А.П.Осколков

О НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

§ I. Введение. Постановка задач.

Современные теории механики сплошной среды ([I] - [3]) предполагают влияние на движение среды ее прошлого, причем в общем случае материал может иметь сколь угодно длинную "память". Однако долгая память порождает значительные трудности, преодолеть которые можно двумя путями: во-первых, рассматривать специальные классы движений, в которых память - какова бы она ни была - не имеет возможности существенно проявиться (например, вискозиметрические течения вязких жидкостей [I, гл.У]), во-вторых, выделять классы сред или материалов, в которых на напряжения в любой точке влияет лишь предыстория движения на произвольно малом интервале времени. Материалы такого типа называются материалами с инфинитезимальной памятью.

Наиболее важными из материалов с инфинитезимальной памятью являются материалы, в которых напряжения в точке X в момент времени t^* определяются первыми n производными градиента деформации $\vec{F}(X)$ по времени t в тот же момент t^*. Такие материалы называются материалами дифференциального типа сложности $n=$ I,2,.... Теория изотропных жидкостей дифференциального типа сложности n была построена Ривлином и Эриксеном (см. [I] , [2]), а на основе этой теории Колеманом и Ноллом (см. [I]) была построена более простая асимптотическая теория замедленных движений жидкостей порядка $n=$ 0,I,2,.... В случае несжимаемых жидкостей жидкость нулевого порядка - это упругая жидкость, движение которой описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}+\operatorname{grad} p=\vec{f}\ ,\quad \operatorname{div}\vec{v}=0, \qquad (\text{I.I})$$

жидкость первого порядка - это ньютоновская линейно-вязкая жидкость, движение которой описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}-\nu\Delta\vec{v}+\operatorname{grad} p=\vec{f}\ ,\quad \operatorname{div}\vec{v}=0, \qquad (\text{I.2})$$

а уравнения движения жидкостей второго порядка имеют следующий вид[I, гл.УI] :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\nu\Delta v_i+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\varkappa\left[\frac{\partial \Delta v_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right)\right]=$$

$$=f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varkappa\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right)+\beta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\right]^{*)}, \quad (\text{I.3})$$

$$i=1,2,3,\quad \operatorname{div}\vec{v}=0,$$

причем ν , $\varkappa$ и β – постоянные и $\nu>0$. Исследование сдвиговых течений жидкостей второго порядка показывает [I, гл.УI], что содержательная теория уравнений (I.3) может быть построена лишь в том случае, если и $\varkappa>0$; это условие мы будем в дальнейшем предполагать выполненным.

Частным случаем системы (I.3), точнее, ее существенно линеаризованным вариантом, является квазилинейная система третьего порядка

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}-\nu\Delta\vec{v}+\operatorname{grad}p-\varkappa\left\{\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}+\operatorname{grad}v_j\right)\right]\right\}=\vec{f},\ \operatorname{div}\vec{v}=0. \quad (\text{I.4})$$

Эта система получается из уравнений движения сплошной среды в форме Коши

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\operatorname{div}T+\vec{f}\ ,\quad \frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{I.5})$$

при определяющем уравнении

$$T=-pE+2\nu D(\vec{v})+2\varkappa\frac{d}{dt}D(\vec{v})\ ,\quad D_{ij}(\vec{v})\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (\text{I.6})$$

и описывает течения определенных классов слабоконцентрированных водных растворов полимеров, обладающие ярко выраженными релаксационными свойствами [3] – [5] . Исследования квазилинейной системы (I.4) были начаты в работах автора [6] – [II] . Настоящая статья продолжает эти исследования. Проводятся они с помощью методики, развитой в работах О.А.Ладыженской по краевым задачам математической физики и гидродинамике вязкой жидкости [I2] , [I3] . Кроме того, полученные в настоящей работе результаты существенно опираются на исследования В.А.Солонникова [I4] по разрешимости краевых задач для стационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса в пространствах $W_p^\ell(\Omega)$ и $C^{\ell+\alpha}(\Omega)$.

Работа состоит из введения и четырех параграфов. В § 2 исследуется разрешимость в различных функциональных пространствах линейной начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}-\varkappa\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}p=\vec{f}(x,t),\ \operatorname{div}\vec{v}=0\ ,\ (x,t)\in Q_T;\ \nu,\varkappa\equiv\mathrm{Const}>0, \quad (\text{I.7})$$

---

*) Здесь и ниже по повторяющимся индексам всюду предполагается суммирование.

$$\vec{v}\Big|_{t=0}=\vec{v}_0(x)\ ,\ \ x\in\Omega\ ;\ \ \vec{v}\Big|_{\partial Q_T}=0\ ; \tag{I.8}$$

во всей работе предполагается, что Ω – ограниченная область в двумерном или трехмерном эвклидовом пространстве, $0<T<\infty$. Основной результат параграфа – существование единственного решения начально-краевой задачи (I.7),(I.8), обладающего следующими свойствами: все производные, входящие в систему (I.7), принадлежат пространству $L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))$ или $L_\infty(0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\Omega))$, $\ell=2,3,\ldots,$ $0<\alpha<1$, $p>1$ и система (I.7) удовлетворяется почти всюду в Q_T. Более подробно изучена система (I.7) с $\vec{f}\equiv 0$. Отметим, что одномерные варианты начально-краевой задачи (I.7),(I.8) изучены в [I5], а в [I6] доказана неустойчивость решений одномерной начально-краевой задачи (I.7),(I.8) при $\varkappa<0$.

В § 3 исследуется разрешимость первой начально-краевой задачи для квазилинейной системы

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}+v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}-\varkappa\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}p=\vec{f}(x,t),\ \operatorname{div}\vec{v}=0,(x,t)\in Q_T \tag{I.9}$$

Исследование начально-краевой задачи (I.9),(I.8), описывающей течения линейной упруго-запаздывающей жидкости Фойгта, было начато в [8], [9]. Основной результат § 3 – доказательство существования единственного решения начально-краевой задачи (I.9),(I.8) обладающего такими свойствами: все производные, входящие в систему (I.9), принадлежит пространству $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и система (I.9) удовлетворяется почти всюду в Q_T. Этот результат существенно опирается на результаты § 2 по линейной начально-краевой задаче (I.7),(I.8). Кроме того, в том же классе функций исследуется разрешимость модифицированной начально-краевой задачи тепловой конвекции (см.(3.47)-(3.49)), исследование которой было начато в [II].

§ 4 посвящен доказательству существования по крайней мере одного "слабого" решения $\vec{v}(x,t)\in L_\infty(0,T;H(\Omega))$ первой начально-краевой задачи для квазилинейной системы

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}+v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}+\operatorname{grad}p-\varkappa\left\{\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_k\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_k\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[V_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{grad}v_j\right]\right\}= \tag{I.10}$$
$$=\vec{f}(x,t)\ ,\ \operatorname{div}\vec{v}=0\ ,\ (x,t)\in Q_T\ ,$$

которая получается из системы (I.4) линеаризацией нелинейного члена $\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{grad}v_j\right]$. В системе (I.10) $\vec{V}(x,t)$ – известный вектор, обладающий следующими свойствами: $\operatorname{div}\vec{V}=0$ в Q_T и $\max\limits_{Q_T}|\vec{V}_{xx}(x,t)|\equiv A_V<\infty$. При $\vec{V}(x,t)\equiv 0$ исследование начально-краевой задачи (I.10),(I.8) было начато в [11] . Кроме того, в § 4 исследуется "слабая" разрешимость соответствующей задаче (I.10),(I.8) модифицированной начально-краевой задачи тепловой конвекции (см.(4.32)-(4.34)).

В § 5 исследуется разрешимость и устойчивость решений на любом конечном интервале времени в различных функциональных пространствах периодической начально-краевой задачи для альтернативного уравнения Кортевега - де Фриза

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^3 v}{\partial t\partial x^2}=0,\quad 0\le x\le 2\pi,\quad 0\le t\le T<\infty, \tag{I.11}$$

являющегося одним из модельных уравнений при изучении длинных волн в нелинейных диспергирующих средах [17] . Задача Коши для уравнения (I.11) изучена в [18] . Внимание автора к уравнению (I.11) было привлечено тем, что оно является как бы одномерным квазилинейным вариантом системы (I.9) - основного объекта настоящей работы - и изучение разрешимости начально-краевых задач для уравнения (I.11) может быть проведено с помощью тех же методов, что и квазилинейной начально-краевой задачи (I.9),(I.8).

На протяжении всей работы будут использоваться следующие функциональные пространства: если X - банахово пространство функций, определенных в области Ω , то через $L_\infty(0,T;X)$ обозначается банахово пространство функций $v(x,t)$, которые при почти всех $t\in(0,T)$ принадлежат X и для них конечна норма

$$\|v\|_{L_\infty(0,T;X)}\equiv \operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\|v(x,t)\|_X. \tag{I.12}$$

Далее, через $W^1_\infty(0,T;X)$ обозначается пространство функций $v(x,t)$, которые вместе с производной $v_t(x,t)$ принадлежат при всех $t\in(0,T)$ пространству X и для них конечна норма

$$\|v\|_{W^1_\infty(0,T;X)}\equiv\|v\|_{L_\infty(0,T;X)}+\|v_t\|_{L_\infty(0,T;X)}. \tag{I.13}$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для любой функции $v(x,t)\in W^1_\infty(0,T;X)$ имеет место оценка:

$$\max_{0\le t\le T-\Delta t}\|v(x,t+\Delta t)-v(x,t)\|_X\le\|v\|_{W^1_\infty(0,T;X)}\cdot\Delta t, \tag{I.14}$$

и потому норма в $W^1_\infty(0,T;X)$ в действительности может быть определена так:

$$\|v\|_{W^1_\infty(0;T;X)}\equiv\max_{0\le t\le T}\|v(x,t)\|_X+\|v_t\|_{L_\infty(0,T;X)}. \tag{I.15}$$

Наконец, через $C[0,T;X]$ обозначается пространство функций $v(x,t)$, которые непрерывны по $t\in[0,T]$ в норме пространства X

и для них конечна норма

$$\|v\|_{C[0,T;X]} \equiv \max_{0\le t\le T} \|v(x,t)\|_X . \qquad (1.16)$$

Исследования автора по неньютоновским жидкостям в значительной степени стимулированы поддержкой О.А.Ладыженской и ее постоянным интересом (см.,например, [12], [19]) к построению и исследованию модельных систем уравнений, обладающих теми или иными свойствами, которыми обычно наделяют в механике сплошных сред уравнения Навье-Стокса, но доказать которые для уравнений Навье-Стокса пока не удается. Такие системы, содержащие обычно малый параметр и регуляризующие тем или иным способом уравнения Навье-Стокса, могут оказаться полезными при численном решении уравнений Навье-Стокса [12]. Одной из таких модельных систем, линейно регуляризующих уравнения Навье-Стокса и имеющих к тому же, как отмечалось выше, непосредственный физический смысл (то-есть регуляризующих уравнения Навье-Стокса не только математически, но и физически), является система (1.9), для которой начально-краевая задача (1.9), (1.8) однозначно разрешима в целом в общем трехмерном случае в различных "хороших"классах функций, в том числе - при условиях на $\partial\Omega$, $\vec{f}(x,t)$ и $\vec{v}_0(x)$, сформулированных в § 3 - в классе функций, обладающих всеми входящими в уравнения (1.9) производными (из определенных функциональных пространств) и удовлетворяющих системе (1.9) почти всюду в Q_T . При этом, как показано в [8], [9] (см.также более общую ситуацию в [11]), "сильные" обобщенные решения начально-краевой задачи (1.9),(1.8) в двумерном случае и "слабые" обобщенные решения задачи (1.9),(1.8) в общем трехмерном случае (оба эти решения для начально-краевой задачи (1.9),(1.8) определяются однозначно [8] , [9]) сходятся при $\varkappa\to 0$ соответственно к "сильному" обобщенному решению (решению О.А.Ладыженской) и "слабому" обобщенному решению (решению Э.Хопфа) первой начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса (1.2). Возможно, регуляризующие свойства системы (1.9) проявятся и при решении других начально-краевых задач для системы (1.9), например, задач, в которых имеются свободные (неизвестные) границы.

§ 2. Разрешимость линейной начально-краевой задачи (1.7),(1.8)

В настоящем параграфе исследуется разрешимость в различных функциональных пространствах линейной нестационарной начально-краевой задачи (1.7),(1.8). Полученные здесь результаты, особенно теорема 2.1, будут существенно использованы в § 3 при исследовании разрешимости квазилинейной начально-краевой задачи (1.9), (1.8) и найдут в дальнейшем, вероятно, и другие приложения. Основные результаты параграфа содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 2.I. Пусть $\partial\Omega\subset C^{\ell}$, $\vec{v}_0(x)\in W_p^{\ell}(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))$, $\ell=2,3,\dots,p>1$. Тогда начально-краевая задача (I.7), (I.8) имеет, и притом единственное, решение $\vec{v}(x,t), p(x,t)$: $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_p^{\ell}(\Omega))$, $p_x(x,t)\in L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))$, которое удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнениям (I.7), удовлетворяет (по непрерывности) начально-краевым условиям (I.8), и для него имеют место оценки:

$$\|\vec{v}\|_{W_\infty^1(0,T;W_p^{\ell}(\Omega))}+\|p_x\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}\le C_1(\|\vec{v}_0\|_{W_p^{\ell}(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))},\partial\Omega,T) \tag{2.I}$$

$$\max_{0\le t\le T-\Delta t}\|\vec{v}(x,t+\Delta t)-\vec{v}(x,t)\|_{W_p^{\ell}(\Omega)}\le C_2(C_1,T)\Delta t. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. Пусть $\partial\Omega\subset C^{\ell+\alpha}$; $\vec{v}_0(x)\in C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega)$, $div\,\vec{v}_0(x)=0$, $x\in\Omega$, $\vec{v}_0|_{\partial\Omega}=0$; $\vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega))$, $\ell=2,3,\dots,0<\alpha<1$. Тогда начально-краевая задача (I.7), (I.8) имеет, и притом единственное, решение $\vec{v}(x,t),p(x,t)$: $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega))$, $p_x\in L_\infty(0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega))$, которое удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнениям (I.7), удовлетворяет начально-краевым условиям (I.8), и для него имеют место оценки:

$$\|\vec{v}\|_{W_\infty^1(0,T;C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega))}+\|p_x\|_{L_\infty(0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega))}\le$$
$$\le C_3(\|\vec{v}_0\|_{C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega))},\partial\Omega,T), \tag{2.3}$$

$$\max_{0\le t\le T-\Delta t}\|\vec{v}(x,t+\Delta t)-\vec{v}(x,t)\|_{C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega)}\le C_4(C_3,T)\Delta t. \tag{2.4}$$

Теоремы 2.I и 2.2 доказываются по одной схеме, и поэтому мы приведем доказательство лишь одной из них – теоремы 2.I, сделав по ходу ее доказательства замечания, необходимые для доказательства теоремы 2.2.

Применим к обеим частям уравнений (I.7) оператор $P_{\overset{\circ}{J}}$ проектирования на подпространство $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ [I2, гл.I]. Полагая по определению

$$A \equiv P_J \Delta, \quad \vec{f}_J(x,t) \equiv P_J \vec{f}(x,t), \tag{2.5}$$

получим для нахождения $\vec{v}(x,t)$ начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(I - \varkappa A)\vec{v} - \nu A\vec{v} = \vec{f}_J(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.6}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \; x \in \Omega; \quad \vec{v}\big|_{\partial Q_T} = 0, \tag{2.7}$$

причем в силу известных свойств оператора P_J [12, гл.I] $\vec{f}_J(x,t) \in L_\infty(0,T; W_p^{\ell-2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))$.

Из результатов В.А.Солонникова [14] следует, что оператор $I - \varkappa A$, переводящий пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$ *) в пространство $W_p^{\ell-2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, имеет ограниченный обратный $(I - \varkappa A)^{-1}$, устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между пространствами $W_p^{\ell-2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$:

$$\|(I - \varkappa A)^{-1}\vec{v}\|_{W_p^\ell(\Omega)} \leqslant C_5 \|\vec{v}\|_{W_p^{\ell-2}(\Omega)}, \; \forall \vec{v} \in W_p^{\ell-2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega), \tag{2.8}$$

где C_5 – норма оператора $(I - \varkappa A)^{-1}$.

Применим к обеим частям уравнения (2.6) оператор $(I - \varkappa A)^{-1}$, проинтегрируем результат по t от 0 до $t \leqslant T$, воспользуемся начальным условием (2.7) и положим по определению

$$\vec{F}(x,t) \equiv \vec{v}_0(x) + \int_0^t (I - \varkappa A)^{-1} \vec{f}_J(x,\tau)\,d\tau, \quad B = \nu (I - \varkappa A)^{-1} A. \tag{2.9}$$

Очевидно, что $\vec{F}(x,t) \in W_\infty^1(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))$ и B является линейным ограниченным оператором в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$. Тогда для нахождения $\vec{v}(x,t)$ получаем следующее операторно-интегральное уравнение вольтерра-фредгольмовского типа:

$$\vec{v}(x,t) = \vec{F}(x,t) + \int_0^t B\vec{v}(x,\tau)\,d\tau, \quad x \in \Omega, \; 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{2.10}$$

уравнение (2.10) решается в пространстве $W_\infty^1(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))$ и на таких функциях оно эквивалентно начально-краевой задаче (2.6), (2.7).

Из теории вольтерра-фредгольмовских интегрально-операторных уравнений следует (см., например, [20]), что уравнение (2.10) имеет в пространстве $W_\infty^1(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))$ единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Найдя это решение, мы можем затем из уравнений (1.7) определить $\operatorname{grad} p(x,t)$:

---

*) $\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \equiv W_p^\ell \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

$$grad\, p(x,t)=\vec{f}(x,t)-\left\{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}-\varkappa\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}\right\}, \tag{2.11}$$

причем в силу свойств $\vec{f}(x,t)$ и $\vec{v}(x,t)$ $grad\, p$ будет обладать требуемыми в теореме 2.1 свойствами.

Оценку (2.1) для $\vec{v}(x,t)$ проще всего получить из уравнения (2.10) "малыми шагами по t ". Именно, из уравнения (2.10),(2.8) и (2.9) имеем:

$$\max_{0\le t\le\Delta t}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le$$

$$\le\|\vec{v}_0\|_{W_p^\ell(\Omega)}+C_5\Delta t\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}+\|B\|\cdot\Delta t\cdot\max_{0\le t\le\Delta t}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}, \tag{2.12}$$

откуда при $\Delta t=\frac{1}{2\|B\|}$ получим:

$$\max_{0\le t\le\Delta t}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le 2\|\vec{v}_0\|_{W_p^\ell(\Omega)}+\frac{C_5}{\|B\|}\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}. \tag{2.13}$$

Выбирая $\vec{v}(x,\Delta t)$ за новое начальное условие, используя (2.9) и (2.10), мы получим для $t:\Delta t<t<2\Delta t$ уравнение

$$\vec{v}(x,t)=\vec{v}(x,\Delta t)+\int_{\Delta t}^{t}(I-\varkappa A)^{-1}\vec{f}(x,\tau)d\tau+\int_{\Delta t}^{t}B\vec{v}(x,\tau)d\tau, \tag{2.14}$$

из которого аналогично (2.13) получим оценку:

$$\max_{\Delta t\le t\le 2\Delta t}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le 2\|\vec{v}(x,\Delta t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}+\frac{C_5}{\|B\|}\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}\le$$

$$\le 4\|\vec{v}_0\|_{W_p^\ell(\Omega)}+\frac{2C_5}{\|B\|}\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}. \tag{2.15}$$

Проделав такие оценки $[2\|B\|\cdot T]+1$ раз, мы получим неравенство:

$$\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le C_6\left(\|\vec{v}_0\|_{W_p^\ell(\Omega)},\ \|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))},C_5,T\right). \tag{2.16}$$

Далее, дифференцируя уравнение (2.10) по t, получим:

$$v_t=(I-\varkappa A)^{-1}\vec{f}(x,t)+B\vec{v}(x,t),\quad 0\le t\le T, \tag{2.17}$$

Откуда, используя неравенство (2.8) и оценку (2.16), получим оценку:

$$\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}_t(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le C_5\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}+\|B\|\cdot\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}(x,t)\|_{W_p^\ell(\Omega)}\le$$

$$\le C_7\left(\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))},C_5,C_6,\|B\|\right). \tag{2.18}$$

После этого из (2.II) и оценок (2.I6) и (2.I8) будем иметь:

$$\|\rho_x\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))} \le C_8(\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(\Omega))}, C_6, C_7) . \qquad (2.19)$$

Оценки (2.I6),(2.I8),(2.I9) и составляют вместе оценку (2.I). Наконец, оценка (2.2) следует из оценки (2.I) и формулы Ньютона-Лейбница

$$\vec{v}(x,t) = \vec{v}_0(x) + \int_0^t \vec{v}_t(x,\tau)\,d\tau . \qquad (2.20)$$

Итак, существование решения начально-краевой задачи (I.7), (I.8) с указанными в теореме 2.I свойствами и оценки (2.I),(2.2) для этого решения доказаны. Единственность решения начально-краевой задачи (I.7),(I.8) имеет место для значительно более "плохих" решений *). Тем самым теорема 2.I доказана.

Замечание. Известно (см., например, [I2, гл.I]), что если $\vec{f}(x,t) \in L_\infty(0,T;C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}))$, то $\vec{f}_J(x,t) \equiv P_{\mathring{J}}\vec{f}(x,t) \in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega))$. Далее, из результатов В.А.Солонникова [I4] следует, что оператор $I - \varkappa A \equiv I - \varkappa P_{\mathring{J}}\Delta$, переводящий пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega) \equiv C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \overset{\circ}{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega)$ в пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\ell-2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega)$, имеет ограниченный обратный $(I - \varkappa A)^{-1}$, устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между пространствами $\overset{\circ}{C}{}^{\ell-2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega)$. Этих двух замечаний достаточно для доазательства теоремы 2.2, в ходе которого начально-краевая задача (I.7),(I.8) по-прежнему сводится к эквивалентному ей операторно-интегральному уравнению (2.I0), в котором теперь $\vec{F}(x,t) \in W_\infty^1(0,T;\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega))$ и B – линейный ограниченный оператор в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega)$; тогда уравнение (2.I0) имеет единственное решение $\vec{v}(x,t)$ из $W_\infty^1(0,T;\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{J}(\Omega))$, которое вместе с $\rho(x,t)$, вычисленным из (2.II), и дает единственное решение начально-краевой задачи

---

*) В самом деле, пусть $\vec{\omega}(x,t)$ – обобщенное решение однородной задачи (I.7),(I.8) из пространства $W_\infty^1(0,T;H(\Omega))$, имеющее производную $\vec{\omega}_{xt} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и удовлетворяющее при $\forall t \in (0,T]$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega (\vec{\omega}_t(x,t)\vec{\Phi}(x) + \nu\vec{\omega}_x\vec{\Phi}_x + \varkappa\vec{\omega}_{xt}\vec{\Phi}_x)\,dx = 0, \ \forall \vec{\Phi}(x) \in H(\Omega).$$

Полагая в этом тождестве $\vec{\Phi}(x) \equiv \vec{\omega}(x,t)$, получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\vec{\omega}^2 + \varkappa\vec{\omega}_x^2)\,dx \le 0, \ 0<t\le T, \ \vec{\omega}\big|_{t=0} = 0,$$

откуда $\vec{\omega} \equiv 0$ в Q_T. Существование такого обобщенного решения доказано в § 3 (теоремы 3.2 и 3.3) сразу для более сложной квазилинейной начально-краевой задачи (I.9), (I.8).

(I.7),(I.8) с указанными в теореме 2.2 свойствами.

Если в уравнениях (I.7) $\vec{f}(x,t)\equiv 0$, то решение начально-краевой задачи (I.7),(I.8) или, что то же, операторно-интегрального уравнения

$$\vec{v}(x,t)=\vec{v}_0(x)+\int_0^t B\vec{v}(x,\tau)d\tau,\quad 0<t\leq T, \tag{2.21}$$

может быть представлено в виде ряда Коши-Ковалевской

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B^k\vec{v}_0(x)\equiv e^{tB}\vec{v}_0(x). \tag{2.22}$$

Известно (см., например, [2I]), что если оператор B является ограниченным в банаховом пространстве X, то ряд (2.22), а также ряды, полученные дифференцированием (2.22) по t любое конечное число раз $m=1,2,\dots$, сходятся при $\forall t\in[0,T]$, $\forall T<\infty$, по норме пространства X и имеют место оценки:

$$\left\|\frac{\partial^m\vec{v}}{\partial t^m}\right\|_{C[0,T;X]}\leq\|B\|^m e^{T\|B\|}\|\vec{v}_0\|_X. \tag{2.23}$$

Выше было показано, что оператор $B\equiv\nu(I-\varkappa A)^{-1}A$, $A\equiv P_{\overset{\circ}{J}}\Delta$, является ограниченным оператором в пространствах $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_p(\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $\ell=2,3,\dots,0<\alpha<1$, $p>1$. Поэтому сформулированное выше предложение о свойствах ряда (2.22) позволяет утверждать, что для решений начально-краевой задачи (I.7),(I.8) с $\vec{f}(x,t)\equiv 0$ справедливы следующие результаты.

<u>Теорема 2.3</u>. Пусть $\partial\Omega\subset C^\ell$, $\vec{v}_0(x)\in W^\ell_p(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\ell=2,3,\dots,p>1$, $\vec{f}\equiv 0$. Тогда решение $\vec{v}(x,t)$, $p(x,t)$ начально-краевой задачи (I.7), (I.8), существование которого доказано в теореме 2.I, обладает следующими дополнительными свойствами: при каждом $m=1,2,\dots$ $\frac{\partial^m\vec{v}}{\partial t^m}\in C[0,T;\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_p(\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)]$, $\frac{\partial^m p_x}{\partial t^m}\in C[0,T;W^{\ell-2}_p(\Omega)]$ и имеют место оценки

$$\left\|\frac{\partial^m\vec{v}}{\partial t^m}\right\|_{C[0,T;W^\ell_p(\Omega)]}+\left\|\frac{\partial^m p_x}{\partial t^m}\right\|_{C[0,T;W^{\ell-2}_p(\Omega)]}\leq C_9(m,T,\partial\Omega)\|\vec{v}_0\|_{W^\ell_p(\Omega)}. \tag{2.24}$$

<u>Теорема 2.4</u>. Пусть $\partial\Omega\subset C^{\ell+\alpha}$; $\vec{v}_0(x)\in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\operatorname{div}\vec{v}_0(x)=0$, $x\in\Omega$, $\vec{v}_0|_{\partial\Omega}=0$, $\ell=2,3,\dots,0<\alpha<1$; $\vec{f}\equiv 0$. Тогда решение $\vec{v}(x,t)$, $p(x,t)$ начально-краевой задачи (I.7), (I.8), существование которого доказано в теореме 2.2, обладает следующими дополнительными свойствами: при каждом $m=1,2,\dots$ $\frac{\partial^m\vec{v}}{\partial t^m}\in C[0,T;\overset{\circ}{C}{}^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)]$,

$\frac{\partial^m p_x}{\partial t^m} \in C[0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega)]$ и имеют место оценки:

$$\left\|\frac{\partial^m \vec v}{\partial t^m}\right\|_{C[0,T;C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega)]}+\left\|\frac{\partial^m p_x}{\partial t^m}\right\|_{C[0,T;C^{\ell-2+\alpha}(\bar\Omega)]}\le C_{10}(m,T,\partial\Omega)\|\vec v_0\|_{C^{\ell+\alpha}(\bar\Omega)}. \qquad (2.25)$$

Теоремы 2.3 и 2.4 можно доказать и иным способом. Именно, если $\vec f(x,t)\equiv 0$, то решение $\vec v(x,t)$ начально-краевой задачи (I.7), (I.8) можно представить в виде ряда Фурье

$$\vec v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\gamma_n t}\,\vec v_n(x), \qquad (2.26)$$

где γ_n и $\vec v_n(x)$ – собственные числа и (нормированные в $L_2(\Omega)$) собственные функции спектральной задачи

$$A\vec v(x)-\frac{1}{\varkappa+\nu\gamma^{-1}}\vec v(x)=0,\ \ x\in\Omega;\ \ \vec v\big|_{\partial\Omega}=0,\ \ A\equiv P_J\Delta, \qquad (2.27)$$

или, что то же, спектральной задачи

$$\Delta\vec v(x)-\frac{1}{\varkappa+\nu\gamma^{-1}}\vec v(x)+\mathrm{grad}\,p(x)=0,\ \mathrm{div}\,\vec v=0,\ x\in\Omega;\ \vec v\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2.28)$$

а $C_n=\int_\Omega \vec v_0(x)\vec v_n(x)\,dx$, $n=1,2,\ldots$. Собственные числа γ_n спектральной задачи (2.27) связаны с собственными числами λ_n^2 задачи Штурма–Лиувилля

$$A\vec v(x)+\lambda^2\vec v=0,\ x\in\Omega;\ \ \vec v\big|_{\partial\Omega}=0 \qquad (2.29)$$

простым соотношением:

$$\gamma_n=-\frac{\nu\lambda_n^2}{1+\varkappa\lambda_n^2},\quad n=1,2,\ldots, \qquad (2.30)$$

а собственные функции $\vec v_n(x)$ у задач (2.27) и (2.29) тождественно совпадают. Известно [I2, гл.II], что спектральная задача (2.29) или, что то же, спектральная задача

$$\nu\Delta\vec v(x)+\lambda^2\vec v+\mathrm{grad}\,p=0,\ \mathrm{div}\,\vec v=0,\ x\in\Omega;\ \vec v\big|_{\partial\Omega}=0 \qquad (2.31)$$

имеет счетное множество положительных собственных чисел λ_n^2: $0<\lambda_1^2\le\lambda_2^2\le\ldots$, $\lambda_n^2\to\infty$ при $n\to\infty$, каждое из них имеет конечную кратность, и собственные функции $\{\vec v_n(x)\}$ задачи (2.29) – а потому и задачи (2.27) – полны и ортогональны в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H(\Omega)$. Из (2.30) тогда следует, что спектральная задача (2.27) тоже имеет счетное множество конечнократных собственных чисел γ_n, все они отрицательны и лежат на конечном интервале $\left(-\frac{\nu}{\varkappa},-\frac{\nu\lambda_1}{1+\varkappa\lambda_1^2}\right]$, сгущаясь к его левому концу $-\frac{\nu}{\varkappa}$ при $n\to\infty$. Последнее свойство спектра $\{\gamma_n\}$ позволяет утверждать, что ряд (2.26) и ряды, полученные его дифференцированием по t любое конечное число раз $m=1,2,\ldots$, сходятся при $\forall t\in[0,T]$ по норме того пространства, которому принадлежит $\vec{v}_0(x)$, т.е. либо по норме $W_p^{\ell}(\Omega)$ (теорема 2.3), либо по норме $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$ (теорема 2.4). Оценки (2.24) и (2.25) получаются после этого (с использованием (2.II)) известными в методе Фурье приемами [I3] .

Из формул (2.22) и (2.26) для решения начально-краевой задачи (I.7),(I.8) при $f(x,t)\equiv 0$ отчетливо видно, что начально-краевая задача (I.7),(I.8) является гиперболической в том смысле, что решать ее можно как в сторону положительных, так и в сторону отрицательных значений t и решение ее во все моменты времени $-\infty<t<\infty$ обладает, вообще говоря, той же гладкостью по пространственным переменным, что и при $t=0$.

Результаты, аналогичные теоремам 2.I-2.4, справедливы и для скалярной гиперболической начально-краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T;\quad \nu,\varkappa\equiv const>0,\\ &v|_{t=0}=v_0(x),\ x\in\Omega;\quad v|_{\partial Q_T}=0. \end{aligned}\right\}\qquad (2.32)$$

Отметим к тому же, что для классических решений начально-краевой задачи (2.32) при $f(x,t)\equiv 0$ справедлив следующий "слабый" принцип максимума и минимума.

<u>Теорема 2.5</u>. Пусть $v(x,t)$ – классическое решение начально-краевой задачи (2.32) с $f(x,t)\equiv 0$ в Q_T. Тогда $v(x,t)$ достигает максимума на "параболической" границе цилиндра Q_T, т.е. $\partial Q_T\cup\{(x,t):x\in\Omega,t=0\}$, если

$$\Delta v_0(x)\geqslant 0\ ,\ x\in\Omega, \qquad (2.33)$$

и $v(x,t)$ достигает минимума на "параболической" границе Q_T, если

$$\Delta v_0(x)\leqslant 0\ ,\ x\in\Omega. \qquad (2.34)$$

В самом деле, предположим для определенности, что $\Delta v_0(x)\geqslant 0$, $x\in\Omega$, и пусть, вопреки утверждению первой части теоремы, функция $v(x,t)$ достигает максимума в некоторой "внутренней" точке (x_0,t_0) цилиндра Q_T : $x_0\in\Omega$, $0<t_0\leqslant T$. Очевидно, что в этой точке

$$\Delta v(x_0,t_0)\leqslant 0. \qquad (2.35)$$

С другой стороны, используя уравнение (2.32) ($f\equiv 0$) и интегрируя по частям по t, получим неравенство:

$$\Delta v(x_0,t_0)=\Delta v(x_0,0)e^{-\nu\varkappa^{-1}t_0}+\frac{1}{\varkappa}e^{-\nu\varkappa^{-1}t_0}\int_0^{t_0}\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t)e^{\nu\varkappa^{-1}t}dt=$$

$$=\{\Delta v(x_0,0)+\frac{1}{\varkappa}[v(x_0,t_0)e^{\nu\varkappa^{-1}t_0}-v(x_0,0)-\frac{\nu}{\varkappa}\int_0^{t_0}v(x_0,t)e^{\nu\varkappa^{-1}t}dt\}e^{-\nu\varkappa^{-1}t_0}>$$

$$>\{\Delta v(x_0,0)+\frac{1}{\varkappa}[v(x_0,t_0)e^{\nu\varkappa^{-1}t_0}-v(x_0,0)-\frac{\nu}{\varkappa}\ v(x_0,t_0)\int_0^{t_0}e^{\nu\varkappa^{-1}t}dt]\}e^{-\nu\varkappa^{-1}t_0}> \tag{2.36}$$

$$>\{\Delta v(x_0,0)+\frac{1}{\varkappa}[v(x_0,t_0)-v(x_0,0)]\}e^{-\nu\varkappa^{-1}t_0}>0,$$

которое противоречит (2.35). Вторая половина теоремы 2.5 доказывается аналогично. В случае одной пространственной переменной эта теорема сформулирована и доказана в [I5] .

§ 3. О решениях почти всюду начально-краевой задачи (I.9),(I.8)

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 3.I. Пусть $\partial\Omega\subset C^2$, $\vec{v}_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\vec{f}_t\in L_2(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (I.9), (I.8) имеет, и притом единственное, решение $\vec{v}(x,t)$, $p(x,t)$: $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega))$, $p_x\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, которое удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнениям (I.9) и удовлетворяет (по непрерывности) начально-краевым условиям (I.8).

Путь доказательства теоремы 3.I следующий: сначала мы изучим – более подробно, чем в [8] и [9] – один класс обобщенных решений начально-краевой задачи (I.9),(I.8), обладающих при $\forall t\in[0,T]$ производными $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xt}\in L_2(\Omega)$, слабо непрерывными по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$, а затем, используя доказанные в § 2 результаты по разрешимости линеаризованной начально-краевой задачи (I.7),(I.8), покажем, что это обобщенное решение будет решением начально-краевой задачи (I.9),(I.8) почти всюду в Q_T.

Назовем "сильным" обобщенным решением начально-краевой задачи (I.9),(I.8) функцию $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;H(\Omega))$, для которой $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xt}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xt}$ слабо непрерывны по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$, которая удовлетворяет при $\forall t\in[0,T]$ интегральному тождеству

$$\iint_{Q_t}\{\vec{v}_t(x,t)\vec{\Phi}(x,t)+\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x+\varkappa\vec{v}_{xt}\vec{\Phi}_x+v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi}\}dQ=\iint_{Q_t}\vec{f}\vec{\Phi}dQ \tag{3.I}$$

при $\forall\vec{\Phi}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$ и удовлетворяет начальному условию $\vec{v}|_{t=0}=\vec{v}_0(x)$. Тогда справедлива следующая теорема (см. [9], [8, § 8]).

Теорема 3.2. Пусть $\vec{v}_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\vec{f}_t\in L_2(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (I.9), (I.8) имеет, и притом единственное, "сильное" обобщенное решение $\vec{v}(x,t)$, и для этого решения справедливы две серии оценок: энергетическое неравенство

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}}\left\{\|\vec{v}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\varkappa\|\vec{v}_x\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}\le C_1\left(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)},T\right); \qquad (3.2)$$

в трехмерном случае оценка

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}}\left\{\|\vec{v}_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\vec{v}_{xt}\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}\le C_2\left(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))},\|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)},\frac{1}{\varkappa}\right), \qquad (3.3)$$

причем $C_2\to\infty$ при $\varkappa\to 0$; в двумерном случае равномерно по $\varkappa\in[0,1]$ оценка

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}}\left\{\|\vec{v}_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\varkappa\|\vec{v}_{xt}\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}\le C_3\left(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))},\|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)},\frac{1}{\nu}\right). \qquad (3.3')$$

Приступая к доказательству теоремы 3.2, отметим прежде всего, что для решений задачи (I.9),(I.8) производная $\vec{v}_t(x,0)$ определяется однозначно как элемент пространства $W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$ и для нее имеют место оценки:

$$\|\vec{v}_t(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}+\varkappa\|\vec{v}_{tx}(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}\le C_4\left(\|\vec{f}(x,0)\|_{L_2(\Omega)},\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right), \qquad (3.4)$$

$$\|\vec{v}_t(x,0)\|_{W_2^2(\Omega)}\le C_5\left(\|\vec{f}(x,0)\|_{L_2(\Omega)},\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\Omega,\frac{1}{\varkappa}\right), \qquad (3.5)$$

причем $C_5\to\infty$ при $\varkappa\to 0$. Действительно, в силу уравнений (I.9)

$$\vec{v}_t(x,0)-\varkappa\Delta\vec{v}_t(x,0)+\mathrm{grad}\,p(x,0)=\vec{f}(x,0)+\nu\Delta\vec{v}_0(x)-v_{0k}(x)\frac{\partial\vec{v}_0(x)}{\partial x_k}\equiv\vec{F}(x),\ x\in\Omega, \qquad (3.6)$$

причем в силу условий на $\vec{v}_0(x)$ и $\vec{f}(x,0)$ $\vec{F}(x)\in L_2(\Omega)$ и $\|\vec{F}\|_{L_2(\Omega)}\le C\left(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}(x,0)\|_{L_2(\Omega)}\right)$. Из теоремы об ортогональном разложении векторного пространства $L_2(\Omega)$ следует, что $\vec{v}(x,0)-\varkappa\Delta\vec{v}_t(x,0)$ есть проекция $\vec{F}(x)$ на соленоидальное подпространство $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ ([I2]). После этого, решая задачу Дирихле

$$\varkappa\Delta\vec{v}_t(x,0)-\vec{v}_t(x,0)=-P_J\vec{F}(x),\ x\in\Omega;\quad \vec{v}_t|_{\partial\Omega}=0, \qquad (3.7)$$

мы получим, что $\vec{v}_t(x,0)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$, а оценки (3.4) и (3.5) для $\vec{v}_t(x,0)$ представляют собою соответственно первое и второе основное неравенство для эллиптической краевой задачи (3.7) [I3] .

Для доказательства разрешимости начально-краевой задачи (I.9),(I.8) воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$, $k=1,2,\dots$ – полная в $W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$ система функций, ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Тогда для любой функции $\vec{v}_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$ найдется последовательность функций $\{\vec{v}_{(n)}(x)\}$:

$$\vec{v}_{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n} \overset{\circ}{C}_{kn}\,\vec{\varphi}_k(x), \quad n=1,2,\dots, \tag{3.8}$$

которая сходится к $\vec{v}_0(x)$ при $n\to\infty$ в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ и имеют место неравенства:

$$\|\vec{v}_{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)}\le C_6\|\vec{v}_0\|_{W_2^1(\Omega)},\ \|\vec{v}_{(n)}\|_{W_2^2(\Omega)}\le C_7\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\ n=1,2,\dots. \tag{3.9}$$

Будем искать приближенные решения $\vec{v}^n(x,t)$ задачи (I.9),(I.8) в виде

$$\vec{v}^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t)\vec{\varphi}_k(x),\ n=1,2,\dots, \tag{3.10}$$

где функции $C_{kn}(t)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\int_\Omega\Big(\vec{v}^n_t(x,t)\vec{\varphi}_\ell(x)+\varkappa\vec{v}^n_{xt}\vec{\varphi}_{\ell x}+\nu\vec{v}^n_x\vec{\varphi}_{\ell x}-v^n_k\vec{v}^n\vec{\varphi}_{\ell x_k}\Big)dx=\int_\Omega\vec{f}\vec{\varphi}_\ell\,dx,\ \ell=1,\dots,n,\ 0<t\le T, \tag{3.11}$$

и начальных условий Коши

$$C_{\ell n}\Big|_{t=0}=\overset{\circ}{C}_{\ell n},\quad \ell=1,\dots,n. \tag{3.12}$$

Умножая ℓ-ое уравнение (3.11) на $C_{\ell n}(t)$, суммируя по $\ell=1,\dots,n$ и интегрируя по частям, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big[(\vec{v}^n)^2+\varkappa(\vec{v}^n_x)^2\Big]dx+\nu\int_\Omega(\vec{v}^n_x)^2dx=\int_\Omega\vec{f}\,\vec{v}^n dx,\ 0<t\le T,\ n=1,2,\dots, \tag{3.13}$$

из которого, применяя неравенство Гельдера, лемму Гронуолла ([I2 , гл.VI]) и первое из неравенств (3.9), получим неравенство

$$\max_{0\le t\le T}\int_\Omega\Big\{|\vec{v}^n(x,t)|^2+\varkappa|\vec{v}^n_x|^2\Big\}dx+\nu\iint_{Q_T}|\vec{v}^n_x|^2dQ\le C_8(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)},T),\quad n=1,2,\dots. \tag{3.14}$$

Из ортонормированности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ в $L_2(\Omega)$ и оценки (3.14) следует априорная оценка для возможных решений задачи Коши (3.11),(3.12):

$$\max_{0\le t\le T}\sum_{\ell=1}^{n} C^2_{\ell n}(t)\le C_8,\quad n=1,2,\dots, \tag{3.15}$$

гарантирующая однозначную разрешимость задачи Коши (3.11),(3.12) при любом $n=1,2,\dots$ на любом конечном интервале времени $[0,T]$.

Умножим l-ое уравнение (3.II) на $C'_{ln}(t)$, просуммируем по $l=1,\dots,n$ и запишем полученное равенство при $t=0$. Интегрируя по частям, получим равенство

$$\int_\Omega \{|\vec{v}_t^n(x,0)|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\}dx=\nu\int_\Omega \vec{v}_t^n(x,0)\Delta\vec{v}_{(n)}(x)dx -$$
$$-\int_\Omega \vec{v}_t^n(x,0)v_{(n)k}(x)\frac{\partial\vec{v}_{(n)}(x)}{\partial x_k}dx+\int_\Omega \vec{f}(x,0)\vec{v}_t^n(x,0)dx,\quad n=1,2,\dots, \tag{3.16}$$

из которого, применяя неравенство Гельдера и второе из неравенств (3.9), получим оценку

$$\int_\Omega \{|\vec{v}_t^n(x,0)|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\}dx \leqslant C_9(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}(x,0)\|_{L_2(\Omega)}),\ n=1,2,\dots \tag{3.17}$$

являющуюся конечномерным аналогом неравенства (3.4).

Продифференцируем уравнения (3.II) по t, умножим l-ое уравнение на $C'_{ln}(t)$ и просуммируем по $l=1,\dots,n$. Интегрируя по частям, получим равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \{|\vec{v}_t^n|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\}dx+\nu\int_\Omega|\vec{v}_{xt}^n|^2dx=\int_\Omega \vec{f}_t\vec{v}_t^n dx+\int_\Omega v_{kt}^n\vec{v}_{x_k}^n\vec{v}_t^n dx,\ 0<t\leqslant T \tag{3.18}$$

Если Ω – трехмерная область, то, оценивая второй интеграл справа с помощью неравенства Гельдера и известного неравенства [I2, гл.I]

$$\|\vec{v}_t^n\|_{L_4(\Omega)}\leqslant C_\Omega\|\vec{v}_{xt}^n\|_{L_2(\Omega)},\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.19}$$

и используя оценку (3.I4), получим:

$$\left|\int_\Omega v_{kt}^n\,\vec{v}_{x_k}^n\,\vec{v}_t^n dx\right|\leqslant C_8^{1/2}C_\Omega^2\varkappa^{-1/2}\int_\Omega|\vec{v}_{xt}^n|^2dx. \tag{3.20}$$

Тогда из (3.I8) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|\vec{v}_t^n|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\right)dx+\nu\int_\Omega|\vec{v}_{xt}^n|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\left(\|\vec{f}_t\|^2_{L_2(\Omega)}+C_5^{1/2}C_\Omega^2\varkappa^{-3/2}\right)\int_\Omega\left(|\vec{v}_t^n|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\right)dx,\ 0<t\leqslant T,\ n=1,2,\dots, \tag{3.21}$$

из которого, применяя лемму Гронуолла и используя оценку (3.I7), получим оценку:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega\left(|\vec{v}_t^n|^2+\varkappa|\vec{v}_{xt}^n|^2\right)dx+\nu\iint_{Q_T}|\vec{v}_{xt}^n|^2dQ\leqslant C_{10}(C_8,\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)},\varkappa^{-1}), \tag{3.22}$$

причем $C_{10}\to\infty$ при $\varkappa\to 0$.

Если Ω – двумерная область, то, применяя для оценки второго интеграла в правой части (3.I8) вместо неравенства (3.I9) другое известное неравенство [I2, гл.I] :

$$\|\vec{v}_t^n\|^2_{L_4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}\, \|\vec{v}_t^n\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\vec{v}_{xt}^n\|_{L_2(\Omega)}, \; 0<t\leqslant T, \tag{3.23}$$

получим:

$$\Big| \int_\Omega v_{kt}^n \vec{v}_{x_k}^n \vec{v}_t^n dx \Big| \leqslant \frac{\nu}{2} \int_\Omega |\vec{v}_{xt}^n|^2 dx + \frac{1}{\nu} \int_\Omega |\vec{v}_x^n|^2 dx \cdot \int_\Omega |\vec{v}_t^n|^2 dx. \tag{3.24}$$

Тогда из (3.I8) получим неравенство

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|\vec{v}_t^n|^2 + \varkappa |\vec{v}_{xt}^n|^2\right) dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\vec{v}_{xt}^n|^2 dx \leqslant \Big(\|\vec{f}_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ + \frac{1}{\nu}\int_\Omega |\vec{v}_x^n|^2 dx \Big) \int_\Omega \left(|\vec{v}_t^n|^2 + \varkappa |\vec{v}_{xt}^n|^2\right) dx, \quad 0<t\leqslant T, \end{gathered} \tag{3.25}$$

из которого, применяя снова лемму Гронуолла и используя оценку (3.I4), в силу которой

$$\iint_{Q_T} |\vec{v}_x^n|^2 dQ \leqslant \frac{C_8}{\nu}, \tag{3.26}$$

получим вместо неравенства (3.22) оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \int_\Omega \left(|\vec{v}_t^n|^2 + \varkappa |\vec{v}_{xt}^n|^2\right) dx + \iint_{Q_T} |\vec{v}_{xt}^n|^2 dQ \leqslant C_{11}\Big(C_8, \|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)}, \frac{1}{\nu}\Big), \tag{3.27}$$

причем постоянная C_{11} является равномерно ограниченной по $\varkappa \in [0,1]$.

Покажем теперь, что функции

$$\psi_{n,\ell}(t) \equiv \int_\Omega \left[\vec{v}_t^n(x,t)\vec{\varphi}_\ell(x) + \varkappa \vec{v}_{xt}^n \vec{\varphi}_{\ell x}\right] dx \equiv \left(\vec{v}_t^n(x,t), \vec{\varphi}_\ell(x)\right)_{W_2^1(\Omega)}, \; 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.28}$$

при фиксированном ℓ и $n \geqslant \ell$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное на $[0,T]$ семейство функций. Равномерная ограниченность их следует из оценок (3.22) или (3.27):

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |\psi_{n,\ell}(t)| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\vec{v}_t^n\|_{L_2(\Omega)} + \varkappa^{1/2} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\vec{v}_{xt}^n\|_{L_2(\Omega)} \cdot \varkappa^{1/2} \|\vec{\varphi}_{\ell x}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{12}(\ell), \tag{3.29}$$

причем постоянная C_{12} зависит от постоянной C_{10} в трехмерном случае и от C_{11} – в двумерном случае. Для доказательства равностепенной непрерывности $\{\psi_{n,\ell}(t)\}$ продифференцируем уравнения (3.II) по t и запишем результат в виде

$$\frac{d}{dt}\psi_{n,\ell}(t) = \nu \int_\Omega \vec{v}_t^n \Delta \vec{\varphi}_\ell dx + \int_\Omega (v_{kt}^n \vec{v}^n + v_k \vec{v}_t^n)\vec{\varphi}_{\ell x_k} dx + \int_\Omega \vec{f}_t \vec{\varphi}_\ell dx, \; 0<t\leqslant T, \tag{3.30}$$

а из этого равенства, интегрируя по t от t до $t+\Delta t \leqslant T$, оценивая интегралы справа по неравенству Гельдера и используя оценки (3.I4), (3.22) или (3.27), получим неравенство

$$|\psi_{n,\ell}(t+\Delta t)-\psi_{n,\ell}(t)|\le C_{13}(\ell)\Big(\sqrt{\Delta t}+\int_t^{t+\Delta t}\|\vec f_t\|_{L_2(\Omega)}dt\Big),\ n\ge \ell, \tag{3.31}$$

причем постоянная C_{13} зависит также от постоянных C_{10} и C_{11} и в силу условия $\vec f_t\in L_2(Q_T)$ правая часть (3.31) равномерно мала при малых Δt.

Оценки (3.14),(3.22),(3.29),(3.31) в трехмерном случае и оценки (3.14),(3.27),(3.29),(3.31) в двумерном случае (равномерные относительно $\varkappa\in[0,1]$) позволяют заключить (ср. [12, гл.VI]), что из совокупности $\{\vec v^n(x,t)\}$ галеркинских приближений для решения задачи (1.9),(1.8) можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность $\{\vec v^{n_i}(x,t)\}$, для которой при $n_i\to\infty$ $\vec v^{n_i}$, $\vec v_x^{n_i}$, $\vec v_t^{n_i}$, $\vec v_{xt}^{n_i}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$ к функциям $\vec v$, $\vec v_x$, $\vec v_t$, $\vec v_{xt}$ и эти функции являются слабо непрерывными по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$, $\vec v^{n_i}$ сходятся к $\vec v$ сильно в $L_2(Q_T)$ и для предельной функции $\vec v(x,t)$ в силу свойств слабой сходимости будут иметь место оценки (3.2),(3.3) или (3.2),(3.3$'$). После этого с помощью известных рассуждений показывается (ср. [12, гл.VI]), что предельная функция $\vec v(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.1) и удовлетворяет начальному условию Коши в следующем смысле:

$$\|\vec v(x,t)-\vec v_0(x)\|_{H(\Omega)}\to 0\ ,\ t\to 0 \tag{3.32}$$

(по поводу доказательства последнего утверждения см. также конец § 4).

Единственность "сильного" обобщенного решения начально-краевой задачи (1.9),(1.8) доказана в [8] и [9].

Доказанные в теореме 3.2 оценки (3.2)-(3.3$'$) позволяют исследовать дальнейшие свойства гладкости "сильного" обобщенного решения начально-краевой задачи (1.9),(1.8) по переменной $t\in[0,T]$. Именно, справедлива

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть $\vec v_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\vec f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\vec f_t\in L_2(Q_T)$. Тогда "сильное" обобщенное решение начально-краевой задачи (1.9), (1.8) обладает следующими свойствами: 1) $\vec v(x,t)$, $\vec v_x$, $\vec v^2$ сильно непрерывны по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$ и имеют место оценки:

$$\operatorname*{vraimax}_{0\le t\le T-\Delta t}\|\vec v(x,t+\Delta t)-\vec v(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\le C_{14}\Delta t\ ,\quad C_{14}=\begin{cases}C_2^{1/2}\ , & n=3\ ,\\ C_3^{1/2}\ , & n=2\ ;\end{cases} \tag{3.33}$$

$$\underset{0\le t\le T-\Delta t}{\operatorname{vrai\,max}} \|\vec v_x(x,t+\Delta t)-\vec v_x(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_{15}\Delta t, \quad C_{15}=\begin{cases} C_2^{1/2}, & n=3, \\ (C_3 æ^{-1})^{1/2}, & n=2; \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\underset{0\le t\le T-\Delta t}{\operatorname{vrai\,max}} \|\vec v^2(x,t+\Delta t)-\vec v^2(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_{16}\Delta t, \quad C_{16}=2C_\Omega^2(C_1 C_{15}^{1/2} æ^{-1})^{1/2}; \tag{3.35}$$

2) $\vec v(x,t)$ при всех $t\in(0,T]$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega (\vec v_t(x,t)\vec\Phi(x)+\nu\vec v_x\vec\Phi_x+æ\vec v_{xt}\vec\Phi_x+v_k\vec v_{x_k}\vec\Phi)dx=\int_\Omega \vec f(x,t)\vec\Phi(x)dx, \forall\vec\Phi(x)\in H(\Omega). \tag{3.36}$$

Действительно, оценки (3.33) и (3.34) следуют из формулы Ньютона-Лейбница и оценок (3.3) и (3.3′):

$$\|\vec v(x,t+\Delta t)-\vec v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv \int_\Omega \Big|\int_t^{t+\Delta t}\vec v_t d\tau\Big|^2 dx \le \Delta t\int_t^{t+\Delta t}\int_\Omega |\vec v_t|^2 dx d\tau \le C_{14}(\Delta t)^2, \tag{3.37}$$

$$\|\vec v_x(x,t+\Delta t)-\vec v_x(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv \int_\Omega \Big|\int_t^{t+\Delta t}\vec v_{xt} d\tau\Big|^2 dx \le \Delta t\int_t^{t+\Delta t}\int_\Omega |\vec v_{xt}|^2 dx dt \le C_{15}(\Delta t)^2, \tag{3.38}$$

а для доказательства оценки (3.35) представим разность $\vec v^2(x,t+\Delta t)-\vec v^2(x,t)$ в виде

$$\vec v^2(x,t+\Delta t)-\vec v^2(x,t)=\vec v(x,t+\Delta t)[\vec v(x,t+\Delta t)-\vec v(x,t)]+\vec v(x,t)[\vec v(x,t+\Delta t)-\vec v(x,t)] \tag{3.39}$$

и для оценки каждого из двух получившихся слагаемых снова воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, неравенством Гельдера, неравенством (3.19) и оценками (3.2)-(3.3′), например:

$$\|\vec v(x,t)[\vec v(x,t+\Delta t)-\vec v(x,t)]\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv \int_\Omega |\vec v(x,t)|^2 \Big|\int_t^{t+\Delta t}\vec v_t d\tau\Big|^2 dx \le \Delta t\int_\Omega |\vec v|^2\Big(\int_t^{t+\Delta t}|\vec v_t|^2 d\tau\Big)dx \le$$

$$\le \Delta t\Big(\int_\Omega |\vec v|^4 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega\Big|\int_t^{t+\Delta t}\vec v_t^2 d\tau\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \le C_\Omega^2 C_1 æ^{-1}\Delta t\Big(\Delta t\int_t^{t+\Delta t}|\vec v_t|^4 dx d\tau\Big)^{1/2} \le \tag{3.40}$$

$$\le C_\Omega^2 C_1 æ^{-1}(\Delta t)^{3/2} C_\Omega^2\Big(\int_t^{t+\Delta t}\int_\Omega |\vec v_{xt}|^2 dx d\tau\Big)^{1/2} \le C_\Omega^4 C_1 C_{15}^{1/2} æ(\Delta t)^2.$$

Оценки (3.2)-(3.3′), сильная непрерывность $\vec v, \vec v_x, \vec v^2$ в $L_2(\Omega)$ и слабая непрерывность $\vec v_t, \vec v_{xt}$ в $L_2(\Omega)$ по $t\in[0,T]$, а также условие $\vec f_t(x,t)\in L_2(Q_T)$ позволяют заключить, что для "сильного" обобщенного решения $\vec v(x,t)$ начально-краевой задачи (I.9),(I.8) интегралы по сечению Ω

$$\int_\Omega [\vec v_t(x,t)\vec\Phi(x)+\nu\vec v_x\vec\Phi_x+æ\vec v_{xt}\vec\Phi_x-v_k\vec v\vec\Phi_{x_k}]dx, \quad \int_\Omega \vec f(x,t)\vec\Phi(x)dx \tag{3.4I}$$

существуют и непрерывны по $t\in(0,T]$ при $\forall\Phi(x)\in H(\Omega)$. А тогда, полагая в интегральном тождестве (3.I) *) $\vec{\Phi}(x,t)\equiv\vec{\Phi}(x)$, $0<t\leq T$, $\vec{\Phi}(x)\in H(\Omega)$, и дифференцируя после этого тождество по t, получим, что решение $\vec{v}(x,t)$ удовлетворяет и интегральному тождеству (3.36) по сечению $\Omega, 0<t\leq T$. Теорема 3.3 доказана.

Покажем теперь, что найденное и изученное нами в теоремах 3.2 и 3.3 "сильное" обобщенное решение начально-краевой задачи (I.9),(I.8) при наложенных выше условиях на $\vec{v}_0(x)$ и $\vec{f}(x,t)$ является ее решением почти всюду в Q_T. Для этого в интегральном тождестве (3.36) перенесем интеграл с нелинейным членом в правую часть и рассмотрим решение $\vec{v}(x,t)$ начально-краевой задачи (I.9), (I.8) как обобщенное решение линеаризованной начально-краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}-\varkappa\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}p=\vec{F}(x,t),\quad \operatorname{div}\vec{v}=0,\quad (x,t)\in Q_T,\\&\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{v}_0(x),\quad x\in\Omega;\quad \vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.42}$$

со "свободным членом" $\vec{F}(x,t)\equiv\vec{f}(x,t)-v_k\vec{v}_{x_k}$. Предполагая для определенности $n=3$, мы с помощью оценки (3.2) и теорем вложения С.Л.Соболева получим, что заведомо $v_k\vec{v}_{x_k}\in L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))$ и потому $\vec{F}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))$, причем имеет место оценка

$$\|\vec{F}\|_{L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))}\leq C_{17}\left(C_1\varkappa^{-1},\ \|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))}\right).\tag{3.43}$$

Из результатов § 2 следует (см.теорему 2.I), что линеаризованная начально-краевая задача (3.42) при $\vec{v}_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$, $\vec{F}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))$ имеет, и притом единственное, решение $\tilde{\vec{v}}(x,t),\tilde{p}(x,t)$, которое обладает производными $\tilde{\vec{v}}_x$, $\tilde{\vec{v}}_t$, $\tilde{\vec{v}}_{xx}$, $\tilde{\vec{v}}_{xxt}$, $\tilde{p}_x\in L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))$, и удовлетворяет уравнениям (3.42) почти всюду в Q_T. Очевидно, что любое такое решение задачи (3.42) заведомо удовлетворяет при всех $t\in(0,T]$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left(\tilde{\vec{v}}_t(x,t)\vec{\Phi}(x)+\nu\tilde{\vec{v}}_x\vec{\Phi}_x+\varkappa\tilde{\vec{v}}_{xt}\vec{\Phi}_x\right)dx=\int_\Omega\vec{F}(x,t)\vec{\Phi}(x)dx\equiv\int_\Omega\left(\vec{f}-v_k\vec{v}_{x_k}\right)\vec{\Phi}dx\tag{3.44}$$

для $\forall\vec{\Phi}(x)\in H(\Omega)$. Но этому же тождеству при всех $t\in(0,T]$ удовлетворяет также "сильное" обобщенное решение $\vec{v}(x,t)$ квазилинейной начально-краевой задачи (I.9), (I.8), которое тоже единственно. В силу единственности обоих решений мы получаем, что $\tilde{\vec{v}}(x,t)\equiv\vec{v}(x,t)$ и потому построенное и изученное в теоремах 3.2 и 3.3 "сильное"

*) Напомним, что $\int_\Omega v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi}dx=-\int_\Omega v_k\vec{v}\vec{\Phi}_{x_k}dx$.

обобщенное решение $\vec{v}(x,t)$ начально-краевой задачи (1.9), (1.8) обладает производными $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xx}$, $\vec{v}_{xxt} \in L_{3/2}(\Omega)$, $0<t\leq T$, и вместе с $\tilde{\rho}(x,t)$: $\tilde{\rho}_x \in L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))$ удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнениям (I.9). При этом в силу теоремы 2.I и оценок (3.2) и (3.43) для решения $\vec{v}(x,t)$ начально-краевой задачи (I.9),(I.8) имеет место такая оценка:

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^2_{3/2}(\Omega))} + \underset{0\leq t\leq T}{\mathrm{vraimax}} \|\vec{v}_{xt}\|_{W^1_{3/2}(\Omega)} \leq \tag{3.45}$$
$$\leq C_{18}(\|\vec{v}_0\|_{W^2_{3/2}(\Omega)}, \ \|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_{3/2}(\Omega))}, \ æ^{-1}, T).$$

Из оценки (3.45) и теорем вложения С.Л.Соболева в свою очередь следует, что для полученного нами решения почти всюду в Q_T начально-краевой задачи (I.9),(I.8) нелинейный член $\vec{v}_k \vec{v}_{x_k} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и потому, применяя еще раз теорему об однозначной разрешимости линеаризованной начально-краевой задачи (3.42) с $\vec{F}(x,t) \equiv \vec{f}(x,t) - v_k\vec{v}_{x_k} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, и пользуясь тем, что решение почти всюду в Q_T квазилинейной начально-краевой задачи (I.9), (I.8) тоже единственно, мы получим, что решение $\vec{v}(x,t)$, $\rho(x,t)$ начально-краевой задачи (I.9),(I.8) имеет производные $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xt}$, $\vec{v}_{xx}$, $\vec{v}_{xxt}$, $\rho_x \in L_2(\Omega)$, $0\leq t\leq T$ и для этого решения имеет место оценка:

$$\|\vec{v}\|_{W^1_\infty(0,T;W^2_2(\Omega))} + \|\rho_x\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leq \tag{3.46}$$
$$\leq C_{19}(\|\vec{v}_0\|_{W^2_2(\Omega)}, \|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}, \|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)}, æ^{-1}, T).$$

Кроме того, из оценки (3.46) и формулы Ньютона-Лейбница

$$\vec{v}_{xx}(x,t) = \vec{v}_{0xx}(x) + \int_0^t \frac{\partial \vec{v}_{xx}}{\partial t}(x,\tau)d\tau, \ 0<t\leq T,$$

следует, что

$$\underset{0\leq t\leq T-\Delta t}{\mathrm{vraimax}} \|\vec{v}_{xx}(x,t+\Delta t) - \vec{v}_{xx}(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{20}(C_{19})\Delta t. \tag{3.46'}$$

Теорема 3.I доказана.

Аналогичные результаты справедливы для модифицированной начально-краевой задачи тепловой конвенции

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{v} + v_k\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - æ\frac{\partial \Delta\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, p = \vec{f}(x,t) + gS\vec{\gamma}, \ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \ \vec{\gamma} = (0,0,1), \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \chi\Delta S + v_k\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{3.48}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{v}_0(x)\ ,\ S\big|_{t=0}=S_0(x),\ x\in\Omega;\ \vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0\ ,\ S\big|_{\partial Q_T}=0. \tag{3.49}$$

Именно, справедлива следующая

Теорема 3.4. П у с т ь $\vec{v}_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega), S_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega), \vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\vec{f}_t\in L_2(Q_T)$. Т о г д а начально-краевая задача (3.47)-(3.49) и м е е т, и притом единственное, решение $\vec{v}(x,t), S(x,t), p(x,t)$: $\vec{v}(x,t)\in W^1_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega))$, $p_x(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), S(x,t)\in W^1_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, $S_t, S_{xx}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, которое удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнениям (3.47),(3.48) и удовлетворяет (по непрерывности) начально-краевым условиям (3.49).

Доказательство теоремы 3.4 состоит из тех же основных этапов, что и доказательство теоремы 3.I. Сначала аналогично теореме 3.2 доказывается (ср.также [II , § 4], где рассматривается более общая система), что начально-краевая задача (3.47)-(3.49) имеет единственное "сильное" обобщенное решение, которое определяется как пара функций $\{\vec{v}(x,t), S(x,t)\}$: $\vec{v}(x,t)\in W^1_\infty(0,T;H(\Omega))$, $S(x,t)\in W^1_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, для которых $\vec{v}_t, \vec{v}_{xt}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), S_t\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), S_{xt}\in L_2(Q_T), \vec{v}_t, \vec{v}_{xt}, S_t$ слабо непрерывны по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам

$$\iint_{Q_t}(\vec{v}_t\vec{\Phi}+\varkappa\vec{v}_{xt}\vec{\Phi}_x+\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x+v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi})dQ=g\iint_{Q_t}S\Phi_3\,dQ+\iint_{Q_t}\vec{f}\vec{\Phi}\,dQ, \tag{3.50}$$
$$0<t\le T,\ \forall\vec{\Phi}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T),$$

$$\iint_{Q_t}(S_t\psi+\chi S_x\psi_x+v_k S_{x_k}\psi)dQ=0,\ \ 0<t\le T,\ \forall\psi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T), \tag{3.5I}$$

и начально-краевым условиям (3.49). Для этого решения справедливы – для определенности в трехмерном случае – оценки:

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vraimax}}\int_\Omega(\vec{v}^2(x,t)+\varkappa\vec{v}_x^2+S^2)dx+\iint_{Q_T}(\nu\vec{v}_x^2+\chi S_x^2)dQ\le \tag{3.52}$$
$$\le C_{20}(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)},\|S_0\|_{L_2(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)}),$$

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vraimax}}\int_\Omega(\vec{v}_t^2(x,t)+\vec{v}_{xt}^2+S_t^2)dx+\chi\iint_{Q_T}S_{xt}^2\,dQ\le \tag{3.53}$$
$$\le C_{21}(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|S_0\|_{W_2^2(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))},\|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)},\varkappa^{-1}).$$

Далее, аналогично теореме 3.3 показывается, что для "сильного" обобщенного решения $\{\vec{v}(x,t), S(s,t)\}$ задачи (3.47)-(3.49) имеют место оценки (3.33)-(3.35) (разумеется, с новыми постоянными) и оценка

$$\| S(x,t+\Delta t) - S(x,t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_{22}(C_{21})\Delta t. \tag{3.54}$$

Эти оценки, а также слабая непрерывность $\vec{v}_t, \vec{v}_{xt}, S_t$ в $L_2(\Omega)$ по $t\in[0,T]$ позволяют утверждать, что "сильное" обобщенное решение $\{\vec{v}, S\}$ начально-краевой задачи (3.47)-(3.49) удовлетворяет при всех $t\in(0,T]$ интегральным тождествам по сечениям Ω :

$$\int_\Omega(\vec{v}_t(x,t)\vec{\Phi}(x)+\varkappa\vec{v}_{xt}\vec{\Phi}_x+\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x+v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi})dx = g\int_\Omega S\Phi_3(x)dx+\int_\Omega \vec{f}(x,t)\vec{\Phi}(x)dx \tag{3.55}$$

$$0<t\leq T,\ \forall\vec{\Phi}(x)\in H(\Omega),$$

$$\int_\Omega\Big(S_t(x,t)\psi(x)+\chi S_x\psi_x+v_k\frac{\partial S}{\partial x_k}\psi\Big)dx = 0,\ 0<t\leq T,\ \forall\psi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{3.56}$$

После этого, рассматривая $\vec{v}(x,t)$ как обобщенное решение линеаризованной нестационарной задачи (3.42) со "свободным" членом $\vec{F}(x,t)\equiv\vec{f}(x,t)-v_k\vec{v}_{x_k}+gS\vec{\gamma}$, а $S(x,t)$ - как зависящее от параметра $t\in(0,T]$ обобщенное решение из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле

$$\chi\Delta S(x,t)=G(x,t),\ x\in\Omega;\quad S|_{\partial\Omega}=0 \tag{3.57}$$

со "свободным" членом $G(x,t)\equiv S_t+v_kS_{x_k}$, мы последовательно докажем (ср.конец доказательства теоремы 3.I), что у решения $\{\vec{v}(x,t), S(x,t)\}$ существуют производные $\vec{v}_{xx}, \vec{v}_{txx}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $S_{xx}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и $\{\vec{v}, S\}$ вместе с $p(x,t): p_x\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ удовлетворяет уравнениям (3.47)-(3.48) почти всюду в Q_T . Кроме того, для $\{\vec{v}, S, p\}$ имеют место оценки:

$$\begin{gathered}\|\vec{v}_{xx}, \vec{v}_{xxt}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|p_x\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|S_{xx}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leq \\ \leq C_{22}\big(\|\vec{v}_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \|S_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}, \|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)}, \varkappa^{-1}, T\big),\end{gathered} \tag{3.58}$$

$$\underset{0\leq t\leq T-\Delta t}{\mathrm{vrai\,max}}\ \|\vec{v}_{xx}(x,t+\Delta t)-\vec{v}_{xx}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\leq C_{23}(C_{22})\Delta t, \tag{3.59}$$

для доказательства которых кроме соображений, приведенных при доказательстве неравенств (3.46),(3.46′), надо воспользоваться вторым основным неравенством для оператора Лапласа [I2] .

С помощью теорем 3.I, 2.1 и теорем вложения С.Л.Соболева можно, повышая гладкость границы $\partial\Omega$, $\vec{v}_0(x)$ и $\vec{f}(x,t)$, доказать по индукции соответствующее увеличение гладкости решений начально-краевой задачи (I.9),(I.8) по пространственным переменным. Именно, справедлива

<u>**Теорема 3.5**</u>. Пусть $\partial\Omega\subset C^{\ell}$, $\vec{v}_0(x)\in W_2^{\ell}(\Omega)H(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))$, $\ell=3,4,\ldots$, $\vec{f}_t\in L_2(Q_T)$. Тогда решение $\vec{v}(x,t)$, $\rho(x,t)$ начально-краевой задачи (I.9), (I.8), существование которого гарантируется теоремой 3.I, обладает следующими свойствами: $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_2^{\ell}(\Omega))$, $\rho_x\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))$ и для него имеют место оценки:

$$\|\vec{v}\|_{W_\infty^1(0,T;W_2^\ell(\Omega))}+\|\rho_x\|_{L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant C_{24}(\|\vec{v}_0\|_{W_2^\ell(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))},\|\vec{f}_t\|_{L_2(Q_T)},T,\varkappa^{-1}), \tag{3.60}$$

$$\underset{0\leqslant t\leqslant T-\Delta t}{\mathrm{vraimax}}\|\vec{v}(x,t+\Delta t)-\vec{v}(x,t)\|_{W_2^\ell(\Omega)}\leqslant C_{25}(C_{24})\Delta t. \tag{3.6I}$$

В самом деле, пусть решение задачи (I.9), (I.8) удовлетворяет условиям: $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_2^{\ell-1}(\Omega))$, $\rho_x\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-3}(\Omega))$. Рассмотрим решение $\vec{v},\rho$ как решение "линеаризованной" задачи (3.42) со "свободным" членом $\vec{F}(x,t)\equiv\vec{f}(x,t)-v_k\vec{v}_{x_k}$. В силу теорем вложения С.Л.Соболева (пусть снова $n=3$) $v_k\vec{v}_{x_k}\in L_\infty(0,T;W_{3/2}^{\ell-2}(\Omega))$ и потому $\vec{F}(x,t)\in L_\infty(0,T;W_{3/2}^{\ell-2}(\Omega))$, а тогда по теореме 2.I $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_{3/2}^{\ell}(\Omega))$. Отсюда, в свою очередь, по теоремам вложения С.Л.Соболева $v_k\vec{v}_{x_k}\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))$ и потому $\vec{F}(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))$. Применяя к задаче (3.42) еще раз теорему 2.I, получим, что $\vec{v}(x,t)\in W_\infty^1(0,T;W_2^{\ell}(\Omega))$, $\rho_x\in L_\infty(0,T;W_2^{\ell-2}(\Omega))$ и для них справедливы оценки (3.60),(3.6I).

Аналогичный результат о повышении гладкости решений по пространственным переменным справедлив и для начально-краевой задачи (3.47)-(3.49).

§ 4. Разрешимость квазилинейной начально-краевой задачи (I.I0), (I.8)

Назовем "слабым" обобщенным решением начально-краевой задачи (I.I0),(I.8), в которой известный вектор $\vec{V}(x,t)$ имеет конечный $\max\limits_{Q_T}|V_{xx}(x,t)|\equiv A_V$, функцию $\vec{v}(x,t)\in L_\infty(0,T;H(\Omega))$, слабо непрерывную по $t\in[0,T]$ в $H(\Omega)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_T}\Big(\vec{v}\vec{\Phi}_t+\varkappa\vec{v}_x\vec{\Phi}_{xt}-\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x-v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi}+\varkappa v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}\frac{\partial^2\vec{\Phi}}{\partial x_i\partial x_k}+\varkappa\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Phi_i+\vec{f}\vec{\Phi}\Big)dQ-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\big[\vec{v}_0(x)\vec{\Phi}(x,0)+\varkappa\vec{v}_{0x}(x)\vec{\Phi}_x(x,0)\big]dx=0 \qquad (4.1)$$

при $\forall\vec{\Phi}(x,t)\in \overset{0}{W}{}^{2,1}_2(Q_T)\cap\overset{0}{J}(Q_T),\ \vec{\Phi}(x,T)=0$. Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 4.1. Пусть $\vec{v}_0(x)\in H(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $0<T<\infty$. Тогда начально-краевая задача (1.10), (1.8) имеет по крайней мере одно "слабое" обобщенное решение, это решение может быть найдено методом Галеркина и для него справедлива энергетическая оценка:

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}}\int\limits_{\Omega}\big[\vec{v}^2(x,t)+\varkappa\vec{v}_x^2\big]dx+\nu\iint\limits_{Q_T}\vec{v}_x^2\,dQ\le C_1\big(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)},\|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)},A_\nu,T\big). \qquad (4.2)$$

Для доказательства "слабой" разрешимости задачи (1.10),(1.8) воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$, $k=1,2,\ldots$ – полная в $H(\Omega)$ и ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система функций; будем, кроме того, предполагать, что $\vec{\varphi}_k(x)\in W_2^3(\Omega)$ и $\max\limits_{\Omega}|\vec{\varphi}_k(x),\vec{\varphi}_{kxx}|<\infty$, $k=1,2,\ldots$. Очевидно, что для любой функции $\vec{v}_0(x)\in H(\Omega)$ найдется последовательность функций $\{\vec{v}_{(n)}(x)\}$:

$$\vec{v}_{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\overset{0}{C}_{kn}\vec{\varphi}_k(x),\quad n=1,2,\ldots, \qquad (4.3)$$

которая сходится при $n\to\infty$ к $\vec{v}_0(x)$ в $H(\Omega)$, причем

$$\|\vec{v}_{(n)}\|_{H(\Omega)}\le C_2\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)},\quad n=1,2,\ldots . \qquad (4.4)$$

Будем искать приближенные решения $\vec{v}^n(x,t)$ задачи (1.10),(1.8) в виде

$$\vec{v}^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}C_{kn}(t)\vec{\varphi}_k(x),\ n=1,2,\ldots, \qquad (4.5)$$

где функции $C_{kn}(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int\limits_{\Omega}\big(\vec{v}^n_t\vec{\varphi}_\ell+\varkappa\vec{v}^n_{xt}\vec{\varphi}_{\ell x}+\nu\vec{v}^n_x\vec{\varphi}_{\ell x}+v^n_k\vec{v}^n_{x_k}\vec{\varphi}_\ell-\varkappa v^n_k\vec{v}^n_{x_j}\vec{\varphi}_{\ell x_j x_k}- \qquad (4.6)$$

$$-\varkappa \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_j^n}{\partial x_k} \varphi_{li}\Big) dx = \int_\Omega \vec{f}(x,t)\vec{\varphi}_l(x)dx, \; l=1,\dots,n; \; 0<t\leq T,$$

и начальных условий Коши

$$C_{ln}\big|_{t=0} = C_{ln}^0 \,, \; l=1,\dots,n. \tag{4.7}$$

Умножим l -ое уравнение (4.6) на $C_{ln}(t)$ и просуммируем по $l=1,\dots,n$. Интегрируя по частям в четвертом и пятом интегралах, получим:

$$\int_\Omega v_k^n \vec{v}_{x_k}^n \vec{v}^n dx = \frac{1}{2}\int_\Omega v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k}(\vec{v}^n)^2 dx = 0, \tag{4.8}$$

$$\int_\Omega v_k^n \vec{v}_{x_j}^n \vec{v}_{x_j x_k}^n dx = \frac{1}{2}\int_\Omega v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{j=1}^3 |\vec{v}_{x_j}^n|^2\Big)dx = 0, \tag{4.9}$$

а тогда из (4.6) получается следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(|\vec{v}^n|^2 + \varkappa|\vec{v}_x^n|^2\Big)dx + \nu\int_\Omega |\vec{v}_x^n|^2 dx = \varkappa\int_\Omega \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} v_{jx_k}^n v_i^n dx + \int_\Omega \vec{f}\vec{v}^n dx \tag{4.10}$$

Из равенства (4.10), применяя для оценки интегралов в правой части неравенство Гельдера, в силу которого

$$\varkappa\Big|\int_\Omega \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} v_{jx_k}^n v_i^n dx\Big| \leq C_3(A_V)\int_\Omega \Big(|\vec{v}^n|^2 + \varkappa^2|\vec{v}_x^n|^2\Big)dx \leq C_3(A_V)\int_\Omega \Big(|\vec{v}^n|^2 + \varkappa|\vec{v}_x^n|^2\Big)dx^{*)}, \tag{4.11}$$

используя лемму Гронуолла ([12] , гл.VI, лемма I) и оценку (4.4) для начального условия $\vec{v}^n(x,0) \equiv \vec{v}_{(n)}(x)$, получим неравенство:

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega \Big(|\vec{v}^n|^2 + \varkappa|\vec{v}_x^n|^2\Big)dx + \nu\iint_{Q_T} |\vec{v}_x^n| dQ \leq C_4(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)}, \|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)}, A_V, T), \tag{4.12}$$

$$n=1,2,\dots .$$

Из оценки (4.12) и ортонормированности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ в $L_2(\Omega)$ следует априорная оценка для возможных решений $\{C_{kn}(t)\}$ задачи Коши (4.6), (4.7):

$$\max_{0\leq t\leq T}\sum_{l=1}^n C_{ln}^2(t) \equiv \max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}^n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_4 \,, \; n=1,2,\dots, \tag{4.13}$$

которая, как известно, гарантирует однозначную разрешимость квазилинейной задачи Коши (4.6), (4.7) при любом $n=1,2,\dots$ на всем интервале $[0,T]$. Кроме того, из оценки (4.12) и теоремы о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространст-

---

*) Без ограничения общности можно считать $0<\varkappa\leq 1$.

ве следует, что из совокупности $\{\vec{v}^n(x,t)\}$ галеркинских приближений можно выделить подпоследовательность $\{\vec{v}^{n_m}(x,t)\}$, которая сходится к некоторой функции $\vec{v}(x,t)$ слабо в $L_2(Q_T)$ вместе с первыми производными по x-ам, причем $\vec{v}, \vec{v}_x \in L_2(Q_T)$, $div\,\vec{v}=0$ п.в. в Q_T и $\vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0$.

Покажем, далее, что функции

$$\Phi_{n,\ell}(t) \equiv \int_\Omega \{\vec{v}^n(x,t)\vec{\varphi}_\ell(x) + æ\vec{v}^n_x\vec{\varphi}_{\ell x}dx\}, \; 0\leq t\leq T, \; \ell=1,\dots,n \qquad (4.14)$$

при фиксированном ℓ и $n\geq\ell$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное на $[0,T]$ семейство функций. Равномерная ограниченность $\{\varphi_{n,\ell}(t)\}$ следует из оценки (4.12):

$$\max_{0\leq t\leq T}|\Phi_{n,\ell}(t)| \leq \max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}^n\|_{L_2(\Omega)} + æ\max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}^n_x\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\vec{\varphi}_{\ell x}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_5(\ell,C_4). \qquad (4.15)$$

Для доказательства же равностепенной непрерывности $\{\Phi_{n,\ell}(t)\}$ перепишем уравнения (4.6) в виде:

$$\frac{d}{dt}\Phi_{n,\ell}(t) = \int_\Omega(-\nu\vec{v}^n_x\vec{\varphi}_{\ell x} + v^n_k\vec{v}^n\vec{\varphi}_{\ell x_k} + æv^n_k\vec{v}^n_{x_j}\vec{\varphi}_{\ell x_j x_k} + æ\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\partial x_j}v^n_{jx_k})dx + \qquad (4.16)$$

$$+\int_\Omega \vec{f}\vec{\varphi}_\ell dx, \; 0<t\leq T,$$

а из этого равенства, интегрируя по t от t до $t+\Delta t\leq T$, используя операцию максимизации по t, оценивая затем интегралы справа по неравенству Гельдера, используя известное неравенство

$$\|\omega\|_{L_4(\Omega)} \leq C_\Omega\|\omega_x\|_{L_2(\Omega)}, \; \forall\omega\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \qquad (4.17)$$

и применяя оценку (4.12), получим неравенство:

$$|\Phi_{n,\ell}(t+\Delta t) - \Phi_{n,\ell}(t)| \leq C_6(\ell, C_4, A_V)(\sqrt{\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t}\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}dt). \qquad (4.18)$$

Для любой $\vec{f}(x,t)\in L_2(Q_T)$ правая часть последнего неравенства при фиксированном ℓ и $n\geq\ell$ стремится к нулю – равномерно относительно $n\geq\ell$ – при $\Delta t\to 0$.

Очевидно, что (с точностью до нормировки)

$$\Phi_{n,\ell}(t) = (\vec{v}^n(x,t), \vec{\varphi}_\ell(x))_{W^1_2(\Omega)}, \; 0\leq t\leq T. \qquad (4.19)$$

Диагональным процессом из $\{\Phi_{n,\ell}(t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{n_m,\ell}(t)\}$, для которой функции $\Phi_{n_m,\ell}(t)$ при любом фиксированном $\ell=1,2,\dots$ сходятся при $m\to\infty$ равномерно на $[0,T]$ к функциям $\Phi_\ell(t)\in C[0,T]$. По функциям $\{\Phi_\ell(t)\}$ предельная для $\{\vec{v}^{n_m}(x,t)\}$ функция $\vec{v}(x,t)$ определяется при всех $t\in[0,T]$ следующим образом:

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\Phi_l(t)\vec{\varphi}_l(x), \tag{4.20}$$

причем при $m\to\infty$ $\{\vec{v}^{n_m}(x,t)\}$ сходится к $\vec{v}(x,t)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ равномерно по $t\in[0,T]$:

$$(\vec{v}^{n_m}-\vec{v},\vec{\varphi})_{W_2^1(\Omega)}\to 0\ ,\ 0\leqslant t\leqslant T\ ,\ \forall\vec{\varphi}(x)\in W_2^1(\Omega), \tag{4.21}$$

и $\vec{v}(x,t)$ непрерывна по $t\in[0,T]$ в слабой топологии $W_2^1(\Omega)$. После этого с помощью леммы Фридрихса показывается (ср. [12], гл.VI), что приближения $\vec{v}^{n_m}(x,t)$ сходятся к $\vec{v}(x,t)$ сильно в $L_2(Q_T)$. Кроме того, для предельной функции $\vec{v}(x,t)$ в силу свойств слабой сходимости будет иметь место энергетическая оценка (4.2).

Итак, мы показали, что из совокупности $\{\vec{v}^n(x,t)\}$ галеркинских приближений для решений задачи (I.10), (I.8) можно извлечь $\{\vec{v}^{n_m}(x,t)\}$, которая сходится к предельной функции $\vec{v}(x,t)$ сильно в $L_2(Q_T)$ и слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$, а производные $\vec{v}_x^{n_m}(x,t)$ сходятся к $\vec{v}_x(x,t)$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$. Эта информация позволяет заключить, что предельная функция $\vec{v}(x,t)$ будет одним из "слабых" обобщенных решений начально-краевой задачи (I.10), (I.8) – именно, она удовлетворяет интегральному тождеству (4.I) при $\forall\vec{\Phi}(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)\cap \overset{\circ}{J}(Q_T)\,,\vec{\Phi}(x,T)=0$, и, кроме того,

$$\|\vec{v}(x,t)-\vec{v}_0(x)\|_{H(\Omega)}\to 0\ \ ,\ t\to 0\,. \tag{4.22}$$

Для доказательства первого утверждения умножим каждое из уравнений (4.6) (написанных для $\vec{v}^{n_m}(x,t)$) на функцию $C_l(t)\in C^{(1)}[0,T]\,,C_l(T)=0$, просуммируем полученные равенства по l от I до $N\leqslant n_m$, проинтегрируем полученные соотношения по t от 0 до T и, наконец, в первых двух интегралах полученных равенств проинтегрируем по частям по t. Тогда будем иметь:

$$\iint\limits_{Q_T}\Big(\vec{v}^{n_m}\vec{\Phi}_t^N(x,t)+\text{æ}\vec{v}_x^{n_m}\vec{\Phi}_{xt}^N-\nu\vec{v}_x^{n_m}\vec{\Phi}_x^N-v_k^{n_m}\vec{v}_{x_k}^{n_m}\vec{\Phi}^N+\text{æ}\, v_k^{n_m}\vec{v}_{x_j}^{n_m}\frac{\partial^2\vec{\Phi}^N}{\partial x_j\partial x_k}+$$

$$+\text{æ}\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i\partial x_j}v_{jx_k}^{n_m}\Phi_i^N+\vec{f}\vec{\Phi}^N\Big)dQ-\int\limits_{\Omega}[\vec{v}^{n_m}(x,0)\vec{\Phi}^N(x,0)+\text{æ}\vec{v}_x^{n_m}(x,0)\vec{\Phi}_x^N(x,0)]dx=0, \tag{4.23}$$

причем

$$\vec{\Phi}^N(x,t)\equiv\sum_{l=1}^{N}C_l(t)\vec{\varphi}_l(x)\ ,\ N=1,2,\dots \tag{4.24}$$

Легко видеть, что $\{\vec{\Phi}^N(x,t)\}$, в силу наложенных выше условий на $\{\vec{\varphi}_\ell(x)\}$ и $\{C_\ell(t)\}$, образует плотное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)\cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$. Переходя тогда в (4.23) к пределу по $m\to\infty$ при фиксированном N, используя отмеченную выше информацию о сходимости $\{\vec{v}^{n_m}\}$ к предельной функции $\vec{v}$, а также (4.2I) и предельное соотношение

$$\|\vec{v}^{n_m}(x,0)-\vec{v}_0(x)\|_{H(\Omega)}\equiv\|\vec{v}_{(n_m)}(x)-\vec{v}_0(x)\|_{H(\Omega)}\to 0\ ,\quad m\to\infty, \tag{4.25}$$

получим, что предельная функция $\vec{v}(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству при всех $\vec{\Phi}^N(x,t)$, $N=1,2,\dots$, т.е. – в конечном итоге – для $\forall\vec{\Phi}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, $\vec{\Phi}(x,T)=0$.

Для доказательства предельного соотношения (4.22) заметим, что, с одной стороны, в силу (4.2I) и (4.25) $\vec{v}(x,t)$ сходится при $t\to 0$ к $\vec{v}_0(x)$ слабо в $H(\Omega)$ и потому

$$\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)}\leqslant\varliminf_{t\to 0}\|\vec{v}(x,t)\|_{H(\Omega)}\,. \tag{4.26}$$

С другой стороны, из равенства (4.I0), используя неравенство Гельдера, оценку (4.II) и применяя лемму Гронуолла, получим (ср. неравенство (4.I2)):

$$\int_\Omega\left(|\vec{v}^{n_m}(x,t)|^2+\varkappa|\vec{v}_x^{n_m}|^2\right)dx\leqslant e^{(2C_3+1)t}\left[\int_\Omega\left(|\vec{v}_{(n_m)}|^2+\varkappa|\vec{v}_{(n_m)x}|^2\right)dx+\int_{Q_t}\vec{f}^{\,2}(x,t)\,dQ\right],\quad 0<t\leqslant T. \tag{4.27}$$

Переходя в последнем неравенстве по $m\to\infty$, получим для предельной функции $\vec{v}(x,t)$ неравенство:

$$\int_\Omega\left(\vec{v}^{\,2}(x,t)+\varkappa\vec{v}_x^{\,2}\right)dx\leqslant e^{(2C_3+1)t}\left[\int_\Omega\left(\vec{v}_0^{\,2}(x)+\varkappa\vec{v}_{0x}^{\,2}\right)dx+\iint_{Q_t}\vec{f}^{\,2}\,dQ\right],\quad 0<t\leqslant T, \tag{4.28}$$

а из этого неравенства, переходя к пределу по $t\to 0$, получим:

$$\varlimsup_{t\to 0}\int_\Omega\left(\vec{v}^{\,2}(x,t)+\varkappa\vec{v}_x^{\,2}\right)dx\leqslant\int_\Omega\left(\vec{v}_0^{\,2}(x)+\varkappa\vec{v}_{0x}^{\,2}\right)dx, \tag{4.29}$$

т.е. (с точностью до нормировки)

$$\varlimsup_{t\to 0}\|\vec{v}(x,t)\|_{H(\Omega)}\leqslant\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)}. \tag{4.30}$$

Неравенства (4.26) и (4.30) показывают, что

$$\|\vec{v}(x,t)\|_{H(\Omega)}\xrightarrow[t\to 0]{}\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)}, \tag{4.3I}$$

а последнее соотношение вместе со слабой сходимостью $\vec{v}(x,t)$ к $\vec{v}_0(x)$ при $t\to 0$ в $W_2^1(\Omega)$ дает и сильную сходимость $\vec{v}(x,t)$ к $\vec{v}_0(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ при $t\to 0$, что и требовалось доказать.

Аналогичные результаты имеют место для соответствующей урав-

11 1062

нениям (I.10) начально-краевой задачи тепловой конвенции

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{v} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - æ\left\{\frac{\partial \Delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_k \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_j \partial x_k}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[V_k(x,t)\, grad \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right]\right\} + grad\, p =$$
$$= \vec{f}(x,t) + g S\vec{\gamma}\,,\ div\,\vec{v} = 0\,,\ (x,t)\in Q_T\,, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \chi\Delta S + v_k \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0\ ,\ (x,t)\in Q_T\ , \tag{4.33}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x)\ ,\ S\big|_{t=0} = S_0(x),\ x\in\Omega\,;\ \vec{v}\big|_{\partial Q_T} = 0,\ S\big|_{\partial Q_T} = 0. \tag{4.34}$$

Именно, определим "слабое" обобщенное решение начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) как пару функций $\{\vec{v}(x,t), S(x,t)\}$: $\vec{v}(x,t)\in L_\infty(0,T;H(\Omega))$, $S(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $S_x\in L_2(Q_T)$, для которых $\vec{v}(x,t)$ слабо непрерывна по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\vec{v}\vec{\Phi}_t + æ\vec{v}_x\vec{\Phi}_{xt} - \nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x - v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi} + æ v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial x_j \partial x_k} + æ\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} v_{j x_k}\Phi_i + \vec{f}\vec{\Phi} + gS\Phi_3\right)dQ =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\vec{v}_0(x)\vec{\Phi}(x,0) + æ\vec{v}_{0x}\vec{\Phi}_x(x,0)\right)dx\,,\ \forall\vec{\Phi}(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)\cap \overset{\circ}{J}(Q_T),\ \vec{\Phi}(x,T) = 0, \tag{4.35}$$

$$\iint\limits_{Q_T}\left(S\psi_t - \chi S_x\psi_x + v_k S\psi_{x_k}\right)dQ = \int\limits_{\Omega_0} S_0(x)\psi(x,0)dx, \forall\psi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T),\ \psi(x,T) = 0. \tag{4.36}$$

Тогда аналогично теореме 4.I (см. также [II] , § 4) доказывается

<u>Теорема 4.2</u>. Пусть $\vec{v}_0(x)\in H(\Omega)$, $S_0(x)\in L_2(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_2(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (4.32)-(4.34) имеет по крайней мере одно "слабое" обобщенное решение $\{\vec{v}, S\}$, это решение может быть найдено методом Галеркина и для него справедливы неравенства:

$$\underset{0\le t\le T}{vraimax}\int\limits_{\Omega}\left(\vec{v}^2(x,t) + æ\vec{v}_x^2 + S^2(x,t)\right)dx + \iint\limits_{Q_T}\left(\nu\vec{v}_x^2 + \chi S_x^2\right)dQ \le$$
$$\le C_5\left(\|\vec{v}_0\|_{H(\Omega)}, \|S_0\|_{L_2(\Omega)}, \|\vec{f}\|_{L_2(Q_T)}, T, A_\gamma\right), \tag{4.37}$$

$$\|\vec{v}(x,t) - \vec{v}_0(x)\|_{H(\Omega)} \to 0\ ,\ \|S(x,t) - S_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0\,,\ t\to 0\,. \tag{4.38}$$

Рассмотрим теперь отвечающую задаче (I.10),(I.8) стационарную задачу

$$\nu\Delta\vec{v} - v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k} + \varkappa\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_k\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_j\partial x_k} + V_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{grad} v_j\right] + \operatorname{grad} p = \vec{f}(x), \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (4.39)$$

$$\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad (4.40)$$

в которой известный вектор $\vec{V}(x)$ имеет конечный $\max_{\Omega}|\vec{V}_{xx}| \equiv A_V$, и назовем "слабым" обобщенным решением краевой задачи (4.39), (4.40) функцию $\vec{v}(x)\in H(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\Big(\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x + v_k\vec{v}_{x_k}\vec{\Phi} - \varkappa v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}\frac{\partial^2\vec{\Phi}}{\partial x_j\partial x_k} - \varkappa\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i\partial x_j}v_{jx_k}\Phi_i\Big)dx = -\int_\Omega\vec{f}\vec{\Phi}dx \quad (4.41)$$

при $\forall\vec{\Phi}(x)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$. Покажем, что справедлива

Теорема 4.3. Пусть $\vec{f}(x)\in W_2^{-1}(\Omega)$, и пусть выполнено условие

$$\mu \equiv \nu - \varkappa A_V C_\Omega^* > 0.^{*)} \quad (4.42)$$

Тогда краевая задача (4.39),(4.40) имеет по крайней мере одно "слабое" обобщенное решение и для любого такого решения справедлива энергетическая оценка:

$$\|\vec{v}\|_{H(\Omega)} \le \frac{1}{\mu}\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}. \quad (4.43)$$

Для доказательства теоремы 4.3 снова воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ – полная в $H(\Omega)$ система функций, ортонормированная в $L_2(\Omega)$, и пусть $\vec{\varphi}_k(x)\in W_2^2(\Omega)$, $k=1,2,\ldots$ Будем искать приближенное решение задачи (4.39),(4.40) в виде

$$\vec{v}^n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}\vec{\varphi}_k(x)\,, \quad n = 1,2,\ldots, \quad (4.44)$$

где коэффициенты C_{kn} находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\int_\Omega\Big(\nu\vec{v}^n_x\vec{\varphi}_{\ell x} + v^n_k\vec{v}^n_{x_k}\vec{\varphi}_\ell - \varkappa v^n_k v^n_{x_j} - \varkappa\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_j\partial x_k}v^n_{jx_k}\varphi_{\ell i}\Big)dx = -\int_\Omega\vec{f}\vec{\varphi}_\ell dx, \quad \ell = 1,\ldots,n. \quad (4.45)$$

---

*) C_Ω^* – постоянная из неравенства $\int_\Omega\vec{b}^2(x)dx \le C_\Omega^{*2}\int_\Omega\vec{b}_x^2\,dx$, $\forall\vec{b}(x)\in H(\Omega)$ [12].

Умножая ℓ-ое уравнение (4.45) на $C_{\ell n}$, суммируя по $\ell=1,\dots,n$ и используя равенства (4.8) и (4.9), получим (ср.(4.10)):

$$\nu\int_\Omega (\vec{v}^n_x)^2 dx = \varkappa\int_\Omega \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} v^n_{jx_k} v^n_i dx - \int_\Omega \vec{f}\,\vec{v}^n dx, \quad n=1,2,\dots, \tag{4.46}$$

а из этого равенства, пользуясь тем, что

$$\left|\int_\Omega \vec{f}\,\vec{v}^n dx\right| \le \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\vec{v}^n\|_{H(\Omega)}, \tag{4.47}$$

$$\varkappa\left|\int_\Omega \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_j} v^n_{jx_k} v^n_i dx\right| \le \varkappa A_V C^*_\Omega \|\vec{v}^n\|^2_{H(\Omega)}, \tag{4.48}$$

и используя условие (4.43), получим оценку:

$$\|\vec{v}^n\|_{H(\Omega)} \le \frac{1}{\mu}\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}, \quad n=1,2,\dots. \tag{4.49}$$

Ввиду ортонормированности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ в $L_2(\Omega)$ из (4.49) следует, что

$$\sum_{\ell=1}^{n} |C_{\ell n}|^2 \le (C^*_\Omega \mu^{-1})^2 \|\vec{f}\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}, \quad n=1,2,\dots, \tag{4.50}$$

а из этой априорной ограниченности решений алгебраических систем (4.45) и теоремы Брауэра о неподвижных точках непрерывных преобразований в конечномерных пространствах [12], [22] следует, как известно, что система (4.45) при каждом $n=1,2,\dots$ имеет по крайней мере одно решение. После этого из неравенства (4.49), слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве и сильной компактности в $L_4(\Omega)$ множества, ограниченного в $H(\Omega)$ (напомним, что Ω –двумерная или трехмерная ограниченная область), следует, что из $\{\vec{v}^n(x)\}$ можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность $\{\vec{v}^{n_i}(x)\}$, которая сходится слабо в $H(\Omega)$ и сильно в $L_4(\Omega)$ к функции $\vec{v}(x)\in H(\Omega)$. С помощью известных приемов проверяется (см. [12] и доказательство теоремы 4.1), что предельная функция $\vec{v}(x)$ будет одним из "слабых" обобщенных решений краевой задачи (4.39),(4.40), т.е. что она удовлетворяет интегральному тождеству (4.41). Наконец, энергетическая оценка (4.43) для полученного решения следует из неравенства (4.49) и того, что $\vec{v}(x)$ есть слабый предел в $H(\Omega)$ $\{\vec{v}^{n_i}(x)\}$ и потому

$$\|\vec{v}\|_{H(\Omega)} \le \varliminf_{i\to\infty} \|\vec{v}^{n_i}\|_{H(\Omega)} \le \frac{1}{\mu}\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}.$$

§ 5. Разрешимость и устойчивость решений начально-краевых задач для альтернативного уравнения Кортевега-де Фриза

Как отмечалось во введении, альтернативным уравнением Кортевега-де Фриза называется уравнение

$$v_t + v v_x - v_{txx} = 0. \tag{5.1}$$

В настоящем параграфе мы докажем для уравнения (5.1) разрешимость и устойчивость решений на любом конечном интервале времени начально-краевой задачи с периодическими граничными условиями, т.е. задачи о нахождении решений уравнения (5.1) в прямоугольнике $\tilde{Q}_T = (0,2\pi)\times(0,T)$, $0<T<\infty$, удовлетворяющих начально-краевым условиям

$$v|_{t=0} = v_0(x),\ x\in[0,2\pi];\quad v|_{x=0} = v|_{x=2\pi},\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=2\pi},\ 0<t\leq T \tag{5.2}$$

и первой начально-краевой задачи, состоящей в решении уравнения (5.1) в $Q_T = (0,\ell)\times(0,T)$ при начально-краевых условиях

$$v|_{t=0} = v_0(x),\ 0\leq x\leq \ell;\ v|_{x=0} = v|_{x=\ell} = 0,\ 0\leq t\leq T. \tag{5.3}$$

Покажем прежде всего, что справедлива

Теорема 5.1. *Пусть $v_0(x)\in \tilde{W}_2^2(0,2\pi)$*). Тогда начально-краевая задача (5.1), (5.2) имеет, и притом единственное, решение $v(x,t)\in W^1_\infty(0,T;\ \tilde{W}_2^2(0,2\pi))$, которое удовлетворяет уравнению (5.1) почти всюду в $\tilde{Q}_T$, удовлетворяет (по непрерывности) начально-краевым условиям (5.2) и для него справедливы оценки:*

$$\|v\|_{W^1_\infty(0,T;\tilde{W}_2^2(0,2\pi))} \leq C_1(\|v_0\|_{W_2^2(0,2\pi)}, T), \tag{5.4}$$

$$\max_{0\leq t\leq T-\Delta t}\|v(x,t+\Delta t)-v(x,t)\|_{W_2^2(0,2\pi)} \leq C_1'(C_1)\Delta t. \tag{5.4'}$$

Для доказательства теоремы 5.1 изучим сначала линеаризованную начально-краевую задачу, состоящую в решении в $\tilde{Q}_T$ уравнения

$$v_t - v_{txx} = f(x,t) \tag{5.5}$$

при начально-краевых условиях (5.2), причем будем предполагать,

---

*) $\tilde{W}_2^2(0,2\pi)$ – подпространство периодических функций из $W_2^2(0,2\pi)$

как и в теореме 5.I, что $v_0(x)\in \tilde W_2^2(0,2\pi)$ и $\|f\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}<\infty$. Легко видеть, что при $0<t\leq T$

$$v_t(x,t)=\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} f(x,t)=\int_0^{2\pi} G(x,s)f(s,t)ds, \qquad (5.6)$$

где $G(x,s)$ – функция Грина периодической краевой задачи для оператора $I-\frac{d^2}{dx^2}$, а отсюда

$$v(x,t)=v_0(x)+\int_0^t\int_0^{2\pi} G(x,s)f(s,\tau)ds\,d\tau. \qquad (5.7)$$

Известно (см., например, [I3] ,[23]), что оператор $\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $L_2(0,2\pi)$ и $\tilde W_2^2(0,2\pi)$ и является при этом ограниченным оператором, поэтому в силу (5.6)

$$\|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\leq C_2\|f\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}, \qquad (5.8)$$

где C_2 – норма оператора $\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$. После этого из формулы Ньютона-Лейбница

$$v(x,t)=v_0(x)+\int_0^t v_t(x,\tau)d\tau \qquad (5.9)$$

и неравенства (5.8) следуют и такие оценки:

$$\|v\|^2_{C[0,T;W_2^2(0,2\pi)]}\leq \|v_0\|^2_{W_2^2(0,2\pi)}+C_3(C_2,T)\|f\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}, \qquad (5.10)$$

$$\operatorname*{vraimax}_{0\leq t\leq T-\Delta t}\|v(x,t+\Delta t)-v(x,t)\|_{W_2^2(0,2\pi)}\leq C_3'\left(C_2,\|f\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}\right)\Delta t. \qquad (5.10')$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 5.2. Пусть $v_0(x)\in\tilde W_2^2(0,2\pi)$ и $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))$. Тогда начально-краевая задача (5.5), (5.2) имеет единственное решение (5.7): $v(x,t)\in W_\infty^1(0,T;\tilde W_2^2(0,2\pi))$, это решение удовлетворяет почти всюду в $\bar Q_T$ уравнению (5.5), удовлетворяет (по непрерывности) начально-краевым условиям (5.2) и для него справедливы оценки (5.8), (5.10) и (5.10′).

Замечание. Оператор $\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$ устанавливает также взаимно-однозначное соответствие между парами пространств $\tilde W_p^{\ell-2}(0,2\pi)$ и $\tilde W_p^{\ell}(0,2\pi)$, $\ell=2,3,\ldots,p>1$, и $\tilde C^{(\ell-2,\alpha)}[0,2\pi]$ и $\tilde C^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi]$, $\ell=2,3,\ldots,0<\alpha<1$, и является в обоих случаях ограниченным оператором [I3] , [23] , поэтому если в начально-краевой задаче

(5.5), (5.2) либо

$$v_0(x)\in \tilde{W}_p^{\ell}(0,2\pi), \quad f(x,t)\in L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(0,2\pi)), \ell=2,3,\dots,p>1, \quad (5.11)$$

либо

$$v_0(x)\in \tilde{C}^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi], \quad f(x,t)\in L_\infty(0,T;C^{(\ell-2,\alpha)}[0,2\pi]), \ell=2,3,\dots,0<\alpha<1, \quad (5.12)$$

то начально-краевая задача (5.5),(5.2) имеет решение почти всюду в $\tilde{Q}_T$ и для этого решения справедливы оценки типа (5.8),(5.10):

$$\|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell}(0,2\pi))} \leq C_2'\|f\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(0,2\pi))}, \quad (5.11')$$

где C_2' – норма ограниченного оператора $\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$, действующего из $W_p^{\ell-2}(0,2\pi)$ в $\tilde{W}_p^{\ell}(0,2\pi)$,

$$\|v\|_{C[0,T;W_p^{\ell}(0,2\pi)]} \leq C_3'(C_2',T)\|f\|_{L_\infty(0,T;W_p^{\ell-2}(0,2\pi))}+\|v_0\|_{W_p^{\ell}(0,2\pi)}; \quad (5.11'')$$

$$\|v_t\|_{L_\infty(0,T;C^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi])} \leq C_2''\|f\|_{L_\infty(0,T;C^{(\ell-2,\alpha)}[0,2\pi])}, \quad (5.12')$$

где C_2'' – норма ограниченного оператора $\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$, действующего из $C^{(\ell-2,\alpha)}[0,2\pi]$ в $\tilde{C}^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi]$,

$$\|v\|_{C[0,T;C^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi]]} \leq C_3''(C_2'',T)\|f\|_{L_\infty(0,T;C^{(\ell-2,\alpha)}[0,2\pi])}+\|v_0\|_{C^{(\ell,\alpha)}[0,2\pi]}. \quad (5.12'')$$

Опираясь на теорему 5.2, теорему 5.I можно доказать точно так же, как и теорему 3.I о разрешимости почти всюду в Q_T квазилинейной начально-краевой задачи (I.9), (I.8) – именно, доказать сначала методом Галеркина существование единственного обобщенного решения, аналогичного "сильному" обобщенному решению задачи (I.9), (I.8), исследовать гладкость этого обобщенного решения по t (главным образом – доказать сильную непрерывность $v^2(x,t)$ по $t\in[0,T]$ в $L_2(0,2\pi)$) и затем, рассматривая в уравнении (5.I) нелинейный член vv_x как "свободный" член, принадлежащий для упомянутого обобщенного решения в одномерном случае $L_2(0,2\pi)$ равномерно по $t\in[0,T]$, показать, что обобщенное решение "линеаризованной" таким образом задачи в силу теоремы 5.2 является ее решением почти всюду в $\tilde{Q}_T$ и для него конечны интегралы, входящие в оценку (5.4).

Можно, однако, опираясь снова на теорему 5.2, доказать теорему 5.I и другим путем, а именно, с помощью теоремы Ю.Шаудера о неподвижной точке [22]. Этот путь требует, как известно, предварительного получения достаточного набора априорных оценок для возможных решений исходной нелинейной задачи, в данном случае –

оценки (5.4), к выводу которой мы и переходим. При доказательстве оценки (5.4) мы будем пользоваться тем, что рассматриваемое в теореме 5.I решение задачи (5.I), (5.2), кроме периодических граничных условий (5.2), удовлетворяет также следующим вытекающим из (5.2) условиям периодичности:

$$v_t\Big|_{x=0} = v_t\Big|_{x=2\pi},\quad v_{tx}\Big|_{x=0} = v_{tx}\Big|_{x=2\pi},\ 0\le t\le T. \qquad (5.I2)$$

Умножая уравнение (5.I) на v, интегрируя по $(0,2\pi), 0\le t\le T$, интегрируя по частям и пользуясь тем, что в силу (5.2)

$$\int_0^{2\pi} v^2 v_x dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v\frac{\partial v^2}{\partial x}dx = \frac{1}{2}v^3\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v^2 v_x dx = 0,\ 0<t\le T, \qquad (5.I3)$$

получим:

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}} \int_0^{2\pi}(v^2(x,t)+v_x^2)dx = \int_0^{2\pi}(v_0^2(x)+v_{0x}^2)dx. \qquad (5.I4)$$

Умножая уравнение (5.I) на v_t, интегрируя по $(0,2\pi), 0<t\le T$, интегрируя по частям и используя граничные условия (5.2) и (5.I2), получим:

$$\int_0^{2\pi}(v_t^2(x,t)+v_{xt}^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v^2 v_{tx},\ 0<t\le T, \qquad (5.I5)$$

а отсюда, применяя для оценки интеграла справа неравенства Гельдера и Коши, пользуясь тем, что в одномерном случае

$$\max_{[0,2\pi]}|v(x,t)| \le C_4(\|v(x,t)\|_{W_2^1(0,2\pi)}),\ 0\le t\le T, \qquad (5.I6)$$

и используя оценку (5.I4), будем иметь:

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}} \int_0^{2\pi}(v_t^2(x,t)+v_{xt}^2)dx \le C_5(\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)}, T). \qquad (5.I7)$$

Умножая уравнение (5.I) на v_{xx}, интегрируя по $(0,2\pi), 0<t\le T$, интегрируя по частям и используя граничные условия (5.2) и (5.I2), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(v_x^2(x,t)+v_{xx}^2)dx = \int_0^{2\pi} v v_x v_{xx}dx,\ 0<t\le T, \qquad (5.I8)$$

а отсюда, используя для оценки интеграла справа неравенство (5.I6), применяя неравенства Гельдера и Коши, используя оценку (5.I4) и лемму Гронуолла, получим:

$$\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai\,max}} \int_0^{2\pi}[v_x^2(x,t)+v_{xx}^2]dx \le C_6(\|v_0\|_{W_2^2(0,2\pi)}, T). \qquad (5.I9)$$

Наконец, умножая уравнение (5.I) на v_{txx}, интегрируя по $(0,2\pi)$, $0<t\le T$, интегрируя по частям и используя граничное усло-

вие (5.I2), получим:

$$\int_0^{2\pi}\{v_{xt}^2(x,t)+v_{txx}^2\}dx=\int_0^{2\pi}v v_x v_{txx}\,dx,\ 0<t\leq T, \qquad (5.20)$$

откуда, используя для оценки интеграла справа неравенство (5.I6), применяя неравенства Гельдера и Коши и используя оценку (5.I4), будем иметь:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\leq t\leq T}\int_0^{2\pi}\{v_{xt}^2(x,t)+v_{txx}^2\}dx\leq C_7(\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)},T). \qquad (5.2I)$$

В силу уравнения (5.I) и оценки (5.I6)

$$(I-\frac{d^2}{dx^2})v_t(x,0)=-v_0(x)v_0'(x)\in L_2(0,2\pi), \qquad (5.22)$$

и потому

$$v_t(x,0)=-(I-\frac{d^2}{dx^2})^{-1}(v_0v_0')\in\tilde{W}_2^2(0,2\pi), \qquad (5.23)$$

причем

$$\int_0^{2\pi}\{v_{tx}^2(x,0)+v_{txx}^2\}dx\leq\|v_t(x,0)\|^2_{W_2^2(0,2\pi)}\leq\|v_0v_0'\|_{L_2(0,2\pi)}\leq C_8(\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)}). \qquad (5.24)$$

Оценки (5.2I) и (5.24) вместе дают:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\leq t\leq T}\int_0^{2\pi}(v_{xt}^2(x,t)+v_{txx}^2)dx\leq C_9(\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)},T). \qquad (5.25)$$

Оценки (5.I4), (5.I7), (5.I9) и (5.25) и составляют неравенство (5.4), при этом целесообразно записать неравенство (5.I4) в следующей более точной форме:

$$\|v\|_{C[0,T;W_2^1(0,2\pi)]}+\|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\leq C_{10}(\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)},T), \qquad (5.26)$$

$$\|v_{xx}\|_{C[0,T;L_2(0,2\pi)]}\leq C_{11}(\|v_0\|_{W_2^2(0,2\pi)},T). \qquad (5.27)$$

Неравенство (5.4$'$) следует из формулы Ньютона-Лейбница (5.9) и оценки (5.26).

Теорему Ю.Шаудера о неподвижной точке мы будем применять в следующей известной форме (см., например, [23] , гл.IУ):

<u>Теорема Ю.Шаудера</u>. Если $A(v)$ – вполне непрерывное (т.е. непрерывное и компактное) преобразование в банаховом пространстве H и если все возможные решения уравнения $v=\tau A(v)$, $\tau\in[0,1]$, лежат внутри шара $K_R\equiv\{v:\|v\|_H\leq R\}$ пространства H, то $A(v)$ имеет в K_R по крайней мере одну неподвижную

точку.

Пусть $H \equiv C[0,T;\tilde{W}_2^1(0,2\pi)]$ – банахово пространство функций $v(x,t)$, $(x,t)\in\tilde{Q}_T$, принадлежащих при каждом $t\in[0,T]$ пространству $\tilde{W}_2^1(0,2\pi)$ и таких, что v, v_x непрерывны по $t\in[0,T]$ в $L_2(0,2\pi)$; как указывалось выше, норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|v(x,t)\|_H \equiv \max_{0\leq t\leq T} \|v(x,t)\|_{W_2^1(0,2\pi)}. \tag{5.28}$$

Сопоставим квазилинейной начально-краевой задаче (5.I),(5.2) совокупность линейных задач с параметром $\tau\in[0,1)$:

$$w_t - w_{txx} = -\tau v v_x\,,\quad (x,t)\in\tilde{Q}_T; \tag{5.29}$$

$$w\big|_{t=0} = \tau v_0(x),\quad x\in[0,2\pi];\quad w\big|_{x=0} = w\big|_{x=2\pi},\ w_x\big|_{x=0} = w_x\big|_{x=2\pi},\ 0\leq t\leq T, \tag{5.30}$$

определяющих по $v(x,t)$ и τ функцию $w(x,t;\tau)\equiv A(v;\tau)$. Очевидно, что в силу линейного вхождения параметра τ в уравнение (5.29) и начальное условие (5.30) преобразование $A(v;\tau)$ является линейным по τ :

$$A(v;\tau) = \tau A(v)\,,\ \tau\in[0,1). \tag{5.3I}$$

Очевидно также, что неподвижные точки преобразования (5.3I), т.е. решения операторного уравнения $v = A(v)$, являются решениями начально-краевой задачи (5.I), (5.2).

Априорная оценка решений уравнения $v = \tau A(v),\ \tau\in[0,1)$, в пространстве H , т.е. решений квазилинейной начально-краевой задачи типа (5.I), (5.2) с параметром τ :

$$\left.\begin{aligned} &v_t - v_{txx} = -\tau v v_x\,,\ (x,t)\in\tilde{Q}_T\,,\ \tau\in[0,1),\\ &v\big|_{t=0} = \tau v_0(x),\ x\in[0,2\pi];\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=2\pi},\ v_x\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=2\pi},\ 0\leq t\leq T \end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

дается неравенством

$$\|v\|_H \leq \|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)} \equiv R\,,\quad \tau\in[0,1), \tag{5.33}$$

аналогичным оценке (5.I4), которое и доказывается точно так же, как оценка (5.I4), ибо в этом доказательстве нелинейный член с параметром по-прежнему исчезает: $\tau\int_0^{2\pi} v^2 v_x\,dx = 0$.

Для доказательства непрерывности преобразования $A(v)$ в пространстве H рассмотрим две задачи (5.29),(5.30) со свободными членами $v^{(1)}, v^{(2)}\in H$ и начальными условиями $v_0^{(1)}(x)$, $v_0^{(2)}(x)$. Тогда для разности $w(x,t)\equiv w^{(1)} - w^{(2)}$ решений этих задач получим такую линейную начально-краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &w_t-w_{txx}=-\tau v^{(1)}(v^{(1)}-v^{(2)})_x-\tau(v^{(1)}-v^{(2)})v^{(2)}_x,\ (x,t)\in\tilde{Q}_T,\ \tau\in[0,1),\\ &w\big|_{t=0}=\tau(v_0^{(1)}-v_0^{(2)}),x\in[0,2\pi];\ w\big|_{x=0}=w\big|_{x=2\pi},\ w_x\big|_{x=0}=w_x\big|_{x=2\pi},0\le t\le T\end{aligned}\right\}(5.34)$$

Умножая уравнение (5.34) на w, интегрируя по $(0,2\pi)$, $0<t\le T$, интегрируя по частям и пользуясь тем, что в силу неравенства Коши и оценки (5.33) для $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ имеет место оценка:

$$\tau\int_0^{2\pi} v^{(1)}(v^{(1)}-v^{(2)})_x w\,dx+\tau\int_0^{2\pi}(v^{(1)}-v^{(2)})v^{(2)}_x w\,dx=\tau\int_0^{2\pi}(v^{(1)}-v^{(2)})(v^{(1)}-v^{(2)})_x w\,dx-$$

$$-\tau\int_0^{2\pi} v^{(2)}(v^{(1)}-v^{(2)})w_x\,dx\le C_{12}(R)\Big[\int_0^{2\pi}(w^2+w_x^2)dx+\int_0^{2\pi}\big(|v^{(1)}-v^{(2)}|^2+|(v_x^{(1)}-v_x^{(2)}|^2\big)dx, \qquad (5.35)$$

получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(w^2+w_x^2)dx\le C_{12}\int_0^{2\pi}(w^2+w_x^2)dx+C_{12}\,\|v^{(1)}-v^{(2)}\|^2_{W_2^1(0,\pi)},0<t\le T, \qquad (5.36)$$

из которого, применяя лемму Гронуолла, получим оценку:

$$\int_0^{2\pi}(w^2(x,t)+w_x^2)dx\le e^{2C_{12}T}\Big[\|v_0^{(1)}-v_0^{(2)}\|^2_{W_2^1(0,2\pi)}+2C_{12}\int_0^t\|v^{(1)}-v^{(2)}\|^2_{W_2^1(0,2\pi)}dt\Big], \qquad (5.37)$$
$$0<t\le T.$$

Из этого неравенства, применяя операцию максимизации по $t\in[0,T]$, получим равномерную по $\tau\in[0,1)$ оценку:

$$\|w\|^2_H\equiv\|A(v^{(1)})-A(v^{(2)})\|^2_H\le C_{13}(C_{12},T)\Big[\|v_0^{(1)}-v_0^{(2)}\|^2_{W_2^1(0,2\pi)}+\|v^{(1)}-v^{(2)}\|^2_H\Big], \qquad (5.38)$$

которая и доказывает непрерывность (точнее, непрерывность по Липшицу) преобразования $A(v)$ в пространстве H.

Полная непрерывность преобразования $A(v)$ в пространстве $H\equiv C[0,T;\tilde{W}_2^1(0,2\pi)]$ доказывается следующим образом: в силу теоремы 5.2 решение $w(x,t;\tau)\equiv\tau A(v)$ линеаризованной задачи (5.29), (5.30) имеет производные $w_t, w_{xt}, w_{xx}, w_{txx}\in L_2(0,2\pi)$, $0\le t\le T$, и для них имеют место оценки (ср.(5.8),(5.10),(5.10$'$)), равномерные по $\tau\in[0,1)$:

$$\|w_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\le C_2\|vv_x\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}\le C_{14}(C_2,R), \qquad (5.39)$$

$$\|w_{xx}\|^2_{C[0,T;L_2(0,2\pi)]}\le\|v_0\|^2_{W_2^2(0,2\pi)}+\|vv_x\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(0,2\pi))}\le C_{15}, \qquad (5.40)$$

$$\max_{0\le t\le T-\Delta t} \|w(x,t+\Delta t)-w(x,t)\|_{W_2^2(0,2\pi)} \le C'_{15}(C_{14})\Delta t. \qquad (5.40')$$

Очевидно, что множество функций, удовлетворяющих неравенствам (5.39), (5.40), (5.40′), компактно в пространстве $C[0,T;$ $W_2^1(0,2\pi)]$, что и доказывает полную непрерывность оператора $A(v)$ в этом пространстве.

Итак, все предположения теоремы Ю.Шаудера выполнены, и потому преобразование $A(v)$ имеет в пространстве $C[0,T;W_2^1(0,2\pi)]$ по крайней мере одну неподвижную точку $v(x,t)$, которая к тому же такова, что для нее существуют производные $v_t, v_{xt}, v_{xx}, v_{txx}\in L_2(0,2\pi)$, $0<t<T$, и имеют место оценки (5.39), (5.40) и (5.40′). Эта неподвижная точка преобразования $A(v)$ и является одним из решений начально-краевой задачи (5.I), (5.2), разыскиваемых в теореме 5.I.

Единственность решения начально-краевой задачи (5.I),(5.2) следует из оценок доказываемой ниже теоремы об устойчивости решений начально-краевой задачи (5.I),(5.2) на любом конечном интервале времени $[0,T]$.

<u>Теорема 5.3</u>. Пусть $v_0^{(i)}(x)\in\tilde{W}_2^2(0,2\pi)$, $i=1,2$, $v_0(x)=v_0^{(1)}-v_0^{(2)}$, и пусть $v^{(i)}(x,t)$ – решения начально-краевых задач (5.I),(5.2) с начальными функциями $v_0^{(i)}(x)$, существование которых гарантировано теоремой 5.I. Тогда для разности

$$v(x,t)\equiv v^{(1)}(x,t)-v^{(2)}(x,t) \qquad (5.4I)$$

имеют место следующие оценки:

$$\|v\|^2_{C[0,T;W_2^1(0,2\pi)]}+\|v_t\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\le C_{16}\|v_0\|^2_{W_2^1(0,2\pi)}, \qquad (5.42)$$

$$\|v_{xx}\|_{C[0,T;L_2(0,2\pi)]}\le C_{17}\|v_{0x}\|_{W_2^1(0,2\pi)}, \qquad (5.43)$$

причем постоянные C_{16} и C_{17} зависят только от $\|v_0^{(i)}\|_{W_2^2(0,2\pi)}$, $i=1,2$, T и $C_{16}, C_{17}\to\infty$ при $T\to\infty$.

В самом деле, $v(x,t)$ есть решение линеаризованной задачи

$$v_t-v_{txx}+v_x^{(1)}v+v^{(2)}v_x=0, \quad (x,t)\in\tilde{Q}_T, \qquad (5.44)$$

$$v|_{t=0}=v_0(x),\ x\in[0,2\pi];\ v|_{x=0}=v|_{x=2\pi},\ v_x|_{x=0}=v_x|_{x=2\pi},\ 0\le t\le T, \qquad (5.45)$$

и оценки (5.42) и (5.43) получаются для него аналогично оценкам (5.14),(5.17),(5.19),(5.25) (см.также (5.35)); при этом используется то обстоятельство, что для решений $v^{(i)}(x,t)$ справедливы оценки (5.26),(5.27) (или, что то же, оценка (5.4)). Не проводя подробно всех этих оценок, мы рассмотрим, например, оценки для v_{xx} и v_{xxt}.

Умножая уравнение (5.44) на v_{xx}, интегрируя по $(0,2\pi), 0<t\leq T$, интегрируя по частям и используя граничные условия (5.45) и (5.12), получим равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(v_x^2(x,t)+v_{xx}^2)dx=\int_0^{2\pi}v_x^{(1)}v\,v_{xx}dx+\int_0^{2\pi}v^{(2)}v_x v_{xx}dx,\ 0<t\leq T. \quad (5.46)$$

Оценивая интегралы справа по неравенствам Гельдера и Коши и используя очевидные неравенства

$$\int_0^{2\pi}|v_x^{(1)}|^4dx\leq\max_{0\leq x\leq 2\pi}|v_x^{(1)}|^2\int_0^{2\pi}|v_x^{(1)}|^2dx\leq C_{18}\int_0^{2\pi}|v_x^{(1)}|^2dx\cdot\int_0^{2\pi}|v_{xx}^{(1)}|^2dx\leq$$

$$\leq C_{19}\left(C_{18},\max_{0\leq t\leq T}\|v^{(1)}\|_{W_2^2(0,2\pi)}\right),\ 0<t\leq T, \quad (5.47)$$

$$\int_0^{2\pi}|v|^4dx\leq C_{18}\left(\int_0^{2\pi}v_x^2dx\right)^2,\quad 0<t\leq T, \quad (5.48)$$

получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(v_x^2(x,t)+v_{xx}^2)dx\leq C_{20}\left(C_{18},C_{19},\max_{\tilde{Q}_T}|v^{(2)}|\right)\int_0^{2\pi}(v_x^2+v_{xx}^2)dx,\ 0<t\leq T, \quad (5.49)$$

из которого, применяя лемму Гронуолла, получим оценку:

$$\operatorname{vraimax}_{0\leq t\leq T}\int_0^{2\pi}v_{xx}^2(x,t)dx\leq C_{21}\left(\|v^{(1)},v^{(2)}\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\right)\int_0^{2\pi}(v_{0x}^2(x)+v_{0xx}^2)dx \quad (5.50)$$

Аналогично, умножая уравнение (5.44) на v_{txx}, интегрируя по $(0,2\pi), 0<t\leq T$, интегрируя по частям и используя граничные условия (5.12), получим:

$$\int_0^{2\pi}(v_{xt}^2(x,t)+v_{xxt}^2)dx=\int_0^{2\pi}v_x^{(1)}v\,v_{xxt}dx+\int_0^{2\pi}v^{(2)}v_x v_{xxt}dx,\ 0<t\leq T, \quad (5.51)$$

откуда, оценивая интегралы справа по неравенству Гельдера и неравенству Коши с $\forall\varepsilon>0$, и используя оценки (5.47) и (5.48), получим:

$$\int_0^{2\pi}(v_{xt}^2(x,t)+v_{xxt}^2)dx\leq\varepsilon\int_0^{2\pi}v_{xxt}^2dx+\frac{1}{\varepsilon}C_{22}\left(\|v^{(1)},v^{(2)}\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(0,2\pi))}\right)\int_0^{2\pi}v_x^2dx, \quad (5.52)$$

$$0<t\leq T,\ \varepsilon>0.$$

Из неравенства (5.52), выбирая $\varepsilon=\frac{1}{2}$, применяя операцию максимизации по $t\in[0,T]$ и используя (уже доказанную) оценку

$$\|v\|_{C[0,T;W_2^1(0,2\pi)]}\le C_{23}\left(\|v^{(1)},v^{(2)}\|_{C[0,T;W_2^1(0,2\pi)]}\right)\|v_0\|_{W_2^1(0,2\pi)}, \tag{5.53}$$

получим оценку:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\int_0^{2\pi}\left(v_{xt}^2(x,t)+v_{xxt}^2\right)dx\le C_{24}\left(\|v^{(1)},v^{(2)}\|_{C[0,T;W_2^2(0,2\pi)]}\right)\|v_0\|^2_{W_2^1(0,2\pi)}. \tag{5.54}$$

Результаты, полностью аналогичные теоремам 5.I – 5.3, справедливы и для первой начально-краевой задачи (5.I),(5.3).

С помощью теоремы 5.I, замечания к теореме 5.2 и одномерных теорем вложения типа неравенства (5.I6) можно, повышая гладкость начального условия $v_0(x)$, доказать по индукции соответствующее увеличение гладкости по x решений начально-краевой задачи (5.I), (5.2). Именно, справедлива следующая теорема, доказательство которой совершенно аналогично доказательству теоремы 3.5 из § 3.

<u>Теорема 5.4</u>. *Пусть $v_0(x)\in\tilde W_2^{\ell}(0,2\pi)$, $\ell=3,4,\ldots$* *). *Тогда решение $v(x,t)$ начально-краевой задачи (5.I),(5.2), существование которого гарантируется теоремой 5.I, обладает следующими свойствами: $v(x,t)\in W_\infty^1(0,T;\tilde W_2^{\ell}(0,2\pi))$ и для него имеют место оценки:*

$$\|v\|_{W_\infty^1(0,T;W_2^{\ell}(0,2\pi))}\le C_{25}\left(\|v_0\|_{W_2^{\ell}(0,2\pi)},T\right), \tag{5.55}$$

$$\max_{0\le t\le T-\Delta t}\|v(x,t+\Delta t)-v(x,t)\|_{W_2^{\ell}(0,2\pi)}\le C_{26}(C_{25})\Delta t. \tag{5.56}$$

В свою очередь, теорема 5.4, гарантирующая повышение гладкости решений начально-краевой задачи (5.I),(5.2) по пространственной переменной и – как следствие этого – увеличение числа условий периодичности (см.(5.5I)), позволяет улучшить результат об устойчивости решений задачи (5.I),(5.2) на конечном интервале времени $[0,T]$. Справедлива следующая теорема, доказательство которой – со ссылкой на теорему 5.4 вместо теоремы 5.I – совершенно

---

*) Напомним, что функция $v_0(x)\in\tilde W_2^{\ell}(0,2\pi)$ удовлетворяет ℓ условиям периодичности:

$$\left.\frac{\partial^i v_0}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^i v_0}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi},\quad i=0,1,\ldots,\ell-1. \tag{5.57}$$

аналогично доказательству теоремы 5.3.

Теорема 5.5. Пусть $U_0^{(i)}(x)\in\widetilde{W}_2^l(0,2\pi),\ i=1,2;\ U_0(x)\equiv U_0^{(1)}-U_0^{(2)}$ и пусть $U^{(i)}(x,t)$ – решения начально-краевых задач (5.I),(5.2) с начальными функциями $U_0^{(i)}(x)$. Тогда для разности $U(x,t)\equiv U^{(1)}-U^{(2)}$ имеют место следующие оценки:

$$\|U\|_{W_\infty^1(0,T;W_2^l(0,2\pi))}\leq C_{27}\left(\|U_0^{(i)}\|_{W_2^l(0,2\pi)},T\right)\|U_0\|_{W_2^l(0,2\pi)},\ l=3,4,\ldots, \quad (5.58)$$

причем $C_{27}\to\infty$ при $T\to\infty$.

Отметим в заключение, что альтернативное уравнение Кортевега–де Фриза (5.I), как и уравнение Кортевега–де Фриза [I7],[I8], [24]

$$U_t+UU_x+U_{xxx}=0, \quad (5.59)$$

имеет однопараметрическое семейство периодических однородных волновых решений

$$U(x,t;k)\equiv\varphi(x-ct;k)\equiv\varphi(\xi,k),\ \xi=x-ct,\ 0<k<1, \quad (5.60)$$

с произвольным периодом $X>0$ и произвольной постоянной фазовой скоростью $C>0$. Действительно, функция (5.54) удовлетворяет уравнению

$$c\varphi'''(\xi;k)+(\varphi-c)\varphi'(\xi;k)=0, \quad (5.6I)$$

периодическое решение которого с периодом X можно представить в виде следующего однопараметрического семейства кноидальных волн [25], [26]:

$$\varphi(\xi;k)=c\left\{1+16\frac{K^2(k)}{X^2}\left[3k^2cn^2\left(\frac{2K(k)}{X}\xi;k\right)-2k^2+1\right]\right\}, \quad (5.62)$$

где $cn\left(\frac{2K(k)}{X}\xi;k\right)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем k, $0<k<1$, а $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Литература

I. Т р у с д е л л К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., "Мир", I975, 592 с.

2. С е р р и н Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностранной литературы, I963, 256 с.

3. С е д о в Л.И. Механика сплошной среды, т.2, М., "Наука", I973, 584 с.

4. В о й т к у н с к и й Я.И., А м ф и л о х и е в В.Б., П а в л о в с к и й В.А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств. – Тр.Ленингр.Кораблестр. ин-та, I970, вып.69, с.I6-24.

5. П а в л о в с к и й В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. – Докл.АН СССР, I97I, 200, № 4, с.809-8I3.

6. О с к о л к о в А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости. – Зап. научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, I972, 27, с.I45-I60.

7. О с к о л к о в А.П. О единственности и глобальной разрешимости первой краевой задачи для системы уравнений, описывающих движение водных растворов полимеров. – Тр.Ленингр. Кораблестр.ин-та, I972, вып.80, с.44-48.

8. О с к о л к о в А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. – Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, I973, 38, с.98-I36.

9. О с к о л к о в А.П. Об одной нестационарной квазилинейной системе с малым параметром, регуляризующей систему уравнений Навье-Стокса. – В кн.: "Пробл.матем.анализа". Изд-во ЛГУ, I973, вып.4, с.78-87.

I0. О с к о л к о в А.П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, I975, I27, с.32-57.

II. О с к о л к о в А.П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей. – Зап. научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, I975, 52, с.I28-I57.

I2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд. М., "Наука", I970, 288 с.

I3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. М., "Наука", I973, 407 с.

I4. С о л о н н и к о в В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса-Ниренберга. ч.I – Изв. АН СССР, сер.матем. I964, т.28, с.665-706; ч.П – Тр.Мат. ин-та АН СССР, I966, 92, с.233-297.

15. T i n g T.W. Certain non-steady flows of second-order fluids. - Arch.Rat.Mech.Anal., 1963, 14, 1, p.1-26.
16. C o l e m a n B.D., D u f f i n R.J., M i z e l V.J., - Instability, Uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{txx}$ on a strip. - Arch.Rat.Mech.Anal., 1965, 19, 2, p.100-116.
17. B e n j y m i n T.B., B o n a J.L., M a h o n y J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. - Phil. Trans.R.Soc.Lond., 1972, A272, p.47.
18. B o n a J.L., S m i t h R. The initial-value problem for the korteveg-de Vries equation. - Phil.Trans.R.Soc.Lond., 1975, A278, p.555-601.
19. L a d y z h e n s k a y a O.A. Mathematical analysis of Navier-Stokes Equations for incompressible liquids. - Annual Review of fluid mech., 1975, v.7, p.249-272.
20. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики, т.IУ. М-Л., "Гостехиздат", 1951, 804 с.
21. Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностранной литературы, 1954, 500 с.
22. Э л ь с г о л ь ц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. М., "Гостехиздат", 1955, 300 с.
23. Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2-ое изд. М., "Наука", 1973, 576 с.
24. Нелинейная теория распространения волн. Сб.переводов под ред.Г.И.Баренблатта. М., "Мир", 1970, 230 с.
25. Теория поверхностных волн. Сб.переводов под ред. М.А.Красносельского и Н.Н.Моисеева. М., Изд-во иностранной литературы, 1959, 366 с.
26. А х и е з е р Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., "Наука", 1970, 304 с.

O s k o l k o v A.P. On some nonstationary linear and quasilinear systems occuring in studying of motion of viscous fluids.

The existence theorems are proved for solutions initial-boundary value problems for modified equations of viscous fluids containing linear and nonlinear terms with third derivatives which are model in describing of flows of some classes of fluids posessing relaxation properties and also alternative model of the Korteweg-de Vries equation.