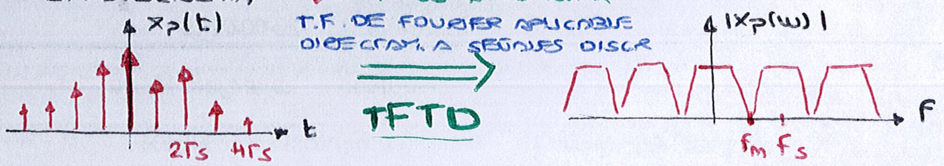
TRANSFORMADA DE FOURIER EN tiempo discreto

- Antes vimos como se replicaba $X(\omega)$ en frec al MUESTREAR $x(t)$ en $x[nT_s]$
- Veremos ahora un PROCEDIMIENTO NUMÉRICO de evaluación de $x[nT_s]$, que SERÁ DISCRETO (TRANSF. DISCRETA) → esto nos dará una ESTIMACIÓN DIRECTA DEL espectro $X(\omega)$ REPLICADO



TF DE SEÑAL DISCRETA

→ tomando una $x(t)$ MUESTREADA IDEALMENTE a INTERV. REGULARES nT_s corresp. a un TREN DE IMPULSOS PERIÓDICO en frec. $f_s = 1/T_s$ ($X(\omega)$ se PERIODIZA en ω_s)

$$\Rightarrow p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Rightarrow x_p(t) = x(t)\,p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s]\,\delta(t - nT_s)$$

⇒ Aplicando entonces TFTC (por ser $x_p(t)$ una Σ DE IMPULSOS) resulta: $\left[X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s]\,e^{-j\omega n T_s}\right]$

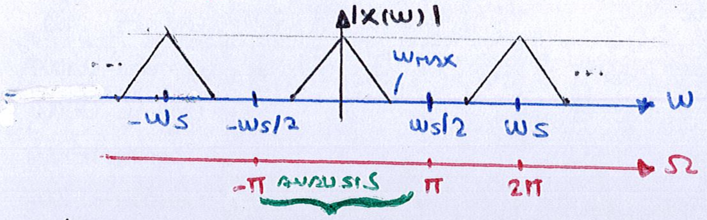
⇒ se ve que podemos aplicar el CONCEPTO DE frec. DISCRETA NORMALIZADA

$\omega T_s = 2\pi f/f_s = \Omega$ (frec. NORMALIZADA) ∴ DESP. ω y reempl. en $X(\omega)$

$$\Rightarrow \left[X\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s]\,e^{-j\Omega n}\right] \Rightarrow \text{ASUMIENDO } T_s = 1 \text{ (NORMALIZ. DE eje } t) \Rightarrow \left[X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j\Omega n}\right]$$

ESPECTRO DE SEÑALES DISCR NORMALIZADAS

⇒ se había visto que el espectro DE $X(\omega)$ corresp. a $x[nT_s]$ se vuelve PERIÓDICO en ω_s. Si lo evaluamos en TÉRMINOS de Ω:



→ [por ser PERIÓDICO en ω_s, en términos de Ω es PERIÓDICO en 2π]

$$\Omega = 2\pi\frac{f}{f_s} = 2\pi\frac{\omega}{\omega_s} \Rightarrow \begin{cases} \text{SI } \omega = \omega_s \rightarrow \Omega = 2\pi \\ \text{SI } \omega = \frac{\omega_s}{2} \rightarrow \Omega = \pi \end{cases}$$

se puede ver que p/ $\omega = \omega_s/2$ ($2\omega_{MAX}$) ⇒ $\Omega = \pi$, por lo cual el espectro DE LA SEÑAL DISCR. NORMALIZADA SE ANALIZA entre $-\pi$ y π (con $\frac{\omega_s}{2}$ ...)

⇒ en RESUMEN → $\left[X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\Omega n}\right]$ ⟷ $\left[x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega\right]$

$X(\Omega)$: ESP. CONT. NORMALIZ.

$x[n]$: muestras en t DISC NORMALIZADO

TF. en t DISCRETO (TFTD) (Aunque SIENDO una TFTC APL. a SEÑAL DISCR)

ANTI TF. EN t DISCRETO (ITFTD)

INTERPRETANDO LA DISCRETIZACIÓN DE LAS exponenciales compl. AL REEMPL. t por nT_s

⇒ DISCRETIZAR una f/ temp. exp. COMPL genera un efecto de PERIODICIDAD en la frec. (cosa que las exp CONTINUAS NO HACEN)

$$e^{j\omega t} \rightarrow t = nT_s \rightarrow e^{j\omega n T_s} = e^{j\frac{2\pi f}{f_s}n} = e^{j\Omega n} \;;\; \text{AL ADICIONAR } 2k\pi \text{ a } \Omega: \left[e^{j(\Omega + 2k\pi)n} = e^{j\Omega n}\,e^{j2k\pi n}\right.$$

⇒ VICEVERSA: discretizar en frecuencia PERIODIZA la señal en el t

como $e^{j2k\pi n} = 1$ ⇒ $\left. = e^{j\Omega n}\right]$

APLICANDO TFTD

→ ① EXPONENCIAL DECRECIENTE → $x[n] = a^n u[n]$ con $|a| < 1$ ⇒ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]\,e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a\,e^{-j\Omega})^n$

⇒ SERIE GEOM. ($|a\,e^{-j\Omega}| < 1$) ⇒ $\left[a^n u[n] \Rightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1 - a\,e^{-j\Omega}}\right]$

② DELTA DE KRONECKER ⇒ $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \forall n \end{cases}$ ⇒ $\left[X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\,e^{-j\Omega n} = 1\right]$

③ PULSO ⇒ $x[n] = \begin{cases} A & \text{si } |n| \leq N_1 \\ 0 & \forall n \end{cases}$ ⇒ $\left[X(\Omega) = \frac{\operatorname{sen}[(N_1 + 1/2)\,\Omega]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}\right]$

④ EXPONENCIAL BILATERAL ⇒ $x[n] = a^{|n|}$ con $|a| < 1$ ⇒ $\left[X(\Omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\Omega) + a^2}\right]$

SE OBSERVA en las expresiones de $X(\Omega)$ LOS ESPECTROS DE LAS SEÑALES CONTINUAS PERIODIZADOS Y SOLAPADOS (a menos que la señal esté lim. en BANDA) DEBIDO A LA DISCRETIZACIÓN

⇒ CONDICIÓN DE SUFICIENCIA p/ que EXISTA TFTD de $x[n] - X(\Omega)$ ⇒ $\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty\right]$ → EXISTE TFTD

- $x[n]$ debe ser DE CUADRADO SUMABLE (E. FINITA por PARECER de TFTC)
- FUNC. que NO VAYAN ASINTÓTICAMENTE a 0 si $n \to \infty$ en gral. NO TIENEN TFTD

ENERGÍA → se distribuye en la frec., según PARSEVAL ⇒ $\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega\right]$ DISTRIBUIDA EN 1 PERÍODO

Se considera UN PERÍODO DE SU ESPECTRO correspondiente

PROPIEDADES

→ ① LINEALIDAD → $\left[\begin{matrix} f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \\ g[n] \xleftrightarrow{TFTD} G(\Omega)\end{matrix}\right\} \Rightarrow f[n]+g[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega)+G(\Omega) \Big]$

→ $\left[f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \Rightarrow (a+jb)f[n] \xleftrightarrow{TFTD} (a+jb)F(\Omega)\right]$

→ ② DESPLAZ. TEMPORAL → $\left[f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \Rightarrow f[n-n_0] \xleftrightarrow{TFTD} e^{-j\Omega n_0} F(\Omega)\right]$

→ ③ DESPLAZ. frecuencial → $\left[f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \rightarrow e^{j\Omega n} f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega-\Omega_0)\right]$

→ ④ INV. TEMPORAL → $\left[f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \rightarrow f[-n] \xleftrightarrow{TFTD} F(-\Omega)\right]$

SE HEREDAN DE LA TFTC

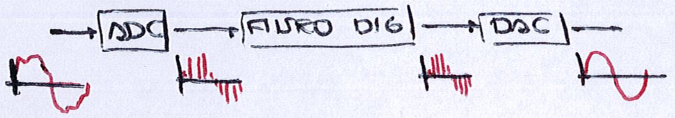
→ ⑤ DERIV. frecuencial → $\left[f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \Rightarrow n f[n] \xleftrightarrow{TFTD} j\frac{dF(\Omega)}{d\Omega}\right]$ } ESTA NO SE HEREDA pues en t. disc. la deriv. se hace con diferencias ∴ derivamos del lado de la frec.

→ ⑥ CONVOLUCIÓN → $\left[\begin{matrix} f[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega) \\ g[n] \xleftrightarrow{''} G(\Omega)\end{matrix}\right\} \Rightarrow f[n]*g[n] \xleftrightarrow{TFTD} F(\Omega)G(\Omega) \Big]$

→ ⑦ MODULACIÓN → $\left[\begin{matrix} '' \xleftrightarrow{''} '' \\ '' \xleftrightarrow{''} ''\end{matrix}\right\} \Rightarrow f[n]g[n] \xleftrightarrow{TFTD} \frac{1}{2\pi}F(\Omega)*G(\Omega) \Big]$ la conv. entre espectros ES CIRCULAR (ENTRE PERÍODOS) por ser los mismos PERIÓDICOS

ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI DISCR: FILTROS DIGITALES

→ son SISTEMAS LTI DISCRETOS (p/usar con S. DISCRETAS) que GENERAN FUNCIONES TRANSF. ESPECÍFICAS ($H(\Omega)=Y(\Omega)/X(\Omega)$); MEDIANTE CÁLCULOS MATEMÁTICOS hechos con las muestras de entrada



recordar que ANTES DEL MUESTREO debe haber un FILTRO ANALÓGICO p/ limitar F_{max} ⇒ $F_s \geq 2F_{max}$

→ Su EDO es DISCRETIZADA obteniendo UNA EC. EN RECURRENCIAS ⇒ $\left[\begin{matrix} y(t)+by(t)=x(t) \\ \Downarrow \\ y[n]-ay[n-1]=x[n]\end{matrix}\right]$

→ APLICANDO TFTD, hallamos $H(\Omega)$ (VERSIÓN PERIÓDICA)

$$Y(\Omega)-a\,Y(\Omega)e^{-j\Omega}=X(\Omega) \Rightarrow \left[H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\right]$$

→ tomando $|a|<1$, la ITFTD da como $h[n]$ una RESP. IMPULS. DISCRETA ⇒ $\left[h[n]=a^n u[n]\right]$ CANT. ∞ DE MUESTRAS

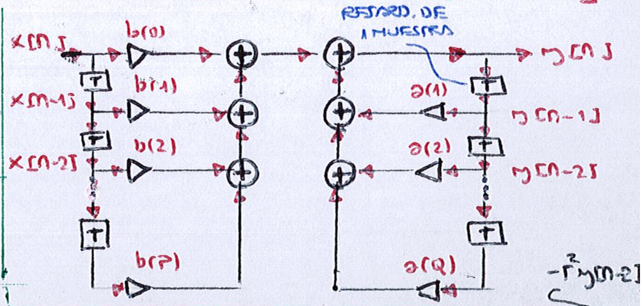
→ SI EL FILTRO SOLO POSEE DERIVADAS DE SU ENTRADA ⇒ $\left[y(t)=x'(t)+cx(t) \rightarrow y[n]=x[n]-bx[n-1]\right]$

- $H(\Omega)$ vale: $Y(\Omega)=X(\Omega)-X(\Omega)be^{-j\Omega}$ ⇒ $\left[H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=1-be^{-j\Omega}\right]$
- APL. ITFTD, se obtiene que: $\left[h[n]=\delta[n]-b\,\delta[n-1]\right]$ CANT. FINITA DE MUESTRAS

→ HAY 2 TIPOS DE FILTROS DISCRETOS, según sus coef. a_K y b_K ⇒ $\left[H(\Omega)=\frac{\sum_{K=0}^{P} b_K e^{-jK\Omega}}{\sum_{K=0}^{Q} a_K e^{-jK\Omega}}\right]$

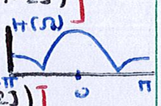
- FILTRO FIR (RESP. FINITA al IMPULSO) ⇒ solo coefic. b_K (solo coef en NUMERADOR)
- FILTRO IIR (RESP. INFINITA al IMPULSO) ⇒ solo coefic. a_K (solo coef en DENOMINADOR)

→ LA ECUACIÓN EN GENERAL en RECURRENCIAS que caracteriza al FILTRO DIG. se DESCRIBE con un DIAGR. en BLOQUES ⇒ $\left[y[n]=b_0x[n]+\dots+b_Qx[n-Q]+a_1y[n-1]+\dots+a_Py[n-P]\right]$

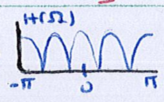


TIPOS DE FILTROS

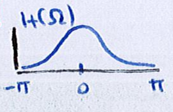
① FILTRO FIR DE MEDIA MÓVIL (P.B)
- $\left[y[n]=\frac{1}{3}(x[n]+x[n-1]+x[n-2])\right]$
- $\left[H(\Omega)=\frac{1}{3}(e^{-2\Omega}+e^{-\Omega}+1)\right]$ ⇒
- $\left[h[n]=\frac{1}{3}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2])\right]$



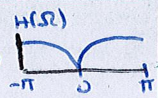
② FILTRO FIR TIPO PEINA (ELIMINA B.)
- $\left[y[n]=x[n]+x[n-4]\right]$
- $\left[H(\Omega)=e^{4\Omega}+1/e^{4\Omega}\right]$ ⇒
- $\left[h[n]=\delta[n]+\delta[n-4]\right]$



③ FILTRO IIR (P.B)
- $\left[y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]\right]$
- $\left[H(\Omega)=1/(1-1/2e^{-j\Omega})\right]$ ⇒
- $\left[h[n]=(1/2)^n u[n]\right]$

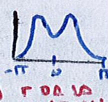


④ FILTRO IIR (P.ALTOS)
- $\left[y[n]=x[n]-x[n-1]+\frac{1}{4}y[n-1]\right]$
- $\left[H(\Omega)=(1-e^{-j\Omega})/(1-1/4e^{-j\Omega})\right]$ ⇒
- $\left[h[n]=\delta[n]-3/4(1/4)^n u[n]\right]$



⑤ FILTRO IIR (P. BANDA)
- $\left[y[n]=x[n]+2r\cos(\theta)y[n-1] - r^2y[n-2]\right]$
- $\left[H(\Omega)=\frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega}-0{,}8e^{j\pi/4})(e^{j\Omega}-0{,}8e^{-j\pi/4})}\right]$
- $\left[h[n]=0{,}8^n \cdot 2/\sqrt{2}\,\text{sen}[\pi/4(n+1)]\,u[n]\right]$

r da la selectiv. y θ la f privileg.



⑥ FILTRO IIR NOTCH (ELIM. BANDA PUNTUAL)

$y[n]=2r\cos(\theta)y[n-1]-r^2y[n-2]+x[n]-2\cos(\theta)x[n-1]+x[n-2]$

$H(\Omega)=\frac{(e^{j\Omega}-e^{j\theta})(e^{j\Omega}-e^{-j\theta})}{\dots}$

θ da la Ω a elim.