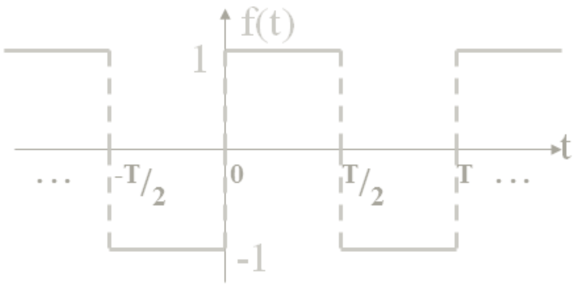
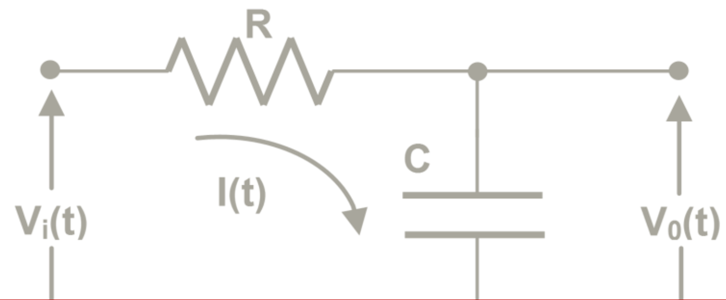
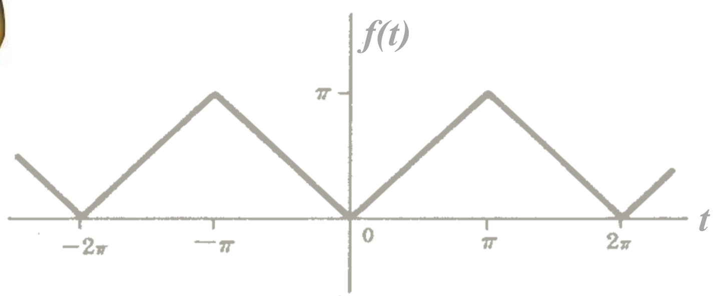
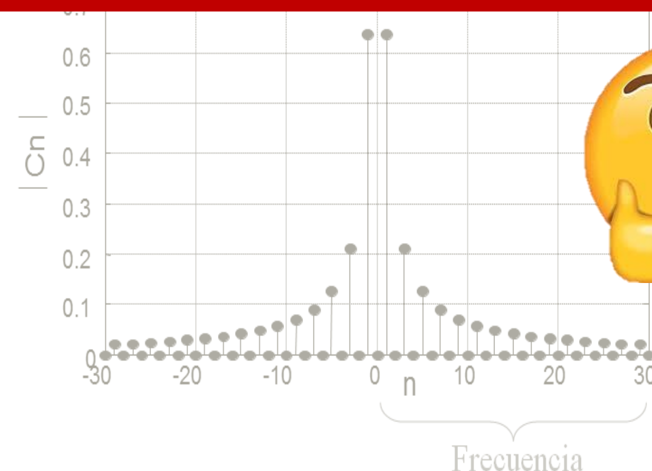
Repaso: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias





●Introducción a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias●





UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Ecuaciones

Algebraicas

$$x^3 + 5x = 8$$

$$e^{-\cos(3x^2)} - 5 = 0$$

La incógnita es un valor o conjunto de valores que satisfacen una expresión

Dierenciales

$$u = f(x, y); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\psi = f(\bar{r}, t); \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\,\bar{\nabla}^2\,\psi + V\,\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

La incógnita es una función: debo encontrar una función (o familia de funciones) que satisfagan una expresión.

Ecuaciones Diferenciales

Ordinarias

$$y = f(x); \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 5x$$

$$z = f(x, y); \qquad y\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} = 5xy$$

Las derivadas aparecen respecto de *una única* variable independiente

~~En derivadas parciales~~

$$u = f(x, y); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(Ec. de Laplace)

$$u = f(x, t); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(Ec. del calor / Fourier)

$$\psi = f(\bar{r}, t); \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(Ec. de Schrödinger)

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Lineales:

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = g(t)$$

$y = f(t)$

Ej: $$t\frac{d^3y}{dt^3} + \ln(t)\frac{dy}{dt} + 3\mathrm{y} = \sin(\mathrm{t})$$

No-lineales:

$$t\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^2 + \ln(t)\,y\frac{dy}{dt} + 3\sqrt{\mathrm{y}} = \sin(\mathrm{t})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ *(Ec. de la catenaria)*

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

$$a_n(t)\,\frac{d^n y}{dt^n} + \; a_{n-1}(t)\,\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\,\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = g(t)$$

Coeficientes variables:

$$t\,\frac{d^3y}{dt^3} + \ln(t)\,\frac{dy}{dt} + 3y = \sin(t)$$

Coeficientes constantes:

$$3\,\frac{d^3y}{dt^3} + \ln(2)\,\frac{dy}{dt} - 3y = t^2$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales a Coeficientes Constantes

$$a_n\cancel{(t)}\,\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\cancel{(t)}\,\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\cancel{(t)}\,\frac{dy}{dt} + a_0\cancel{(t)}\,y = g(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0\,y = f(t)}$$

Orden n: la derivada de *mayor* orden me indica el orden de la EDO

Orden 1 $\longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} + \lambda\,y = f(x)$

Orden 2 $\longrightarrow$ $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + a\,\dfrac{dy}{dx} + b\,y = f(x)$

¿Y cómo se resuelven?

$$\frac{dy}{dt} + 5\,y = f(t)$$

Una forma es proponer que nuestra solución tiene la siguiente forma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Solución final del problema (nuestra incógnita)

Solución particular

Solución homogénea

Solución homogénea

Se obtienen igualando la EDO a cero

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\, y = 0$$

Solución homogénea para EDO de orden 1: $\frac{dy}{dt} + \lambda\, y = f(t)$

$$\frac{dy_h}{dt} + \lambda\, y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_h}{dt} = -\lambda\, y_h \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_h}{y_h} = -\lambda\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy_h}{y_h} = \int -\lambda\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln(y_h) = -\lambda t + C \quad \Rightarrow \quad y_h\,(t) = e^{-\lambda t + C}$$

$$\Rightarrow \quad y_h(t) = e^{-\lambda t}\, e^{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_h\,(t) = K e^{-\lambda t}}$$

Resolvamos, por ejemplo, la siguiente EDO: $$\frac{dy}{dt} + 5\,y = 2\,t$$

Solución homogénea para EDO de orden 1:

$$\frac{dy_h}{dt} + 5\,y_h = 0$$ ← ***Homogénea ⇒ Igualo a 0***

Propongo como solución $y_h(t) = Ke^{-\lambda t}$

$$\frac{d}{dt}\left(Ke^{-\lambda t}\right) + 5\,Ke^{-\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda Ke^{-\lambda t} + 5\,Ke^{-\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow Ke^{-\lambda t}\underbrace{(-\lambda + 5)}_{0} = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 5$$

$$\therefore y_h\,(t) = Ke^{-5t}$$

¿Y la solución particular?

$$\frac{dy}{dt} + 5\,y = f(t)$$

$$y_p(t) \sim f(t)$$

Si $f(t)$ es una función polinómica $\Rightarrow y_p(t)$ es una función polinómica

$$f(t) = CTE \;\Rightarrow\; y_p(t) = A$$

$$f(t) = 3t \;\Rightarrow\; y_p(t) = At + \mathrm{B}$$

$$f(t) = t^2 + 3t \;\Rightarrow\; y_p(t) = At^2 + \mathrm{Bt} + \mathrm{C}$$

$$f(t) = 2t^2 \;\Rightarrow\; y_p(t) = At^2 + \mathrm{Bt} + \mathrm{C}$$

Si $f(t)$ es una función exponencial $\Rightarrow y_p(t)$ es una función exponencial de mismo exponente

$$f(t) = e^{-3t} \;\Rightarrow\; y_p(t) = Ae^{-3t}$$

$$f(t) = e^{-t} + t \;\Rightarrow\; y_p(t) = Ae^{-t} + Bt + C$$

Si $f(t)$ es una función trigonométrica $\Rightarrow y_p(t)$ es una combinación lineal de senos y cosenos de la misma frecuencia

$$f(t) = 4\cos(3t) \Rightarrow\; y_p(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

$$f(t) = 4\cos(3t) + \sin(t) \Rightarrow\; y_p(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + C\cos(t) + D\sin(t)$$

¿Y cómo averiguo esas constantes de la solución particular $y_p(t)$?

Una vez que identifiqué la forma de $y_p(t)$, la reemplazo dentro de la EDO

Por ej: $$\frac{dy}{dt} + 5\,y = 2\,t \quad \Rightarrow y_p(t) = At + B$$

Reemplazo $y_p(t)$ dentro de la EDO

$$\frac{d}{dt}(At + B) + 5\,(At + B) = 2t$$

$$\Rightarrow A + 5At + 5B = 2t + 0 \begin{cases} 5At = 2t \\ A + 5B = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{5}\,,B = -\frac{2}{25}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{2}{5}t - \frac{2}{25}$$

¿Y cómo se resuelven?

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + 5\,y = 2t}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = Ke^{-5t} \qquad y_p(t) = \frac{2}{5}t - \frac{2}{25}$$

$$y(t) = Ke^{-5t} + \frac{t}{5} - \frac{1}{25}$$

¿Terminamos? ¡NO!

Nos dan información sobre un instante del fenómeno modelado

Condiciones iniciales: $y(0) = 1$ $\quad y(0) = Ke^{-5\cdot 0} + \frac{2}{5}\cdot 0 - \frac{2}{25} = 1 \;\Rightarrow K = \frac{27}{25}$

Condiciones iniciales nulas: $y(0) = 0$ $\quad y(0) = Ke^{-5\cdot 0} + \frac{2}{5}\cdot 0 - \frac{2}{25} = 0 \;\Rightarrow K = \frac{2}{25}$

¿Terminamos? ¡SÍ!

La solución de la EDO con condiciones iniciales nulas (CIN)

$$\frac{dy}{dt} + 5\,y = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y(t) = \frac{2}{25}e^{-5t} + \frac{2}{5}t - \frac{2}{25}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -5\,y + 2t$$

¿Y en Matlab? → ode45, ode23

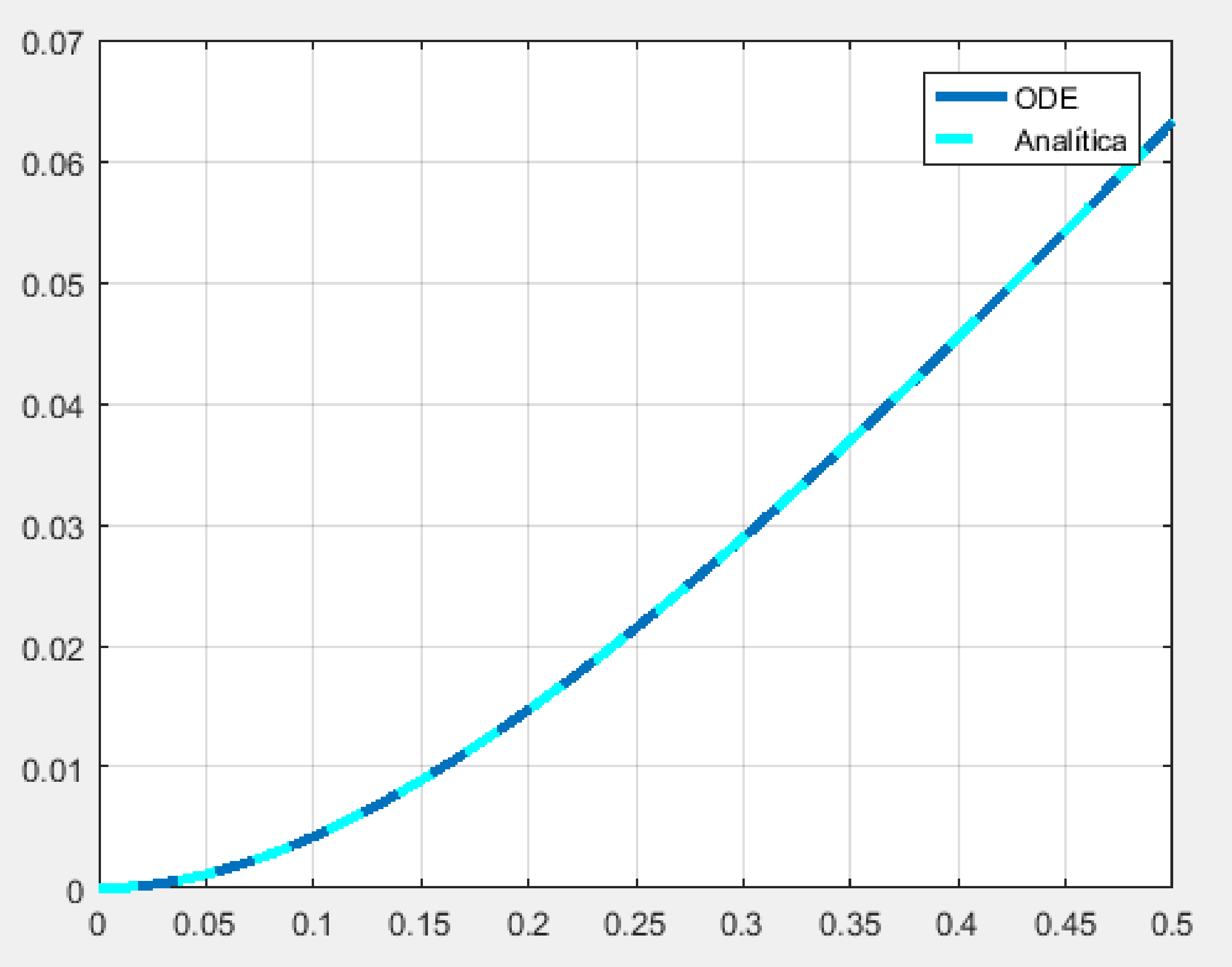
fun_ode1.m | demo.m | Clase_Z_filtro_inestable.m | +

```
function dy = fun_ode1(t,y)

    % EDO: y' + 5y = 2t

    ft = 2*t;          % f(t) de la solución particular

    dy = -5*y + ft;  % EDO despejando y'
```

Command Window

```
>> dt = 0.001;
t = 0:dt:2;
CI = 0;
[t,y]=ode45(@fun_ode1, t, CI);
y_an = 2/25 * exp(-5*t) + 2/5*t - 2/25;
plot(t,y,t,y_an,'r--','linewidth',2)
```

Repaso:
EDOs


0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
ODE
Analítica

¿Y las de 2do orden?

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

En principio buscaremos una solución similar a lo que hicimos para las EDO de orden 1:

separar en una solución homogénea y otra particular

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

El caso de la solución particular $y_p(t)$ se aborda de la misma manera que antes:

se propone una $y_p(t)$ de acuerdo con la naturaleza de la $\mathrm{f}(t)$ y se reemplaza en la EDO

¿Y la solución homogénea?

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

Propongamos una solución similar a laque usamos para las de orden 1:

$$y_h(t) = Ke^{\lambda t}$$

Reemplazamos $y_h(t)$ en la EDO:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(Ke^{\lambda t}\right) + a\frac{d}{dt}\left(Ke^{\lambda t}\right) + b\,Ke^{\lambda t} = 0 \longleftarrow \textit{Homogénea}$$

$$\lambda^2 Ke^{\lambda t} + a\lambda\,Ke^{\lambda t} + b\,Ke^{\lambda t} = 0$$

$$\left(Ke^{\lambda t}\right)\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{0} = 0$$

Repaso:
Consigna #A

$$\left(Ke^{\lambda t}\right)\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{0} = 0$$

$$\textbf{Posibilidades}\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in \Re \ / \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Re \ / \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ / \ \lambda_{1,2} = a \pm jb \end{cases}$$

Raíces reales distintas

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Raíces reales iguales

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2\, t\, e^{\lambda t}$$

Raíces complejas conjugadas

$$y_h(t) = e^{at}\left[K_1 \cos(bt) + K_2 \sin(bt)\right]$$

Repaso: Consigna #A

Supongamos que ya conocemos el resultado de la solución homogénea ($\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -10$) y particular $y_p(t) = 5$

$$y(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-10t} + 5$$

Ya no tenemos un único valor de K que averiguar como en el caso de las EDO de primer orden, sino K_1 y K_2

Por lo tanto, necesitamos dos condiciones iniciales: una sobre $y(t)$ y otra sobre su derivada $\dot{y}(t)$

Si fuesen condiciones iniciales nulas (CIN):

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \Rightarrow K_1\, e^0 + K_2\, e^0 + 5 = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 & \Rightarrow -3K_1\, e^0 - 10K_2\, e^0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = -\dfrac{50}{7} \\ K_2 = \dfrac{15}{7} \end{cases}$$

UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

¿Y en Matlab?

En Matlab se complica un poco la situación porque las funciones ode23() y ode45() no saben calcular ecuaciones diferenciales de órdenes mayores que 1

Pero lo que saben hacer es resolver sistemas de ecuaciones de orden 1

Entonces, ¿cómo se trabaja?

Se transforma la EDO de orden ‘n’ en ‘n’ EDOs de orden 1

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y_n' = k_n y_n + k_{n-1}\, y_{n-1} \ + \cdots + k_0 y_0 \\ \dots \\ y_1' = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo: EDO de segundo orden genérica

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

Despejamos la derivada de mayor orden

$$y''(t) = -\frac{b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t) + \frac{1}{a}f(t)$$

Cambio de variable #1

$$y(t) = y_1$$

$$y_1'' = -\frac{b}{a}y_1' - \frac{c}{a}y_1 + \frac{1}{a}f(t)$$

Cambio de variable #2

$$y_1' = y_2 \quad \Rightarrow \quad y_1'' = y_2'$$

$$y_2' = -\frac{b}{a}y_2 - \frac{c}{a}y_1 + \frac{1}{a}f(t)$$

Y *voilà… ya tenemos las dos EDOs de orden 1*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2{}' = -\frac{b}{a} y_2 - \frac{c}{a} y_1 + \frac{1}{a} f(t) \end{cases}$$

$$y_1{}' = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot f(t)$$

$$y_2{}' = -\frac{c}{a} y_1 - \frac{b}{a} y_2 + \frac{1}{a} f(t)$$

¿Cómo escribimos esto en Matlab?

Notación matricial

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a \end{bmatrix} f(t)$$

Por ejemplo:

$$5\,y''(t)\ - 3\,y'(t) + 6y(t) = \cos(t)$$

$$y''(t) = 3/5\,y'(t) - 6/5\,y(t) + 1/5\cos(t)$$

$$y_1{}'' = 3/5\,y_1{}' - 6/5\,y_1 + 1/5\cos(t)$$

$$y_2{}' = 3/5\,y_2 - 6/5\,y_1 + 1/5\cos(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_1'' &= y_2{}' \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{6}{5}y_1 + \dfrac{3}{5}y_2 + \dfrac{1}{5}\cos(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix}\cos(t)$$

Por ejemplo: $5\,y''(t)\ - 3\,y'(t) + 6y(t) = \cos(t)$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} \cos(t)$$

fun_ode1.m | fun_ode2.m | Bilineal.m | Script_2do_or

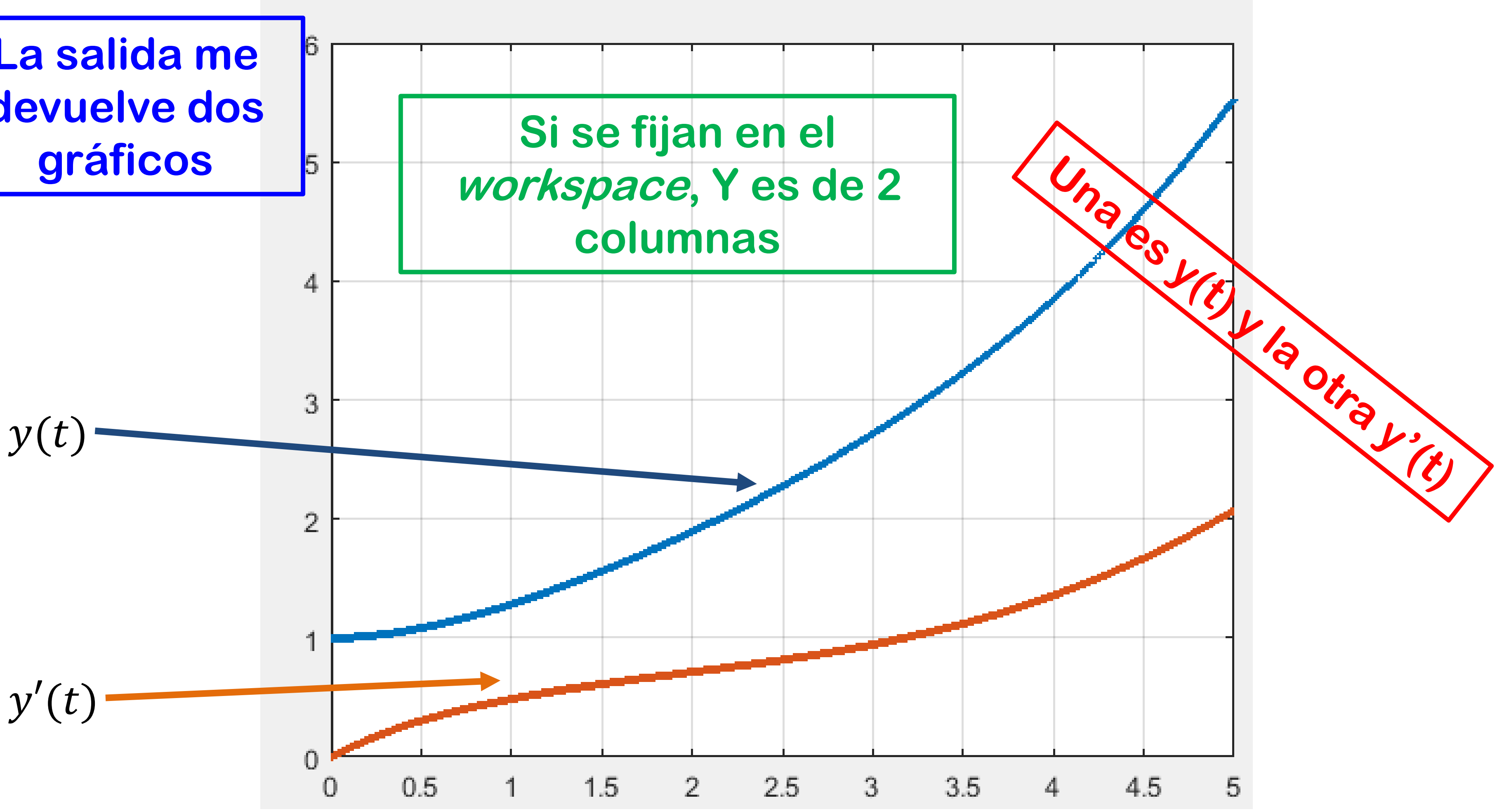
```
function [ dy ] = fun_ode2( t,y )

ft = cos(t);

dy = [0 1; -6/5 3/5] * y + [0; 1/5] .* ft;

end
```

Command Window

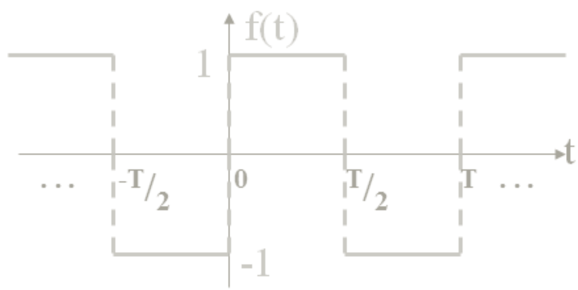
```
>> dt = 0.001;
>> t = 0:dt:5;
>> CI = [1; 0]; % Primero la de y(0) y luego y'(0)
>> [t_ode, Y] = ode45(@fun_ode2,t,CI);
>> plot(t,Y)
```

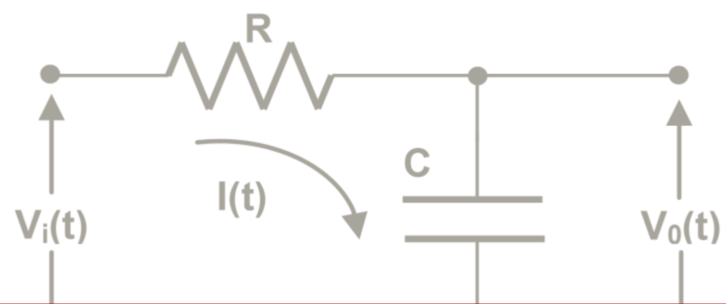
Repaso:
Consigna #A

La salida me devuelve dos gráficos



Repaso:: Resolución de Consignas





Repaso:

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Transformada de Fourier