TRANSFORMADA DE FOURIER EN t DISCRETO : PARTE 2 (DFT)

→ El espectro que hallábamos en la 1º PARTE ($X(\Omega)$) es CONTINUO Y PERIÓDICO (por ser continua)

→ ¿Habrá una VERSIÓN DE LA TFTD p/ OBTENER un espectro DISCRETO y usarlo en un SIST. DIG.?

OBTENCIÓN DE espectro discreto a PARTIR DE UNA SEÑAL DISCRETA

→ En TFTD → se MUESTREABA $x(t)$ (APERIÓDICA) → OBT. $x[n]$
↳ APLICANDO TRANSF. DE FOURIER a $x[n]$ obteníamos $X(\Omega)$ ⇒ $\left[X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}\right]$

• Es útil p/ procesar DATOS DISCR. PERO SU espectro ES CONTINUO Y NO PUEDE SER USADA COMO HERRAMIENTA EN SIST. DE PROCESAMIENTO pues Ω también DEBERÍA SER DISCRETA p/ REPRESENTAR DIGITALMENTE a $X(\Omega)$ ⇒ $\left[\underbrace{x[n]}_{\text{SECUENCIA DISCR.}} \to \text{PROCESAM. DIG.} \to \underbrace{X(k\Omega_0)}_{\text{ESP. DISCR.}}\right]$

→ Se aprovecha entonces que EL ESPECTRO DE LA SEF de una $x(t)$ PERIÓDICA YA ES DISCRETO (CONJ. DE COEFIC. C_K) y se procede a DISCRETIZAR la variable t ∴ $t = nT_s$

$$\therefore C_K = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow \underbrace{\text{si } t = nT_s}_{} \Rightarrow C_K = \frac{1}{N_0 T_s}\sum_{n=-N_0T_s/2}^{N_0T_s/2} x[nT_s]\, e^{-jk\omega_0 nT_s}\, T_s$$

$dt \to T_s$; $\int \to \sum$; $T_0 \to N_0T_s$

⇒ aplicamos el CONC. de Frec. NORMALIZADA a $\omega_0 T_s$ ⇒ $\left[\omega_0 T_s = 2\pi \frac{f_0}{f_s} = \frac{2\pi}{N_0} = \underbrace{\Omega_0}_{\text{FREC. NORM.}}\right]$; $T_0 = N_0 T_s$

⇒ efectuando el reempl. en C_K y NORMALIZANDO en $T_s = 1$:

$$C_K = \frac{1}{T_s N_0} T_s \sum_{n=-N_0T_s/2}^{N_0T_s/2} x[nT_s] e^{-jk\Omega_0 n} \xrightarrow{\text{NORM. } T_s} \left[C_K = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}\right]$$

SUMATORIA en un PERÍODO de $x[n]$

se obtiene una VERS. DISCRETA del esp. (CONJ. DE COEF. C_K) partiendo de una SEÑAL DISCR. PERIOD.

→ FINALMENTE → $\left[C_K = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}\right]$ TRANSF. DISCR. DE FOURIER (DFT)

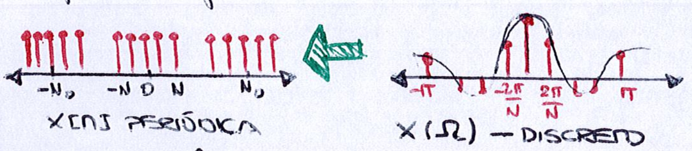
↳ $\left[x[n] = \sum_{\langle N_0\rangle} C_K \cdot e^{jk\Omega_0 n}\right]$ ANTITRANSF. DISCR. DE FOURIER (IDFT)

↳ (OBTENER COEFIC. C_K (esp. DISCR. NORMALIZADO) A PARTIR de $x[n]$ PERIÓDICA (t. DISCR. NORMALIZADO)

⇒ se ve que el esp. de una señal period. DISCR ⇒ ES DISCR. y PERIÓDICO

• Esto se ve de 2 FORMAS → DISCR. una EXP. CONTINUA $e^{j\omega}$ genera una EXP. DISCR. $e^{j\Omega}$ que presenta PERIODIC. en frec. ⇒ POR ello SOLO da "N_0" COEF. C_K DIFERENTES

↳ se aprecia a partir de la DISCRETIZACIÓN DEL esp. PERIÓDICO $X(\Omega)$, cada Ω_0 :



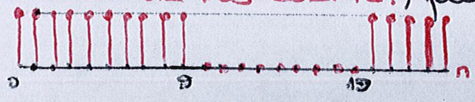
} La DISCR. en el dom de frec en $k\Omega_0$ genera la PERIODIZACIÓN DE LA SEÑAL en el tiempo en N_0 (DUALIDAD DE LA TRANSF.)

{ Recordar que la TFTD sigue siendo la TFTC ⇒ La DISCR. DEL espectro, da como resultado los COEF. de la SEF ($C_n T_0$). Por ello la SEÑAL temp. DISCR se PERIODIZA en N_0

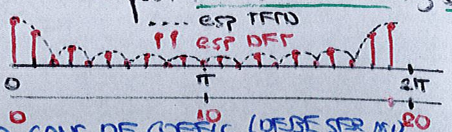
⇒ $\left[X(k\Omega_0) = N_0 C_K\right]$

⇒ Como en SEF, TF y TFTD ⇒ SIEMPRE SE CUMPLE que si $x[n]$ es una Func. Real, su espectro de AMPL. es PAR y su DIAGR. DE FASE IMPAR ⇒ $\left[|C_K| = |C_{-K}| \text{ y } C_K = \overline{C_{-K}}\right]$ (I) (II)

→ PARTICULARMENTE, en el caso de DFT, la PARIDAD del espectro puede usarse p/ efectuar el CÁLCULO de (APROX) LA MITAD DE LOS COEFIC., pues el RESTO puede DEDUCIRSE por PERIODICIDAD y SIMETRÍA : *



⇒ 20(N_0) coefic C_K y una PERIODICIDAD en 2π (DISCR. DE $X(\Omega)$) ⇒



* sea la SIG. SEÑAL PERIÓDICA DISCR. $x[n]$: LA CANT. DE MUESTRAS es LA CANT. DE COEFIC (DEBE SER IGUAL)

$x[n] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_7\}$ con $N_0 = 8$ → $\Omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ ⇒ como $N_0 = 8$, c/ PERÍODO del espectro tendrá la MISMA CANT. DE COEFIC. C_K (C_0 a C_7)

$$\therefore \left[C_K = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n} = \frac{1}{8}\left(x[1]e^{-jk\frac{\pi}{4}} + \dots + x[7]e^{-jk7\frac{\pi}{4}}\right)\right]$$

∴ reempl. K de 0 a 4 obtenemos de C_0 a C_4 ⇐ si $x[n]$ es Real, su esp. DE MODULO ES PAR y el de fase IMPAR Y A SU VEZ ES PERIÓDICO en $N_0 = 8$

∴ obtenemos los RESTANTES A PARTIR de ↗ USANDO (II)

esp. periódico en $N_0 = 8$

$C_{-1} = \overline{C_1}$ ⇒ $C_{-1} = C_{-1+8} = C_7$
$C_{-2} = \overline{C_2}$ ⇒ $C_{-2} = C_{-2+8} = C_6$
$C_{-3} = \overline{C_3}$

⇒ SI N_0 PAR → CALCULAR $N_0+2/2$ COEFICIENTES
SI N_0 IMP → CALCULAR $N_0+1/2$ COEFICIENTES

∴ DE 8 COEF. SOLO CALCULAMOS 5 en el ejemplo y el resto LOS ESTIMAMOS

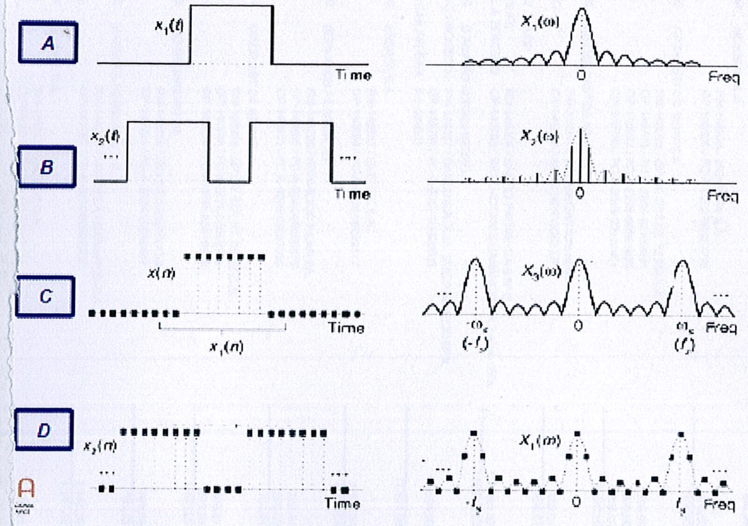
IDENTIDAD DE PARSEVAL → la pot. se distribuye en el espectro

→ Esto es por haberse derivado la DFT de la SEF

→ como ambos dominios son periódicos se debe considerar un solo periodo en ambos casos
tiempo y frec

$$\left[\frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle}|x[n]|^2 = \sum_{\langle N_0\rangle}|c_k|^2\right] \Rightarrow \left[\sum_{\langle N_0\rangle}|x[n]|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle}|X(k)|^2\right]$$

¿CÓMO SE RELACIONAN FINALMENTE TODAS LAS HERR. DE FOURIER? $c_k = \frac{X(k\Omega_0)}{N_0}$



A. La TFTC aplicada a un pulso rectangular x(t) (aperiódico) genera una sinc continua (aperiódica) en la frecuencia

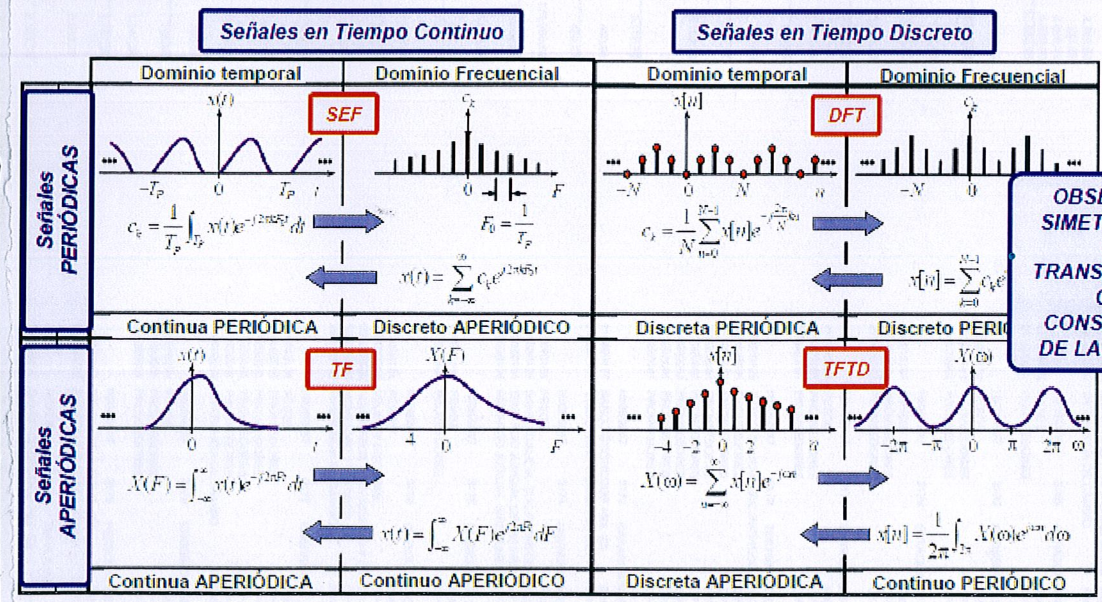
B. Si se DISCRETIZA el espectro de la TFTC de (A), se PERIODIZA la señal en el tiempo (SEF)

C. Si se DISCRETIZA el pulso aperiódico x(t) de (A) (obteniéndose x[n]) se PERIODIZA el espectro la sinc continua en la frecuencia (TFTD)

D. Si se DISCRETIZA el espectro de la TFTD (C) se PERIODIZA la señal discreta x[n] (DFT)

ES EL MISMO ESPECTRO!

18



OBSERVAR LA SIMETRÍA ENTRE LAS TRANSFORMADAS COMO CONSECUENCIA DE LA DUALIDAD

ALGORITMO DFT OPTIMIZADO → ALGORITMO FFT (FAST FOURIER TRANSFORM)

→ la DFT requiere N_0^2 operaciones de multipl. compl. ⇒ poco eficiente

(son 2 ciclos FOR anidados) $c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$ ⇒ son N_0-1 sumas de N_0 productos (1 periodo de $x[n]$) p/ cada valor muestra del espectro c_k (N_0 muestras): N_0^2 operac.

→ la FFT requiere $N_0 \log_2 N_0$ operac. de multipl. compl. ⇒ muy efic. para N_0 grandes

(mirar ppt p/ desarrollo de FFT)

→ se puede aplicar si $N_0 = 2^m$ pues lo que hace es separar el N_0 en la mayor cant. posible de grupos de cant. de muestras pares y a cada grupo aplicarle la DFT por separado → así se reduce considerablem. el N° de operaciones

por ser $16 = 2^4$

ej: $N_0 = 16$ → por DFT serían $16^2 = 256$ operaciones)

↳ por FFT se separan las 16 muestras en 4 grupos de 4 y se le hace ... $4^2+4^2+4^2+4^2 = 64$ operaciones !*

* $16 \cdot \log_2 16 = 64$

mientras mayor sea N_0 + ...