K_1 y expresar ***la ecuación del sistema resultante*** en términos del desplazamiento de M_2. Graficar su ***diagrama en bloques. ¿El sistema obtenido es LIT?*** Verificarlo en ***MatLab***

INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS:

PALANCA (Traslacional a Traslacional)



$$\frac{f_a}{f_b}=\frac{v_b}{v_a}=\frac{b}{a}=\eta$$



(Modelo Paralelo Equivalente)

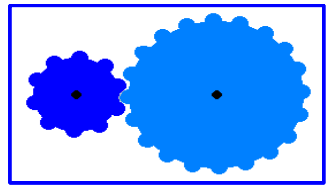
Conservación del Torque T

$$T_1=T_2 \Rightarrow f_a a = f_b b \Rightarrow \frac{f_a}{f_b}=\frac{b}{a}$$

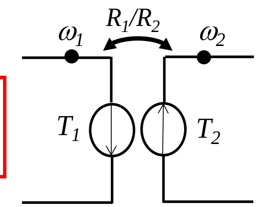
Conservación del ángulo de rotación θ

$$\begin{cases} x_a = a\theta \\ x_b = b\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_a}{dt}=a\frac{d\theta}{dt}=a\omega \\ \frac{dx_b}{dt}=b\frac{d\theta}{dt}=b\omega \end{cases} \Rightarrow \frac{v_b}{v_a}=\frac{b}{a}$$

TREN DE ENGRANAJES (Rotacional a Rotacional)



$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{T_1}{T_2}=\eta$$



(Modelo Paralelo Equivalente)

Conservación de la Potencia

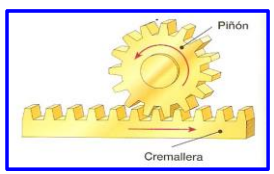
$$T_1\omega_1=T_2\omega_2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Conservación del Desplazamiento Lineal

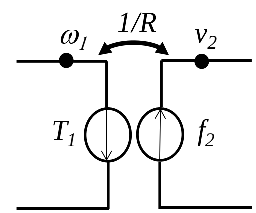
$$\theta_1R_1=\theta_2R_2 \Rightarrow \frac{d\theta_1}{dt}R_1=\frac{d\theta_2}{dt}R_2 \Rightarrow \omega_1R_1=\omega_2R_2$$

DOS sistemas traslacionales pueden conectarse a través de una PALANCA. DOS rotacionales, a través de UN TREN DE ENGRANAJES. Un sistema rotacional y uno traslacional, a través de una CREMALLERA. Para MODELAR DICHA CONEXIÓN se utilizan GENERADORES DE CORRIENTE CONTROLADOS, donde se CONVIERTE al parámetro de SALIDA de un sistema en el de ENTRADA del otro, a través de una RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN (η)

CREMALLERA (Rotacional a Traslacional)



$$\frac{\omega_1}{v_2}=\frac{f_2}{T_1}=\frac{1}{R}=\frac{N_1}{N_2}\frac{2\pi}{L}=\eta$$



(Modelo Paralelo Equivalente)

Por definición de Torque:

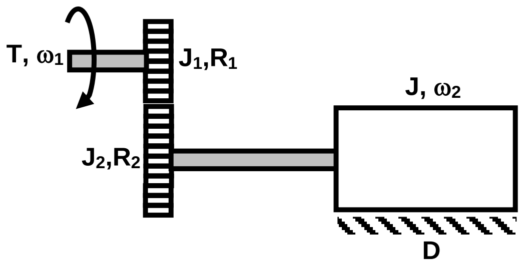
$$T_1=F_2R \Rightarrow \frac{F_2}{T_1}=\frac{1}{R}$$

Conservación del Desplazamiento Lineal

$$x_2=\theta_1R \Rightarrow \frac{dx_2}{dt}=\frac{d\theta_1}{dt}R \Rightarrow v_2=\omega_1R \Rightarrow \frac{\omega_1}{v_2}=\frac{1}{R}$$

La RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN (η), vincula fuerzas y velocidades (relación de distancias en la palanca), torques y velocidades angulares (relación de radios o dientes entre engranajes) y torques con fuerzas y velocidades angulares con lineales (a través del radio de la cremallera)

INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS:



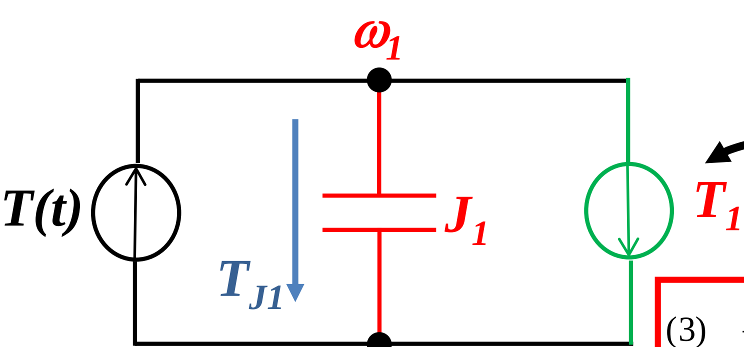
$$M \equiv J \equiv C$$
$$B \equiv D \equiv 1/R$$
$$K \equiv 1/L$$
$$F(t) \equiv T(t) \equiv I(t)$$
$$v(t) \equiv \omega(t) \equiv V(t)$$

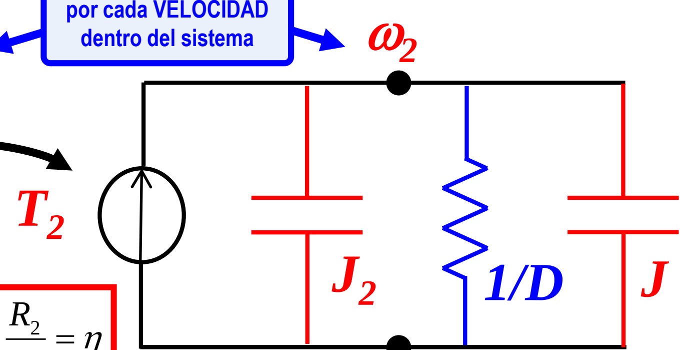
MODELO ELÉTRICO EQUIVALENTE
Ley de Kirchhoff para un NODO

$$\boxed{\sum i_{entr} = \sum i_{sal}}$$

Se aplica un torque a un sistema rotacional compuesto por un engranaje de momento de inercia J_1 y radio R_1, a una velocidad ω_1. Este último se conecta a un segundo sistema, constituido por un engranaje (J_2, R_2), una carga de momento J y rozamiento viscoso D, que rotan a una velocidad ω_2

Se genera UN NODO por cada VELOCIDAD dentro del sistema





Se plantean AMBOS sistemas separadamente, con sus EXCITACIONES y RESPUESTAS y se los VINCULA a través de la ecuación de la RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN

$$(3) \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1} = \eta$$

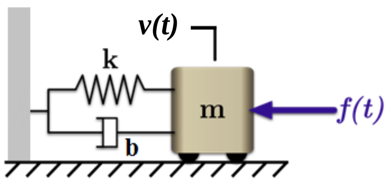
$$(1) \quad T(t) = J_1\omega'_1 + T_1(t)$$

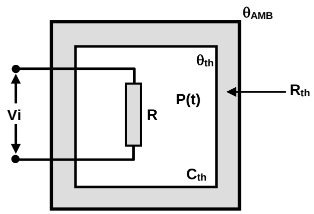
RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN

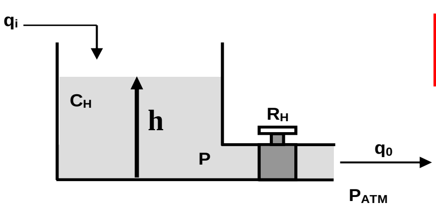
$$(2) \quad T_2(t) = J_2\omega'_2 + D\omega_2 + J\omega'_2$$

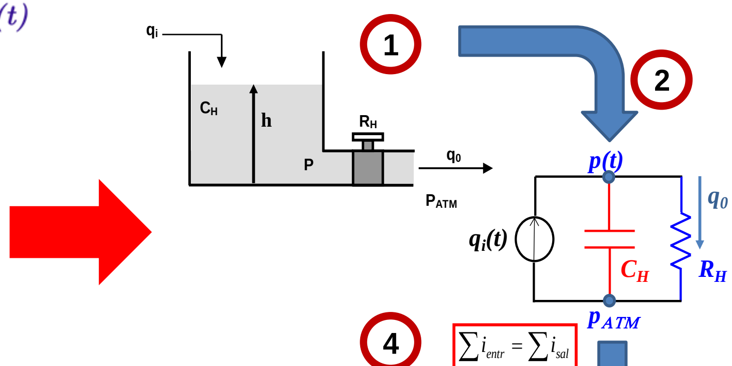
Resumen

MODELIZACIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS





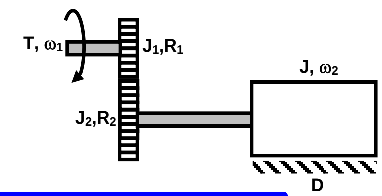




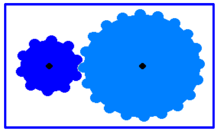
$$\sum i_{entr} = \sum i_{sal}$$

$$q(t) = C_H \frac{d\,[p(t) - p_{ATM}]}{dt} + \frac{p(t) - p_{ATM}}{R_H}$$

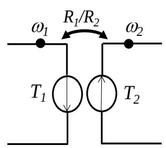
INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS



TREN DE ENGRANAJES (Rotacional a Rotacional)



$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2} = \eta$$



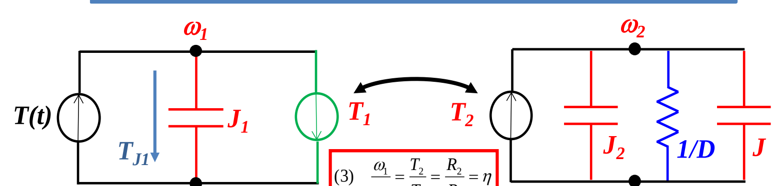
(Modelo Paralelo Equivalente)

Conservación de la Potencia

$$T_1\omega_1 = T_2\omega_2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Conservación del Desplazamiento Lineal

$$\theta_1 R_1 = \theta_2 R_2 \Rightarrow \frac{d\theta_1}{dt}R_1 = \frac{d\theta_2}{dt}R_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$



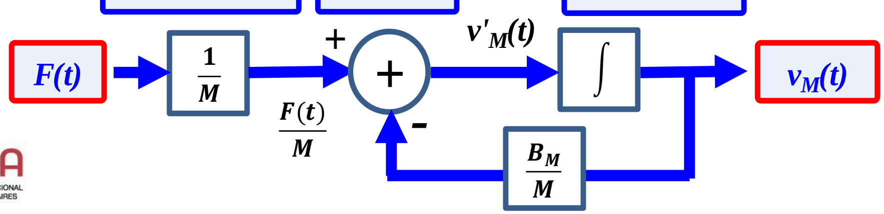
$$(1)\quad T(t) = J_1\omega'_1 + T_1(t)$$

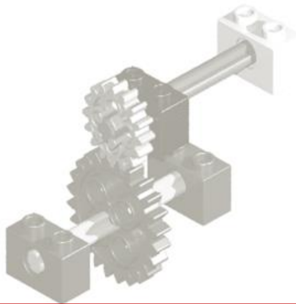
$$(3)\quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1} = \eta$$

$$(2)\quad T_2(t) = J_2\omega'_2 + D\omega_2 + J\omega'_2$$

DIAGRAMAS EN BLOQUES DE EDOs

MULTIPLICADOR **SUMADOR** **INTEGRADOR**





U2: Sistemas Continuos y Discretos

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Sistemas Continuos y Discretos