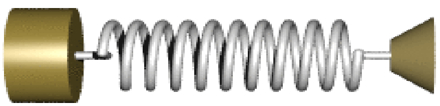
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOs)



$$\boxed{\boldsymbol{N}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{N}} + \cdots + \boldsymbol{c}y''(t) + \boldsymbol{b}y'(t) + \boldsymbol{a}y(t) = x(t)}$$

- Comprenden ***una*** *o* ***varias*** derivadas de una función no especificada ***y(t)*** donde además pueden aparecer términos constantes. ***La derivada de mayor orden determina el grado de la ecuación (N)***
- El término ***ordinarias*** las distingue de otras ecuaciones en derivadas parciales respecto a otras variables independientes
- Se denominan ***lineales*** sino presentan productos de ***y(t)*** consigo misma, con sus derivadas o con la variable independiente
- La solución general se encuentra constituida por una familia de curvas, conjuntamente con ***N* constantes arbitrarias**
- Los coeficientes ***A***,***B*** y ***C*** pueden ser dependientes de ***t*** o ***constantes***

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Esencialmente, se trabajará con EDOs de ***primer*** y ***segundo*** orden:

$$Primer\ Orden \rightarrow \mathbf{b}y'(t) + \mathbf{a}y(t) = x(t)$$
$$Ej:\ \mathbf{2}y'(t) + \mathbf{3}y(t) = e^{-t}$$

$$Segundo\ Orden \rightarrow \mathbf{c}y''(t) + \mathbf{b}y'(t) + \mathbf{a}y(t) = x(t)$$
$$Ej:\ \mathbf{3}y''(t) + \mathbf{2}y''(t) + \mathbf{5}y(t) = 2t+sen(t)$$

y(t) constituye la solución general si verifica la ***EDO*** y poseerá constantes arbitrarias ***cuyo número coincide con el orden de la ecuación***:

y'(t)=cos(t) *(primer orden)*→***y(t)=sen(t)+C*** *(donde C=cte. arbitraria)*

Si la solución posee una ***"Condición Inicial"*** (valor específico para $t=0$) entonces ***la constante arbitraria asume un valor***:

$$y(0)=2 \rightarrow y(t)=sen(t)+2$$

UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

¿Cómo se obtiene la solución general?

Una manera de resolver las EDOs es plantear una ***solución general y(t)*** compuesta por ***una solución homogénea*** $\boldsymbol{y_H(t)}$ más ***una solución particular*** $\boldsymbol{y_P(t)}$:

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_P(t)}$$

La solución homogénea es aquella que cumple con la ***ecuación homogénea*** (se iguala la ecuación a cero):

$$\boxed{\boldsymbol{n}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{N}} + \cdots + \boldsymbol{c}y''(t) + \boldsymbol{b}y'(t) + \boldsymbol{a}y(t) = 0}$$

Se evaluará siempre el comportamiento de las EDOs para $t=0^+$ en adelante, de modo que <u>y(t=0) constituye la condición inicial de las mismas</u>

Análisis para EDOs Primer orden:

$$\boxed{y'(t) + ay(t) = x(t) \rightarrow y(t) = y_H(t) + y_P(t)}$$

a) Obtención de la Solución Homogénea:

$$\boxed{y_H{}'(t) + ay_H(t) = 0}$$

En este caso se propone la solución "$y_H(t)=ke^{\lambda t}$", de modo que reemplazando en la ecuación:

$$\boxed{k\lambda e^{\lambda t} + kae^{\lambda t} = 0 \rightarrow ke^{\lambda t}(\lambda + a) = 0}$$

Dado que *la exponencial no asume valores* que permitan que la ecuación se anule, debe cumplirse entonces $(\lambda+a)=0 \rightarrow \lambda=-a$:

$$\boxed{y_H(t) = ke^{-at}}$$

Nótese que para obtener $y_H(t)$ <u>se ha normalizado la EDO respecto del coeficiente de la derivada de mayor orden</u>, cuyo valor ha pasado a ser unitario.

b) Obtención de la Solución Particular:

$$\boxed{y_P'(t) + a y_P(t) = x(t)}$$

En este caso se propone la solución "$y_P(t)$" ***cuyo formato coincida*** con el de la entrada $x(t)$:

$x(t)$	$y_P(t)$
$A=cte$	$C=cte$
$Ae^{\beta t}$	$Ce^{\beta t}$
$At^n \ (n=1,2,3\ldots)$	$C_0+C_1+\ldots+C_n t^n$
$A\cos(\beta t)$	$C\cos(\beta t)+D\,sen(\beta t)$
$A\cos(bt)$	$C\cos(\beta t)+D\,sen(\beta t)$

Se selecciona la $y_P(t)$ que se parece a $x(t)$ (pueden combinarse las opciones) y se reemplaza en la EDO para obtener las constantes propuestas

Finalmente, la solución queda:

$$\boxed{y(t) = ke^{-at} + y_P(t)}$$

Conforme fue expresado anteriormente, el valor de $\boldsymbol{K}$ (constante arbitraria) se obtiene a partir de la **condición inicial** $\boldsymbol{y(t=0)=y_0}$, de modo que:

$$\boxed{y_0 = ke^{-0} + y_P(0) \rightarrow k = y_0 - y_P(0)}$$

Ejemplo:

$$y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \rightarrow \begin{cases} y_H(t) = Ke^{-3t} \\ y_P(t) = Ae^{-2t} \end{cases} \rightarrow \overbrace{-2Ae^{-2t} + 3Ae^{-2t} = e^{-2t}}^{\text{1) } Y_P(t) \text{ en la EDO}} \rightarrow A = 1$$

$$y(t) = Ke^{-at} + y_P(t) = Ke^{-3t} + 1e^{-2t} \rightarrow \overbrace{y(0) = 0}^{\text{2) Condición Inicial (se asume nula)}} \rightarrow K + 1 = 0 \rightarrow K = -1$$

$$\boxed{y(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}, \ para\ t>0}$$

Análisis para EDOs Segundo orden:

Se efectúa el mismo procedimiento que para las de primer orden, pero se obtiene una condición de resolución para la homogénea de la forma:

$$\boxed{y''(t) + \boldsymbol{b}y'(t) + \boldsymbol{a}y(t) = x(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda^2 e^{\lambda t} + \boldsymbol{b}\lambda e^{\lambda t} + \boldsymbol{a}e^{\lambda t} = 0 \rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + \boldsymbol{b}\lambda + \boldsymbol{a}) = 0}$$

Dado que se obtiene un polinomio de segundo orden, la expresión de la homogénea puede dependerá de las raíces obtenidas:

$$\lambda^2 + \boldsymbol{b}\lambda + \boldsymbol{a} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1)\ Reales\ Distintas\ \boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2} \rightarrow y_H(t) = \boldsymbol{K_1}e^{-\boldsymbol{\lambda_1}t} + \boldsymbol{K_2}e^{-\boldsymbol{\lambda_2}t} \\ 2)\ Reales\ Coincidentes\ \boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = \lambda \rightarrow y_H(t) = \boldsymbol{K_1}e^{-\boldsymbol{\lambda}t} + \boldsymbol{K_2}te^{-\boldsymbol{\lambda}t} \\ 3)\ Complejas\ Conjugadas\ \boldsymbol{\lambda_{1,2}} = \boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{j\beta} \rightarrow y_H(t) = e^{\alpha t}[\boldsymbol{K_1}\cos(\boldsymbol{\beta}t) + \boldsymbol{K_2}\mathrm{sen}(\boldsymbol{\beta}t)] \end{cases}$$

La ***solución particular se propone (y resuelve) de la misma manera que en las EDOs de 1er orden***. Al igual que en el caso anterior, la solución queda:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)\ con \begin{cases} y_H(t) = \boldsymbol{K_1} e^{-\boldsymbol{\lambda_1} t} + \boldsymbol{K_2} e^{-\boldsymbol{\lambda_2} t} \\ y_H(t) = \boldsymbol{K_1} e^{-\boldsymbol{\lambda} t} + \boldsymbol{K_2} t e^{-\boldsymbol{\lambda} t} \\ y_H(t) = e^{\alpha t}[\boldsymbol{K_1} \cos(\boldsymbol{\beta} t) + \boldsymbol{K_2} \mathrm{sen}(\boldsymbol{\beta} t)] \end{cases}$$

donde ***$y_H(t)$ será dependiente de las raíces obtenidas***. Lo mismo ocurre con la determinación de las constantes arbitrarias. En este caso, los valores de K_1 *y* K_2 se obtienen a partir de las **condiciones iniciales** $y(t=0)=y_0$ e $y'(t=0)=y_1$ (dos ecuaciones con dos incógnitas)

Ejemplo:

$$y''(t) + \mathbf{7}y'(t) + \mathbf{12}y(t) = \mathbf{5}t \; con \; y(0) = 0; y'(0) = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -3, -4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_H(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-4t} \\ y_P(t) = A + Bt \end{cases}$$

$$\overbrace{\mathbf{5}t = \mathbf{7}(B) + \mathbf{12}(A + Bt)}^{\text{1) } Y_P(t) \text{ en la EDO}} \rightarrow$$

$$\mathbf{5}t = \mathbf{12}Bt + \mathbf{7}B + \mathbf{12}A \rightarrow \begin{cases} \mathbf{12}B = 5 \\ \mathbf{7}B + \mathbf{12}A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{B = \frac{5}{12}} \\ \boldsymbol{A = -\frac{7B}{12} = -\frac{35}{144}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y(t)} = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-4t} + \boldsymbol{\frac{5}{12} t - \frac{35}{144}}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

2) Condiciones Iniciales

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{0}) = K_1 + K_2 - \frac{35}{144} = 0$$

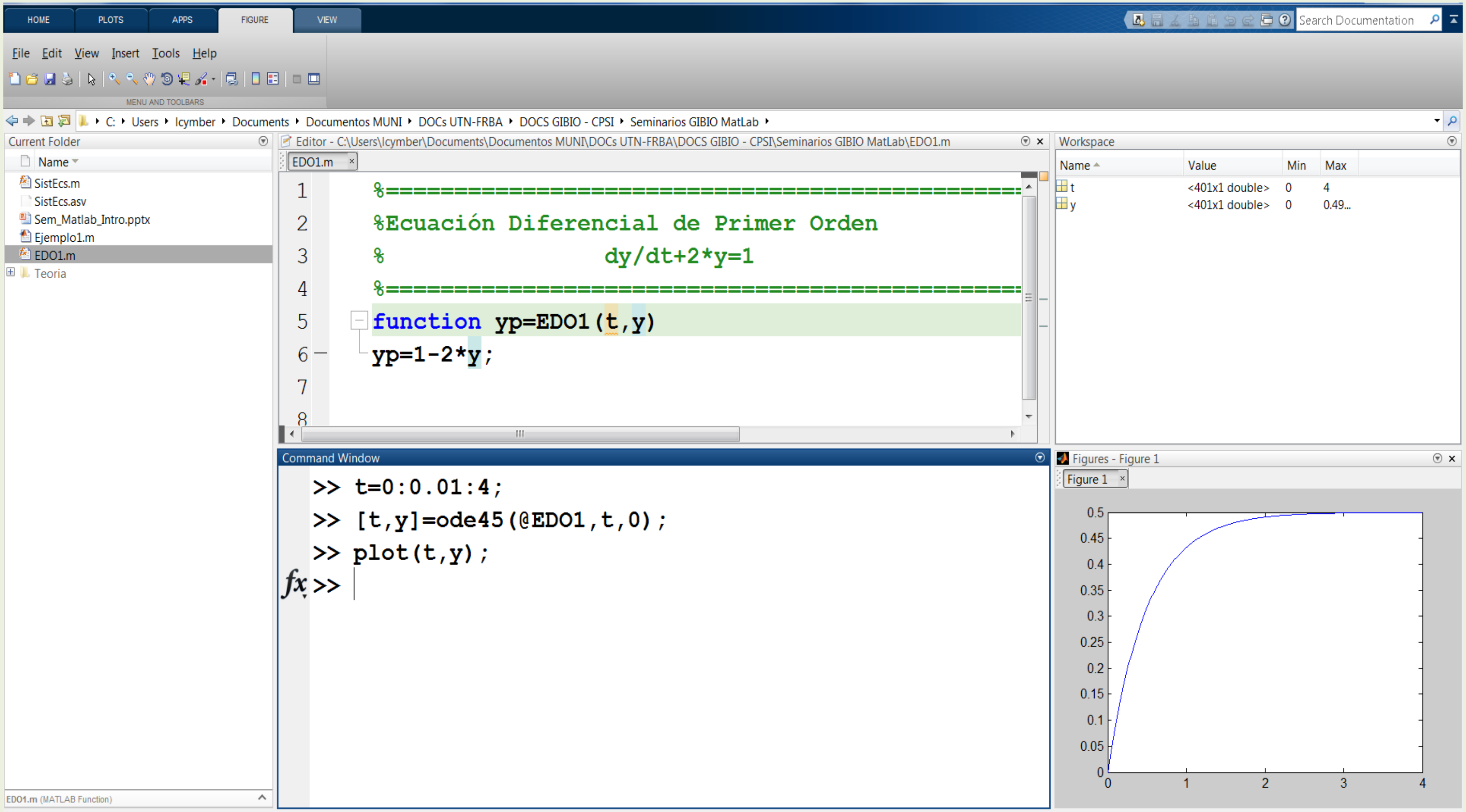
$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{0}) = -3K_1 - 4K_2 + \frac{5}{12} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{5}{9} \\ K_2 = -\frac{45}{44} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \frac{5}{9}e^{-3t} - \frac{45}{44}e^{-4t} + \frac{5}{12}\boldsymbol{t} - \frac{35}{144}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{9}e^{-3t} - \frac{45}{44}e^{-4t} + \frac{5}{12}t - \frac{35}{144}, \textit{ para } t>0}$$

Modelización de Sistemas Físicos

En Matlab...



Modelización de Sistemas Físicos
En Matlab...