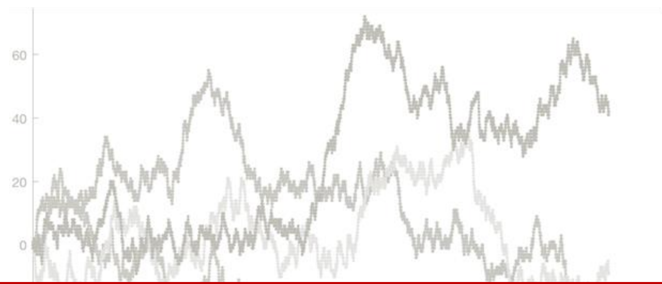
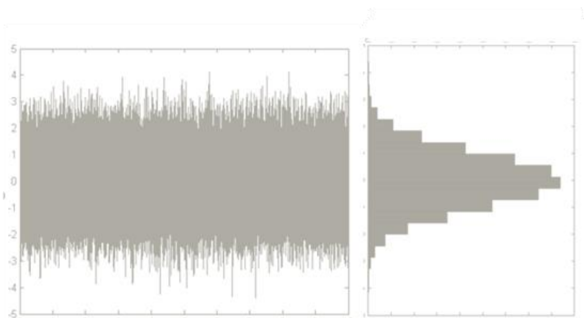
Análisis de Señales y Sistemas R2041

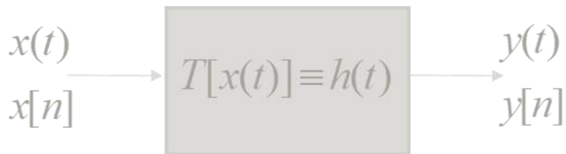
Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo



Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo

●Introducción a los Procesos Estocásticos●



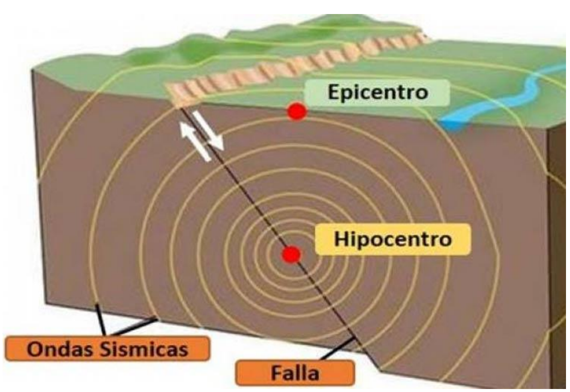


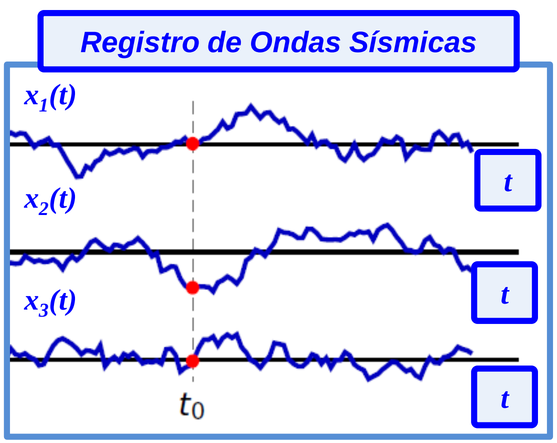
UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo

Introducción

Un ***proceso físico*** recibe el nombre de "***aleatorio***" cuando los ***valores futuros*** de las variables que lo describen ***no pueden predecirse*** dentro del los límites del error experimental. Este tipo de sistemas generan ***señales dependientes del tiempo***, las cuáles se definen en un intervalo de observación. Un ejemplo de ello puede advertirse en las ***series temporales generadas por la voz humana*** o en las ***ondas sísmicas derivadas de las fuerzas geológicas***. Habida cuenta de tales cualidades, ***su caracterización se lleva a cabo en virtud de parámetros estadísticos***, los cuáles evolucionan temporalmente junto con las series bajo estudio…





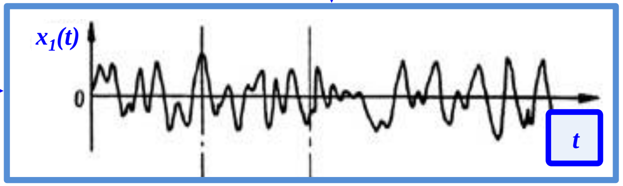
Señales Determinísticas:

Aquellas ***variaciones continuas o discretas*** que pueden ser descriptas por ***funciones matemáticas*** (su valor se encuentra definido para cualquier instante t_0). Dentro de este grupo se encuentran aquellas que pueden ser representadas por ***series matemáticas infinitas*** (Ej. Series de Fourier)

Señales Aleatorias o Estocásticas:

Presentan un ***comportamiento desconocido*** de tipo estocástico (azaroso) y ***no pueden ser descriptas en términos matemáticos***: *El índice bursátil, los parámetros biológicos, la voz humana, las variables climáticas…*

Para poder caracterizar una señal aleatoria se debe evaluar el "PROCESO ESTOCÁSTICO" al que pertenece. Para ello son necesarias HERAMIENTAS ESTADÍSTICAS



El soporte temporal puede ser CONTINUO o DISCRETO

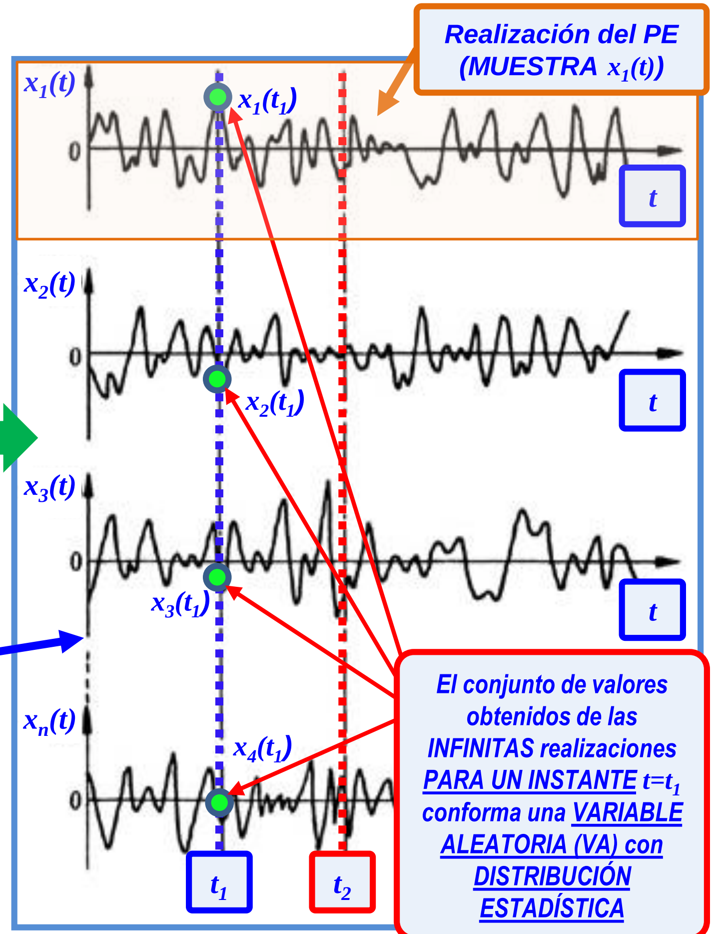
Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo

Proceso Estocástico

Formalmente, un ***Proceso Estocástico (PE)*** constituye una ***colección o familia infinita*** de ***señales aleatorias*** (realizaciones del proceso $x_i(t)$ dependientes del tiempo). Como ejemplos, pueden mencionarse:

- *La temperatura hora a hora de una habitación, en diferentes días*
- *La frecuencia cardíaca durante 10 min., en diferentes individuos*
- *El nivel de un río durante 30 min, a la misma hora cada día*

- Cada ***realización*** $x_i(t)$ obtenida de observar el ***PE*** recibe el nombre de ***MUESTRA***
- Al conjunto de las ***infinitas realizaciones temporales*** generadas por el ***PE*** se lo denomina ***ENSAMBLE***



Una VA es un valor numérico representativo de resultado de un experimento aleatorio

La CARACTERIZACIÓN del PE se efectúa a partir de la obtención de PROMEDIOS ESTADÍSTICOS DEL ENSAMBLE

Proceso Estocástico

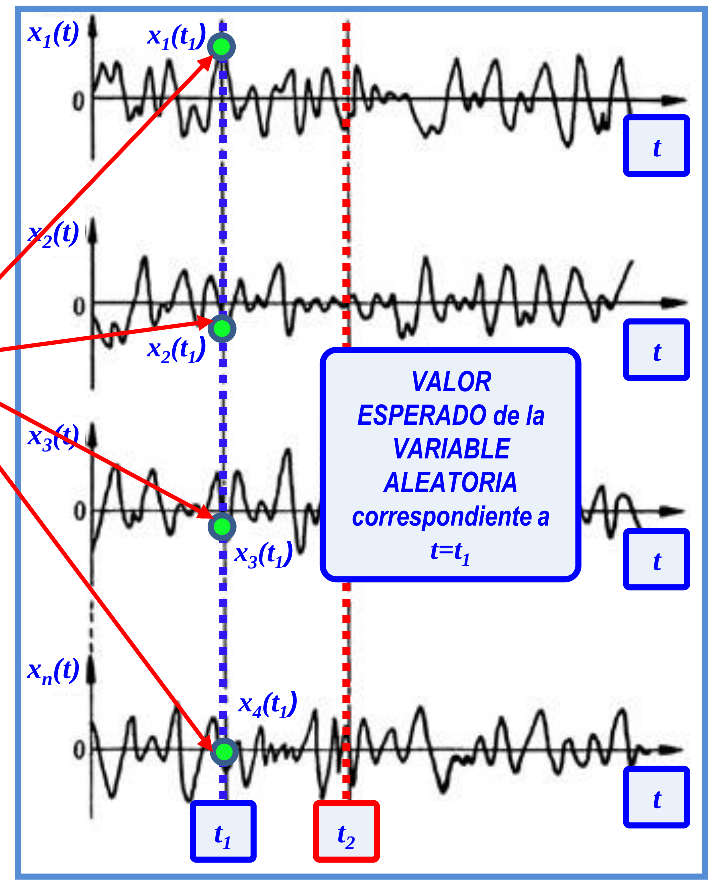
Un *primer indicador* lo constituye la ***Media de Ensamble*** (*valor esperado μ_{ti}*), que determina el *promedio de la variable aleatoria* correspondiente a un *instante específico* $t=t_1$:

$$\mu_{t_1} = E\left[x(t_1)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$

$$\mu_{t_1} \neq \mu_{t_2} \text{ (los valores esperados varían en el tiempo)}$$

EN LA PRÁCTICA ES DIFUCULTOSO DE CALCULAR DEBIDO A QUE SE DESCONOCE LA TOTALIDAD DE LAS MUESTRAS DEL ENSAMBLE (INFINITAS)

- Se lo puede *aproximar* a partir de un *conjunto FINITO de muestras*
- Se lo puede *aproximar* a partir de *promedios temporales de las muestras* (en condiciones particulares)



El mismo concepto se aplica a Tiempo Discreto

Caracterización del Ensamble

Aplicando *la premisa anterior* y considerando ***todos los posibles valores del rango t***, pueden definirse ***indicadores estadísticos temporales del ENSAMBLE***:

PROMEDIO LINEAL TEMPORAL: Caracteriza la variación del VALOR MEDIO en el tiempo

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

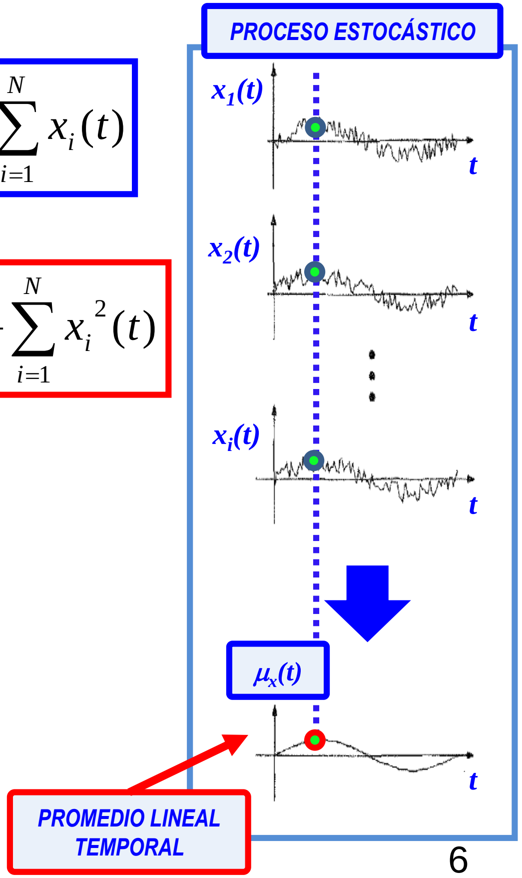
PROMEDIO CUADRÁTICO TEMPORAL: Permite efectuar la evaluación de la "POTENCIA PROMEDIO" del proceso en el tiempo

$$p_x(t) = E[x^2(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}(t)$$

VARIANZA TEMPORAL: Cuantifica la DISPERSIÓN de los datos en torno al promedio lineal temporal, en términos del cuadrado de la desviación

$$\sigma_x^{\,2}(t) = E\left[(x(t) - \mu_x(t))^2\right]$$

$$\sigma_x^{\,2}(t) = p_x(t) - \mu_x^{\,2}(t)$$



Mientras que el Promedio Lineal Temporal constituye un momento de PRIMER ORDEN, el promedio cuadrático y la varianza corresponden a momentos de SEGUNDO ORDEN (promedio sobre valores elevados al cuadrado)

Ejemplo: Una moneda es lanzada ***3 veces*** secuencialmente cada ***1s*** (tiempo discreto). El resultado obtenido (***0*** cara, ***1*** ceca) se evalúa a partir de las siguientes ***8 realizaciones del proceso*** ¿Qué análisis puede llevarse a partir del ***ensamble en términos de su valor esperado***?

Evaluando entonces el ***promedio temporal del ensamble***:

$$\mu_x[n] = E\left[x[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i[n]$$

Se calcula un promedio μ_i para cada instante t_i sobre todas las muestras

Realizaciones (i)	t=0	t=1	t=2
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	0	0	0
8	1	1	1
μ_x	5/8	4/8	5/8

Tiempo [s]

VARIABLE ALEATORIA en t=0

Media de Ensamble

Analizando la VA resultante en cada instante t_k (t=0, t=1 y t=2), los valores esperados (media de ensamble) se acercan a 1/2. Dicho resultado es consistente en términos estadísticos, donde se obtendrían un número de caras igual al de cecas (promedio 1/2), si el número de realizaciones fuera INFINITO

Aplicación en MatLab

```
%Lanzamiento secuencial de una moneda
(3 veces, 8 realizaciones)
%Realizaciones del Proceso Estocástico
x=[0 1 1; 1 0 1; 1 1 0; 0 0 1;
   1 1 0; 1 0 1; 0 0 0; 1 1 1]
%Promedio Lineal ENSAMBLE
mx=mean(x,1)
%Promedio Cuadrático ENSAMBLE
px=mean(x.^2,1)
%Varianza ENSAMBLE
s2x=var(x,0,1)
```

Los indicadores estadísticos del ensamble pueden obtenerse a partir de la funciones MEAN (valor esperado) y VAR (varianza). Ambas funciones posibilitan delimitar la dimensión "d" (fila o columna) sobre la que se llevará a cabo el cálculo. Particularmente en este caso (realizaciones del lanzamiento de una moneda en $t=0$, $t=1$ y $t=2$), el valor $d=1$ (columna a columna) proporciona como resultado el comportamiento TEMPORAL del indicador correspondiente

```
x =

     0     1     1
     1     0     1
     1     1     0
     0     0     1
     1     1     0
     1     0     1
     0     0     0
     1     1     1
```

Ensamble correspondiente al lanzamiento secuencial de una moneda en tres instantes

```
mx =

    0.6250    0.5000    0.6250


px =

    0.6250    0.5000    0.6250


s2x =

    0.2679    0.2857    0.2679
```

Variación temporal ($t=0$, $t=1$ y $t=2$) de los indicadores estadísticos

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #A (15 minutos)

Se desea caracterizar un proceso estocástico, generado a partir de la ***medición de la temperatura*** de una habitación durante del día, para lo cual se adquirieron ***valores cada 2hs*** (de ***8*** a ***22hs***), ***durante 5 días***. Analizar los datos obtenidos (almacenados en el *campus virtual*), ***utilizando MatLab***:

- *Graficar el **ensamble resultante***
- *Graficar los **indicadores estadísticos del proceso***

¿Cómo se ***comportan*** los indicadores obtenidos?¿Son ***variables o constantes*** en relación al tiempo?¿Podría considerarse la estadística ***de un único día*** para ***caracterizar la totalidad del proceso estocástico***?

Caracterización del Ensamble

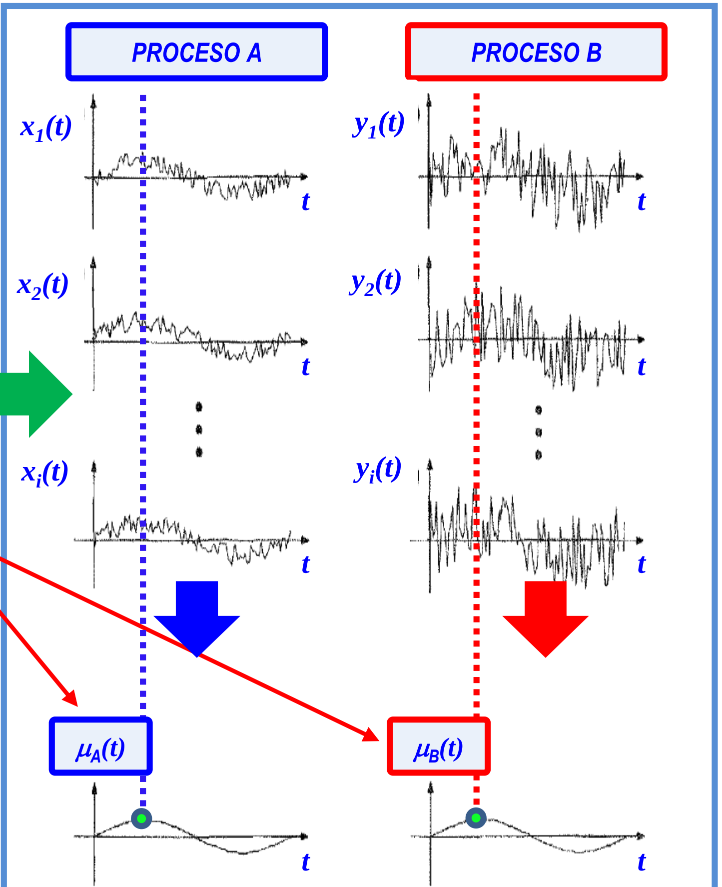
Frecuentemente, los ***PE*** son descriptos en términos de su ***promedio lineal*** y ***varianza***. ***Ambos parámetros resultan necesarios***, habida cuenta que pueden presentarse situaciones como la que se describe a continuación:

Sean dos procesos estocásticos A y B

Se obtiene el MISMO Promedio Temporal $\mu(t)$ en ambos casos!

Entonces SE LOS DIFERENCIA en virtud de su Varianza Temporal $\sigma^2(t)$

NO OBSTANTE, la DESCRIPCIÓN COMPLETA de la dinámica temporal del PE exige la incorporación de un momento adicional de SEGUNDO ORDEN CONJUNTO: LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN



El PROMEDIO TEMPORAL resulta COINCIDENTE en ambos PE pero las VARIANZAS TEMPORALES (dispersión) son distintas!

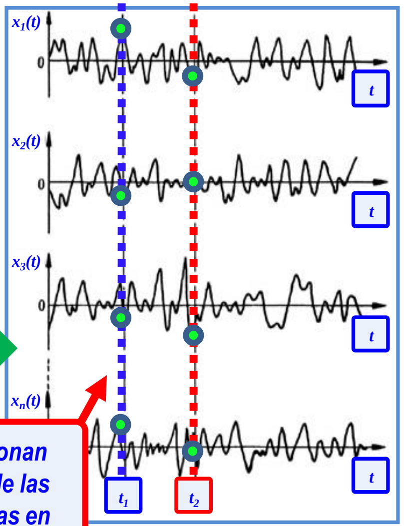
Incorporando medidas de Similaridad: Autocorrelación en el Ensamble

Conforme se ha visto anteriormente en el ensamble, ***el promedio*** *y* ***la varianza*** se ***focalizan*** en un ***instante temporal específico***. Por este motivo resultan ***inca-paces*** de evaluar las ***dependencias estadísticas entre DISTINTOS INSTANTES del conjunto de muestras***. Como consecuencia de ello, se utiliza la ***FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN DEL ENSAMBLE*** (***FAC, φ_{xx}***) definida de la siguiente manera:

(Momento de 2do orden CONJUNTO)

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)}$$

La FAC $\varphi_{xx}(t_1,t_2)$ describe la relación entre las variables aleatorias RESULTANTES DEL ENSAMBLE en los instantes t_1 y t_2. Si resulta elevada, el comportamiento del ensamble en $t=t_1$ se correlaciona linealmente con el comportamiento en $t=t_2$. De esta manera, se obtiene una NOCIÓN del COMPORTAMIENTO del PE en términos de CUAN RÁPIDAMENTE cambian sus valores a lo largo del tiempo



Se correlacionan los valores de las VAs obtenidas en $t=t_1$ y $t=t_2$

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Se efectúan ***8 realizaciones*** de un proceso estocástico, lanzando una moneda secuencialmente ***3 veces cada 1s*** (tiempo discreto). Efectuar un análisis del ***ensamble en términos de la Función de Autocorrelación***.

Partiendo entonces de la expresión de la ***FAC***:

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i[t_1]x_i[t_2]}$$

y efectuando el cálculo según t_1 y t_2:

$$\phi_{xx}(0,0) = 5/8;\ \phi_{xx}(0,1) = 3/8;\ \phi_{xx}(0,2) = 3/8$$

$$\phi_{xx}(1,0) = 3/8;\ \phi_{xx}(1,1) = 4/8;\ \phi_{xx}(1,2) = 2/8$$

$$\phi_{xx}(2,0) = 3/8;\ \phi_{xx}(2,1) = 2/8;\ \phi_{xx}(2,2) = 5/8$$

Conforme puede advertirse, la FAC es máxima si $t_1=t_2$ y disminuye si $t_1 \neq t_2$

Realizaciones	$t_1=0$	$t_2=1$	$t_3=2$
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	0	0	0
8	1	1	1

Tiempo [s]

$$\phi_{xx}(0,1) \neq \phi_{xx}(1,2)$$

Se observa asimismo que el resultado obtenido de evaluar un instante t_1 y compararlo con el correspondiente instante t_2, UN SEGUNDO DESPUÉS, DEPENDE DEL INSTANTE DE PARTIDA ELEGIDO

Autocovarianza y Ensamble

¿Y qué implica entonces efectuar la Autocovarianza sobre el ensamble?

La Función de Autocovarianza (***FACV***) consituye esencialmente la ***FAC*** del ensamble ***con remoción del valor medio***:

$$C_{xx}(t_1,t_2) = E\left[\left(x(t_1)-\mu_1\right)\left(x(t_2)-\mu_2\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x(t_1)-\mu_1\right)\left(x(t_2)-\mu_2\right)$$

Remoción de los valores medios μ_1 y μ_2 correspondientes a las VAs en t_1 y t_2

Evaluada en $t_1=t_2$ representa ***la varianza*** de la ***VA*** correspondiente a dicho instante:

$$C_{xx}(t_1,t_1) = \sigma^2_{x(t_1)}$$

Varianza en $t=t_1$

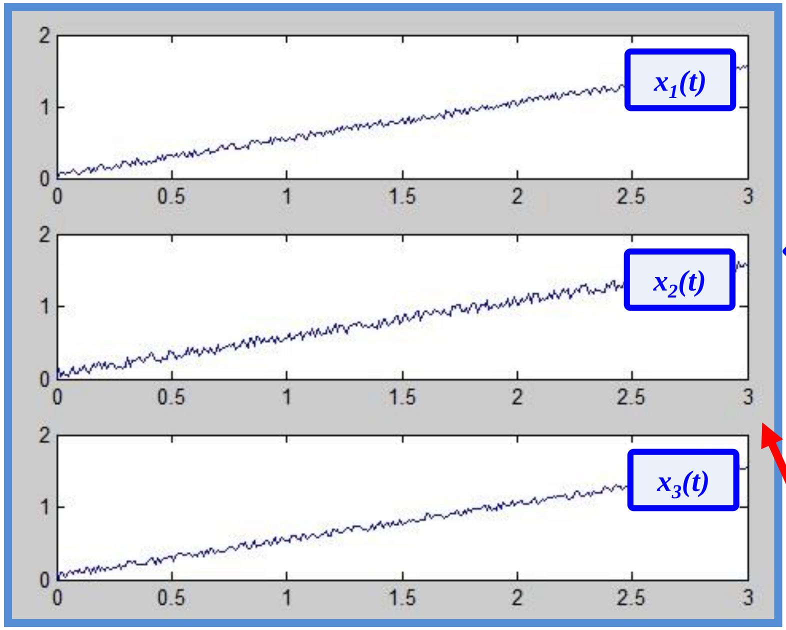
y además puede evidenciarse su ***relación directa con la FAC*** del ensamble:

$$C_{xx}(t_1,t_2) = \varphi_{xx}(t_1,t_2) - \mu_1\mu_2$$

Una FACV POSITIVA, implica una ASOCIACIÓN LINEAL entre las VA obtenidas en t_1 y t_2 de PENDIENTE POSITIVA (valores elevados de una de las variables se corresponden con valores elevados de la otra). Si la FACV resulta NEGATIVA, valores elevados de una de las variables se corresponderán con valores mnínimos de la otra. El VALOR ABSOLUTO de la FACV indica la FUERZA de dicha asociación.

¿Cuándo es conveniente utilizar la FACV en lugar de la FAC?

Si la media temporal $\mu_x(t)$ del proceso se mantiene estable, ambas medidas (***FAC*** y ***FACV***) permiten efectuar una comparación efectiva de la dinámica del ***PE***. En caso de no ser así, resulta imperativa la utilización de la ***FACV***:



Se observa particularmente en este caso que PRESENCIA DE UNA TENDENCIA DETERMINÍSTICA (lineal) $\mu_x(t)$ AFECTARÁ las COMPARACIONES TEMPORALES DE CARÁCTER ALEATORIO obtenidas del cálculo de la FAC. El valor de esta última, en virtud de la diferencia entre t_1 y t_2, se verá INFLUENCIADO por la VARIACIÓN de $\mu_x(t)$. Es por ello que resulta CONVENIENTE la implementación de la FACV, donde el comportamiento de la media del ensamble NO SE TOMA en CONSIDERACIÓN.

Realizaciones del PE afectadas por una tendencia LINEAL

Procesos Estocásticos Estacionarios

¿Cuándo un proceso estocástico se considera "ESTACIONARIO"?

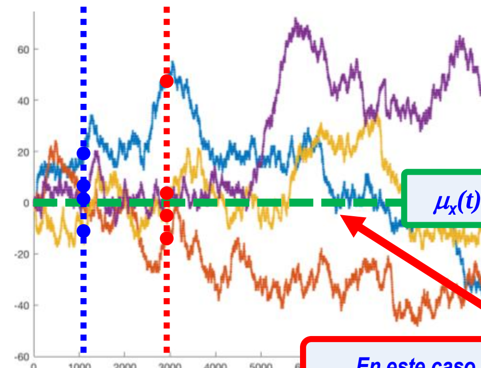
Un ***PE*** se denomina ***"ESTACIONARIO en Sentido ESTRICTO"*** si la ***totalidad*** de sus ***indicadores estadísticos NO varían*** a lo largo del ***tiempo***. Considerando entonces cualquier ***corrimiento temporal Δt***:

1. Para momentos de Primer y Segundo Orden:

$$E\left[g(x(t_1))\right] = E\left[g(x(t_1+\Delta t))\right] \Rightarrow \begin{cases} \mu_x(t) = \mu_x \\ p_x(t) = p_x \\ \sigma_x{}^2(t) = \sigma_x{}^2 \\ \vdots \end{cases}$$

$g(x(t))$ indica el tipo de momento a evaluar

Los INDICADORES ESTADÍSTICOS NO DEPENDEN del instante de evaluación y resultan constantes



$\mu_x(t)=\mu_x=cte$

t *$t+\Delta t$*

En este caso el PE es ESTACIONARIO RESPECTO DE SU MEDIA TEMPORAL DE ENSALBME

2. Para momentos conjuntos de Segundo orden (FAC y FACV)

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = E\left[x(t_1+\Delta t)x(t_2+\Delta t)\right]$$

El resultado de la FAC (FACV) RESULTA CONSTANTE si los instantes de evaluación t_1 y t_2 PRESERVAN LA MISMA SEPARACIÓN TEMPORAL $\phi_{xx}(1,3)=\phi_{xx}(5,7)=\phi_{xx}(20,22)$

Procesos Estocásticos Estacionarios

En virtud de lo anterior, la ***FAC*** (y ***FACV***) ***del ensamble*** sólo ***dependerá*** de la ***DIFERENCIA entre los instantes*** t_1 y t_2 (salto temporal $\tau = t_1 - t_2$) ***y no de sus valores específicos***, quedando expresada como:

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2) = \phi_{xx}(t_1 - t_2) = \phi_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right],\ con\ \tau = t_1 - t_2}$$

Por lo tanto, ***en procesos estacionarios***, se observa asimismo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \phi_{xx}(0) = \sigma_x^{\ 2} + \mu_x^{\ 2} & \text{MÁXIMA en el origen} \\ \phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau) & \text{Función PAR} \end{array}}$$

En los PE ESTACIONARIOS la FAC pasa a depender del parámetro "τ" (diferencia entre los instantes t_1 y t_2) y resulta MÁXIMA si $\tau=0$ (además de comportarse como una función PAR)

Por su parte, si en lugar de que la totalidad de la estadística se mantenga constante, ***sólo se cumple la condición de estacionariedad*** relativa al ***promedio temporal*** *(constante para todo* ***t****)* y la ***FAC*** *(sólo dependiente de* $\tau = t_1 - t_2$*)*, el ***PE*** se denomina ***"Estacionario en sentido AMPLIO o DÉBIL"***

$$\boxed{\mu_x = E\left[x(t)\right] \quad y \quad \phi_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right]}$$

PE ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO (estacionario respecto del valor medio del ensamble y la FAC)

Procesos Ergódicos

La condición de "ERGODICIDAD"

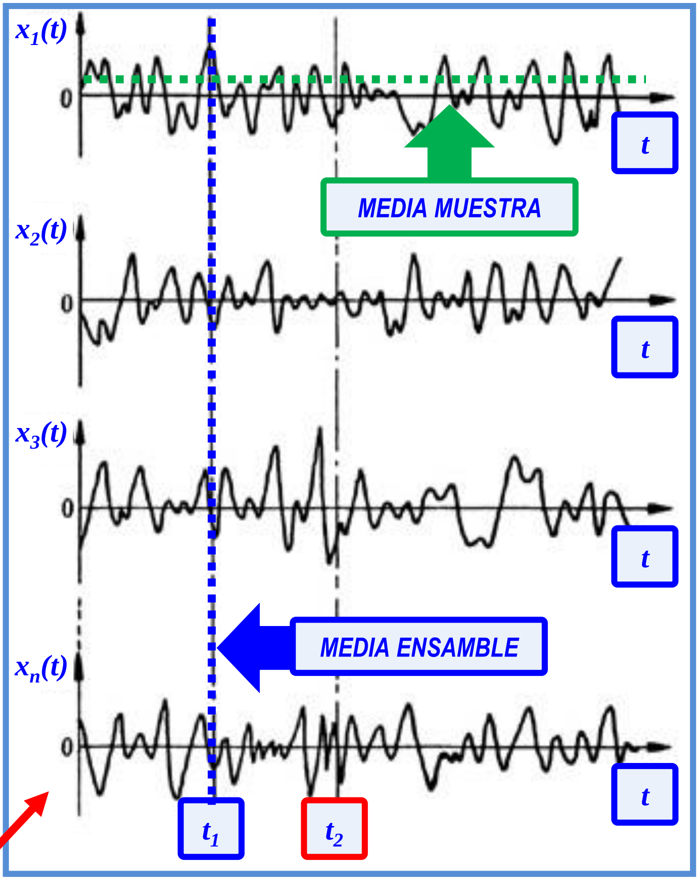
Sea el promedio temporal de una MUESTRA del ensamble (tiempo continuo o discreto):

$$\overline{x_i(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)dt \qquad \overline{x_i[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x_i[n]$$

Un ***PE ESTACIONARIO*** se denomina ***"ERGÓDICO respecto del VALOR MEDIO"*** si el ***promedio temporal de cualquiera de las muestras*** generadas por el mismo **coincide con la media del ensamble μ_x** (estacionaria)

$$\boxed{\overline{x_i(t)} = \mu_x, \text{ para todo } i}$$

PE ERGÓDICO (debe ser ESTACIONARIO de modo que $\mu_x(t)$=cte)



Si se cumple la CONDICIÓN DE ERGODICIDAD, puede utilizarse CUALQUIER MUESTRA del PE para determinar la MEDIA DEL ENSAMBLE μ_x

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Se efectúan ***8 realizaciones*** de un proceso estocástico, lanzando una moneda secuencialmente ***3 veces cada 1s*** (tiempo discreto). Efectuar un análisis ***del ensamble en términos de la ERGODICIDAD de la MEDIA***.

Realizaciones	t=0	t=1	t=2	Media Muestra
1	0	1	1	2/3
2	1	0	1	2/3
3	1	1	0	2/3
4	0	0	1	1/3
5	1	1	0	2/3
6	1	0	1	2/3
7	0	1	0	1/3
8	1	1	1	1
μ_x (Media Ensamble)	5/8	5/8	5/8	

Tiempo [s]

$$\mu_x[n] = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i[n]$$

Media Ensamble

$$\overline{x_i[n]} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_i[n]$$

Media Muestra

Los valores medios de ensamble μ_x RESULTAN CONSTANTES, cumpliéndose la condición de ESTACIONARIEDAD. Sin embargo, LOS PROMEDIOS DE LAS MUESTRAS son DIFERENTES según la realización. <u>EL PE NO RESULTA ERGÓDICO EN EL VALOR MEDIO</u>, ya que no puede determinarse la media del ensamble (de valor μ_x=5/8) a partir del promedio temporal de CUALQUIERA de las muestras x_i

NOTA: Si se consideraran las infinitas realizaciones x_i, la media del ensamble tendería a estabilizarse en 1/2 (condición de ergodicidad), pero la totalidad de los promedios de las muestras NO COINCIDIRÍAN CON DICHO VALOR. SIN EMBARGO, si el número de lanzamientos por realización también tendiera a infinito, se alcanzaría la condición de ERGODICIDAD (todas las medias, ya sea de ensamble o muestras adquirirían el valor 1/2)

Procesos Estocásticos Ergódicos

Si a la condición de ***ergodicidad respecto del valor medio*** se le incorpora la condición de ***ergodicidad respecto de la Función de Autocorrelación***:

$$\phi_{xx}(\tau) = R_{x_i x_i}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} x_i(t) x_i(t+\tau)dt, \text{ para todo } i$$

Tanto ϕ_{xx} como R_{xx} se calculan en términos del corrimiento de la MISMA VARIABLE "τ" (o "k" en el caso discreto)

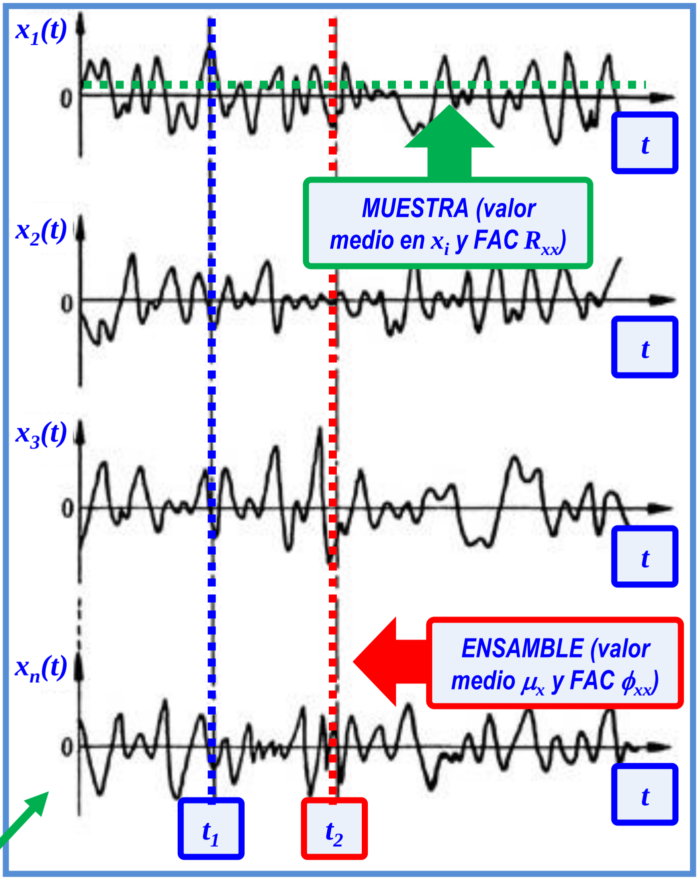
Autororrelación de una muestra R_{xx}

entonces el proceso resulta ***"ERGÓDICO en SENTIDO AMPLIO o DÉBIL"***:

$$\mu_x = \overline{x_i(t)} \quad y \quad \phi_{xx}(\tau) = R_{x_i x_i}(\tau) \quad \text{para todo } i$$

La MEDIA DE ENSAMBLE μ_x (estacionaria) coincide con la media de CUALQUIERA de las muestras x_i

La FAC del ensamble $\phi_{xx}(\tau)$ coincide con la FAC $R_{xx}(\tau)$ de CUALQUIERA DE LAS MUESTRAS



Si el proceso es ERGÓDICO EN SENTIDO AMPLIO, puede obtenerse la MEDIA DE ENSAMBLE y su FAC en virtud del ANÁLISIS DE CUALQUIER MUESTRA

Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo

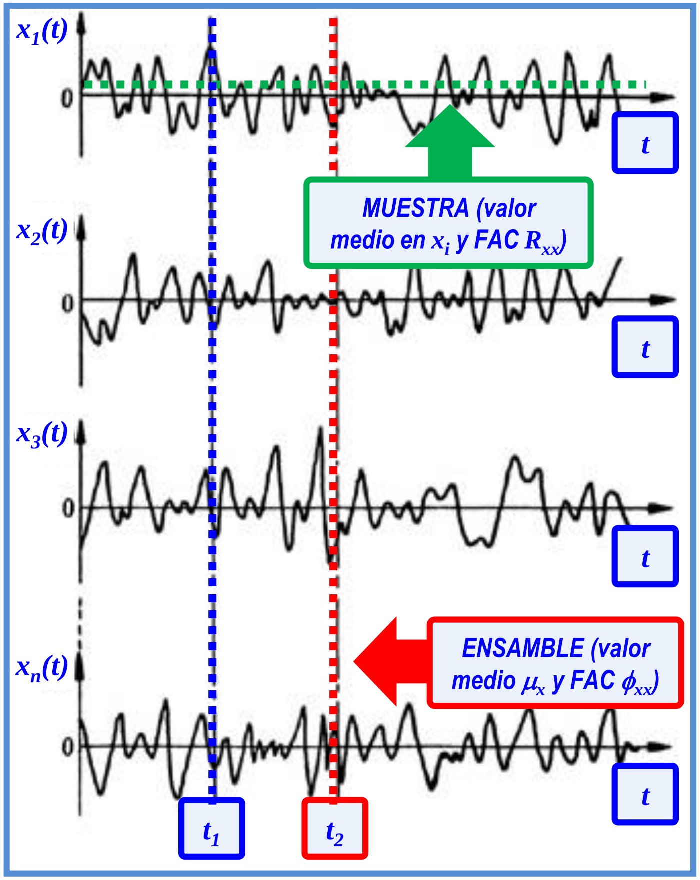
Procesos Estocásticos Ergódicos

Puede demostrarse que el **PE** $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$, donde la fase ϕ varía aleatoriamente de manera uniforme en $[-\pi, \pi]$ resulta **ergódico** respecto al ***valor medio*** y la **FAC** (sentido amplio)

Finalmente, si resulta factible calcular ***la totalidad de los indicarodres estadísticos*** a partir de una ***única muestra***, el proceso se define como ***"ERGÓDICO en sentido ESTRICTO"***

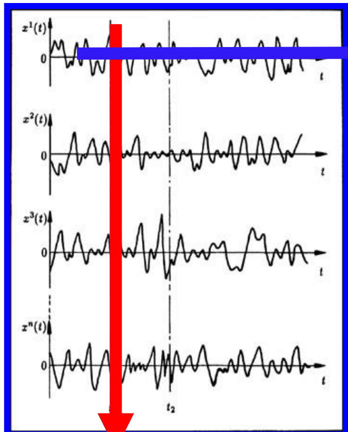
Un proceso ERGÓDICO es ESTACIONARIO. EL RECÍPROCO NO ES CIERTO (la estacionariedad NO ASEGURA ERGODICIDAD)

En la práctica general, los procesos NO SUELEN ser ergódicos (o estacionarios). Bajo determinadas circunstancias se "ASUME o ESPERA ERGODICIDAD" de modo de abordar el PE A PARTIR DE UNA ÚNICA REALIZACIÓN, dado que no es posible tener acceso al ensamble



Análisis General

PROCESO ESTOCÁSTICO (ENSAMBLE)



$\overline{x_1(t)}$

$E[x(t_1)]$

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

CARACTERIZACIÓN INICIAL DEL PROCESO ESTOCÁSTICO (Ej. Valor Medio y Función de Autocorrelación)

$$\mu_x(t) = \mu_x = cte$$

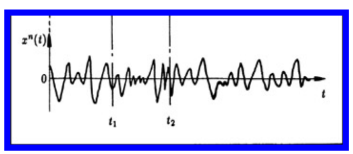
$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = \phi_{xx}(\tau) \; con \; \tau = t_1 - t_2$$

Condición de ESTACIONARIERAD (en sentido amplio)

$$\mu_x = \overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \overline{x_3(t)} = \ldots$$

$$\phi_{xx}(\tau) = R_{x_1x_1}(\tau) = R_{x_2x_2}(\tau) = R_{x_3x_3}(\tau) = \ldots$$

Condición de ERGODICIDAD (debe cumplirse estacionariedad)



UNA ÚNICA MUESTRA permite CARACTERIZAR EL ENSAMBLE en virtud de su media temporal y FAC (representa a todas las x_i)

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #B (20 minutos)

Se desea caracterizar el ***comportamiento de la frecuencia cardíaca*** de un grupo de ***10*** estudiantes durante la clase. Para ello se efectúan mediciones cada ***15 min.*** durante ***2hs.*** (*almacenadas en el campus virtual*). ***Utilizar MatLab*** para evaluar ***estacionariedad*** y ***ergodicidad*** del ***PE*** respecto de la ***media de ensamble*** $\mu[t_n]$ y la ***función de autocorrelación*** $\phi_{xx}[t_1,t_2]$ (efectuar los gráficos correspondientes).

$$\boxed{\mu_x[t_n] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i[t_n]}$$

$$\boxed{\phi_{xx}[t_1,t_2] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i[t_1]x_i[t_2]}$$

El Proceso de RUIDO BLANCO

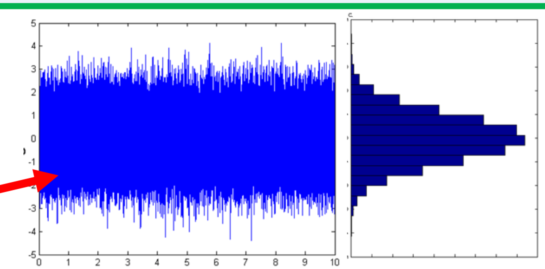
Un ***PE*** que se manifiesta frecuentemente en diversas aplicaciones es aquel denominado "***Proceso de Ruido Blanco***". Es un proceso de ***carácter ESTACIONARIO en sentido AMPLIO*** e ***IDEAL*** (no existe en términos prácticos), que presenta las siguientes características:

$$\mu_x(t) = 0$$
$$\sigma_x^2(t) = \sigma^2$$
$$\phi_{xx}(\tau) = G_0\delta(\tau)$$

El RUIDO BLANCO es un PE de MEDIA NULA, VARIANZA FINITA y se encuentra totalmente DESCORRELACIONADO (su AUTOCORRELACIÓN ES NULA EXCEPTO en $\tau=0$)

Si la distribución de la VA correspondiente a $t=t_i$ es NORMAL, se lo denomina RUIDO BLANCO GAUSSIANO (RGB)

El RGB es ERGÓDICO respecto del valor medio y la FAC



En ***condiciones reales***, entre los ***PE*** cuyo ***comportamiento es similar al de Ruido Blanco*** pueden mencionarse:

Ruido Térmico: Es generado por el movimiento aleatorio de electrones dentro de un conductor. Su distribución de probabilidad es gaussiana, de valor medio nulo. Su ***FAC*** se comporta aproximadamente como $\phi_{xx}(\tau) \sim G_0/(1+\tau^2)$

PE de Ruido Blanco

- ***Ruido Rosa:*** Su ***FAC*** adquiere la forma $\phi_{xx}(\tau)=G_0\, sen(\tau)/\tau$

Particularmente, si se lleva a cabo la combinación de señal de ***carácter determinista*** ***x(t)*** junto con un proceso de tipo ***Ruido Blanco*** ***n(t)***, puede demostrarse que la ***FAC*** resultante es:

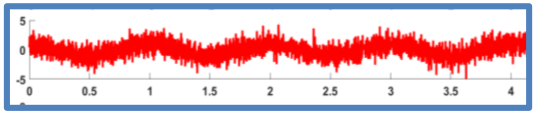
$$\boxed{p(t)=x(t)+n(t) \quad \rightarrow \quad R_{pp}(\tau)=R_{xx}(\tau)+R_{nn}(\tau)+R_{xn}(\tau)+R_{nx}(\tau)}$$

por lo que ***si x(t)*** y ***n(t) no se encuentran correlacionadas*** (no presentan dependencia entre si):

$$\boxed{R_{pp}(t)=R_{xx}(t)+R_{nn}(t)}$$

Un ejemplo representativo lo constituye el análisis de señales sinusoidales ***afectadas por PE de ruido blanco***:

$$p(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)+n(t)$$



$$\boxed{R_{pp}(\tau)=\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)+G_0\delta(\tau)}$$

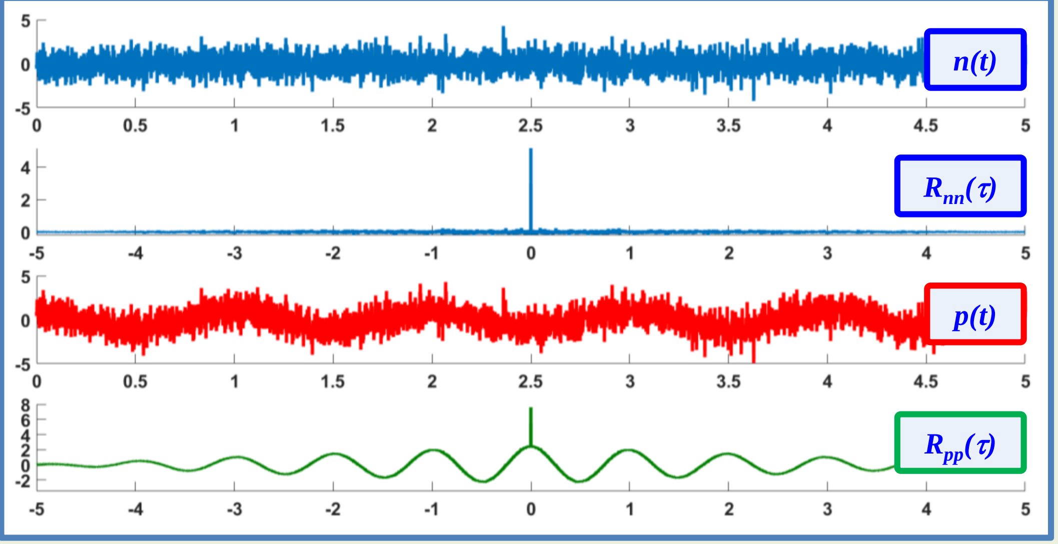
Al efectuar la AUTOCORRELACIÓN de la señal sinusoidal afectada por el PE de Ruido Blanco, se obtiene otra señal sinusoidal (su autocorrelación) y una función impulso. De esta manera se accede información específica relacionada con dicha sinudoide

Unidad 4: Procesos Estocásticos en el Tiempo

Aplicación en MatLab

```
%Señal DETERMINÍSTICA
Ts=0.001;
t=0:Ts:5;
x=cos(2*pi*t);
%Señal ESTOCÁSTICA (R. B. Gaussiano)
n=wgn(1,length(x),0);
%COMBINACIÓN x+n
p=x+n;
%MEDIA TEMPORAL MUESTRA RBG (=0)
mx=mean(n)
%VARIANZA TEMPORAL MUESTRA RGB (=1)
s2x=var(n)
%AUTOCORRELACIÓN RGB
[Rnn,tau]=xcorr(n,n);
%AUTOCORRELACIÓN x+n
[Rpp,tau]=xcorr(p,p);
subplot(411),plot(t,n);
subplot(412),plot(tau*Ts,Rnn*Ts);
subplot(413),plot(t,p);
subplot(414),plot(tau*Ts,Rpp*Ts);
```

La generación de una muestra $n(t)$ perteneciente a un proceso de ruido blanco de tipo gaussiano, puede llevarse a cabo en MatLab/Octave en virtud de la función "WGN". Puede verificarse que dicha muestra posee promedio temporal nulo (MEAN) y varianza unitaria (VAR) por defecto. Al aplicar la función de autocorrelación (XCORR) se advierte un único valor no nulo en $\tau=0$ (función impulso). Si la muestra de ruido se combina con una señal determinística $x(t)=\cos(2\pi t)$, el cálculo de la función autocorrelación proporciona en este caso la suma de las autocorrelaciones de $x(t)$ y $n(t)$, debido a que ambas señales son independientes entre si.



PE en Sistemas LTI

Procesos Estocásticos Estacionarios y Sistemas LIT

En un sistema ***Lineal e Invariante en el tiempo***, las propiedades de ***estacionariedad*** y ***ergodicidad de la EXCITACIÓN*** se ***CONSERVAN*** en la ***RESPUESTA:***

$$\begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{T[x(t)] \equiv h(t)} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ y[n] \end{matrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} y(t) = x(t) * h(t) \\ y[n] = x[n] * h[n] \end{matrix}}$$

En una primera instancia, puede determinarse la ***media temporal de ensamble de la respuesta $\mu_y(t)$***, generada como ***consecuencia*** del ***PE*** de excitación ***$x(t)$***:

$$\boxed{\mu_y(t) = E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E[x(t)] * h(t) = \mu_x(t) * h(t)}$$

El Valor Esperado de la RESPUESTA $\mu_y(t)$ es el resultado de la CONVOLUCIÓN entre el valor esperado de la EXCITACIÓN $\mu_x(t)$ y la respuesta impulsional $h(t)$

NOTA: El valor esperado sólo se calcula sobre el PE $x(t)$, ya que $h(t)$ es una SEÑAL DETERMINÍSTICA (todas las muestras de su "ensamble" son idénticas y por ende $E[h(t)]=h(t)$)

de modo que si el proceso ***$x(t)$ resulta estacionario:***

$$\mu_x(t) = \mu_x \Rightarrow \mu_y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) d\tau \Rightarrow \boxed{\mu_y = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) dt}$$

PE en Sistemas LTI

Bajo la misma premisa, puede evaluarse la ***FAC*** correspondiente a las ***muestras de ensamble de la respuesta y(t)***:

$$\boxed{R_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]} \Rightarrow \boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R_{yy}(\tau) = R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{hh}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) \end{array}}$$

***Recordar** que la FAC correspondiente a la RESPUESTA del sistema LIT es el resultado de la CONVOLUCIÓN entre las FAC de x y h*

De modo que si el ***PE de EXCITACIÓN*** resulta ***ERGÓDIGO***, la ***FAC*** correspondiente al ***PE de respuesta del sistema LIT*** puede obtenerse a partir de la ***CONVOLUCIÓN*** entre las autocorrelaciones de cualquiera de las muestras de ***x(t)*** y la ***FAC*** de ***h(t)***. Asimismo, si se evalúa la ***FCC*** entre ***excitación*** y ***respuesta*** se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{xy}(\tau) = h(\tau) * R_{xx}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) = h(-\tau) * R_{xx}(\tau) \end{array}}$$

La CORRELACIÓN CRUZADA ente EXCITACIÓN y RESPUESTA está vinculada DIRECTAMENTE con la respuesta impulsional h(t)

por lo que si ***x(t)*** resulta un ***PE*** de ***Ruido Blanco Gaussiano*** ($R_{xx}(\tau) = G_0\delta(\tau)$):

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = h(\tau) * G_0\delta(\tau) = G_0 h(\tau)}$$

LA RESPUESTA IMPULSIONAL h(t) puede ser obtenida como EL RESULTADO DE LA CORRELACIÓN CRUZADA ENTRE UNA EXCITACIÓN ESTOCÁSTICA Y SU RESPUESTA asociada!!!

Consigna de la Clase

Consigna de la clase #C (20 minutos)

Un sistema ***LIT*** de ***respuesta impulsional*** es $h(t)=e^{-2t}u(t)$ es excitado con una señal aleatoria $x(t)$, que proviene de un proceso estocástico ***ergódico*** de ***ruido blanco*** (media μ_x y ***FAC*** $R_{xx}(\tau)=G_0\delta(\tau)$). ***Caracterizar el PE resultante*** en virtud de:

a) *El valor medio de la respuesta* μ_y

b) *La* ***FAC*** *de la respuesta* $R_{yy}(\tau)$

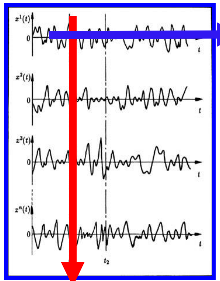
c) *El contenido energético de la respuesta* $y(t)$ $(R_{yy}(0))$

Utilizar MatLab para ***verficar los resultados obtenidos*** en virtud de la generación de ***RBG*** (aplicar ***convolución*** a la excitación $x(t)$ de modo de obtener $y(t)$)

Resumen

Caracterización de PEs

PROCESO ESTOCÁSTICO (ENSAMBLE)



$\overline{x_1(t)}$

$E[x(t_1)]$

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

CARACTERIZACIÓN INICIAL DEL PROCESO ESTOCÁSTICO (Ej. Valor Medio y Función de Autocorrelación)

$$\mu_x(t) = \mu_x = cte$$

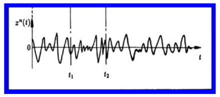
$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = \phi_{xx}(\tau) \ con \ \tau = t_1 - t_2$$

Condición de ESTACIONARIERAD (en sentido amplio)

$$\mu_x = \overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \overline{x_3(t)} = \ldots$$

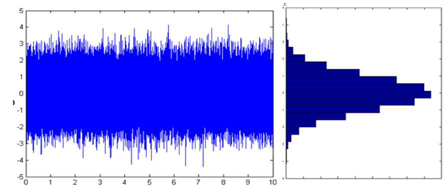
$$\phi_{xx}(\tau) = R_{x_1x_1}(\tau) = R_{x_2x_2}(\tau) = R_{x_3x_3}(\tau) = \ldots$$

Condición de ERGODICIDAD (debe cumplirse estacionariedad)



UNA ÚNICA MUESTRA permite CARACTERIZAR EL ENSAMBLE en virtud de su media temporal y FAC (representa a todas las x_i)

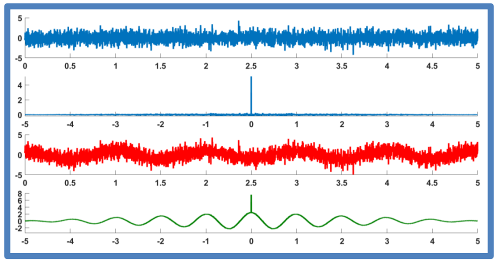
Proceso de Ruido Blanco



$$\mu_x(t) = 0$$

$$\sigma_x^2(t) = \sigma^2$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = G_0\delta(\tau)$$



PEs Ergódicos y Sistemas LIT

$x(t)$, $x[n]$ → $T[x(t)] \equiv h(t)$ → $y(t)$, $y[n]$

$$\mu_y = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)$$

Media de Ensamble Respuesta

$$R_{yy}(\tau) = R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

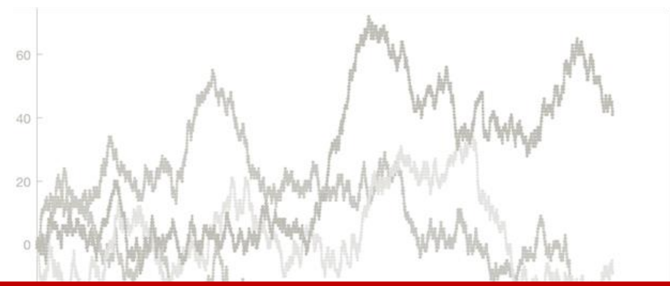
$$R_{hh}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau)$$

Autocorrelación Respuesta

$$R_{xy}(\tau) = h(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = h(-\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Correlación Cruzada Excitación - Respuesta



U4 Procesos Estocásticos en el Tiempo

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Procesos Estocásticos