CONVOLUCIÓN

sabiendo que → cualquier señal temporal (DISCR. o CONT) puede expresarse como conjunto de SEÑALES IMPULSO ESCALADOS y DESPLAZADOS → $x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$; $x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, \delta(m-k)$

→ la RESPUESTA de un SISTEMA a una SEÑAL IMPULSO se define como la RESPUESTA IMPULSIONAL → $T[\delta(t)] = y(t)|_{x(t)=\delta(t)} = h(t)$; $T[\delta[m]] = y[m]|_{x[m]=\delta[m]} = h[m]$ → SE halla p/ CONDICIONES NULAS

CONOCIENDO LA RESP. IMPULSIONAL
⇒ SE PUEDE DETERMINAR LA SALIDA DE UN SISTEMA LIT P/ CUALQUIER TIPO DE ENTRADA. DICHA OPERACIÓN SE LLAMA CONVOLUCIÓN

SUMATORIA DE CONVOLUCIÓN P/ DISCRETOS → $\left[y[m] = x[m] * h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[m-k] \right]$

se obtiene así: $x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, \delta[m-k]$ ⇒ APLICANDO TRANSFERENCIA ⇒ $y[m] = T\{x[m]\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k]\right]$

y el único factor que depende de "m" es $\delta[m-k]$ ∴ $y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{T[\delta[m-k]]}_{h[m-k]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[m-k]$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN P/ CONTINUOS → $\left[y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \right]$

∴ LA SEÑAL DE SALIDA DE UN SISTEMA SE DETERMINA ~~[illegible]~~ CON LA CONVOLUCIÓN DE LA SEÑAL DE ENTRADA Y SU RESPUESTA IMPULSIONAL

p/ los EJERCICIOS:

1. DIBUJAR $x[k]$ $m = k$
2. DIBUJAR $h[k]$ → si no lo dan, hay que hallarla
3. DIBUJAR $h[-k]$, que es cuando $m=0$, osea cuando ARRANCA ($-k$ ∴ se REFLEJA)
   (si h arranca antes, hay que empezar desde ese $m<0$)
4. Ir haciendo la MULTIPLICACIÓN entre $x[k]$ y $h[m-k]$, osea voy aumentando m ∴ h se irá DESPLAZANDO hacia derecha, pero x se queda FIJO. Para $m <$ a CIERTO VALOR el PRODUCTO dará NULO, luego a partir de cierto VALOR de m dará NO NULO, hasta que NUEVAMENTE m llegue a otro VALOR en el cual de ahí en ADELANTE vuelva a dar NULO
5. como la CONVOLUCIÓN es una SUMATORIA DE PRODUCTOS ⇒ debo sumar todos los productos que me genere la MULTIPLICACIÓN entre $x[k]\, h[m-k]$ y esa SUMA me dará el VALOR de $y[m]$

[LA CONVOLUCIÓN genera su primer VALOR NO NULO en la SUMA DE LOS INICIOS de x y h y genera su último VALOR NO NULO en la SUMA DE LOS FINALES de x y h]

[LA CANTIDAD DE MUESTRAS DE LA CONVOLUCIÓN es la CANT. MUESTRAS x + CANT. MUESTR. h − 1]

EL INTERVALO de m para la CONVOLUCIÓN en MATLAB TOMARLO COMO

$m_{CONV} = $ (SUMA DE INICIOS DE x y h) : (SUMA DE FINALES DE x y h)

VALOR DE m en el 1º VALOR — VALOR de m en el 2º VALOR — VECTOR DE MUESTRAS DE LA CONV.

p/ hacer CONVOLUCIÓN — CONV(x, h) SOLO SE LE PASA x y h, NOSOTROS SOLO DEBEMOS HACER EL VECTOR DE MUESTRAS DE x, y h, y el DE LA CONV.

SI NOS DAN por ej: $x[1,-2,3,-4,5,-6]$ $h[\underline{\frac{1}{3}},\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ INDICA que p/ese valor $m=0$

como $x[-k]$ hace que su primer valor arranque en -5 (p/el -6), podemos tomar un

$m=-5:5$ → hacen que x y h usen el MISMO m

$$\begin{array}{rcccccccccccc} m= & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \Rightarrow x=[& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6\ ] \end{array}$$

$$\Rightarrow h=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ 0\ 0\ 0]$$

→ para la CONVOLUCION ⇒ $m_{CONV}=(-5-5):(5+5)$

de todos modos el m puede tener una mayor cant. de muestras, lo importante es que con ese m me quede comprendido el x y h

por ej: si tomo un intervalo de 12 muestras → quiero que $x=[1,-2,\underline{3},-4,5,-6]$

sabiendo que en $m=0$ $x=3$

$N_{TOT}=12;$

$x=[1,-2,\underline{3},-4,5,-6];$

$x=[x,\text{zeros}(1,N_{TOT}-\text{lenght}(x))];$ % zeros agrega $\overbrace{N_{TOT}-\text{lenght}(x)}^{6\ \text{CEROS}}$ ceros a la derecha (1 es la cant. de filas)

pero p/ello hacer que p/$m=0$ $x=3$, osea que m arranque en -2

⇒ zerosizq $=2;$

$m\_x=-\text{zerosizq}:\overbrace{N_{TOT}-\text{zerosizq}-1}^{9};$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} m= & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \therefore x=[& 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ ] \end{array}$$

CONVOLUCIÓN CON UNA SEÑAL IMPULSO

$$x[m]*A\delta[m-m_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]A\delta[m-m_0-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}Ax[m-m_0]\delta[m-m_0-k]=Ax[m-m_0]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[m-m_0-k]$$

$$=Ax[m-m_0]$$

[EL RESULTADO de convolucionar por un δ ubicado en m_0, DE AMPLITUD A, genera el desplazamiento de x a m_0 multiplicado por A]

PROPIEDADES CONVOLUCIÓN

ASOCIATIVA → $[x[m]*h_1[m]]*h_2[m]=x[m]*[h_1[m]*h_2[m]]$

CONMUTATIVA → $x[m]*h[m]=h[m]*x[m]$

PRODUCTO POR ESCALAR → $\alpha(x_1[m]*x_2[m])=[\alpha x_1[m]]*x_2[m]=x_1[m]*[\alpha x_2[m]]$

DESPLAZAMIENTO TEMPORAL → $y[m]=x_1[m]*x_2[m]\Rightarrow x_1[m-m_1]*x_2[m-m_2]=y[m-m_1-m_2]$

SI DESPLAZO LA ENTRADA (o el h) LA CONVOLUCIÓN SE DESPLAZA, PERO SUS VALORES NO CAMBIAN, solo cambiará el m p/cada valor

• Si convolucionamos por SINUSOIDALES en la ENTRADA:

• Si meto sen sale sen y si meto cos sale cos

• la Frecuencia NO CAMBIA por ser LTI, y por ser PERIÓDICA, la CONVOLUCION SERÁ PERIÓDICA → SERÁ PERIODICA A PARTIR DE LA MUESTRA DE LA ENTRADA EN QUE EMPIEZA A SER PERIÓDICA ESTA

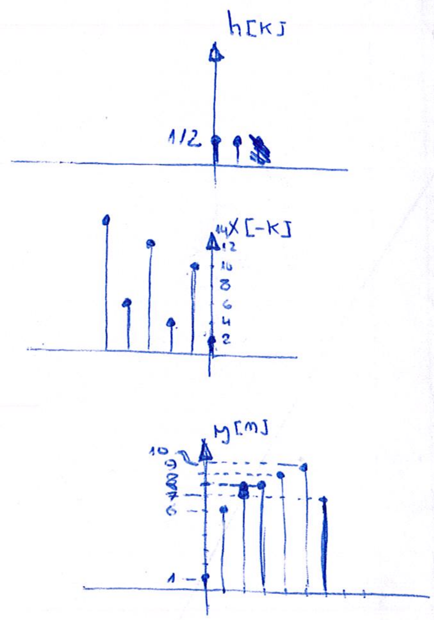
• LA AMPLITUD y la FASE pueden CAMBIAR

. Si el h es algo del tipo ① $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$ o ② $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])$ el efecto en la salida es como un PROMEDIO de la SEÑAL, es decir, la ① p/ cada n hace el PROMEDIO entre el valor de la entrada en dicho n y su anterior y la ② hace lo mismo pero para 3 MUESTRAS de la entrada. El resultado es como que "SUAVIZA" a la señal de entrada, o también se podría ver como que la deja en un PUNTO INTERMEDIO, la "FILTRA" en los VALORES ALTOS y BAJOS

ej: con la ①

$h = [1/2, 1/2]$

$x = [2, 10, 4, 12, 6, 14]$



CONVOLUCIÓN P/ CONTINUAS

como vimos, p/ sistemas continuos $\rightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}$

se calcula p/ cada valor de t (parámetro) con τ (variable) de $-\infty$ a $+\infty$

$\therefore$ SE INTEGRA EL RESULTADO DEL PRODUCTO ENTRE $x(\tau).h(t-\tau)$ p/ cada instante t

mantiene las mismas propiedades que p/ sist. discretos, lo único que cambia es que al ser t continuo, se deben considerar INTERVALOS DE INTEGRACIÓN

RELACIÓN CON LA RESPUESTA INDICIAL

la salida $y(t)$ se puede expresar por convolución como $y(t) = h(t) * x(t)$

pero si $x(t) = u(t)$ sea un escalón, entonces la salida será la respuesta indicial

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = y(t)\big|_{x(t)=u(t)} = \underbrace{h(t) * u(t)}_{\text{POR SER CONMUTATIVA}}}$$

ej: $h(t) = 10 e^{-5t} u(t)$, con $x(t) = F(t)$ $y(t) = v(t)$; calcular $g(t)$

como vimos recién $\Rightarrow g(t) = v(t)\big|_{F(t)=u(t)} = h(t) * u(t)$

$$\Rightarrow g(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau).u(t-\tau) d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 10 e^{-5\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

se observa que $\rightarrow u(t-\tau) \neq 0 \;\forall\; t \geq \tau$; $h(\tau) \neq 0$ en $\tau \geq 0$ $\Big\}$ $h.u(t-\tau) \neq 0$ solo si $\tau \geq 0$ y $t \geq \tau$

$\therefore$ solo si $0 \leq \tau \leq t$ con $t \geq 0$

$$\therefore g(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=0}^{t} 10.e^{-5\tau} d\tau \;\;\forall\; t \geq 0$$

$$\Rightarrow g(t) = h(t) * u(t) = \frac{10 e^{-5\tau}}{-5}\Bigg|_0^t = -2e^{-5t} + 2 = 2(1-e^{-5t}), t \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = 2(1-e^{-5t}) u(t)}$$

CONVOLUCIÓN CON UNA SEÑAL IMPULSO

$$x(t) * A\delta(t-t_0) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) A.\delta(t-t_0-\tau) d\tau \overset{\text{POR PROP. DEL } \delta}{=} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} A x(t-t_0)\, \delta(t-t_0-\tau).d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) * \delta(t-t_0) = A x(t-t_0) \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau) d\tau}_{=1} = A x(t-t_0)$$

$\therefore$ DA COMO RESULTADO EL DESPLAZAMIENTO de $x(t)$ a t_0 MULTIPLICADO por el ÁREA CAPTURADA (A)

es el único caso donde la convolución continua puede generar una señal discontinua

RESPUESTA IMPULSIONAL SEGÚN EL TIPO DE SISTEMA

• **SIN MEMORIA** → LA SALIDA SOLO DEPENDE DE VALORES ACTUALES DE LA ENTRADA $\begin{cases} y(t) = kx(t) \\ y[n] = kx[n] \end{cases}$

∴ bajo esa condición → $h = y|_{x=\delta} \Rightarrow \begin{cases} h(t) = A\delta(t) \\ h[n] = A\delta[n] \end{cases}$

$h(t)$ sólo es válida en $t=0$ pues fuera de $t=0$ $\delta=0$

∴ UN SISTEMA ES SIN MEMORIA SI $h(t)$ o $h[n]$ SOLO ES VÁLIDA en $t=0$ o $n=0$
(PUES FUERA de t, ya no sería sin memoria por más que $h=0$)

• **CAUSAL** → SI SU SALIDA ACTUAL SOLO DEPENDE DE VALORES TEMPORALES PRESENTES O PASADOS DE $x(t)$

∴ desde el punto de vista de $x(t) * h(t)$, esto solo se cumple si:

DIVIDO LA INTEGRAL en 2 o

$$y(t_0) = h(t_0) * x(t_0) = \int_{\tau=-\infty}^{0} h(\tau)\, x(\underbrace{t_0-\tau}_{-\infty<\tau<0})\, d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)\, x(t_0-\tau)\, d\tau$$

$t_0-(-\tau)$

$t_0+\tau$

VALORES FUTUROS de X respecto a τ_0

∴ para que estos valores futuros no intervengan $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} h(t) = 0 & \text{para } t \le 0 \\ h[n] = 0 & \text{" } n < 0 \end{array}\right]$

[como se ve, si la entrada al sist. se inicia en $t \geq 0$ y debido a que el resultado de la convolución inicia en la SUMA DE LOS INICIOS de ambas señales, si $h(t)=0$ para $t \le 0$ SE ASEGURA que la SALIDA SEA EL RESULTADO DE VALORES PASADOS O PRESENTES de la ENTRADA]

⇒ UN SISTEMA ES CAUSAL SI $h(t)$ ($h[n]$) es NULA p/ $t \le 0$ ($n < 0$)

• **ESTABILIDAD** → LO ES SI, p/ TODA ENTRADA ACOTADA ($|x(t)| < M$), SU SALIDA NO DIVERGE (NO → ∞)
como la convolución constituye una integral, dicha condición se asegura si la RESPUESTA IMPULSIONAL TAMPOCO DIVERGE:

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(t)\, x(t-\tau)\, d\tau \rightarrow |y(t)| = \left| \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(t)\, x(t-\tau)\, d\tau \right|$$

SI LA ENTRADA ESTÁ ACOTADA — LA RESP. IMPULSIONAL TAMBIÉN DEBE ESTARLO

$$|y(t)| \le \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,|x(t-\tau)|\, d\tau \rightarrow |y(t)| \le M \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, d\tau \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \end{array}\right]$$

∴ UN SISTEMA ES ESTABLE SI $h(t)$ ($h[n]$) RESULTA ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE (ABSOLUTAM. SUMABLE)

Ej: sea un sist. cuya $h(t) = 2e^{-2t}u(t+1)$ → $h(t) \neq 0$ p/ $t \neq 0$ ∴ CON MEMORIA

→ $h(t) \neq 0$ p/ $t \le 0$ ∴ NO CAUSAL

→ $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ∴ ESTABLE

CONVOLUCIÓN SERIE y PARALELO

SERIE (CASCADA)

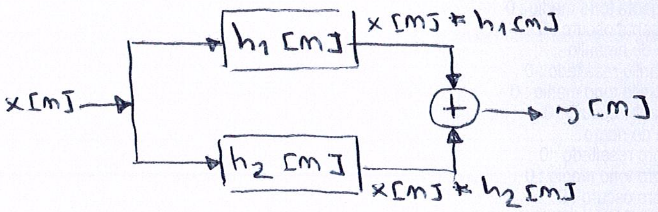
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \Rightarrow \boxed{y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])}$$

$\Rightarrow h_{equivalente}$ → CONTINUO → $\begin{cases} h_E(t) = h_1(t) * h_2(t) \\ y(t) = x(t) * h_E(t) \end{cases}$

→ DISCRETO → $\begin{cases} h_E[n] = h_1[n] * h_2[n] \\ y[n] = x[n] * h_E[n] \end{cases}$

PARALELO → LOS h se vinculan en // con un SUMADOR



$$\Rightarrow x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] + h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \Rightarrow \boxed{y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])}$$

$h_{equivalente}$ → CONTINUO → $\begin{cases} h_E(t) = h_1(t) + h_2(t) \\ y(t) = x(t) * h_E(t) \end{cases}$

→ DISCRETO → $\begin{cases} h_E[n] = h_1[n] + h_2[n] \\ y[n] = x[n] * h_E[n] \end{cases}$

EN MATLAB, CONV. CONTINUA MULTIPL. por dt — conv(x,h)*dt