FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

1ª PARTE: APLICACIÓN DE FUNCIONES

F (función) definida sobre un DOMINIO de VARIABLE COMPLEJA S (compuesto por PUNTOS $Z=x+jy$) es UNA REGLA que asigna a cada Z en S un Nº COMPLEJO W llamado VALOR de F en Z.

$\boxed{W=F(Z)}$ → Z: VARIABLE COMPLEJA; → S: DOMINIO DE DEFINICIÓN DE F

EL CONJ. DE VALORES DE F se llama RANGO DE F

W puede escribirse así, por ser COMPLEJO → $w=u+jv$, con u y v REALES

$\therefore \boxed{W=F(Z)=u(x,y)+jv(x,y)}$

F(Z) ES EQUIVALENTE A UN PAR DE FUNCIONES REALES $u(x,y)$ y $v(x,y)$, c/u DEPENDIENTE DE DOS VARIABLES REALES, x e y

ej: $f(z)=z^2=(x+jy)^2=(x^2-y^2)+j(2xy)=u(x,y)+jv(x,y)$

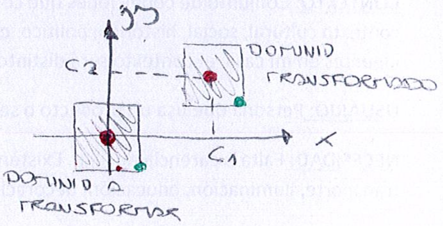
$F(Z)=2jZ+6\bar{Z}=2j(x+jy)+6(x-jy)=2jx-2y+6x-6jy=(6x-2y)+j(2x-6y)=u(x,y)+jv(x,y)$

EFECTOS AL APLICAR LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

en muchas SITUACIONES PRÁCTICAS es POSIBLE SIMPLIFICAR un problema con una TRANSFORMACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO, LLAMADA MAPEO

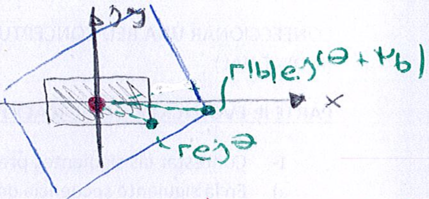
① TRASLACIÓN

$$\left[\begin{array}{l} w=F(Z)=Z+C \quad \text{con } C=C_1+jC_2 \\ \Downarrow \\ Z=x+jy \rightarrow w=(x+C_1)+j(y+C_2) \end{array}\right]$$



② ROTACIÓN

$$\left[\begin{array}{l} w=F(Z)=bZ \quad \text{con } b=|b|.e^{j\psi_b} \\ \Downarrow \\ Z=r.e^{j\theta} \rightarrow w=r|b|.e^{j(\theta+\psi_b)} \end{array}\right]$$



CADA PUNTO DEL DOMINIO se ve AFECTADO en su MÓDULO (si $|b|>1$ ⇒ AUMENTA, SINO DISMINUYE) Y MODIFICA SU FASE en ϕ_b. NO SE MODIFICA LA FORMA ⇒ EXPANDE o CONTRAE y ROTA

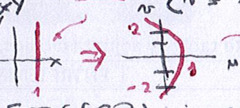
③ FUNCIÓN CUADRÁTICA

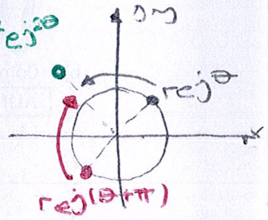
DOS PUNTOS DEL dominio ($Z_y - Z$) generan la MISMA IMAGEN. SU FASE SE DUPLICA y SU MÓDULO SE EXPANDE O CONTRAE SEGÚN SEA MAYOR o MENOR LA UNIDAD

$$\left[\begin{array}{l} w=f(Z)=Z^2 \\ \Downarrow \\ w=(re^{j\theta})^2=r^2e^{2\theta}=r^2[\cos(2\theta)+j\operatorname{sen}(2\theta)] \\ w=(x+jy)^2=x^2-y^2+j2xy \end{array}\right]$$

ej: $f(Z)=Z^2=(x+jy)^2$

$\begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{cases}$ ⇒ si $x=1$ ⇒ $\begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases}$ ⇒ $y=\frac{v}{2}$ $\quad u=1-\frac{v^2}{4}$



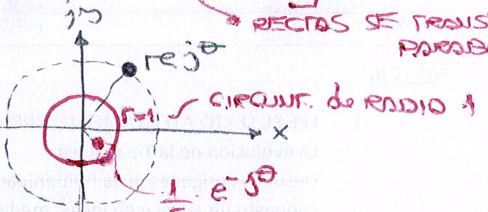


→ RECTAS SE TRANSF. EN PARÁBOLAS

④ FUNCIÓN INVERSIÓN

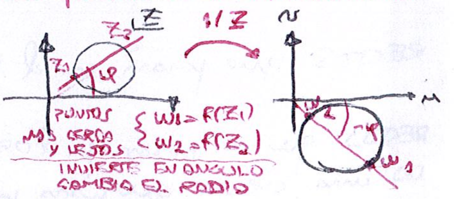
$$\left[\begin{array}{l} w=F(Z)=\frac{1}{Z}=Z^{-1} \\ \\ w=(re^{j\theta})^{-1}=\frac{1}{r}.e^{-j\theta} \end{array}\right]$$

la CIRCUNF. de radio r se TRANSFORMA en otra de radio $\frac{1}{r}$.



TOMANDO una CIRCUNF. de radio 1, se ve que los PUNTOS Z exteriores pasan a estar dentro al ser TRANSFORMADOS y VICEVERSA

TRANSF. RECTAS — CIRCUNF. en O o VICEVERSA pero NO SIEMPRE → CIRCUNF. QUE NO PASAN por el ORIGEN ⇒



↳ SI PASA por el ORIGEN →

el PUNTO MAS LEJANO "a" pasa a ser el MAS CERCANO, pero el ORIGEN ⇒ $\frac{1}{0}=\infty$ ∴ DA UNA RECTA

5 FUNCIÓN BILINEAL

$\Rightarrow \left[w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{C}) \right]$

OPERANDO MATEMÁTICAMENTE se obtiene una COMBINACIÓN DE OPERACIONES LINEALES y UNA INVERSIÓN

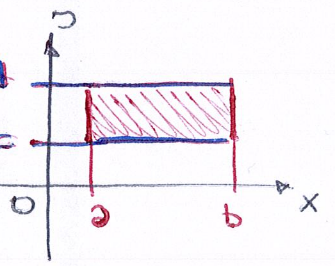
$$w=\frac{a}{c}\,\frac{z+b/a}{z+d/c}=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)=\alpha\left(1+\frac{\beta}{z+\gamma}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1)\ w_1=z+\gamma & \text{TRASLACIÓN} \\ 2)\ w_2=w_1^{-1} & \text{INV.} \\ 3)\ w_3=1+\beta w_2 & \text{ROTACIÓN TRASLACIÓN} \\ 4)\ w_4=\alpha w_3 & \text{ROTACIÓN} \end{cases}$$

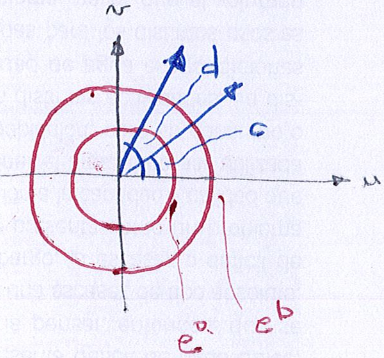
hace de w_1 a w_4 en ese ORDEN

6 FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} & w=f(z)=e^z \\ & w=e^z=e^{x+jy}=e^x\cdot e^{jy}=e^x(\cos y+j\,\mathrm{sen}\,y) \\ & \Rightarrow u(x,y)+jv(x,y)\ \begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\,\mathrm{sen}\,y \end{cases} \\ & w=Re^{j\theta}\ \begin{cases} R=e^x \\ \theta=y \end{cases} \end{aligned} \right]$$

Al aplicar la f/ exponencial a la RECTA $x=k$, se obtiene una CIRCUNF. de radio e^k. Y en el caso de la RECTA $y=k$ se obtiene una RECTA que pasa por el ORIGEN con ANGULO k





7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

aplicando EULER, definimos sen y cos $\Rightarrow e^{\pm jz}=\cos(z)\pm j\,\mathrm{sen}(z)$ $\begin{cases} \cos(z)=\dfrac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} \\ \mathrm{sen}(z)=\dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} \end{cases}$

- en VARIABLE COMPLEJA, las f/ trig. y exp están MUY RELACIONADAS, esto NO OCURRE en VARIABLE REAL
- COSAS QUE NO CAMBIAN $\Rightarrow$ $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$, IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
- las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ que conforman las f/ TRIGONOM. se obtienen así:

$$\cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}=\frac{e^{j(x+jy)}+e^{-j(x+jy)}}{2}=\frac{e^{jx}\cdot e^{-y}+e^{-jx}\cdot e^{y}}{2}$$

APLICANDO euler de nuevo $\Rightarrow \cos z=\dfrac{(\cos x+j\,\mathrm{sen}\,x)\cdot e^{-y}+(\cos x-j\,\mathrm{sen}\,x)e^{y}}{2}$

$$\cos z=\frac{\cos x(e^{-y}+e^{y})-j\,\mathrm{sen}\,x(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$\Rightarrow \cos z=\cos(x)\underbrace{\cosh(y)}_{\frac{e^y+e^{-y}}{2}}-j\,\mathrm{sen}(x)\underbrace{\mathrm{senh}(y)}_{\frac{e^y-e^{-y}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y)=\cos(x)\cdot\cosh(y) \\ v(x,y)=-\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{senh}(y) \end{cases}$$

8 FUNCIÓN LOGARITMO

$\rightarrow \left[\ln(z)=\ln[\rho\cdot e^{j(\phi+2k\pi)}]=\ln\rho+j(\phi+2k\pi) \right]$

se observa que: $e^{\ln z}=e^{\ln|z|+i\arg z}=e^{\ln|z|}\cdot e^{i\arg z}=|z|\cdot e^{i\arg z}=z$

como el log. genera ∞ VALORES por c/z, puede generarse una FUNCIÓN UNÍVOCA TOMANDO el VALOR PRINCIPAL DE z ($k=0$)

TRANSFORMA SECTORES CIRCULARES en ▭