

# Задачи по Эконометрике временных рядов

Н.В. Артамонов

7 апреля 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Работа с рядами в Python. Визуализация</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ACF &amp; PACF</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Стационарные ряды. Модель ARMA</b>	<b>5</b>
3.1	Модель ARMA с константой . . . . .	6
3.2	Модель ARMA с трендом . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Модель ARIMA</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Модель (*)ARCH</b>	<b>14</b>
<b>A</b>	<b>Библиотеки Python</b>	<b>16</b>

## 1 Работа с рядами в Python. Визуализация

#1. Из БД FRED загрузите **квартальные** данные по ВВП США с 1990 Q1 по н.в. (ряд  $gdp$ )

1. Задайте квартальный временной индекс
2. Визуализируйте ряд  $gdp$
3. Визуализируйте ряд  $\log(gdp)$
4. Визуализируйте ряд  $\Delta \log(gdp)$

5. Визуализируйте ряд  $\Delta^2 \log(gdp)$
6. Постройте гистограммы для  $\log(gdp)$ ,  $\Delta \log(gdp)$ ,  $\Delta^2 \log(gdp)$
7. Постройте диаграмму рассеяние  $\log(gdp_t)$  vs  $\log(gdp_{t-1})$
8. Постройте диаграмму рассеяние  $\Delta \log(gdp_t)$  vs  $\Delta \log(gdp_{t-1})$
9. вычислите  $\text{corr}(\log(gdp_t), \log(gdp_{t-1}))$  и тестируйте его значимость (формально!)
10. вычислите  $\text{corr}(\Delta \log(gdp_t), \Delta \log(gdp_{t-1}))$  и тестируйте его значимость (формально!)

#2. Из БД FRED загрузите **месячные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в. (ряд  $m2$ )

1. Задайте месячный временной индекс
2. Визуализируйте ряд  $m2$
3. Визуализируйте ряд  $\log(m2)$
4. Визуализируйте ряд  $\Delta \log(m2)$
5. Визуализируйте ряд  $\Delta^2 \log(m2)$
6. Постройте гистограммы для  $\log(m2)$ ,  $\Delta \log(m2)$ ,  $\Delta^2 \log(m2)$
7. Постройте диаграмму рассеяние  $\log(m2_t)$  vs  $\log(m2_{t-1})$
8. Постройте диаграмму рассеяние  $\Delta \log(m2_t)$  vs  $\Delta \log(m2_{t-1})$
9. вычислите  $\text{corr}(\log(m2_t), \log(m2_{t-1}))$  и тестируйте его значимость (формально!)
10. вычислите  $\text{corr}(\Delta \log(m2_t), \Delta \log(m2_{t-1}))$  и тестируйте его значимость (формально!)

#3. Из БД FRED загрузите **недельные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в.

1. агрегируйте их в квартальные наблюдения (через усреднение)

2. задайте квартальный временной индекс

3. визуализируйте полученные наблюдения

#4. Из БД FRED загрузите месячные данные краткосрочной (3-х мес,  $rate1$ ) и долгосрочной (10-ти лет,  $rate2$ ) ставкам для США с 1990-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд  $rates$ .

1. Задайте месячный временной индекс

2. Визуализируйте ряд  $rates$  двумя способами

- отдельные графики
- общий график (два ряда на одном графике)

3. Визуализируйте ряд  $\Delta \log(rates)$  двумя способами

4. Визуализируйте ряд  $\Delta^2 \log(rates)$  двумя способами

5. Постройте гистограммы для  $rates$ ,  $\Delta rates$ ,  $\Delta^2 rates$  двумя способами

6. Постройте диаграмму рассеяния  $rate1$  vs  $rate2$

7. Постройте диаграмму рассеяния  $\Delta rate1$  vs  $\Delta rate2$

8. вычислите  $\text{corr}(rate1, rate2)$  и проверьте его значимость (формально!)

9. вычислите  $\text{corr}(\Delta rate1, \Delta rate2)$  и проверьте его значимость (формально!)

#5. Из БД FRED загрузите месячные данные по США

- краткосрочная (3-х мес) ставка
- долгосрочная (10-ти лет) ставка
- логарифм денежной массы M2

с 2000-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд

1. задайте месячный временной индекс

2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую разность
4. Вычислите корреляционную матрицу для исходного ряда и визуализируйте её
5. Вычислите корреляционную матрицу для дифференцированного ряда и визуализируйте её

#6. Из [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com) загрузите данные с 2005-01-01 по 2023-12-31 по S&P500

1. Сформируйте месячный временной ряд из цены закрытия на последний день каждого месяца
2. Задайте для него месячный временной индекс
3. Визуализируйте ряд
4. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности

#7. Из [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com) загрузите данные с 2005-01-01 по 2023-12-31 по ценам закрытия S&P500, Apple, Google

1. Сформируйте многомерный ряд из цен закрытия на последний день каждого месяца
2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности
4. Вычислите корреляционную матрицу для исходного ряда и визуализируйте её
5. Вычислите корреляционную матрицу для лог-разности ряда и визуализируйте её

## 2 ACF & PACF

Во всех задачах по умолчанию уровень значимости 5%.

#1. Рассмотрим квартальные ряды

- $x$ : первая разность логарифма ВВП США с 1990 Q1 по н.в.
- $y$ : вторая разность логарифма ВВП США с 1990 Q1 по н.в.

Для них

1. Постройте график ряда, ACF и PACF для каждого ряда
2. Значимы ли  $r(3), r_{part}(3)$ ?

#2. Рассмотрим месячные ряды

- $x$ : первая разность 3-х месячной ставки США с 2000-01 по н.в.
- $y$ : вторая разность 3-х месячной ставки США с 2000-01 по н.в.

Для них

1. Постройте график ряда, ACF и PACF для каждого ряда
2. Значимы ли  $r(4), r_{part}(4)$ ?

#3. Рассмотрим месячные ряды

- $x$ : первая разность логарифма S&P500 с 2000-01 по н.в.
- $y$ : вторая разность логарифма S&P500 с 2000-01 по н.в.

Для них

1. Постройте график ряда, ACF и PACF для каждого ряда
2. Значимы ли  $r(5), r_{part}(5)$ ?

## 3 Стационарные ряды. Модель ARMA

Во всех задачах по умолчанию уровень значимости 5%.

### 3.1 Модель ARMA с константой

#1. Пусть  $y_t$  – логарифмическая доходность US GDP (**квартальные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модель ARMA(1,1)
2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику
3. Постройте прогноз на 10 периодов

#2. Пусть  $y_t$  – логарифмическая доходность US M2 (**месячные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$MA(2) \qquad AR(2) \qquad ARMA(1, 1)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику
3. Постройте прогноз на 10 периодов

#3. Пусть  $y_t$  – логарифмическая доходность US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгоните модели

$$ARMA(2, 1) \qquad ARMA(1, 2) \qquad ARMA(2, 2)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику
3. Постройте прогноз на 10 периодов

#4. Пусть  $y_t$  – первая разность of 10-летней ставки (treasury securities with constant maturity) (**квартальные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$ARMA(1, 1) \quad ARMA(2, 1) \quad ARMA(1, 2) \quad ARMA(2, 2)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику

3. Постройте прогноз на 10 периодов

#5. Пусть  $y_t$  – первая разность of 10-летней ставки (treasury securities with constant maturity) (**месячные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$ARMA(1, 1) \quad ARMA(2, 1) \quad ARMA(1, 2) \quad ARMA(2, 2)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику

3. Постройте прогноз на 10 периодов

#6. Ряд  $y_t$  – первая разность 3-месячной ставки (treasury bill, **квартальные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$ARMA(2, 1) \quad ARMA(1, 2) \quad ARMA(2, 2)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите диагностику

3. Постройте прогноз на 10 периодов

#7. Ряд  $y_t$  – первая разность 3-месячной ставки (treasury bill, **месячные данные**) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$ARMA(2, 1) \quad ARMA(1, 2) \quad ARMA(2, 2)$$

и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите диагностику

3. Постройте прогноз на 10 периодов

## 3.2 Модель ARMA с трендом

#1. Пусть  $y_t$  – логарифм US GDP (квартальные данные) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модель ARMA(1,1) с трендом и проведите её диагностику
2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA с трендом и проведите её диагностику
3. Постройте прогноз на 10 периодов

#2. Пусть  $y_t$  – логарифм US M2 (месячные данные) с 1990 по н.в.

1. Подгоните модели

$$MA(2) \qquad AR(2) \qquad ARMA(1, 1)$$

с трендом и проведите их диагностику

2. Подгоните «оптимальную» модель ARMA и проведите её диагностику
3. Постройте прогноз на 10 периодов

## 4 Модель ARIMA

#1. Пусть  $y_t$  – логарифм US GDP (квартальные данные) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(а) Подгоните модели

Модель	drift/trend	спецификация
ARIMA(1,0,1)	+	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,1,0)	+	$\Delta y_t = \alpha_0 + \phi \Delta y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,1,1)	-	$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,2,0)	-	$\Delta^2 y_t = \phi \Delta^2 y_{t-1} + u_t$

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?



- (b) Проведите диагностику каждой модели.
  - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
3. Подгонка «оптимальной модели»
- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

#2. Пусть  $y_t$  – логарифм US M2 (**месячные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(1,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
  - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
3. Подгонка «оптимальной модели»
- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

#3. Пусть  $y_t$  – логарифм US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

(a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA

(b) проведите её диагностику

(c) Постройте прогноз на 10 периодов

**#4.** Пусть  $y_t$  – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity **месячные данные**) с 2000 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
- 2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
- 3. Подгонка «оптимальной модели»
  - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

#5. Пусть  $y_t$  – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity) (дневные данные) с 2010 по н.в.

- 1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
- 2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .
- 3. Подгонка «оптимальной модели»
  - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
  - (b) проведите её диагностику
  - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

#6. Пусть  $y_t$  – 3-месячная ставки (treasury bill, **месячные данные**) с 2000 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

(a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA

(b) проведите её диагностику

(c) Постройте прогноз на 10 периодов

#7. Пусть  $y_t$  – 3-месячная ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

#8. Пусть  $y_t$  – логарифм S&P500 (дневные данные) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для  $y_t$ .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику

(с) Постройте прогноз на 10 периодов

#9. Запишите спецификации следующих моделей

1. ARIMA(0,1,1) без сноса и со сном
2. ARIMA(0,1,2) без сноса и со сном
3. ARIMA(1,1,0) без сноса и со сном
4. ARIMA(2,1,0) без сноса и со сном
5. ARIMA(0,2,0) без сноса и со сном
6. ARIMA(1,2,0) без сноса и со сном
7. ARIMA(0,2,1) без сноса и со сном

## 5 Модель (\*)ARCH

#1. Пусть  $y_t$  – лог-доходность US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для  $y_t$  и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

#2. Пусть  $y_t$  – 3-месячная ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для раде и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

**#3.** Пусть  $y_t$  – 0-летняя ставка (treasury securities with constant maturity, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для раде и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

**#4.** Пусть  $y_t$  – лог-доходность S&P500 (**дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели

Модель	$\lambda$
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(1)-GARCH(1,1,1)	2
AR(1)-GARCH(1,1,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для  $r_{a,t}$  и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?



## А Библиотеки Python

Библиотека	Описание
pandas	Табличные данные (кросс-секции, панели, временные ряды)
numpy	Работа с массивами, преобразование данных
yfinance	Загрузка данных с <a href="https://finance.yahoo.com">finance.yahoo.com</a>
pandas-datareader	Загрузка данных из внешних БД (FRED, <a href="https://finance.yahoo.com">finance.yahoo.com</a> etc)
statsmodels	Регрессионный анализ, базовые модели временных рядов
arch	Тесты и модели временных рядов
pmdarima	ARIMA-модель
scikit-learn	Методы машинного обучения
sktime	анализ временных рядов и ML
scipy.stats	Статистические методы (распределения и др)
seaborn	Визуализация статистических данных
matplotlib	Визуализация данных
plotly	Визуализация данных

Таблица 1: Основные библиотеки Python для анализа временных рядов