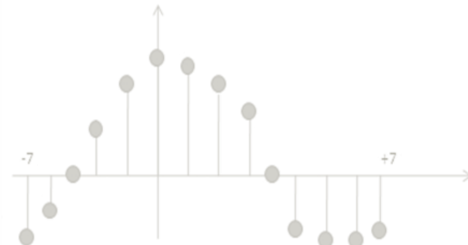
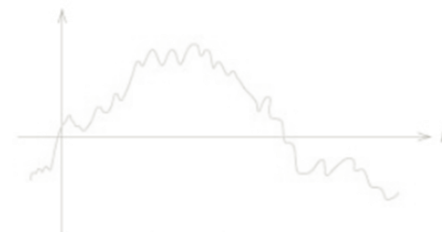
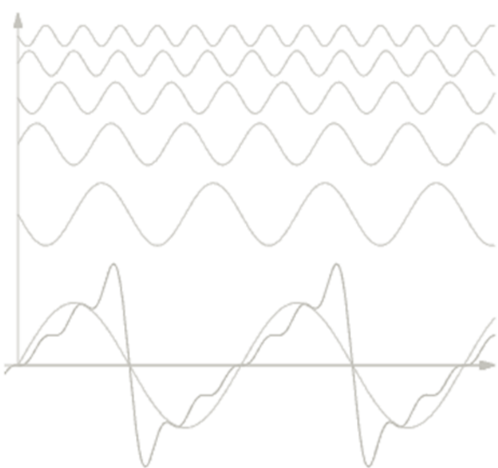
Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

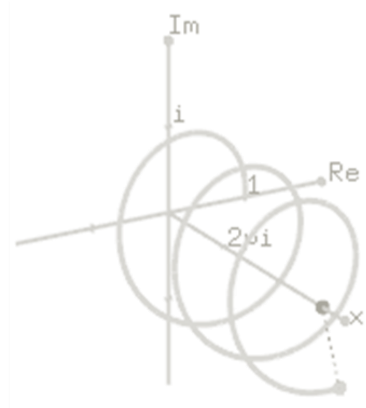




U1: Señales Continuas y Discretas

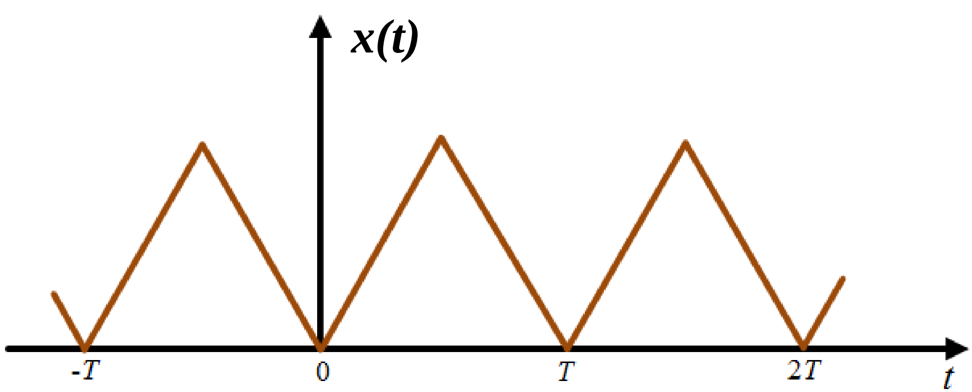
●Señales Continuas y Discretas 2P●

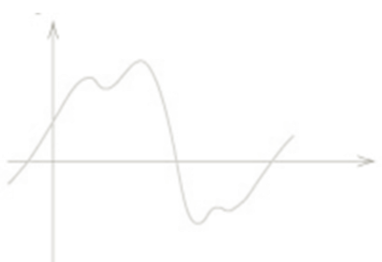


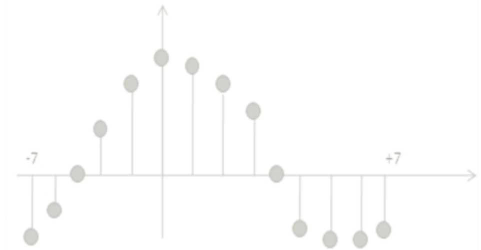


Repaso…

Anteriormente se abordaron los aspectos ligados a las señales y sus distintas manifestaciones, en virtud de clasificarlas en ***conti-nuas*** y ***discretas***, ***reales*** o ***complejas*** y ***determinísticas*** o ***esto-cásticas***, entre otras. Seguido a ello se puntualizó en ***un grupo particular***, el de las ***señales periódicas***, donde se advirtió la presencia de un patrón repetitivo a lo largo del tiempo ***¿Cómo se agruparán entonces, aquellas señales donde el patrón resulta único?***

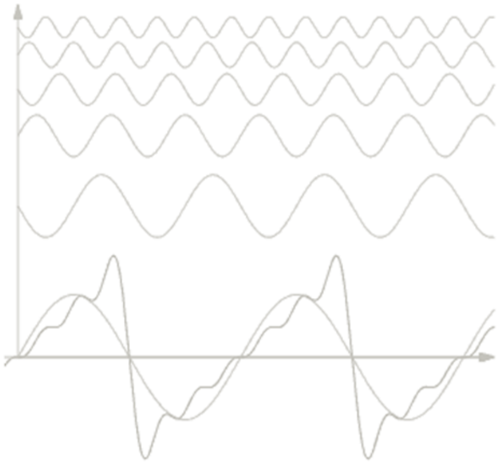


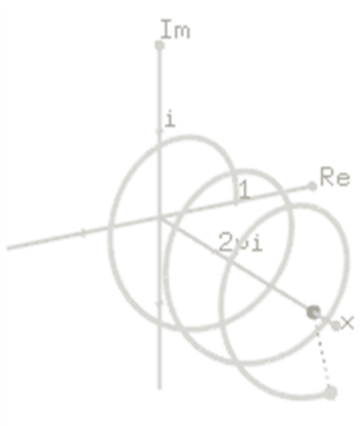




U1: Señales Continuas y Discretas

●Señales Aperiódicas●



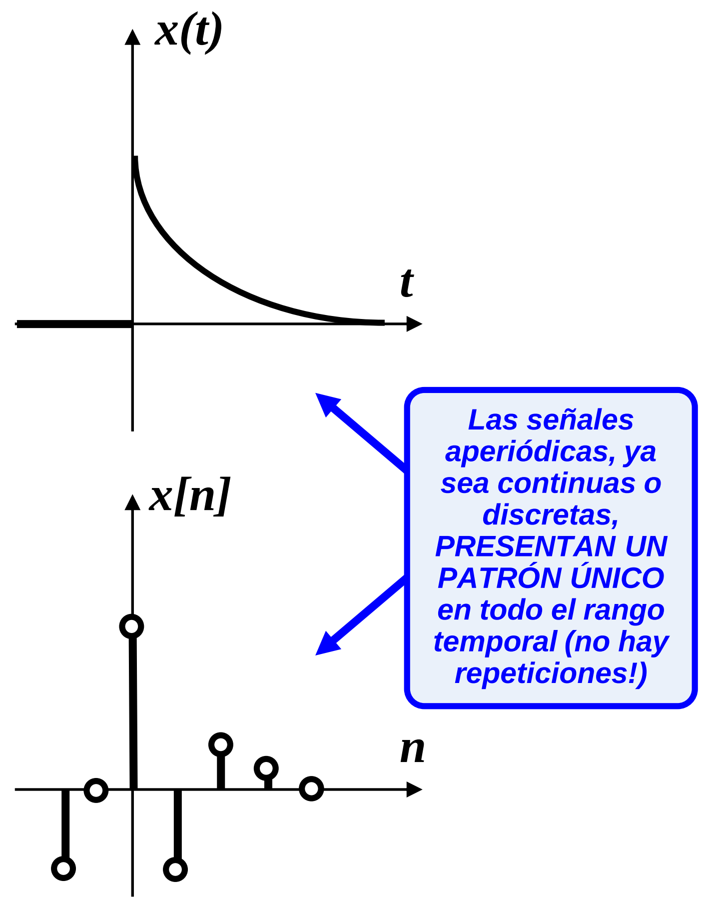


Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

Señales Aperiódicas

¿Qué particularidad presenta una <u>señal aperiódica</u>?

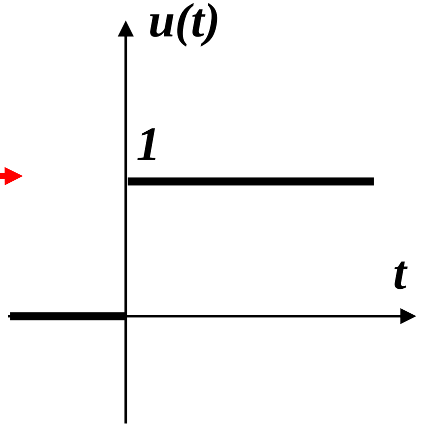
Una señal aperiódica es aquella que ***no presenta patrones repetitivos*** en el tiempo. Es por ello que ***la información*** se encuentra dispersa en ***todo el rango temporal***. Podría pensarse, asimismo, como una señal periódica cuyo ***período que tiende a infinito*** $(T_0 \to \infty)$



Señales Aperiódicas: El Escalón Unitario

a) Escalón Unitario Continuo

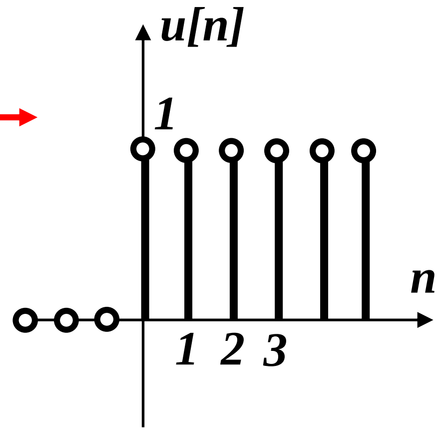
$$u(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t > 0 \\ 0 \ si \ t < 0 \end{cases}$$



El escalón unitario continuo $u(t)$ vale "1" en tiempos positivos y "0" en tiempos negativos. En $t=0$ hay una DISCONTINUIDAD (salto finito)

b) Escalón Unitario Discreto

$$u[n] = \begin{cases} 1 \ si \ n \geq 0 \\ 0 \ si \ n < 0 \end{cases}$$



A diferencia $u(t)$, el escalón unitario discreto $u[n]$ vale "1" en $n>=0$ y 0 para $n<0$ (está definido en todo n)

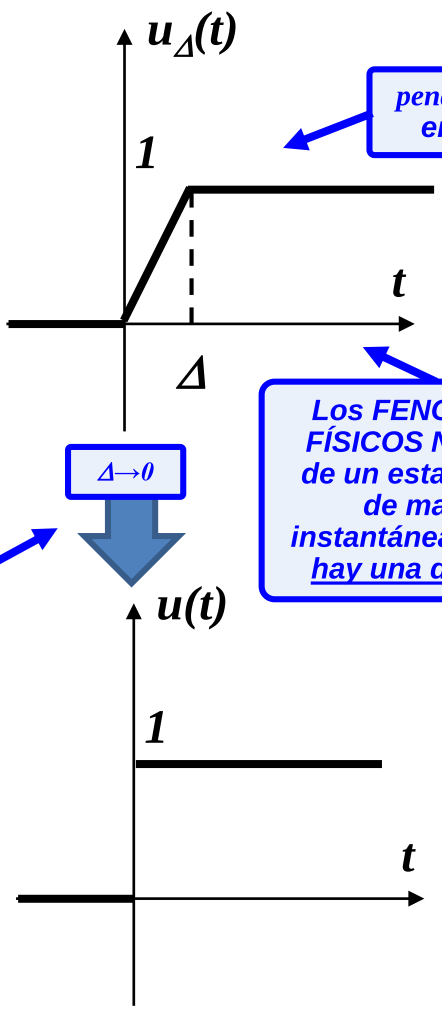
El ESCALÓN UNITARIO inicia en $t=0$ ($n=0$) con VALOR <u>CONSTANTE</u> "1". Asimismo, si $x(t)=Au(t)$ y $x[n]=Au[n]$ se manifiesta el VALOR CONSTANTE "A"

Señales Aperiódicas

Obsérvese que el ***escalón unitario continuo*** se considera una ***función ideal***, debido a que transiciona de valor ***"0"*** a ***"1"*** de manera ***instantánea*** en $t=0$. Dicho comportamiento constituye ***el caso límite*** del ***escalón aproximado*** $u_\Delta(t)$, donde la transición entre los estados ***0*** y ***1*** presenta una ***demora*** Δ:

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ \dfrac{t}{\Delta} \ si \ 0 < t < \Delta \\ 1 \ si \ t > \Delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)}$$

$u_\Delta(t)$ se comporta como $u(t)$ cuando el valor de la demora Δ tiende a 0.



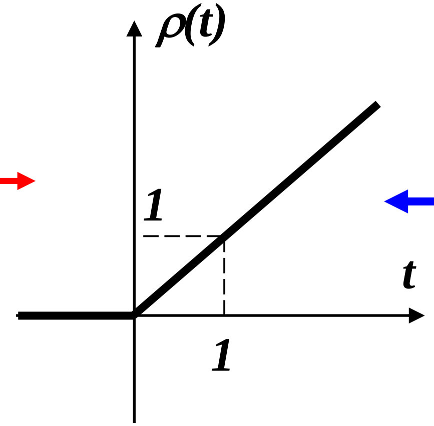
pendiente $1/\Delta$ en $0<t<\Delta$

Los FENÓMENOS FÍSICOS NO pasan de un estado a otro de manera instantánea, siempre hay una demora Δ

Señales Aperiódicas: La Rampa Unitaria

a) Rampa Unitaria Continua

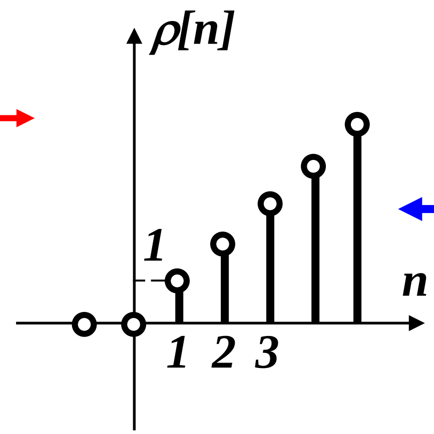
$$\rho(t) = tu(t) = \begin{cases} t \ si \ t \geq 0 \\ 0 \ si \ t < 0 \end{cases}$$



Al efectuar el producto punto a punto entre la función $x(t)=t$ y el escalón unitario $u(t)$, se VUELVE NULO el intervalo correspondiente a $t<0$

b) Rampa Unitaria Discreta

$$\rho[n] = nu[n] = \begin{cases} n \ si \ n \geq 0 \\ 0 \ si \ n < 0 \end{cases}$$



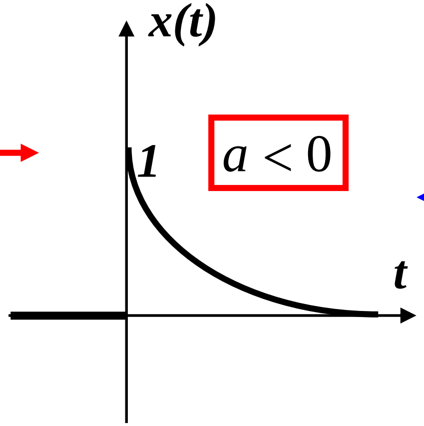
Lo mismo sucede en la rampa discreta al efectuar el producto punto a punto entre $x[n]=n$ y el escalón unitario $u[n]$

La RAMPA UNITARIA inicia en $t=0$ ($n=0$) con PENDIENTE "1". Asimismo, si $x(t)=A\rho(t)$ y $x[n]=A\rho[n]$ se manifiesta una PENDIENTE "A"

Señales Aperiódicas: La función Exponencial

a) Exponencial Continua

$$\boxed{x(t) = e^{at}u(t)}$$



La señal exponencial continua decrece asintóticamente respecto del eje temporal (tiende a anularse), para valores negativos del argumento "a"

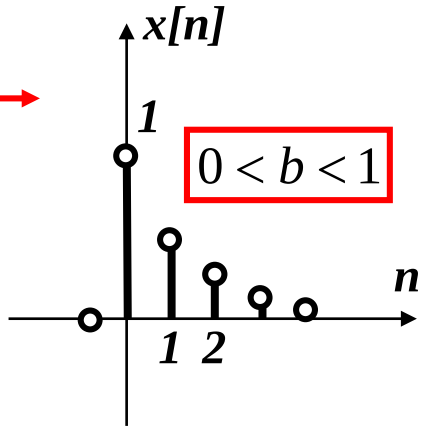
Ej. $x(t)=e^{-2t}u(t)$

Para valores positivos de "a", aumenta indefinidamente (exponencial creciente)

Ej. $x(t)=e^{5t}u(t)$

b) Exponencial Discreta

$$\boxed{x[n] = b^{n}u[n]}$$



En las discretas se observa un comportamiento similar a las continuas, pero el decrecimiento depende directamente del valor "b":

Ej. $x[n]=(1/2)^n u[n]$

Si $b>1$ la exponencial resulta creciente y si b es negativo, se manifiesta alternada

La EXPONENCIAL inicia en $t=0$ ($n=0$) con valor "1" y disminuye o incrementa su valor según sea su argumento. En el caso $x(t)=Ae^{at}u(t)$ o $x[n]=A(b)^n u[n]$ inicia con el valor "A"

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Obtener una función ***exponencial discreta*** a partir de una ***función exponencial continua***

Se discretiza una señal continua $x(t)=e^{at}u(t)$, considerando intervalos regulares cada T_s segundos:

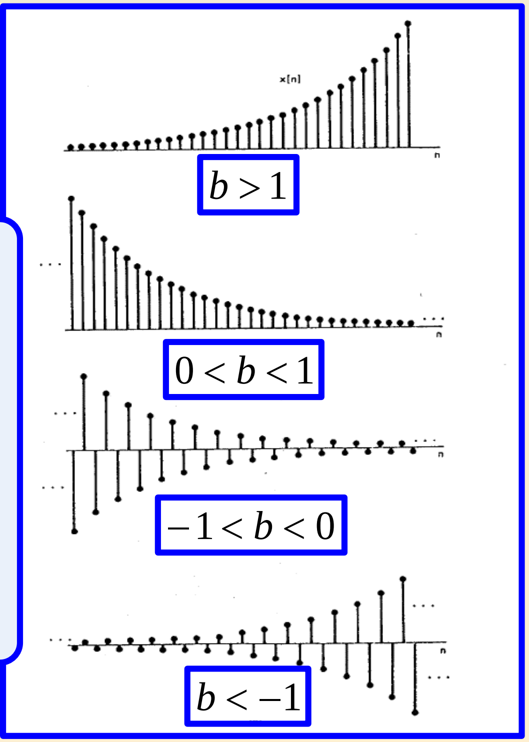
$$t = nT_s \rightarrow x(nT_s) = e^{anT_s} u[nT_s]$$

Normalizando por T_s $(nT_s=n)$:

$$x[n] = \left(e^{a}\right)^{n} u[n] = (b)^{n} u[n]$$

$$\boxed{x[n] = b^{n} u[n]}$$

Conforme puede advertirse, la exponencial discreta resulta CRECIENTE para valores de $b>1$ (Ej. $x[n]=2^n u[n]$), DECRECIENTE para valores $0<b<1$ (Ej. $x[n]=(0{,}5)^n u[n]$) y ALTERNADA si $b<0$ (Ej. $x[n]=(-4)^n u[n]$ o $x[n]=(-0{,}2)^n u[n]$)

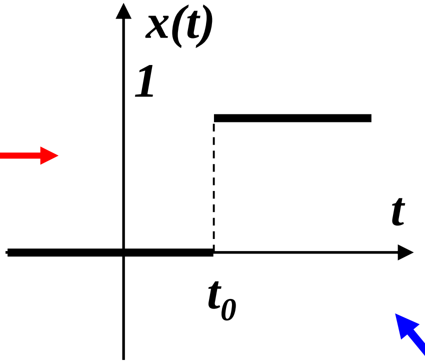


Operaciones con señales: Desplazamiento Temporal

La acción de ***restar*** un valor temporal constante t_0 (ya sea positivo o negativo) al argumento ***"t"*** da como resultado un ***desplazamiento temporal*** de la señal ***x(t):***

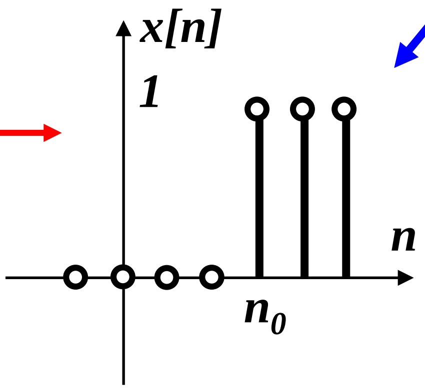
$$u(t-t_0) \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; t-t_0 > 0 \\ 0 \; si \; t-t_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; t > t_0 \\ 0 \; si \; t < t_0 \end{cases}$$

DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO CONTINUO



$$u[n-n_0] \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; n-n_0 \geq 0 \\ 0 \; si \; n-n_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; n \geq n_0 \\ 0 \; si \; n < n_0 \end{cases}$$

DESPLAZAMIENTO EN TIEMPO DISCRETO



Si $t_0>0$, la señal se desplaza HACIA LA DERECHA (se atrasa)

Ej. $x(t)=u(t-2)$

Si $t_0<0$, la señal se desplaza HACIA LA IZQUIERDA (se adelanta)

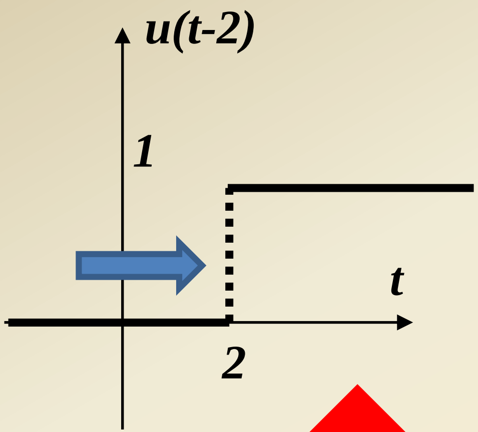
Ej. $x(t)=u(t+3)$

Lo mismo sucede para el CASO DISCRETO

Ej. $x[n]=u[n-2]$

Ejemplo Práctico

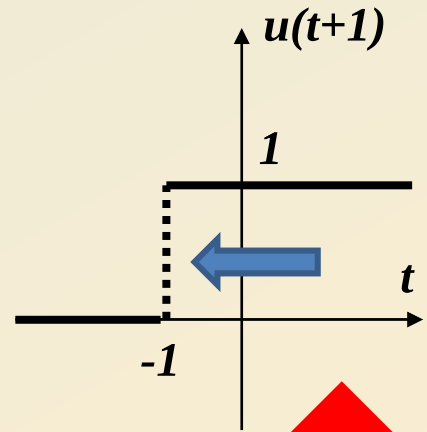
Ejemplo: Efectuar el ***desplazamiento temporal*** de la señal $x(t)=u(t)$ de modo que se ***atrase*** $2s$ y se ***adelante*** $1s$



$x(t)=u(t-2)$

La señal se "atrasa" en el tiempo $2s$ (comienza después)

$$u(t-2) \Rightarrow \begin{cases} 1\ si\ t-2>0 \\ 0\ si\ t-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\ si\ t>2 \\ 0\ si\ t<2 \end{cases}$$



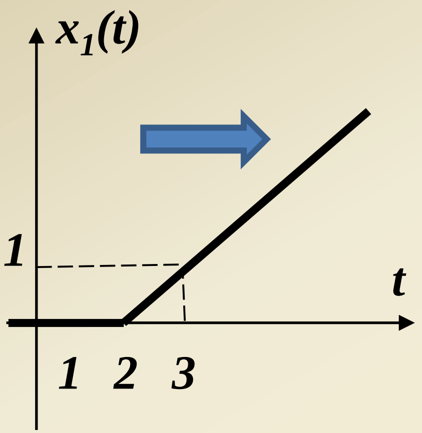
$x(t)=u(t+1)$

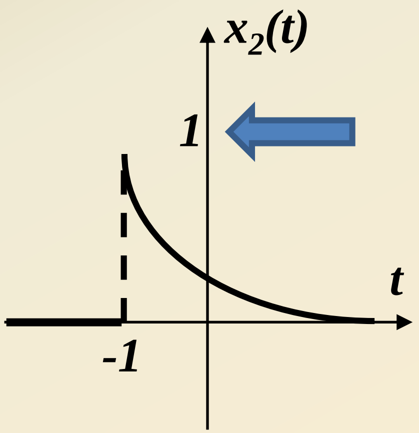
La señal se "adelanta" en el tiempo $1s$ (comienza antes)

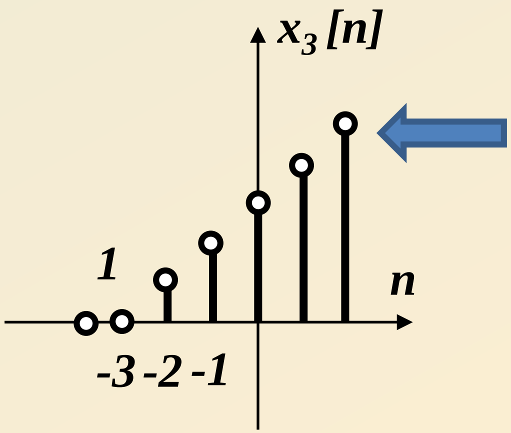
$$u(t+1) \Rightarrow \begin{cases} 1\ si\ t+1>0 \\ 0\ si\ t+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\ si\ t>-1 \\ 0\ si\ t<-1 \end{cases}$$

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Efectuar el ***desplazamiento temporal*** de la señal $x_1(t)=\rho(t)$ de modo que se ***atrase*** $2s$, $x_2(t)=e^{-2t}u(t)$ de modo que se ***adelante*** $1s$ y $x_3[n]=\rho[n]$ de modo que se ***adelante*** 3 muestras.







$$\boxed{\rho(t-2)=(t-2)u(t-2)}$$

$$\boxed{e^{-2(t+1)}u(t+1)}$$

$$\boxed{\rho[n+3]=(n+3)u[n+3]}$$

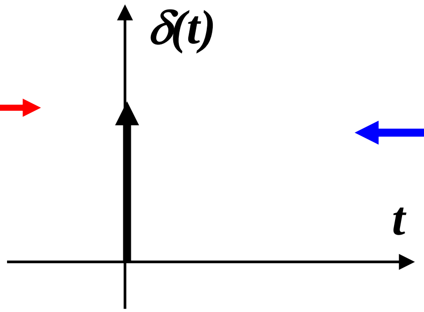
AYUDA : Si se utiliza $t=0$ (o $n=0$) como referencia, dicho instante de $x(t)$ SE TRASLADA al valor donde SE ANULA el argumento:

Ej. $x_1(t-2)=\rho(t-2)\rightarrow\rho(0)$ (inicio de la rampa) OCURRE PARA $t=2$ $(2-2=0)$

Señales Aperiódicas: El Impulso Unitario

a) Impulso unitario continuo (Delta de Dirac)

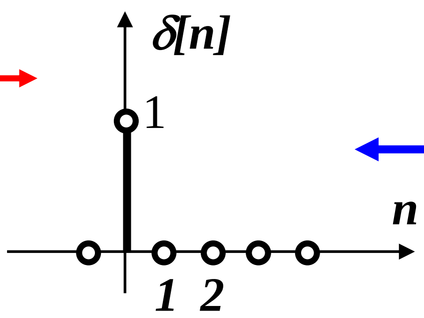
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \neq 0 \\ \infty \ si \ t = 0 \end{cases}$$



La función $x(t)=\delta(t)$ presenta AMPLITUD INFINITA en $t=0$ (<u>se simboliza con una flecha</u>)

b) Impulso unitario discreto (Delta de Kronecker)

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq 0 \\ 1 \ si \ n = 0 \end{cases}$$



En el caso discreto, $x[n]=\delta[n]$ presenta valor "1" en $n=0$, debido a que se ha normalizado el eje temporal

El IMPULSO UNITARIO SÓLO TIENE VALOR EN $t=0$ ($n=0$). Si $x[n]=A\delta[n]$, se obtiene el valor "A" en $n=0$. Para $x(t)=A\delta(t)$, el valor en $t=0$ SIGUE SIENDO INFINITO pero el <u>ÁREA de $x(t)$ cambia</u>…

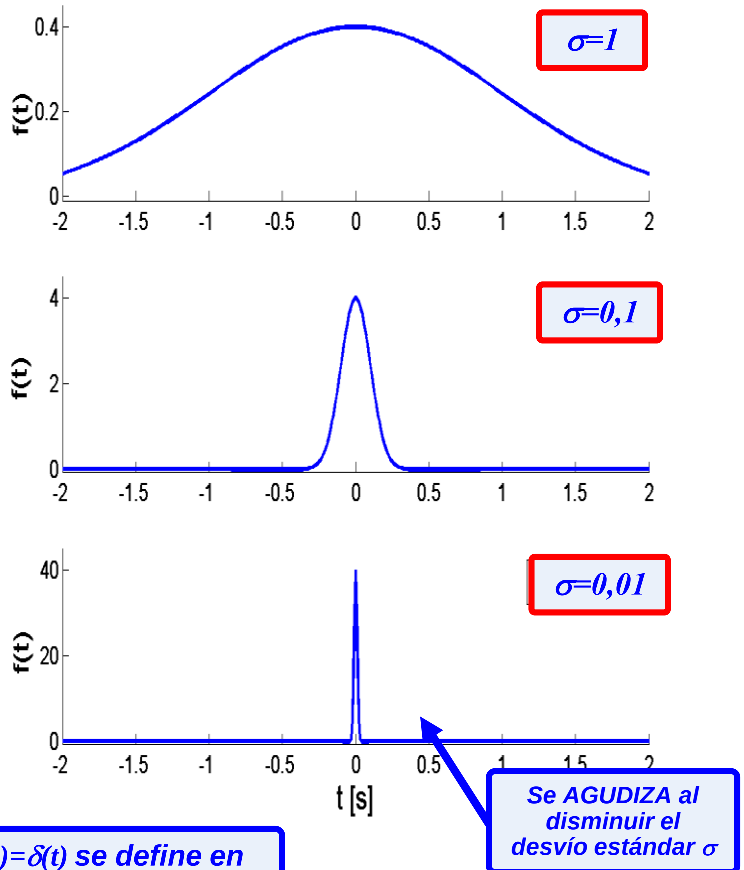
¿Cuál es el origen de la función impulso?

La función ***impulso*** constituye una ***señal ideal***, ya que no resulta factible generarla físicamente. Se define ***formalmente*** en virtud de una función de ***Densidad de Probabilidad Gaussiana*** (cuya área resulta unitaria), que ***tiende a agudizarse*** cuando su desvío estándar tiende a cero:

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$

Debido a que la función $x(t)=\delta(t)$ se define en términos de una función densidad de probabilidad, su área es UNITARIA



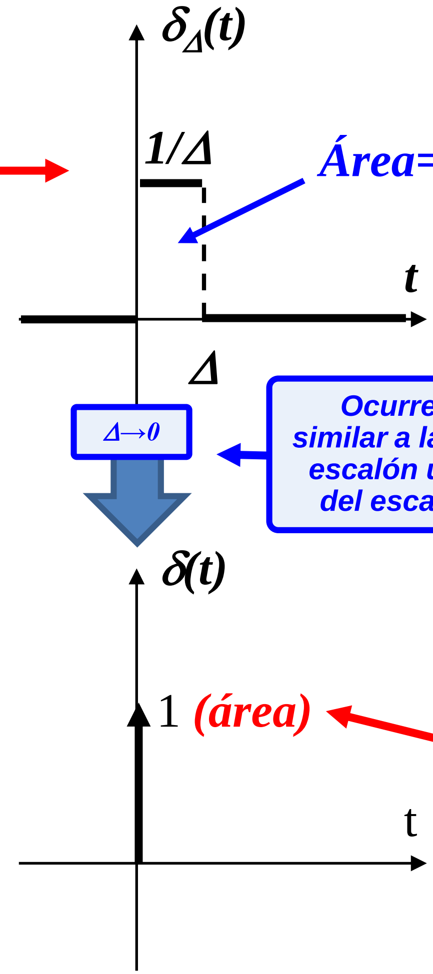
Señales Aperiódicas

Otra forma de definir la función impulso unitario es a partir de la utilización de la función ***Impulso Aproximada*** $\delta_\Delta(t)$, de ***duración*** Δ y ***amplitud*** $1/\Delta$ *durante dicho intervalo*. Como consecuencia de ello, su ***área resulta unitaria***:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\, si\ 0 < t < \Delta \\ 0\ \forall t \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\Delta(t)\,dt = 1$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

Al DISMINUIR Δ, la función $\delta_\Delta(t)$ INCREMENTA SU AMPLITUD, MANTENIENDO SIEMPRE SU ÁREA CONSTANTE (UNITARIA)



Ocurre una situación similar a la de definición del escalón unitario en virtud del escalón aproximado

EL VALOR "1" INDICA EL ÁREA ENCERRADA POR LA FUNCIÓN, YA QUE SU AMPLITUD ES INFINITA

Propiedades de la función Impulso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$$

ÁREA UNITARIA

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0] = 1$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

CAPTURA DE ÁMPLITUD O EQUIVALENCIA

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

MUESTREO

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$$

Tiempo Continuo

Nótese que el impulso puede ubicarse en cualquier instante t_0 (desplazamiento temporal)

Tiempo Discreto

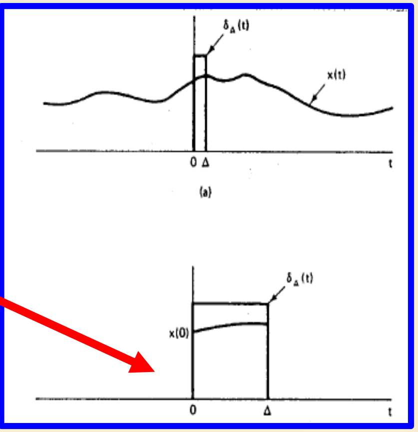
Conforme puede advertirse, la propiedad excluyente de la señal $\delta(t)$ es que al ser multiplicada por una función, ***captura en su área la amplitud de la misma, en el instante de su ocurrencia***. Dicha propiedad se aprecia naturalmente en el dominio discreto y puede inferirse en el continuo, a partir de la función $\delta_\Delta(t)$.

Demostración: Propiedades de la función impulso $x(t)=\delta(t)$:

1. Propiedad de Captura de Amplitud:

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta} si\ 0<t<\Delta \\ 0\ \forall t\end{cases} \Rightarrow x(t)\delta_\Delta(t)\approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$x(0)\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{x(0)}{\Delta} si\ 0<t<\Delta \\ 0\ \forall t\end{cases} \Rightarrow \lim_{\Delta\to 0} x(0)\delta_\Delta(t)=x(0)\delta(t)$$



Al efectuar el producto de la función impulso aproximada por la señal $x(t)$, se considera que dentro del intervalo Δ la amplitud $x(t)$ permanece constante)

La función impulso captura en su área el valor de la función en $t=0$!!!

2. Propiedad de Muestreo:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\int_{t=-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

Área de $x(t)\delta(t-t_0)$ — *Captura de amplitud* — *Área=Valor de la función en t_0!*

Relación entre Funciones

Las funciones ***impulso***, ***escalón*** y ***rampa*** se encuentran vinculadas en virtud de acciones de ***derivación*** e ***integración***:

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \Rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = u(t) \Rightarrow u[n] = \rho[n+1] - \rho[n]$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \Rightarrow u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \Rightarrow \rho[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u[k]$$

La DERIVADA del ESCALÓN da como resultado una función IMPULSO así como la derivada de la RAMPA genera una función ESCALÓN. La operatoria inversa es la INTEGRACIÓN

En tiempo discreto, LA DERIVADA EQUIVALE A REALIZAR UNA <u>DIFERENCIA ENTRE MUESTRAS</u> (derivada por definición), <u>DIVIDIDA POR EL INCREMENTO TEMPORAL</u> (cuyo valor es unitario para tiempo normalizado)

Análogamente a la derivación, la INTEGRAL DISCRETA EQUIVALE A UNA <u>SUMATORIA DE LAS VALORES DE LA FUNCIÓN</u>, MULTIPLICADOS POR EL INCREMENTO TEMPORAL (en este caso unitario)

Como el resultado de la integral es en la variable "t" (se obtiene una función), se integra en términos de "τ"

Demostración: Relación entre las funciones aperiódicas ***impulso***, ***escalón*** y ***rampa***:

1. Escalón unitario:

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta_{\Delta}(t)}{dt} = \delta(t)$$

Puede demostrarse sencillamente que la derivada del escalón aproximado da como resultado una función impulso aproximada

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t > 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

La integral de la función impulso entre $t=-\infty$ y $t=0^-$ es nula. A partir de $t=0$ se obtiene el área de la función impulso, que es unitaria.

2. Rampa Unitaria:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d[tu(t)]}{dt} = 1u(t) + t\delta(t) = u(t) + 0\delta(t) = u(t)$$

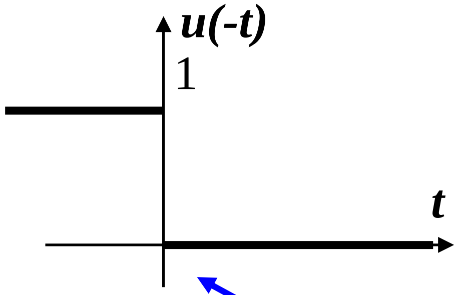
Debido a que la función impulso captura el valor de la función "t" en su área para $t=0$ (ocurrencia del impulso) se obtiene el producto $0\delta(t)$ que resulta nulo

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0-} 0d\tau + \int_{0+}^{t} 1d\tau = \tau\Big|_{0}^{t} = t \; si \; t > 0 \Rightarrow tu(t) = \rho(t)$$

Operaciones con señales: Inversión Temporal

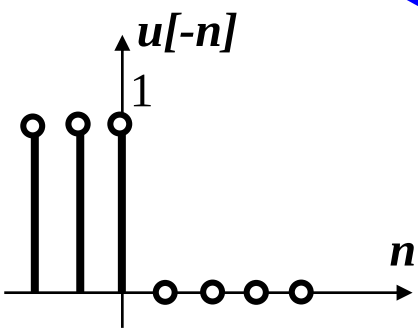
La acción multiplicar al argumento ***"t"*** o ***"n"*** por el valor "***-1***" da como resultado la ***"reflexión"*** de la señal ***x(t)*** ***respecto del eje de ordenadas***:

$$u(-t) \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; -t > 0 \\ 0 \; si \; -t < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; t < 0 \\ 0 \; si \; t > 0 \end{cases}$$



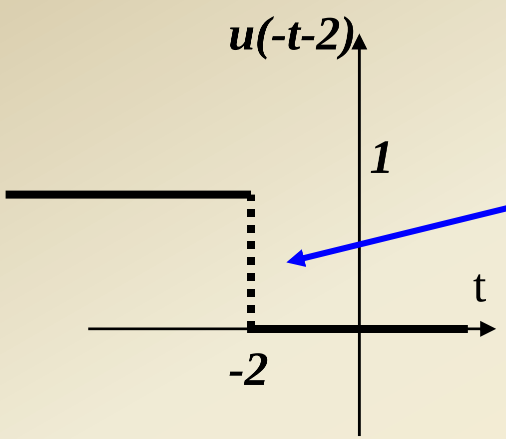
Tener en consideración que la reflexión se da respecto del EJE DE ORDENADAS y NO respecto de un eje propio que pueda presentar la señal (en este caso t=0)

$$u[-n] \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; -n \geq 0 \\ 0 \; si \; -n < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; n \leq 0 \\ 0 \; si \; n > 0 \end{cases}$$

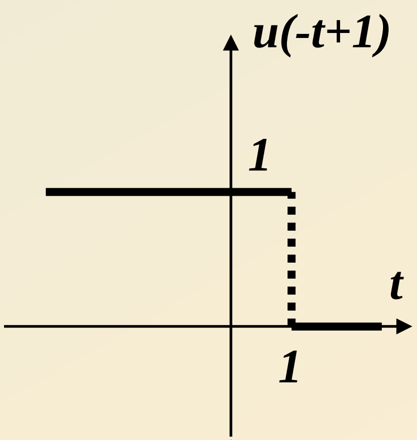


Ejemplo Práctico

Ejemplo: Graficar las funciones temporales ***reflejadas*** y ***desplazadas*** $x_1(t)=u(-t-2)$ y $x_2=u(-t+1)$



Observar que si se toma $u(0)$ como PUNTO DE REFERENCIA (la indeterminación del escalón) dicha condición se obtiene para el argumento $-t-2=0$, es decir, $t=-2$. Luego, el argumento es positivo (escalón en 1) para valores de t menores a -2



$$u(-t-2) \Rightarrow \begin{cases} 1 \ si \ -t-2>0 \\ 0 \ si \ -t-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \ si \ t<-2 \\ 0 \ si \ t>-2 \end{cases}$$

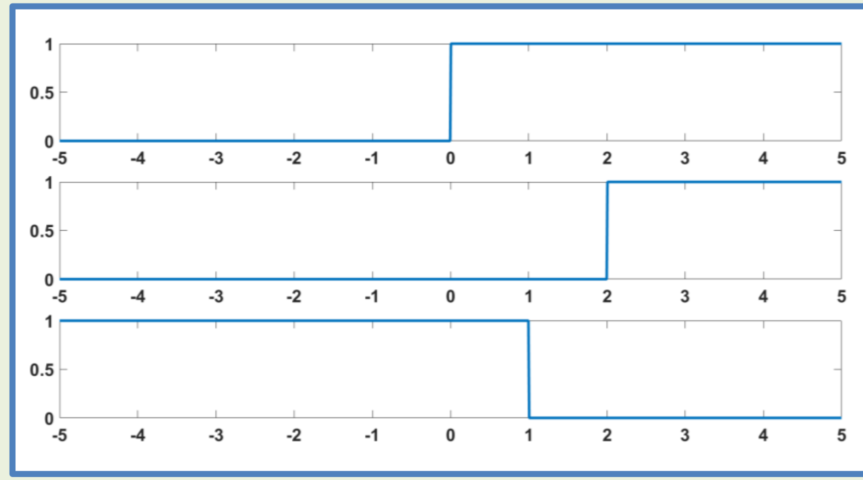
$$u(-t+1) \Rightarrow \begin{cases} 1 \ si \ -t+1>0 \\ 0 \ si \ -t+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \ si \ t<1 \\ 0 \ si \ t>1 \end{cases}$$

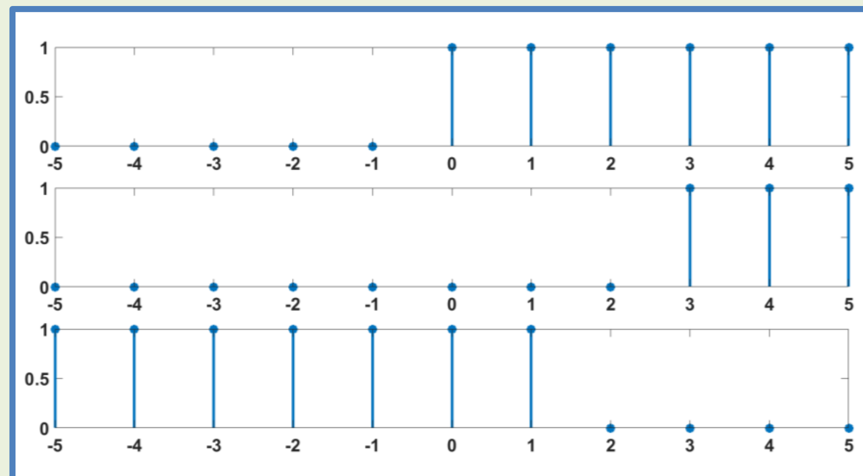
Nótese que si la función se evalúa primero en "$-t$", el desplazamiento se produce hacia la IZQUIERDA si se RESTA el valor $t_0=2$ (A LA INVERSA respecto del escalón evaluado en "t", donde $u(t-2)$ genera un desplazamiento a DERECHA)

Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

Aplicación en MatLab

```
t=linspace(-5,5,1000);

x1=escalon(t);
x2=escalon(t-2);
x3=escalon(-t+1);

figure;
subplot(311); plot(t,x1);
subplot(312); plot(t,x2);
subplot(313); plot(t,x3);

n=-5:5
x1=escalon(n);
x2=escalon(n-3);
x3=escalon(-n+1);

figure;
subplot(311); stem(n,x1);
subplot(312); stem(n,x2);
subplot(313); stem(n,x3);
```





En MatLab pueden SIMULARSE las funciones elementales continuas (y evaluar las discretas normalizadas) junto con los efectos de DESPLAZAMIENTO y REFLEXIÓN TEMPORAL. La función ESCALON (escalón temporal) se encuentra definida en el TOOLBOX ASyS

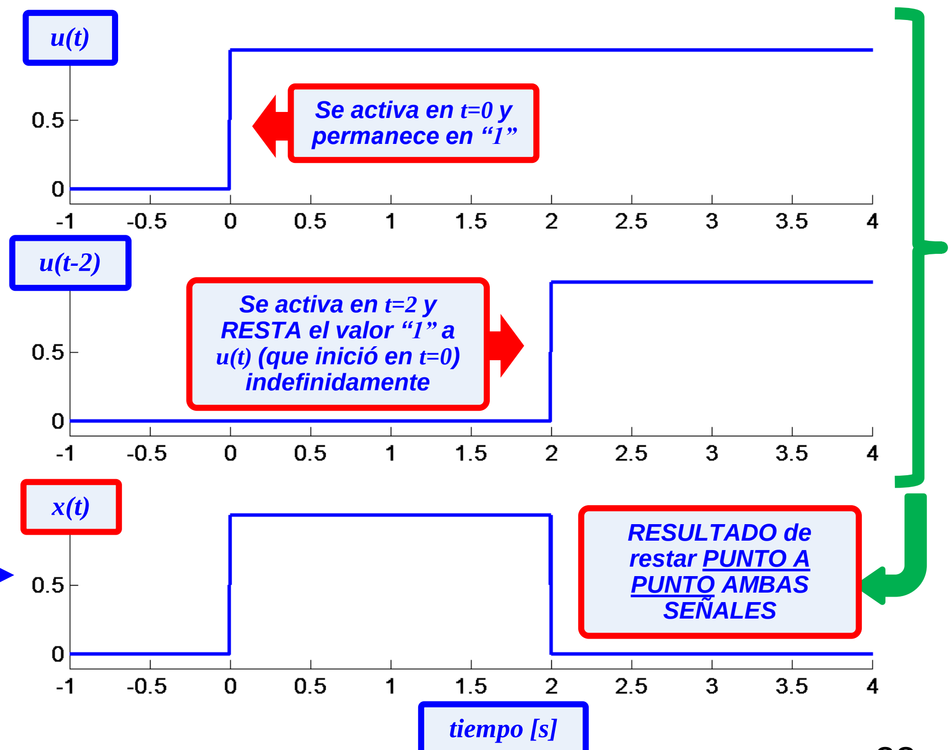
Combinación de funciones elementales continuas

Las funciones elementales (impulso, escalón y rampa) pueden ***combinarse*** para generar señales de ***mayor complejidad***:

$$x(t) = u(t) - u(t-2)$$

Las dos señales escalón actúan de manera SIMULTÁNEA (de -∞ a +∞) para generar x(t)

$$x(t) = \begin{cases} 0 \; si - \infty < t < 0 \\ 1 \; si \; 0 < t < 2 \\ 0 \; si \; 1 < t < +\infty \end{cases}$$



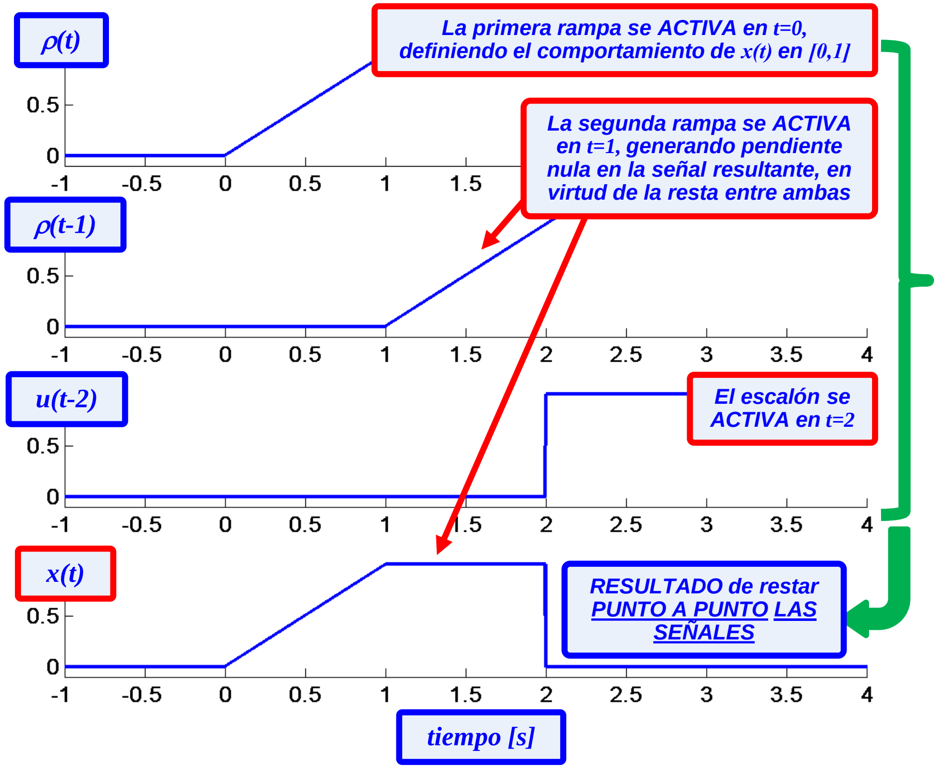
Combinación de funciones elementales continuas

Otro ejemplo se advierte al combinar funciones rampa $x(t)=\rho(t)$:

$$x(t)=\rho(t)-\rho(t-1)-u(t-2)$$

Aquí también las dos señales rampa ($\rho(t)$ y $\rho(t-1)$), y luego la señal escalón $u(t-2)$, actúan de manera simultánea (de $-\infty$ a $+\infty$) para generar $x(t)$

Obsérvese que al restar dos rampas de la MISMA PENDIENTE, la señal resultante es CONSTANTE a partir del instante en el que ambas actúan SIMULTÁNEAMENTE (lo que incrementa la primera se lo quita la segunda). Al ACTIVARSE EL ESCALÓN, se resta un valor constante a la combinación anterior a partir de $t=2$

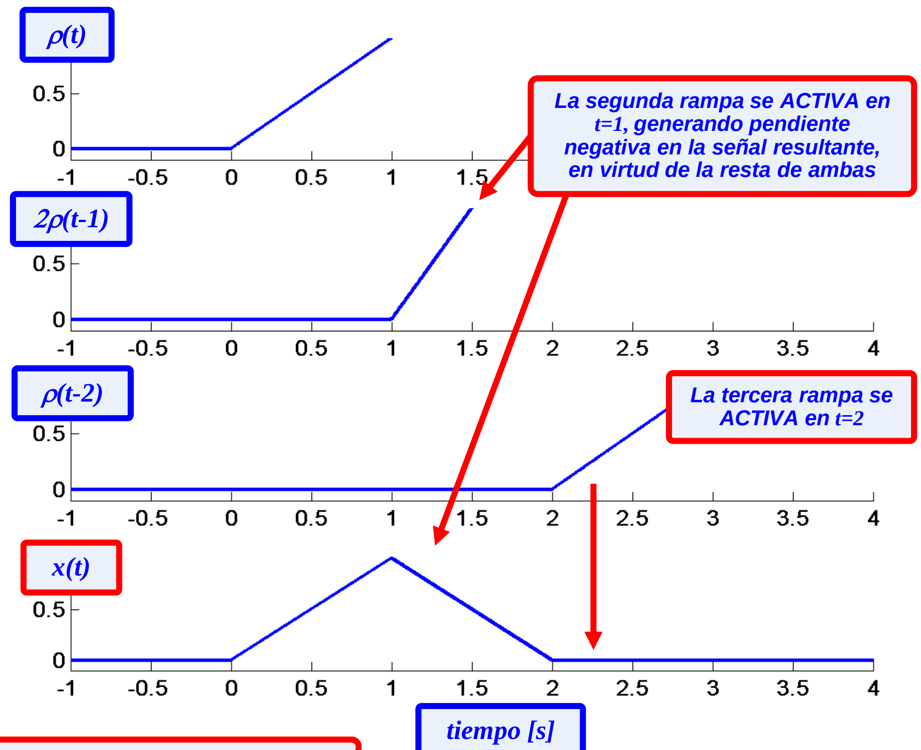


Combinación de funciones elementales continuas

Asimismo pueden combinarse rampas con ***pendientes distintas***:

$$x(t) = \rho(t) - 2\rho(t-1) + \rho(t-2)$$

En este caso las señales $\rho(t)$ (pendiente “1”) y $2\rho(t-1)$ (pendiente “2”) se restan de manera simultánea a partir de $t=1$, dando como resultado una rampa de pendiente negativa “-1” (1-2=-1). Al activarse la tercera rampa en $t=2$, la suma de una pendiente positiva y una negativa del mismo valor da como resultado una constante nula hasta $t=+\infty$



OTRA MANERA de cuantificar $x(t)$ consiste en efectuar la operación en INSTANTES ESPECÍFICOS: $x(0)=0+0-0$, $x(t=0,5)=0,5+0-0$, $x(t=1,5)=1,5-1=0,5$…

Representación de Señales

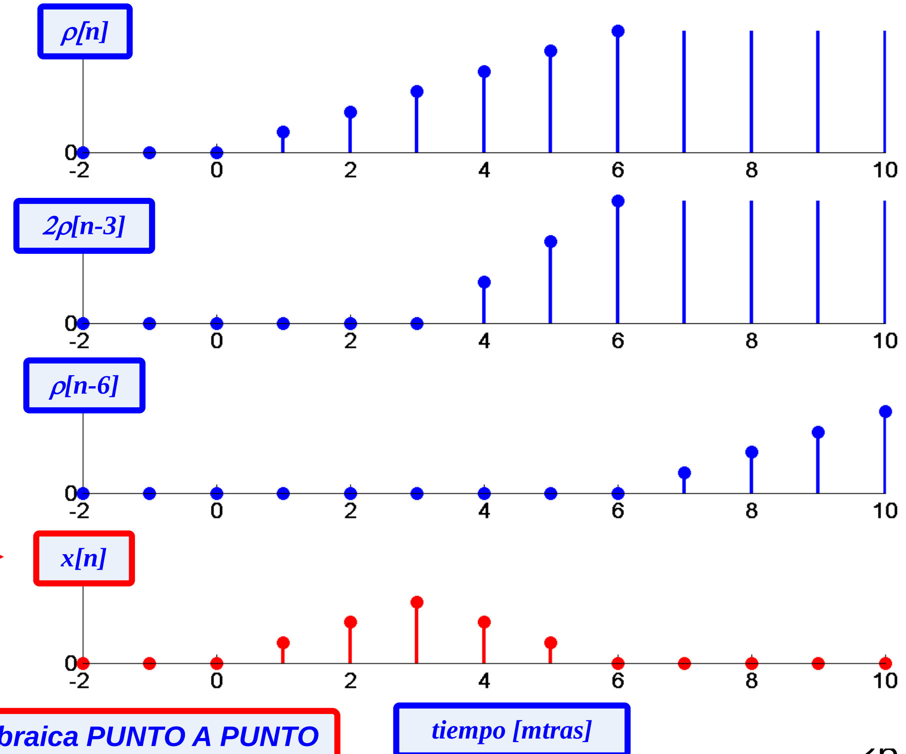
Combinación de funciones elementales discretas

En el dominio discreto ***se opera exactamente de la misma manera*** que en el dominio continuo:

$$\boxed{x[n] = \rho[n] - 2\rho[n-3] + \rho[n-6]}$$

Las señales discretas se componen utilizando el mismo concepto y manifiestan un comportamiento similar

El inicio de la rampa $\rho[n\text{-}3]$ en $n=3$ invierte la pendiente impuesta por la rampa $\rho[n]$ (se vuelve negativa, $1\text{-}2=\text{-}1$), que luego se torna constante (nula) al iniciar $\rho[n\text{-}6]$ en $n=6$



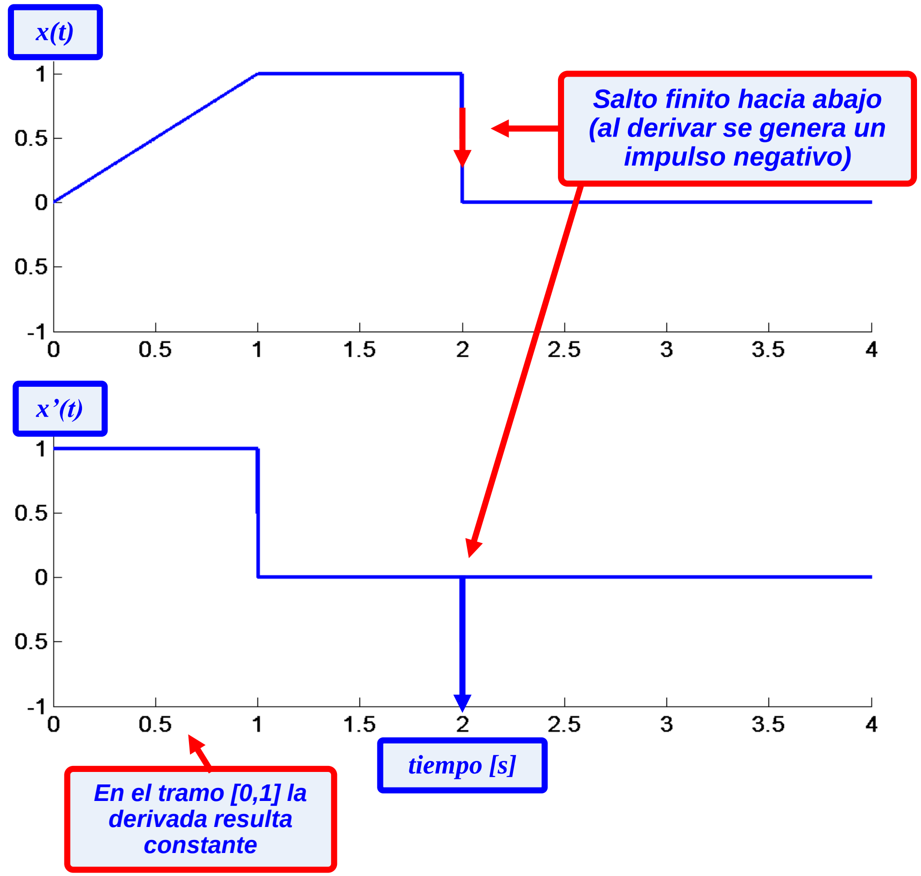
En el dominio DISCRETO, la operación algebraica PUNTO A PUNTO resulta más evidente: $x[1]=1\text{-}0\text{+}0$, $x[4]=4\text{-}1=3$

Operaciones con Señales: Derivación (sólo en continuas)

$$x(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-2)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - u(t-1) - \delta(t-2)$$

Nótese que se pude aplicar derivada a cada tramo de $x(t)$, teniendo en consideración que LAS DISCONTINUIDADES GENERAN FUNCIONES IMPULSO según sea el "salto finito" hacia arriba o hacia abajo. Asimismo, si la derivada no resulta continua (caso $t=1$) se advierte una discontinuidad



Operaciones con Señales: Expansión y Compresión

La acción de multiplicar al argumento ***"t"*** por un escalar ***"k"***, da como resultado la ***"compresión"*** o ***"expansión" temporal*** de la señal ***x(t):***

$$x(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-2)$$

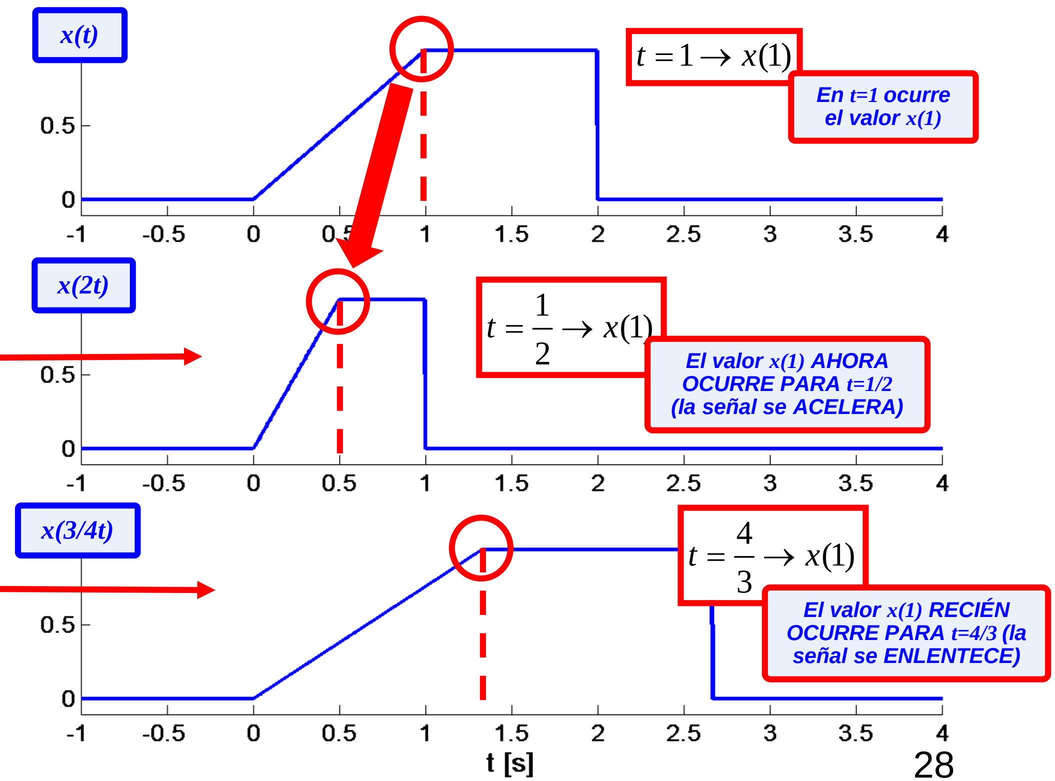
$$x(kt)$$

$$x(2t) \rightarrow Compresión \quad (k > 1)$$

La señal varía más rápidamente

$$x(\frac{3}{4}t) \rightarrow Expansión \quad (0 < k < 1)$$

La señal varía más lentamente



Operaciones con Señales

Para las señales discretas, la acciones de ***expansión*** y ***compresión*** también se llevan a cabo en virtud de la acción $x[kn]$.

No obstante, a diferencia de otras operaciones donde el efecto es el mismo que para las señales continuas, en este caso ***se ve afectada la información de $x[n]$***. Puede ocurrir que ciertos valores ***no sean tenidos en cuenta*** para la nueva función (Ej. para $x[2n]$, sólo se obtienen las muestras pares) o que ***resulten valores no definidos*** (Ej. para $x[n/4]$ sólo se obtienen muestras para n múltiplo de 4)

Si $k>1$, se genera un efecto de DISMINUCIÓN DE LA TASA DE MUESTREO (muestras cada kT_S), PERDIENDO INFORMACIÓN

Si $k<1$, SE INCREMENTA LA TASA DE MUESTREO (muestras cada T_S/k), si se efectúa una INTERPOLACIÓN DE LAS MUESTRAS NO DEFINIDAS

Operaciones con Señales: Expansión y Compresión

$$x[n]=\rho[n-2]-\rho[n-8]-6u[n-9]$$

$$x[kn]$$

$$x[2n]\rightarrow Compresión$$

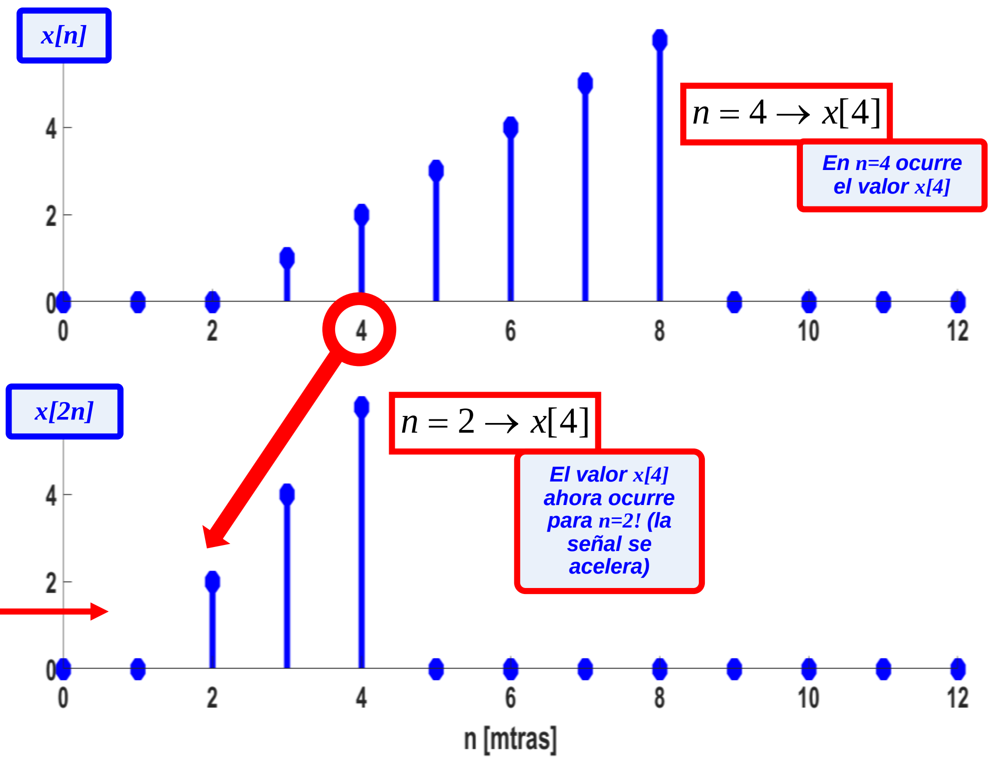
$n=0\rightarrow x[0]$

$n=1\rightarrow x[2]$

$n=2\rightarrow x[4]$

$n=3\rightarrow x[6]$

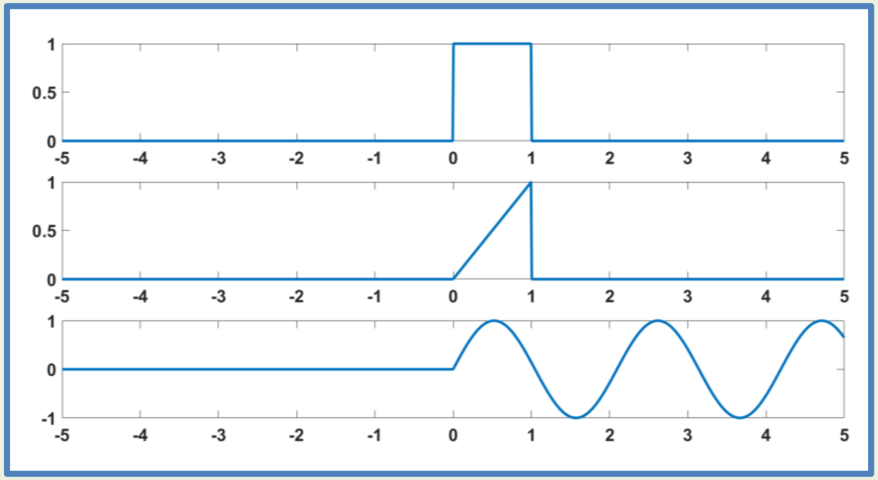
Al asignarle valores a n se saltean las muestras impares x[1], x[3]… <u>Si bien se logra un efecto de compresión</u> (disminuye la tasa de muestreo), SE PIERDE INFORMACIÓN!

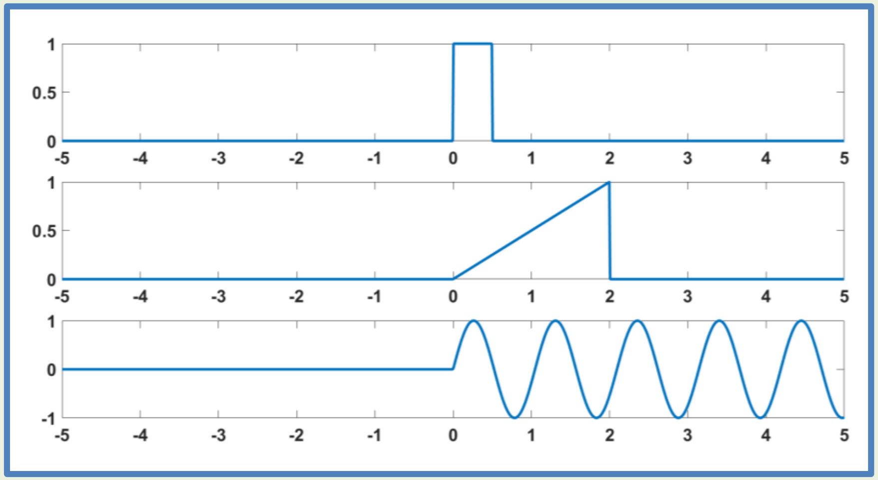


Aplicación en MatLab

```
t=linspace(-5,5,1000);

x1=escalon(t)-escalon(t-1);
x2=rampa(t)-rampa(t-1)-escalon(t-1);
x3=sin(3*t).*escalon(t);

figure;
subplot(311); plot(t,x1);
subplot(312); plot(t,x2);
subplot(313); plot(t,x3);

x1=escalon(2*t)-escalon(2*t-1);
x2=rampa(0.5*t)-rampa(0.5*t-1)-escalon(0.5*t-1);
x3=sin(2*3*t).*escalon(t);

figure;
subplot(311); plot(t,x1);
subplot(312); plot(t,x2);
subplot(313); plot(t,x3);
```

En MatLab pueden COMBINARSE funciones elementales así como evaluar los efectos de COMPRESIÓN (o EXPANSIÓN) sobre señales continuas. Al igual que el escalón temporal, la función RAMPA (rampa temporal) se encuentra definida en el TOOLBOX ASyS

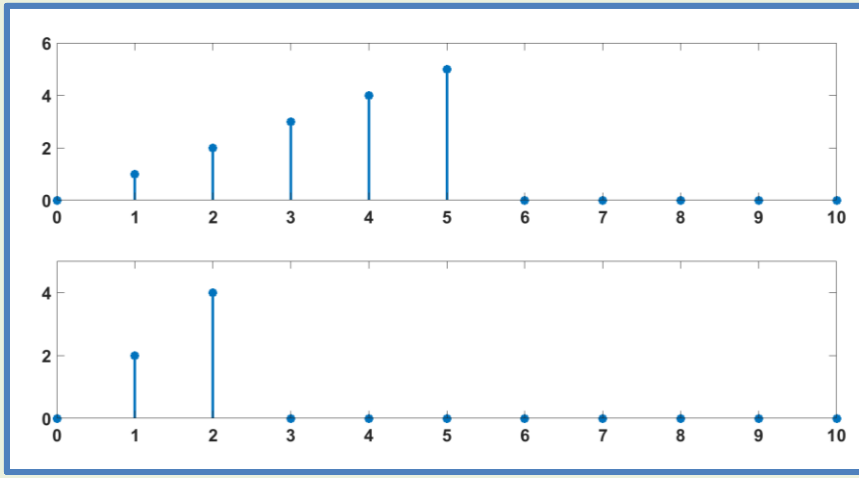




Aplicación en MatLab

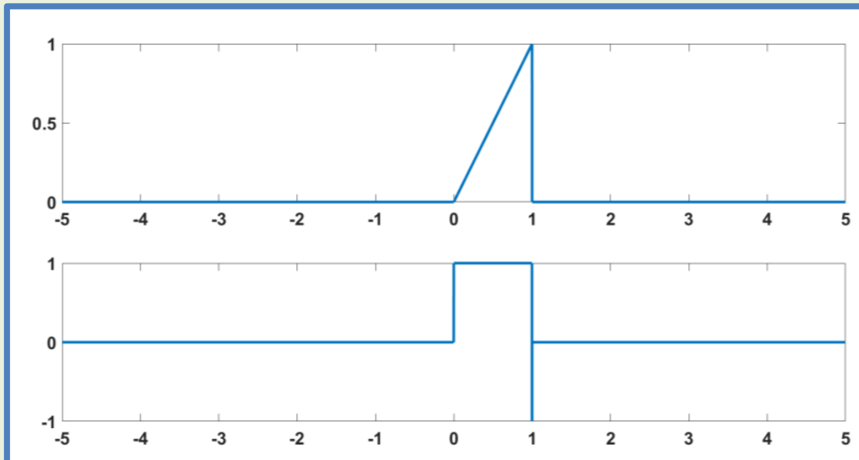
```
n=0:10;

x1=rampa(n)-rampa(n-6)-6*escalon(n-6);
x2=rampa(2*n)-rampa(2*n-6)-6*escalon(2*n-6);

figure;
subplot(211); stem(n,x1);
subplot(212); stem(n,x2);
```

Puede analizarse, además, el comportamiento de señales discretas en TIEMPO NORMALIZADO (T_S=1)




```
Ts=0.001;
t=-5:Ts:5;

x2=rampa(t)-rampa(t-1)-escalon(t-1);

figure;
subplot(211); plot(t,x2);
subplot(212); plot(t(1:end-1),diff(x2)/Ts);
```

Por otra parte, puede SIMULARSE la acción de derivación continua a partir de una DERIVADA DISCRETIZADA, en virtud de aplicar la función DIFF y efectuar el cociente por el incremento temporal (T_S)



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Consigna de la clase #A (20 minutos)

Sea la siguiente señal continua ***x(t)*** constituida por señales elementales:

$$x(t) = \rho(t-1) - \rho(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$$

1. **Utilizar Matlab** para graficar la forma de la función y su derivada. Efectuar luego ***las siguientes acciones***, verificando ***analíticamente*** dos de los resultados obtenidos:

$$a)\, f(t \pm 2); \quad b)\, f(3t); \quad c)\, f(-2t+1); \quad d)\, f(\frac{t}{2} - 2)$$

2. Considerar la ***versión discreta*** de ***x(t)*** (***x[n]***) y graficar la forma resultante de llevar a cabo la acción ***x[-n+3]***.

Descomposición de Señales

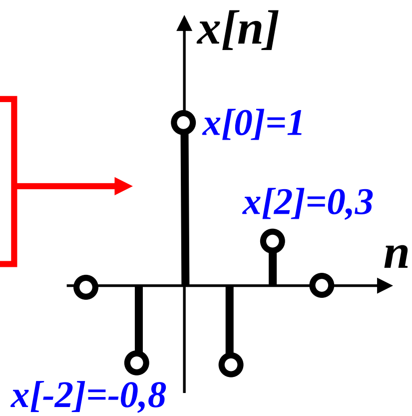
¿Es factible descomponer cualquier tipo de señal en base a funciones elementales?

Puede inferirse fácilmente, que toda señal discreta ***x[n]*** puede ser descripta ***a partir de funciones impulso δ[n] escaladas y desplazadas:***

$$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

Consecuentemente, ***x[n]*** puede expresarse de manera generalizada como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



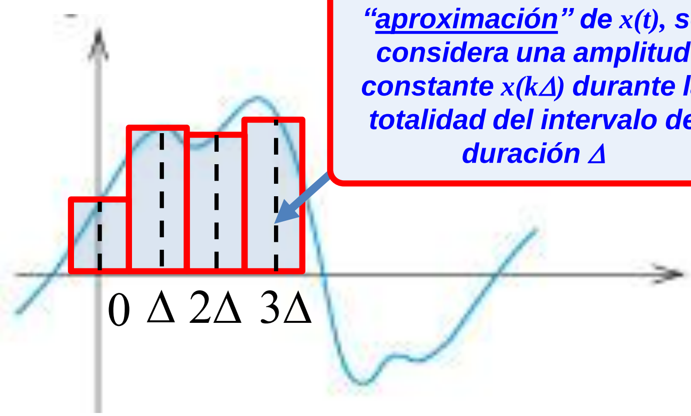
Observar que cualquier señal discreta se puede expresar como una SUMA de funciones IMPULSO ubicadas en distintos instantes temporales

$$x[n] = -0,8\delta[n+1] + \delta[n] - 0,8\delta[n-1] + 0,3\delta[n-2]$$

Descomposición de Señales

En el dominio continuo, pude aplicarse ***exactamente el mismo concepto***, utilizando en este caso la ***función $\delta_\Delta(t)$ escalada y desplazada*** de manera de describir una ***$x(t)$ "aproximada"***:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k\Delta]\delta_\Delta[t-k\Delta]\Delta$$



Para efectuar la "aproximación" de $x(t)$, se considera una amplitud constante $x(k\Delta)$ durante la totalidad del intervalo de duración Δ

$$\delta_\Delta[t-k\Delta]\Delta = 1 \quad si \quad t-k\frac{\Delta}{2} < t < t+k\frac{\Delta}{2}$$

El producto $\delta_\Delta(t\text{-}k\Delta)\Delta$ permite generar una función de amplitud $x(k\Delta)$ constante durante el intervalo $[-k\Delta/2; k\Delta/2]$, de modo de aproximar $x(t)$ en dicho intervalo

Aplicando el límite con $\Delta \to 0$, ***$x(t)$ puede expresarse entonces***:

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Una SEÑAL CONTINUA puede descomponerse en una SUCESIÓN "INFINITESIMAL" de FUNCIONES IMPULSO escaladas y desplazadas

Descomposición de Señales

Descomponiendo señales en sus partes par e impar

Toda señal, ya sea continua o discreta, ***puede ser representada*** por la ***suma*** de una ***señal par*** y una ***impar:***

$$\boxed{x(t) = x_P(t) + x_I(t)}$$

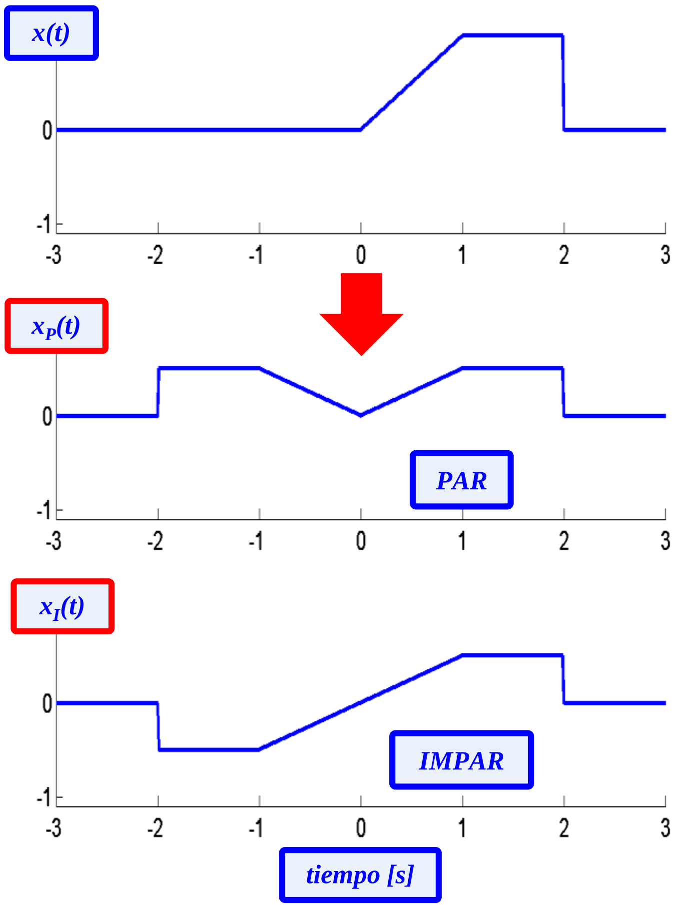
donde sus ***componentes constitutivas*** pueden calcularse como:

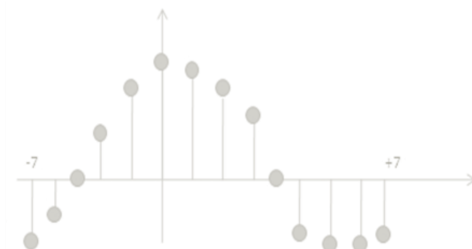
$$\boxed{x_P(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}$$

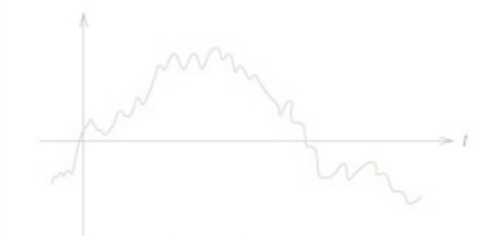
Componente PAR de x(t)

$$\boxed{x_I(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}$$

Componente IMPAR de x(t)

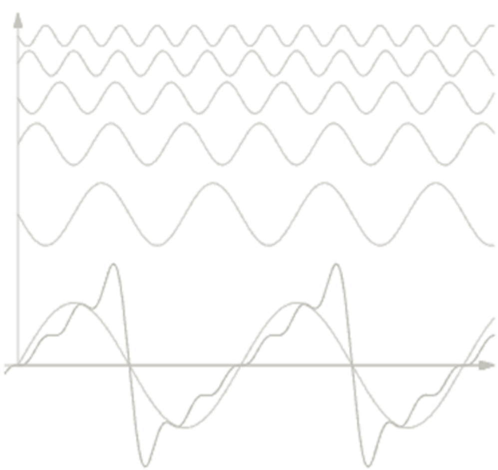


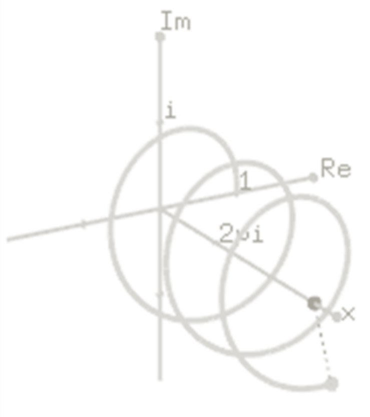




U1: Señales Continuas y Discretas

●Energía y Potencia●





¿Qué determina la “medida” de una señal?

Debido a la existencia de ***diversos tipos de señales*** en relación a la ***magnitud física*** que caracterizan (tensión, corriente, carga, campo eléctrico y otras), las mismas pueden ser identificadas a través de una ***“medida”*** denominada “***ENERGÍA***” ***(E)***, que esencialmente ***cuantifica el área de la señal elevada al cuadrado***:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energía señal Continua

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

Energía señal discreta

El | • | permite contemplar señales COMPLEJAS

Si $E<\infty$, la señal se denomina formalmente ***“de energía”***. Las ***señales de energía*** son aquellas de ***cuadrado integrable*** (su valor no diverge), ***poseen amplitud finita*** y ***convergen a cero*** para $t\to\infty$ o ***poseen duración finita***.

¿Y si E resulta infinita?

Entonces la medida en este caso es la ***"Potencia Promedio" (P)***, donde se calcula la energía en un intervalo temporal ***T o N,*** se divide por el mismo y se lo hace tender a infinito de modo de ***obtener el promedio en todo el rango de ocurrencia de x(t)***. Si $P<\infty$ la señal se denomina ***"de potencia"***

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Potencia señal continua

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \left|x[n]\right|^2$$

Potencia señal discreta

donde $E \to \infty$ pero $P < \infty$

Si la señal resulta ***periódica***, ***se simplifica*** el cálculo de ***P***, efectuándose el mismo ***en un único período*** (E/T), dado que ***la energía*** (y por ende el promedio) ***presenta el mismo valor en cualquiera de ellos***.

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} \left|x(t)\right|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} \left|x[n]\right|^2$$

NOTA: Si la señal es de energía (valor de E finito), el valor de P resulta NULO

Energía y Potencia

Si bien las señales de ***potencia* y *energía son excluyentes***, ***es factible que una señal no resulte ni de potencia ni de energía***, debido que ambos ***valores tienden a infinito*** ($E \to \infty$, $P \to \infty$)

$$x(t) = t^k, \; k \; natural$$

donde $E \to \infty$, $P \to \infty$

Otra posibilidad (caso particular) es que la señal presente ***energía infinita*** pero que su ***potencia resulte nula*** ($E \to \infty$, $P = 0$)

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \; t \geq 1$$

donde $E \to \infty$, $P = 0$

Ejemplo Práctico

Ejemplo: Energía y Potencia en tiempo continuo

a) Calcular la ***energía*** de $x(t)=e^{-2t}u(t)$ *(Aperiódica, E finita)*:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-2t}u(t)\right|^2 dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-4t}dt=\left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^{\infty}=\frac{0-1}{-4}=\frac{1}{4}\,J$$

La presencia del escalón $u(t)$ limita la integral al intervalo $[0,+\infty]$ (en t<0 la señal es nula)

b) Calcular la ***potencia*** de $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ *(Periódica, E infinita)*:

$$P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|A\cos(\omega_0 t+\phi)\right|^2 dt=\frac{A^2}{T_0}\int_0^{T_0}\cos^2(\omega_0 t+\phi)dt$$

Se integra en un período T_0 y se divide por ese valor (Potencia)

$$P=\frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0}[1+\cos(2\omega_0 t+2\phi)]dt=\frac{A^2}{2}[W]$$

La integral de $\cos(2\omega_0 t+2\varphi)$ en el período T_0 es nula

c) Calcular la ***potencia*** de $x(t)=A$ *(Aperiódica, E infinita)*

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}T=A^2\,[W]$$

Se define una ventana de integración de tamaño T, que luego tiende a infinito

La ENERGÍA se mide en [J] (Joules) y la POTENCIA en [W] (Watts, J/s)

Ejemplo: Energía y Potencia en tiempo discreto

a) Calcular la ***energía*** de $x[n]=3(1/2)^n u[n]$ ***(Aperiódica, E finita)***:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=9\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

La presencia del escalón $u[n]$ limita la sumatoria al intervalo $[0,+\infty]$ (en $n<0$ la señal es nula)

Aplicando entonces la ***Serie Geométrica***:

$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{+\infty}q^n \;\; si\;\left|q\right|<1\rightarrow q=\frac{1}{4} \Rightarrow E=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12\,J$$

b) Calcular la ***potencia*** de $x[n]=A\cos(n\pi)$ ***(Periódica, E infinita)***

$$P=\frac{1}{N_0}\sum_{<N_0>}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}A^2\cos^2[n\pi]=\frac{A^2}{2}\left[1^2+(-1)^2\right]=A^2\,[W]$$

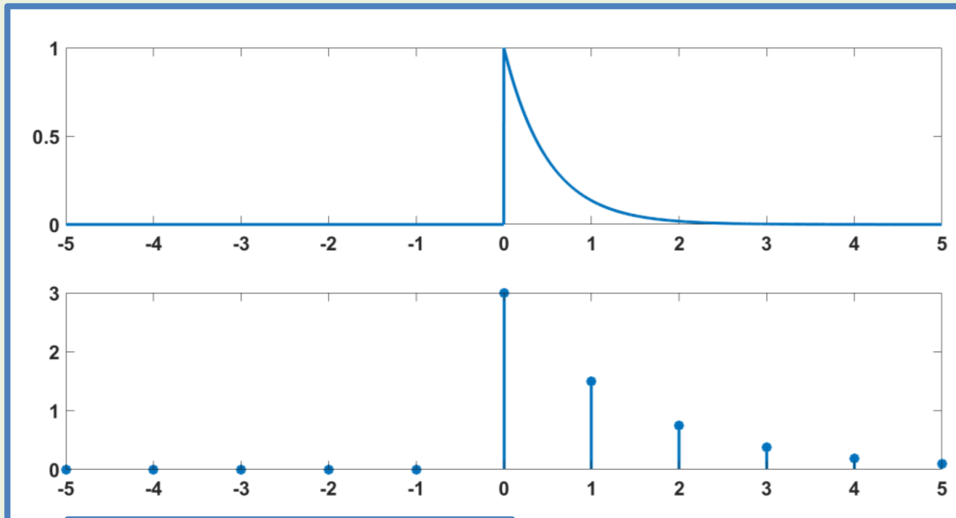
Se efectúa la sumatoria en un período $N_0=2$, donde el coseno toma los valores 1 y -1

Consideraciones sobre señales elementales

Señal *x(t), x[n]*	Energía	Potencia	Observaciones
$\delta(t), \delta[n]$	1	0	Las señal $x(t)=\delta(t)$ se *define* como de *energía unitaria* ($E=1$) ($x[n]=\delta[n]$ presenta energía unitaria). Particularmente, $\delta^2(t)$ *no tiene significado matemático* ya que es una *función de distribución de probabilidad*, por lo que el área de $\delta^2(t)$ por definición *debería ser unitaria*. No obstante, debe tenerse en consideración que si se utiliza la expresión gaussiana para el cálculo o la función impulso aproximado, $E \to \infty$
$A[u(t) - u(t-T)]$	$A^2 T$	0	La señal es *constante* y posee *duración finita* entre 0 y T
A	∞	A^2	La señal es *constante* y posee *duración infinita*
$u(t), u[n]$	∞	$1/2$	El *escalón* unitario es una *señal de potencia*
$\rho(t), \rho[n]$	∞	∞	La *rampa unitaria* no puede ser considerada *ni de energía ni de potencia*
$A\cos(\omega_0 t + \varphi)$	∞	$A^2/2$	Las *sinusoides periódicas* son señales de *potencia*

Aplicación en Matlab

```
Ts=0.001;
t=-5:Ts:5;
n=-5:5;

x1=exp(-2*t).*escalon(t);
x2=3*((1/2).^n).*escalon(n);

figure;
subplot(211); plot(t,x1);
subplot(212); stem(n,x2);

Ec=trapz(t,abs(x1).^2)
Ed=sum(abs(x2).^2)
```



Command Window

```
>> Ec=trapz(t,abs(x1).^2)

Ec =

    0.2505

>> Ed=sum(abs(x2).^2)

Ed =

   11.9971

fx >>
```

Ya sea para el caso continuo o discreto, puede implementarse el CÁLCULO NUMÉRICO de la energía de una señal APERIÓDICA, efectuando una integración discreta (función SUM para la discreta o TRAPZ para la continua). En el caso continuo, dicho cálculo será una APROXIMACIÓN y dependerá de cuán reducido sea el paso temporal T_S. Si la señal bajo análisis resulta PERIÓDICA, dicho cálculo deberá ser realizado sobre un solo período, para luego dividir por su duración (potencia promedio). El TOOLBOX ASyS tiene implementadas las funciones E_t (energía) y POT_t (potencia) según sea el caso

La energía discreta E no es exacta ya que no se está considerando la totalidad de las muestras de $x[n]$ (cuya cantidad es infinita)

Consigna de la clase #B (20 minutos)

1. ***Graficar las siguientes señales en MatLab*** y calcular ***numéricamente*** su ***potencia*** o ***energía*** según sea el caso:

$$a)\, x_1(t) = e^{-|t|}$$

$$b)\, x_2(t) = sen(2\pi 5t) + \cos(2\pi 10t)$$

$$c)\, x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

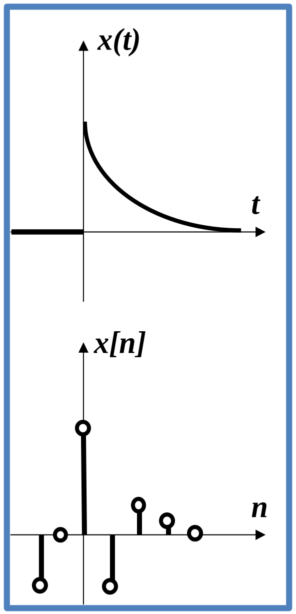
$$d)\, x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

2. Verificar ***analíticamente*** la totalidad de los resultados obtenidos.

Unidad 1: Señales Continuas y Discretas

Resumen General

Señales Aperiódicas



Señales Elementales

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \neq 0 \\ \infty \ si \ t = 0 \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t > 0 \\ 0 \ si \ t < 0 \end{cases} \qquad \rho(t) = tu(t) = \begin{cases} t \ si \ t \geq 0 \\ 0 \ si \ t < 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq 0 \\ 1 \ si \ n = 0 \end{cases} \qquad u[n] = \begin{cases} 1 \ si \ n \geq 0 \\ 0 \ si \ n < 0 \end{cases} \qquad \rho[n] = nu[n] = \begin{cases} n \ si \ n \geq 0 \\ 0 \ si \ n < 0 \end{cases}$$

Operaciones sobre señales

$$x(t - t_0) \qquad x(-t) \qquad x(at)$$

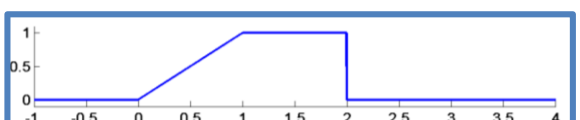
Señales de Energía y Potencia

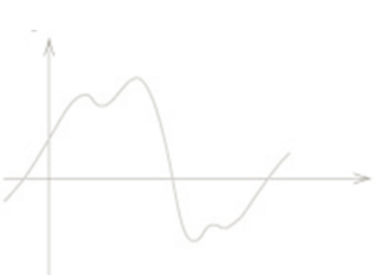
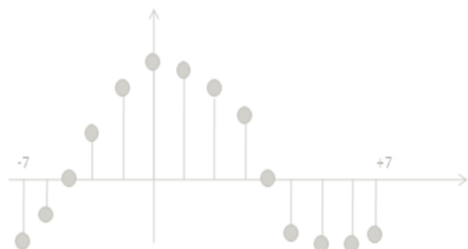
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

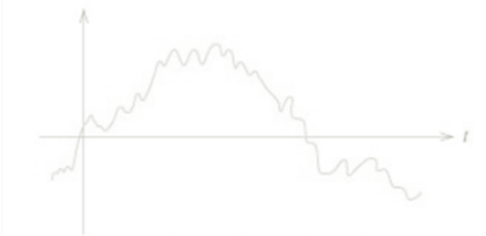
$$P = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Composición de Señales

$$x(t) = \rho(t) - \rho(t-1) - u(t-2)$$





U1: Señales Continuas y Discretas

¿CONSULTAS?

Foro Campus Virtual: Señales Continuas y Discretas