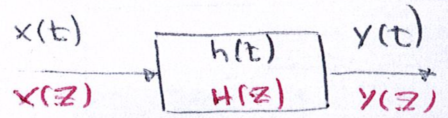
APLICANDO EL CAMPO COMPLEJO EN ASYS (SERIES DE FOURIER SF)

- → LAS FUNC. RACIONALES → llevarán a cabo la representación de señales y sistemas en términos de VARIABLE COMPLEJA
- → EL ANÁLISIS DE POLOS Y CEROS → permitirá EVALUAR el comportamiento del sist. (o sus RESPUESTAS) en el dom. temp. y ANALIZAR SU ESTABILIDAD
- → EL CÁLCULO DE INTEGRALES Y SERIES → será el PUENTE entre el dom. temp. y el dom transformado



$H(Z) = \dfrac{Z+2}{(Z-1)(Z^2+Z+1)}$ } RESP. IMPULSIONAL en el dom de var. compleja

si en la FÓRMULA DEL EULER se considera el ARGUMENTO de MODO que $\phi = \omega_0 t$ ⇒ OBTENEMOS UNA SEÑAL TEMPORAL EXPONENCIAL COMPLEJA CONTINUA ⇒ $e^{\pm j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm j\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 t) = \dfrac{(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})}{2} \\ \mathrm{sen}(\omega_0 t) = \dfrac{(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})}{2j} \end{cases}$$

→ TIENEN PERIODICIDAD temporal pues están CONSTITUIDAS por PARES ORDENADOS DE SINUSOIDES *

$$\Rightarrow \left[e^{j\omega_0(t+KT)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\overbrace{\omega_0 K T}^{2\pi}} = e^{j\omega_0 t} \overbrace{e^{jK2\pi}} = e^{j\omega_0 t}\right]$$

APLICANDO LA FÓRMULA DE EULER A LA SERIE TRIGON. DE FOURIER

consideramos la STF p/una F/PERIÓDICA $f(t)$ con $T = 2\pi/\omega_0$ ⇒ $\left[f(t) = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \mathrm{sen}(m\omega_0 t)]\right]$

⇒ ES POSIBLE OBTENER UNA FORMA ALTERNATIVA usando la FÓRMULA DE EULER *

⇒ SUSTITUIMOS sen y cos en la STF ⇒ $f(t) = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \dfrac{1}{2}(e^{jm\omega_0 t} + e^{-jm\omega_0 t}) + b_m \dfrac{1}{2j}(e^{jm\omega_0 t} - e^{-jm\omega_0 t})\right]$ ES EQUIVALENTE a la STF

⇒ $\dfrac{1}{j} = -j$ y juntamos a_m y jb_m ⇒ $f(t) = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2}(a_m - jb_m)e^{jm\omega_0 t} + \dfrac{1}{2}(a_m + jb_m)e^{-jm\omega_0 t}\right]$ ¿Y C_0?

COMP. DE CONTINUA (VALOR MEDIO)

⇒ DEFINIMOS: $\left[C_0 \equiv \dfrac{1}{2}a_0;\ C_m \equiv \dfrac{1}{2}(a_m - jb_m);\ C_{-m} \equiv \dfrac{1}{2}(a_m + jb_m)\right]$ → $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_m e^{jm\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-m} e^{-jm\omega_0 t}$

⇒ y así queda ESTABLECIDA la SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER (SEF): ⇒ $\left[f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_0 t}\right]$ TOMANDO DE $-\infty$ a ∞ la COMPACTAMOS

⇒ la SERIE queda EXPRESADA como una SUMATORIA de EXP. COMPLEJAS, en la cual los senos y cosenos quedan agrupados por ellas. C_m se obtiene a partir de a_m y b_m:

$$C_m = \frac{1}{2}(a_m - jb_m) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,dt - j\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{sen}(m\omega_0 t)\,dt\right] = \frac{1}{T_0}\left\{\int_0^{T_0} f(t)[\cos(m\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(m\omega_0 t)]\,dt\right\}$$

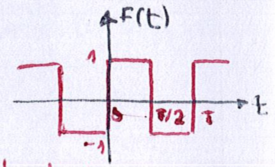
(I) ⇒ $\left[C_m = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\,dt\right]$ ahora $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \dots$ estos COEFICIENTES son Nº COMPL. ∴ pueden expresarse en su forma POLAR:

$$\left[C_m = |C_m| e^{j\phi_m} \Rightarrow |C_m| = \frac{1}{2}\sqrt{a_m^2 + b_m^2}\ ;\ \phi_m = \arctan\left(-\frac{b_m}{a_m}\right)\right]$$

además: $\left[C_{-m} = \overline{C_m} = |C_m| e^{-j\phi_m}\right]$ y vemos que C_0 $\underset{(m=0)}{}$ (sen 0 = 0) resulta un NÚMERO $\mathbb{R}$ (real): llamado COMPONENTE ESTABLE

(II) ⇒ $\left[C_0 = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{T_0} f(t)\,dt\right]$ INTEGRAR EN UN PERÍODO $\qquad \left[C_0 = \dfrac{1}{2}a_0\right]$ ∵ no hay b_0

ej: Encontrar la forma COMPLEJA de la SEF p/la función ya evaluada en STF:



1RA FORMA: como ya obtuvimos a_m y b_m, ⇒ $C_m = \dfrac{1}{2}[a_m - jb_m] = -j\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{m\pi}[1-(-1)^m]$; $C_0 = 0$

donde $a_m = 0$
$b_m = \dfrac{2}{m\pi}[1-(-1)^m]$
(YA CALCULADOS)

2DA FORMA: Calculamos C_0 y C_m con (I) y (II) y luego reempl. en $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_m e^{jm\omega_0 t}$

ESPECTRO DE FRECUENCIA DISCRETA

→ dada $f(t)$ PERIÓDICA ⇒ LE CORRESPONDE UNA Y SOLO UNA SEF
↳ ∴ LE " UN CONJUNTO ÚNICO de COEF. C_m

- Por ello los C_m especifican a $f(t)$ en el DOMINIO FRECUENCIA y $f(t)$ especifica a la función en el DOMINIO TEMPORAL

⇒ la GRÁFICO del MÓDULO de los C_m VERSUS la frec. ang. $n\omega_0$ ⇒ ES el ESPECTRO DE AMPLITUD de $f(t)$
⇒ la " del ÁNG. DE FASE de los C_m " " " $n\omega_0$ ⇒ ES el " " DIAGR. DE FASE " "

} como $m \ni \mathbb{Z}$ (ENTEROS) ⇒ $\omega = n\omega_0 = n2\pi f_0$ es una VARIABLE DISCRETA ∴ estos ESPECTROS son GRÁFICOS DISCRETOS

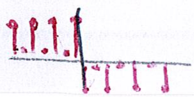
⇒ los C_m proporcionan INFORMACIÓN sobre $f(t)$ en virtud del MÓDULO y FASE de sus COMP. FRECUENCIALES (PREGUNTAR)

⇒ el EJE HORIZONTAL de los ESPECTROS es un EJE DE FREC. donde m = Nº de ARMÓNICO = múltiplo de ω_0 = múltiplo de f_0)

al trabajar solo con coef C_n (y no con a_n, b_m) ⇒ HAY UN ÚNICO ESPECTRO DE MÓDULO que INDICA el APORTE ENERG. DE C/COMP.

⇒ EL ESPECTRO DE AMPLITUD de una $f(t)$ REAL, es una función PAR ∴ la GRAF. p/ $m \geq 0$ CONTIENE toda la INFORMACIÓN acerca de $f(t)$ y es el ESPECTRO UNILATERAL DE AMPLITUD

⇒ EL DIAGR. DE FASE " " " " " " " IMPAR ∴ " " " $m \geq 0$ " " " "
" " " " " ESPECTRO UNILATERAL DE FASE



en el ej. ANTERIOR: $C_m = -j\frac{1}{m\pi}[1-(-1)^m]$; $C_0 = 0$

↖ m NO PUEDE SER 0, PERO C_0 EXISTE Y SE CALCULA APARTE

m	-3	-2	-1	0	1	2
C_m	$j2/3\pi$	0	$j2\pi$	0	$-j2\pi$	0

VIENDO ESTO escribimos $f(t)$

$$\Rightarrow \left[f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_m e^{jm\omega_0 t} = \frac{2}{\pi} j\left(\cdots + \frac{1}{5}e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{3}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{5}e^{j5\omega_0 t}\right)\right]$$

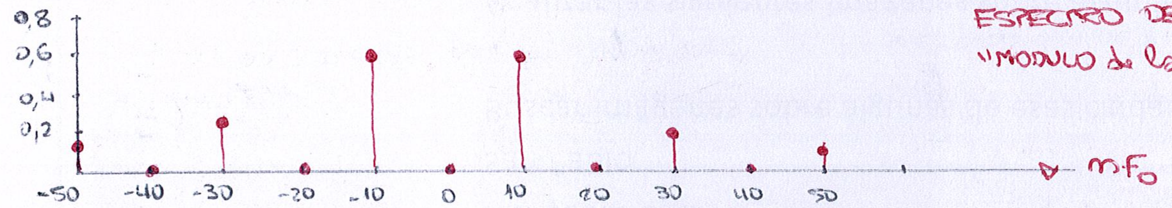
hallamos MODULO y FASE p/ cada $C_m \Rightarrow$

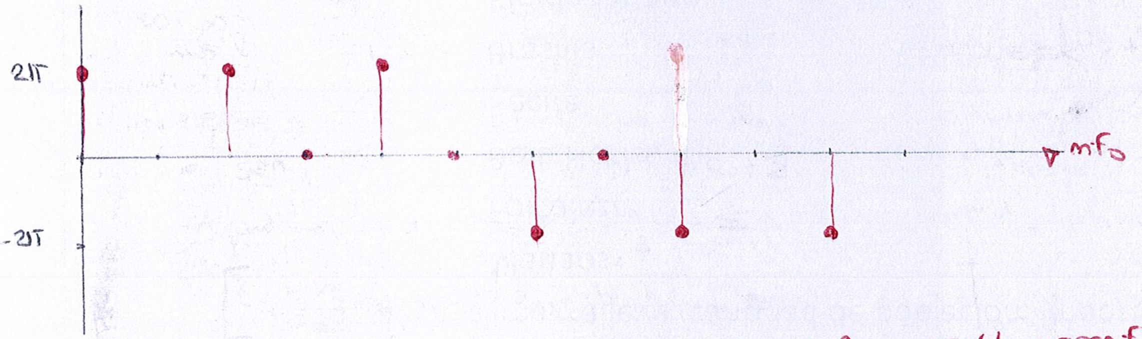
m	-3	-2	-1	0	1	2
C_m	$j2/3\pi$	0	$j2\pi$	0	$-j2\pi$	0
MOD	$2/3\pi$	0	2π	0	-2π	0
FASE	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	$-\pi/2$	0

LA FASE XQ $j = e^{j\pi/2}$ (j $\pi/2$ Re)

C_0 es el VALOR MEDIO DE $f(t)$ y $C_0 = \frac{a_0}{2}$

$\Rightarrow$ asumiendo $T = 0{,}1\,s$ ($F_0 = 10\,Hz$):





NO HAY FREC. NEGATIVAS, SINO QUE CADA sen o cos de la STF (de cierta frec) ha sido partido en DOS EXPONENCIALES DE FASE OPUESTA ∴ se usan m NEGATIVOS p/ DESCRIBIRLOS

Cada PAR COMPLEJO $[C_m, C_{-m}]$ (con su armónico corresp.) CONFORMA el PAR COSENO-SENO que se obtiene de APLICAR LA STF

además: $\left[|C_{-m}| = |C_m| \;;\; \angle C_{-m} = -\angle C_m \right]$

DISTRIBUCIÓN DE LA POTENCIA DE f(t) EN SUS COEFICIENTES

• Anteriormente para la STF, para SEÑALES PERIÓDICAS, con el TEOREMA DE PARSEVAL se había obtenido que: $\left[P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2) \right]$ (I)

• sabiendo ahora que: $|C_m| = \sqrt{\frac{a_m^2}{4} + \frac{b_m^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a_m^2 + b_m^2} \Rightarrow 4|C_m|^2 = (a_m^2 + b_m^2)$ con $|C_0|^2 = \frac{a_0^2}{4}$

∴ en (I): $\left[P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_m|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_m|^2 \right]$ c/ comp. de frec. ($m\omega_0$) de la SEF aporta una POTENCIA de $|C_m|^2$

según con cuantos componentes se trabaje en la PRÁCTICA (no pueden usarse ∞) se ESTARÁ REPRESENTANDO UN "PORCENTAJE" de la POT. TOTAL de $f(t)$

¿CÓMO SE TRABAJA CON LA SERIE EN SIST. LTI? ⟶ SU RESPUESTA a una F. ARMÓNICA (sen o cos) de frec ω_0 es OTRA ARMÓNICA DONDE SOLO SE VEN AFECTADOS LA AMPL. y FASE RESULTANTES

• Si se aplica una EXP. COMPLEJA (con sen y cos):

$$x(t) = A.e^{j(m\omega_0 t + \theta)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = KA.e^{(jm\omega_0 t + \theta + \phi)} = Ke^{j\phi}Ae^{jm\omega_0 t + \theta}$$

p/ CADA COMP. de Frec. DE ENTRADA, EL SIST. puede RESPONDER DE MODO DISTINTO

$\left[\text{si } x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega_0 t}Ke^{j\phi} = e^{j\omega_0 t}H(\omega_0) \right]$

- Si ahora excitamos al SIST. LTI con una SUMATORIA DE SEÑALES $X(n\omega_0)$ (comp. de la SEF) se obtendrá a la SALIDA UNA SUMATORIA SIMILAR $Y(n\omega_0)$, donde cada ARMÓNICA será ESCALADA (variación de su MÓDULO) y DESPLAZADA TEMPORALMENTE (variación de su FASE) ~~de la~~
- Dichos efectos dependen de las CARACTERÍSTICAS INTERNAS DEL SISTEMA, descriptas por la RESPUESTA IMPULSIONAL $h(t)$ ⇒ por ello se define una nueva relación $H(n\omega_0)$ llamada FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$\left[H(n\omega_0) \equiv \frac{Y(n\omega_0)}{X(n\omega_0)} = \frac{Y_n e^{jn\omega_0 t}}{X_n e^{jn\omega_0 t}} = \frac{Y_n}{X_n} \right]$$

describe la manera en que será afectada c/componente $X(n\omega_0)$ en MÓDULO y FASE p/convertirse en $Y(n\omega_0)$

SI $f(t)$ es PAR, sólo habrá cos y los C_n serán Reales
SI $f(t)$ es IMPAR, sólo habrá sen y los C_n serán Imag.