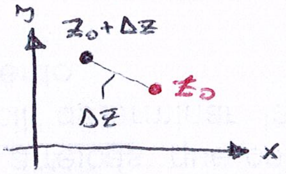
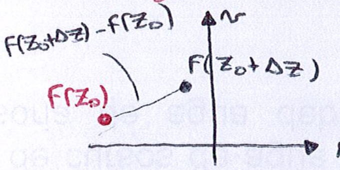
2ª PARTE : DERIVADA COMPLEJA

En un punto z_0 del campo complejo, se define como : $\left[F'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z_0+\Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} \right]$

- EL LÍMITE SE PUEDE LLEVAR A CABO POR ∞ CAMINOS Y NO SOLO por $\leftarrow$ ó $\rightarrow$
- PARA DEFINIRLO, el lim debe EXISTIR y ser el mismo INDEPENDIENTEMENTE del camino





- DEFINIC. y 1ª PRS. PROP de estas DERIV. COMPL. son similares a las de las REALES
- NO OBSTANTE al existir ∞ CAMINOS p/llegar de un PUNTO a otro, NO SE CUMPLEN NI EL TEOREMA DEL VALOR INTER MEDIO NI EL DE VALOR MEDIO p/ f/ REALES.

p/FUNCIONES $\mathbb{R}$

→ TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO → sea $F(x)$ continua para $a < x < b$ y $F(a) \neq F(b)$ entonces F toma todos los valores entre $F(a)$ y $F(b)$ en $a < x < b$

→ " " MEDIO → si $F(x)$ es continua en $a < x < b$ y $F'(x)$ existe para $a < x < b$ ⇒ hay al menos un PUNTO c $(a < c < b)$ tal que : $F'(c) = [F(b) - F(a)] / [b - a]$

EN TÉRMINOS GENERALES se cumplen las MISMAS REGLAS DE DERIVABILIDAD

$$F(z), g(z), \frac{d}{dz} \Rightarrow \begin{cases} (cF)' = cF' \quad \text{con } c \text{ complejo} \\ (F+g)' = F' + g' \\ (Fg)' = F'g + Fg' \\ (F/g)' = (F'g - Fg')/g^2 \\ F(g(z)) \Rightarrow F'(g(z)) \cdot g'(z) \end{cases}$$

TAMBIEN SE APLICA a L'HOPITAL

$$\left[\lim_{z \to z_0} \frac{F(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{F^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} \right]$$

POR ASÍ DECIRLO, es como la DERIVABILIDAD para func. con MAS DE UNA VARIABLE

¿CUANDO SE CONSIDERAN DIFERENCIABLES?

- SU DERIVADA DEBE EXISTIR y ADEMAS SER FINITA
- se deben cumplir las ECUACIONES DE CAUCHY RIEMANN → las deriv. parciales de las COMPONENTES de $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ en un PUNTO $z_0 = x_0 + jy_0$ deben satisfacer esas ecuaciones, POSIBILITANDO así la EXISTENCIA de la DERIV. en ese punto

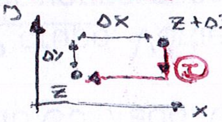
$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \begin{cases} \text{EXISTE} \\ \text{ES FINITA} \end{cases} \Rightarrow \text{DIFERENCIABLE}$$

- ∴ si la DERIVADA existe ⇒ el límite de la misma debe resultar INDEPENDIENTE de la tray. elegida

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + jv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + jv(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y}$$

2 CAMINOS

⇒ CAMINO I ⇒ $\Delta y \to 0$ y agrupo $u(x,y), v(x,y)$ EVALUANDO $\Delta x \to 0$:

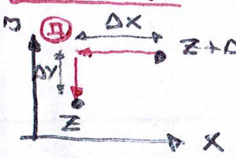


$$F'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)]}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x}$$

DERIV. PARCIALES

$$\left[\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + jv_x \right]$$

⇒ CAMINO II → $\Delta x \to 0$ y agrupo $u(x,y), v(x,y)$ evaluando $\Delta y \to 0$;



$$F'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} -j \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)]}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y}$$

$$\left[\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = v_y - ju_y \right]$$

⇒

Si hay INDEPENDENCIA DE CAMINOS debe cumplirse que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$ → EC. de CAUCHY RIEMANN (ECR) $\begin{cases} [u_x = v_y] \\ [u_y = -v_x] \end{cases}$

ej: $F(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$ ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ → CUMPLE ECR

ej: $F(z) = |z|^2$ ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ NO CUMPLE ECR
$F(z) = (x^2+y^2)$ → $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ → EXCEPTO en $z=0$

⇒ el ANALISIS de DERIVADA por 2 CAMINOS ≠ DEMUESTRA que:

- si $F(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ es DIFERENCIABLE en un PUNTO z_0, entonces EXISTEN LAS 1RAS DERIV. PARCIALES de $u(x,y)$ $v(x,y)$ en ese PUNTO (u y v DIFERENC. INDEP.) y SATISFACEN en él las ECR

⇒ se puede obtener la expresión correspondiente a las ECR en COORD. POLARES: → $F'(z)$ puede expresarse: $[F'(z) = u_x + jv_x = v_y - ju_y]$

$$z = r(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$F(z) = u(r,\theta) + jv(r,\theta)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (r \neq 0)\right]$$

¿QUE ES LA ANALITICIDAD? ⇒ [$F(z)$ es ANALÍTICA en un dominio abierto A SI ES DIFERENCIABLE EN TODO PUNTO DE A]

⇒ una función es ANALÍTICA en un pto. z_0 si su DERIV. existe (y es FINITA) en TODOS LOS PUNTOS de algún entorno de z_0 ⇒ ej: $|z|^2$ sólo es DERIV. en $z=0$, pero tampoco ahí es ANALÍTICA (el resto de puntos no admite DERIV)

⇒ LAS ECR CONSTITUYEN UNA CONDIC. NECESARIA P/ LA ANALITICIDAD (diferenciabilidad) de $F(z)$ PERO NO SUFICIENTE

⇒ entonces → ① P/ que $F(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ sea DIFERENCIABLE en un dominio D (un PUNTO y su entorno) debe SATISFACER las ECR en todo PUNTO de D (COND. NEC. DE ANALITICIDAD)

→ ② Si además $u(x,y)$ y $v(x,y)$ RESULTAN CONTINUAS y poseen PRIMERAS DERIV. PARCIALES CONTINUAS en D ⇒ $F(z)$ RESULTA ANALÍTICA en D (COND. NECESARIA y SUFICIENTE)

ej: $F(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + j\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ ⇒ CUMPLE ECR pero $F(z)$ no es CONTINUA en $z=0$ $(x=y=0)$ ni sus DERIV. PARC. POR LO TANTO la FUNC es ANALÍTICA en TODO PUNTO menos en $z=0$

- si una func es ANALÍTICA ⇒ TODAS SUS DERIV. TAMBIEN LO SON
- si 2 func. son ANALÍTICAS en un dom D, su SUMA, PRODUCTO y COCIENTE son ANALÍTICAS en D
- si $F'(z) = 0$ en todos los PUNTOS de " " ⇒ $F(z)$ es CONSTANTE en D
- TODA FUNC. ANALÍTICA puede expresarse como SERIE DE POTENCIAS
- LAS POLINOM., EXPONENC. COMPLEJAS y SENO, COSENO son ANALÍTICAS en TODO el PLANO Z

P/ SER ANALÍTICA DEBE SER CONTINUA Y CUMPLIR CON LAS ECR

FUNCIÓN ARMÓNICA

Si $F(Z)$ es ANALÍTICA en cierto dominio → su parte real $u(x,y)$ y su imaginaria $v(x,y)$ RESULTAN ARMÓNICAS en DICHO dominio, o sea, AMBAS CUMPLEN LA ECUACIÓN DE LAPLACE:

$$\left[\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;;\; \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\right]$$

• Por ello, dada una func. ARMÓNICA $u(x,y)$, PARTE REAL DE UNA FUNC. COMPLEJA $f(Z)$, puede decirse que $v(x,y)$ (IMAGINARIO) es la FUNCIÓN ARMÓNICA CONJUGADA de $u(x,y)$

• Partiendo de una func. ARMÓNICA, su CONJUGADA se obtiene a partir del cumplim. de las ECR

ej: verificar que $u(x,y)$, $v(x,y)$ son f/ ARMÓNICAS p/ la func. ANALÍTICA e^Z

$$e^Z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x(\cos(y) + j\,\mathrm{sen}(y)) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos(y) \\ v(x,y) = e^x\,\mathrm{sen}(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = e^x\cos(y) \to u_{xx} = e^x\cos(y) \\ u_y = -e^x\,\mathrm{sen}(y) \to u_{yy} = -e^x\cos(y) \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

$$\begin{cases} v_x = e^x\,\mathrm{sen}(y) \to v_{xx} = e^x\,\mathrm{sen}(y) \\ v_y = e^x\cos(y) \to v_{yy} = -e^x\,\mathrm{sen}(y) \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_{xx} + v_{yy} = 0}$$

3ª PARTE: PUNTOS SINGULARES

→ SINGULARIDAD de $F(Z)$ es un punto Z_0 en el cual $F(Z)$ NO RESULTA ANALÍTICA, pero SÍ LO ES en algún punto de todo entorno de Z_0

TIPOS DE SINGULARIDADES

- → AISLADA → si existe un entorno para el que el ÚNICO PUNTO SINGULAR es Z_0
  - → si no se puede determinar ese entorno ⇒ LA SINGULARIDAD ES NO AISLADA
  - → Si $F(Z)$ tiene un Nº FINITO de SINGULARIDADES ⇒ TODAS SON AISLADAS
- → EVITABLE EN Z_0 → si el límite cuando Z tiende a Z_0 de $F(Z)$ RESULTA FINITO
- → POLO en Z_0 → un POLO de orden "m" de $F(Z)$ es un PUNTO Z_0 para el cual se cumple

$$\left[\lim_{Z\to Z_0} F(Z) \to \infty\right] \qquad \left[\lim_{Z\to Z_0} \{(Z-Z_0)^m f(Z)\}\right] \neq 0 \;\&\; \infty$$

p/ un VALOR FINITO de m (ORDEN) ~ PREG.

- → ESCENCIAL → NO es un POLO pero tampoco resulta EVITABLE
  - → se considera un POLO DE ORDEN FINITO
- → EN EL ∞ → si $g(Z) = F(1/Z)$ tiene una SINGULARIDAD en $Z=0$, decimos que $F(Z)$ tiene el MISMO TIPO DE SINGULARIDAD en el ∞

ejemplos:

→ $F(Z) = \dfrac{\mathrm{sen}(z)}{z}$; $Z_0 = 0$ es una SINGULARIDAD EVITABLE pues $\lim_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(z)}{z} = 1$ (LÍMITE TRIGONOM.)

→ $F(Z) = \dfrac{Z}{(Z+j)^3}$; $Z_0 = -j$ es un POLO DE 3º ORDEN ($m=3$)

→ $F(Z) = \dfrac{Z}{(Z^2+4)^2} = \dfrac{Z}{[(Z+2j)(Z-2j)]^2} = \dfrac{Z}{(Z+2j)^2(Z-2j)^2}$; $Z_0 = -2j, 2j$ POLOS DE 2º ORDEN

→ $F(Z) = e^{1/Z}$ SINGULARIDAD ESCENCIAL (no hay m que haga FINITO el LÍMITE, $m\to\infty$) (PREG.)

→ $F(Z) = \dfrac{Z-2}{Z^2-Z-12}$; DETERMINAMOS puntos donde la función puede NO SER ANALÍTICA (DISCONT. en esos PUNTOS)

$\Rightarrow F(Z) = \dfrac{Z-2}{(Z-4)(Z+3)} \to \begin{cases} Z=4 \\ Z=-3 \end{cases}$ → evaluamos el TIPO DE SING. y su ORDEN

→ $Z=4 \Rightarrow \lim_{Z\to 4} F(Z) = \lim_{Z\to 4}\dfrac{Z-2}{(Z-4)(Z+3)} \to \infty \Rightarrow$ ¿POLO? → SOSPECHAMOS que es POLO ∴ calculamos SU ORDEN

→ $Z=4 \Rightarrow \lim_{Z\to 4} F(Z)(Z-4)^n \begin{cases}\neq 0 \\ \neq \infty\end{cases}$ para $m=1 \Rightarrow \lim_{Z\to 4}\dfrac{Z-2}{\cancel{(Z-4)}(Z+3)}\cancel{(Z-4)} = \dfrac{2}{7}$ ∴ POLO DE ORDEN 1. Si hacemos lo mismo con $Z=-3$ da OTRO POLO DE ORDEN 1

CEROS DE UNA FUNCIÓN → es cuando $F(Z_0)=0$

- SABER que una función analítica tiene un CERO de cierto ORDEN (como los polos) constituye un concepto profundo ⇒ PUES POLOS Y CEROS pueden interactuar entre sí p/ DEFINIR EL COMPORTAMIENTO de $F(Z)$
- $F(Z)$ tiene un CERO de orden "m" en $Z=Z_0$ si se cumple la condición:

$$\left[F(Z_0)=F'(Z_0)=\dots=F^{m-1}(Z_0)\dots=0 \text{ y } F^{m}\neq 0\right]$$

o puede usarse la expresión: $\left[\lim_{Z\to Z_0}\left\{\dfrac{F(Z)}{(Z-Z_0)^m}\right\}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\right]$

ESTO ES PARA DETERMINAR EL ORDEN DEL 0 (tomar el m que haga que se cumpla $\neq 0$ y $\neq \infty$)

ejemplos:

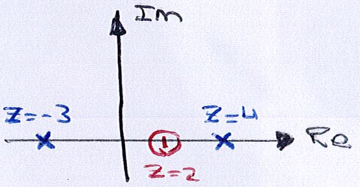
→ $F(Z)=\dfrac{Z-2}{(Z-4)(Z+3)}=(Z-2)^1\cdot\dfrac{1}{(Z-4)(Z+3)}$ ⇒ cero en $Z=2$

→ $F(Z)=\dfrac{\operatorname{sen}(Z)}{(Z-4)}$ ⇒ ceros simples en $Z=m\pi$

→ $F(Z)=\dfrac{(Z-1)^2}{e^Z}$ ⇒ CERO $\overbrace{\text{DOBLE}}^{\text{ORDEN 2}}$ en $Z=1$

DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS → permite efectuar una descripción gráfica de la ocurrencia de SINGULARIDADES (POLOS de ≠ ÓRDENES) y puntos donde la FUNCIÓN se anula (ceros)

ej: $F(Z)=\dfrac{Z-2}{Z^2-Z-12}$ ⇒



estas posiciones de polos y ceros permiten llevar a cabo una interpretación del comportam. de un sist. LTI expresado en términos de una func. racional compleja

EXPANSIÓN DE FUNCIONES RACIONALES EN FRACCIONES PARCIALES

- Descomponer una función racional en sus FRACCIONES PARCIALES es de GRAN APLICABILIDAD p/ poder trabajar con herram. de análisis que brinda el dominio frecuencial.
- EXPANDIR EN FRACCIONES PARCIALES PERMITE LA DESCOMPOSICIÓN DE UNA func. racional (COCIENTE DE POLINOMIOS) EN UNA SUMA DE FRACC. DE MENOR GRADO SIEMPRE Y CUANDO LA MISMA SEA PROPIA (GRADO DEL NUM. < GRADO DEL DENOM.)
- sea entonces $F(Z)$ RACIONAL que puede estar formada por POLOS y CEROS de ≠ TIPO y ORDEN:

$$F(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}=\frac{Z}{(Z+a)(Z+b)^2(Z^2+cZ+d)}$$

PREG.

RESIDUOS: A, B, C, D y E se obtienen a través del SISTEMA de ECUAC. derivado p/ obtener el NUMERADOR

el PROCED. consiste en expresar $F(Z)$ como:

$$F(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}=\underbrace{\frac{A}{(Z+b)^2}+\frac{B}{(Z+b)}}_{\text{SUMA DE "m" FACTORES DECRECIENTES p/ POLOS MÚLTIPLES DE GRADO "m"}}+\underbrace{\frac{C}{(Z+a)}}_{\text{UN FACTOR POR C/ POLO SIMPLE}}+\underbrace{\frac{DZ+E}{(Z^2+cZ+d)}}_{\text{UN FACTOR COMPUESTO por c/ par de POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS}}$$

donde $-b$ es el valor del POLO MÚLTIPLE $\left(\dfrac{A}{[Z-(-b)]^2}=\dfrac{A}{(Z+b)^2}\right)$

$-c$ " " " " POLO SIMPLE

es MÁS FÁCIL poner: $\dfrac{A}{(Z-b)^2}$ SIENDO b el polo hallado