UdeMM - Ingeniería de Sistemas
Simulación de modelos en derivadas parciales

# Trabajo Práctico 2

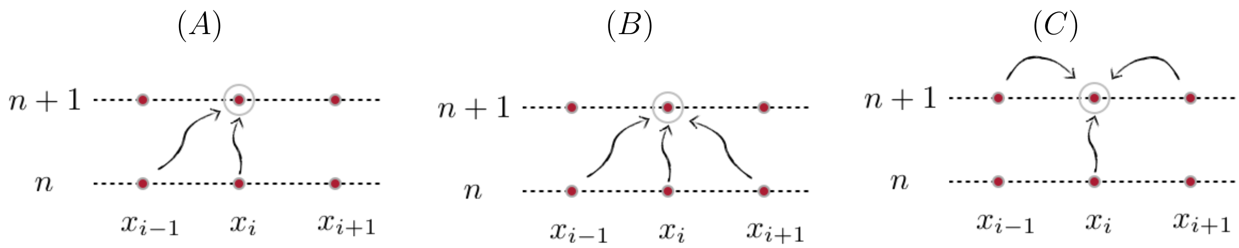
Año 2020

**Módulo 2**

**Introducción a la solución en diferencias finitas de PDEs**

# 1. Grilla de cálculo (*stencil*)

Asocie cada uno de los siguientes *stencils* a su correspondiente esquema de cálculo:




$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) = 0 \tag{4}$$

# 2. Solución numérica

## 2.1. Estabilidad

Se considera un esquema de adelanto en tiempo y atraso en espacio para discretizar un problema de advección lineal con un coeficiente convectivo $c$=4 y un tamaño de paso espacial $\Delta x$=2. Determine el valor máximo del paso de tiempo $\Delta t$ que permita asegurar la estabilidad de la solución.

## 2.2. SymPy

Empleando `SymPy` evalúe la derivada parcial con respecto a $x$ de la expresión siguiente en $x$=2.2,

$$\frac{\cos^2(x)\sin^3(x)}{4x^5\exp(x)} \tag{5}$$

## 3. Trabajo de código: Flujo de tráfico

Considere el flujo de tráfico en una autopista. Procuremos describir el comportamiento general de este sistema. Para ello, definamos la velocidad de tráfico, $V$, en kilómetros por hora. La densidad de tráfico, esto es el número de autos por unidad de longitud de autopista, $\rho$, en autos por kilómetro. Finalmente, podemos definir el flujo de tráfico, esto es el *caudal* de autos, $F$, en autos por hora.
Supongamos ahora que si $\rho$ se aproxima a 0, es decir hay muy pocos autos en la autopista, estos circularán tan velozmente como puedan a una velocidad $V_{max}$. Asimismo, si la abundancia de autos es muy alta, entonces $\rho$ se aproxima a $\rho_{max}$ y por consiguiente $V$ se aproxima a 0. Una ecuación posible que describa este comportamiento se escribe:

$$V = V_{\text{máx}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right) \tag{6}$$

siendo

$$F = F(\rho) = V(\rho)\rho = V_{\text{máx}}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right) \tag{7}$$

El flujo de tráfico en estado no estacionario puede modelarse como un problema de advección no lineal de la densidad de autos, siendo el coeficiente convectivo $V$ igual a $\partial F/\partial \rho$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

Aplicando la regla de la cadena, resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Discretize la ecuación de flujo de tráfico empleando un esquema en diferencias de adelanto en tiempo y atraso en espacio. Considere un trayecto de autopista de 11 km de longitud sujeto a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} V_{max} = 80 \text{ km/h} \\ L = 11 \text{ km} \\ \rho_{max} = 250 \text{ autos/km} \\ nx = 51 \\ \Delta t = 0{,}001 \text{ h} \end{cases}$$

### 3.1. Resultados de Simulación: Parte A

Empleando la siguiente condición inicial para la densidad de tráfico:

```
x = numpy.linspace(0,L,nx)
rho0 = numpy.ones(nx)*10
rho0[10:20] = 50
```

y la siguiente condición de borde:

$$\rho\left(0,t\right) = 10$$

Determine:

1. Velocidad mínima en el instante $t = 0$;
2. Velocidad media en el instante $t = 3$ minutos;
3. Velocidad mínima en el instante $t = 6$ minutos.

### 3.2. Resultados de Simulación: Parte B

Considere ahora $V_{max} = 136$ km/h y repita la simulación empleando la siguiente condición inicial para la densidad de tráfico:

```
x = numpy.linspace(0,L,nx)
rho0 = numpy.ones(nx)*20
rho0[10:20] = 50
```

y la siguiente condición de borde:

$$\rho\left(0,t\right) = 20$$

Determine:

1. Velocidad mínima en el instante $t = 0$;
2. Velocidad media en el instante $t = 3$ minutos;
3. Velocidad mínima en el instante $t = 6$ minutos.