FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

1ª PARTE: APLICACIÓN DE FUNCIONES

F (función) definida sobre un dominio de variable compleja S (compuesto por puntos $Z = x + jy$) es una regla que asigna a cada Z en S un Nº complejo W llamado valor de F en Z

$\left[W = F(Z) \right]$ → Z : variable compleja; → S : dominio de definición de F

El conj. de valores de F se llama rango de F

W puede escribirse así, por ser complejo → $W = u + jv$, con u y v reales

$\therefore \left[W = F(Z) = u(x,y) + jv(x,y) \right]$

F(Z) es equivalente a un par de funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$, c/u dependiente de dos variables reales x e y

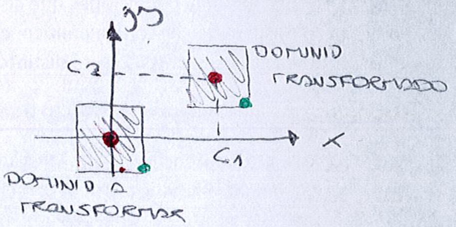
ej: $f(Z) = Z^2 = (x+jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy) = u(x,y) + jv(x,y)$

$f(Z) = 2jZ + 6\bar{Z} = 2j(x+jy) + 6(x-jy) = 2jx - 2y + 6x - 6jy = (6x - 2y) + j(2x - 6y) = u(x,y) + jv(x,y)$

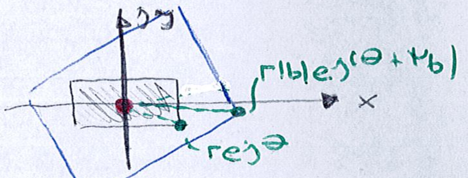
EFECTOS AL APLICAR LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

En muchas situaciones prácticas es posible simplificar un problema con una transformación en el plano complejo, llamada mapeo

① **TRASLACIÓN** ⇒ $\left[\begin{array}{l} W = F(Z) = Z + C \quad \text{con } C = C_1 + jC_2 \\ \Downarrow \\ Z = x + jy \rightarrow W = (x + C_1) + j(y + C_2) \end{array} \right]$



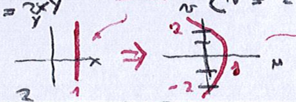
② **ROTACIÓN** ⇒ $\left[\begin{array}{l} W = F(Z) = bZ \quad \text{con } b = |b| . e^{j\psi_b} \\ \Downarrow \\ Z = r.e^{j\theta} \rightarrow W = r|b| . e^{j(\theta + \psi_b)} \end{array} \right]$



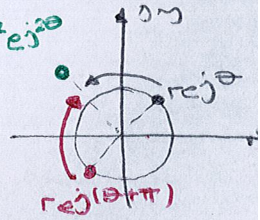
Cada punto del dominio se ve afectado en su módulo (si |b| > 1 ⇒ aumenta, sino disminuye) y modifica su fase en ϕ_b. No se modifica la forma ⇒ expande o contrae y rota

③ **FUNCIÓN CUADRÁTICA** ⇒ $\left[\begin{array}{l} W = f(Z) = Z^2 \\ \Downarrow \\ W = (re^{j\theta})^2 = r^2 e^{2\theta} = r^2 [\cos(2\theta) + j\,\text{sen}(2\theta)] \\ W = (x+jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy \end{array} \right]$

ej: $f(Z) = Z^2 = (x+jy)^2$; $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$ ⇒ si $x = 1$ ⇒ $\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$ ⇒ $y = \frac{v}{2}$; $u = 1 - \frac{v^2}{4}$



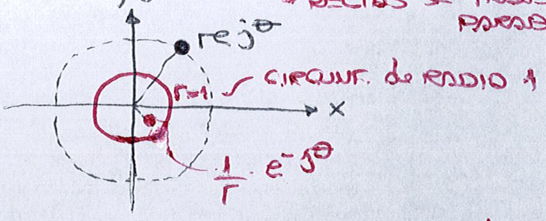
Dos puntos del dominio (Z_0 y $-Z$) generan la misma imagen. Su fase se duplica y su módulo se expande o contrae según sea mayor o menor la unidad



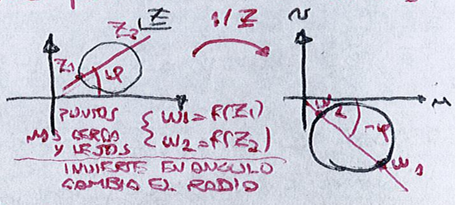
→ Rectas se transf. en parábolas

④ **FUNCIÓN INVERSIÓN** ⇒ $\left[\begin{array}{l} W = F(Z) = \frac{1}{Z} = Z^{-1} \\ \Downarrow \\ W = (re^{j\theta})^{-1} = \frac{1}{r} . e^{-j\theta} \end{array} \right]$

La circunf. de radio r se transforma en otra de radio $\frac{1}{r}$.

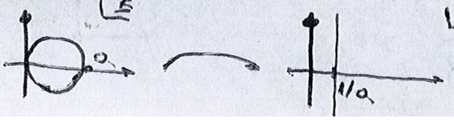


Tomando una circunf. de radio 1, se ve que los puntos Z exteriores pasan a estar dentro al ser transformados y viceversa



TRANSF. rectas — circunf. en O o viceversa pero no siempre → circunf. que no pasan por el origen ⇒

↳ si pasa por el origen →



el punto más lejano "a" pasa a ser el más cercano, pero el origen ⇒ $\frac{1}{0} = \infty$ ∴ da una recta

FUNCIÓN BILINEAL $\Rightarrow \left[w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{C}) \right]$

OPERANDO MATEMÁTICAMENTE se obtiene una COMBINACIÓN DE OPERACIONES LINEALES y UNA INVERSIÓN

$$w = \frac{a}{c}\,\frac{z+b/a}{z+d/c} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right) = \alpha\left(1+\frac{\beta}{z+\gamma}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1)\ w_1 = z+\gamma & \text{TRASLACIÓN} \\ 2)\ w_2 = w_1^{-1} & \text{INV.} \\ 3)\ w_3 = 1+\beta w_2 & \text{~~ROTACIÓN~~ TRASLACIÓN} \\ 4)\ w_4 = \alpha w_3 & \text{ROTACIÓN} \end{cases}$$

hace de w_1 a w_4 en ese ORDEN

⑥ FUNCIÓN EXPONENCIAL

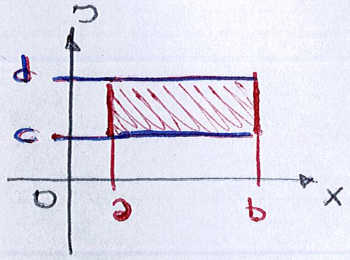
$$\Rightarrow w = f(z) = e^z$$

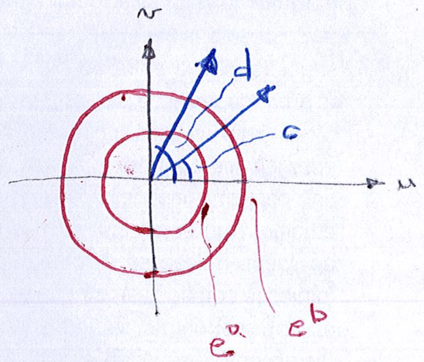
$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x(\cos y + j \operatorname{sen} y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) + j\,v(x,y) \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

$$w = R e^{j\theta} \begin{cases} R = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

Al aplicar la f/ exponencial a la RECTA $x = k$, se obtiene una CIRCUNF. de radio e^k. En el caso de la RECTA $y = k$ se obtiene una RECTA que pasa por el ORIGEN con ángulo k





⑦ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

aplicando EULER, definimos sen y cos $\Rightarrow e^{\pm jz} = \cos(z) \pm j\operatorname{sen}(z) \begin{cases} \cos(z) = \dfrac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} \\ \operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} \end{cases}$

- en VARIABLE COMPLEJA, las f/ trig. y exp están MUY RELACIONADAS, eso NO OCURRE en VARIABLE REAL
- COSAS QUE NO CAMBIAN $\Rightarrow$ $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$, IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
- Las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ que conforman las f/ trigonom. se obtienen así:

$$\cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = \frac{e^{j(x+jy)}+e^{-j(x+jy)}}{2} = \frac{e^{jx}\cdot e^{-y}+e^{-jx}\cdot e^{y}}{2}$$

APLICANDO euler de nuevo $\Rightarrow \cos z = \dfrac{(\cos x + j\operatorname{sen} x)\cdot e^{-y} + (\cos x - j\operatorname{sen} x)e^{y}}{2}$

$$\cos z = \frac{\cos x\,(e^{-y}+e^{y}) - j\operatorname{sen} x\,(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$\Rightarrow \cos z = \cos(x)\underbrace{\cosh(y)}_{\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}} - j\operatorname{sen}(x)\underbrace{\operatorname{senh}(y)}_{\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \cos(x)\cdot\cosh(y) \\ v(x,y) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) \end{cases}$$

⑧ FUNCIÓN LOGARITMO

$$\rightarrow \left[\ln(z) = \ln\left[\rho \cdot e^{j(\phi+2k\pi)}\right] = \ln\rho + j(\phi+2k\pi)\right]$$

se observa que: $e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\arg z} = e^{\ln|z|}\cdot e^{i\arg z} = |z|\cdot e^{i\arg z} = z$

como el log. genera ∞ VALORES por c/z, puede generarse una FUNCIÓN UNIVOCA TOMANDO el VALOR PRINCIPAL DE z ($k=0$)

TRANSFORMA SECTORES CIRCULARES en ▭