Вычислим значение z по следующей формуле:

$$\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln{(x + y)}}$$

Запишем данные в таблицу:

Величина	Значение
x	1
d_x	0.2
y	2
d_y	0.3

Найдём погрешность. Для этого построим частные производные.

Найдём частные производные по каждой из переменных.

►Найдём частную производную следующего выражения по x:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln{(x + y)}}\right)'_x$$

▷Упростив, получим:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln{(x + y)}}\right)'_x$$

▷Продифференцируем.

Рассматриваем переменную как константу:

$$(y)'_x = 0$$

Производная переменной дифференцирования:

$$(x)'_x = 1$$

По формуле производной суммы:

$$(x + y)'_x = 1 + 0$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\ln{(x + y)})'_x = \frac{1}{x + y} \cdot (1 + 0)$$

Вычисляя производную степенной функции:

$$\left(y^3\right)'_x = 3y^2$$

Вычисляя производную степенной функции:

$$\left(x^2\right)'_x = 2x$$

Производная константы равна 0:

$$(2)'_x = 0$$

Из выражения для производной произведения:

$$\left(2x^2\right)'_x = 0x^2 + 2 \cdot 2x$$

Из выражения для производной произведения:

$$\left(2x^2y^3\right)'_x = 0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2$$

По формуле производной суммы:

$$\left(2x^2y^3 + \ln\left(x+y\right)\right)'_x = 0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2 + \frac{1}{x+y} \cdot (1+0)$$

Рассматриваем переменную как константу:

$$(y)'_x = 0$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\cos y)'_x = -\sin y \cdot 0$$

Производная переменной дифференцирования:

$$(x)'_x = 1$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\sin x)'_x = \cos x \cdot 1$$

Из выражения для производной произведения:

$$(\sin x \cdot \cos y)'_x = \cos x \cdot 1 \cos y + \sin x \cdot - \sin y \cdot 0$$

Находим производную частного:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln\left(x+y\right)}\right)'_x$$
$$= \frac{(\cos x \cdot 1 \cos y + \sin x \cdot - \sin y \cdot 0) \cdot (2x^2y^3 + \ln\left(x+y\right)) - \sin x \cdot \cos y \cdot \Big(0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2 + \frac{1}{x+y} \cdot (1}{\left(2x^2y^3 + \ln\left(x+y\right)\right)^2}$$

▷Упростим полученную производную.

Нетрудно дойти до того, что

$$\frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

Очевидно, что

$$x = x$$

Немного подумав, получим:

$$0x^2 = 0$$

Как подсказывает опыт,

$$-\sin y \cdot 0 = 0$$

Учёные доказали, что

$$\cos x \cdot 1 = \cos x$$

Очевидно, что

$$0 + 2 \cdot 2x = 2 \cdot 2x$$

Очевидно, что

$$\sin x \cdot 0 = 0$$

Заметим, что

$$\cos x \cdot \cos y + 0 = \cos x \cdot \cos y$$

▷Наконец, получаем окончательный ответ:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln(x+y)}\right)'_x = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot (2x^2y^3 + \ln(x+y)) - \sin x \cdot \cos y \cdot \left(2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2 + \frac{1}{x+y}\right)}{(2x^2y^3 + \ln(x+y))^2}$$

▶Найдём частную производную следующего выражения по y:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln(x+y)}\right)'_y$$

▷Упростив, получим:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln(x+y)}\right)'_y$$

$\triangleright$Продифференцируем.

Производная переменной дифференцирования:

$$(y)'_y = 1$$

Рассматриваем переменную как константу:

$$(x)'_y = 0$$

По формуле производной суммы:

$$(x+y)'_y = 0+1$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\ln(x+y))'_y = \frac{1}{x+y} \cdot (0+1)$$

Вычисляя производную степенной функции:

$$\left(y^3\right)'_y = 3y^2$$

Вычисляя производную степенной функции:

$$\left(x^2\right)'_y = 2x$$

Производная константы равна 0:

$$(2)'_y = 0$$

Из выражения для производной произведения:

$$\left(2x^2\right)'_y = 0x^2 + 2 \cdot 2x$$

Из выражения для производной произведения:

$$\left(2x^2y^3\right)'_y = 0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2$$

По формуле производной суммы:

$$\left(2x^2y^3 + \ln(x+y)\right)'_y = 0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2 + \frac{1}{x+y} \cdot (0+1)$$

Производная переменной дифференцирования:

$$(y)'_y = 1$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\cos y)'_y = -\sin y \cdot 1$$

Рассматриваем переменную как константу:

$$(x)'_y = 0$$

По теореме о производной сложной функции:

$$(\sin x)'_y = \cos x \cdot 0$$

Из выражения для производной произведения:

$$(\sin x \cdot \cos y)'_y = \cos x \cdot 0 \cos y + \sin x \cdot - \sin y \cdot 1$$

Находим производную частного:

$$\left(\frac{\sin x \cdot \cos y}{2x^2y^3 + \ln(x+y)}\right)'_y$$
$$= \frac{(\cos x \cdot 0 \cos y + \sin x \cdot - \sin y \cdot 1) \cdot (2x^2y^3 + \ln(x+y)) - \sin x \cdot \cos y \cdot \left(0x^2 + 2 \cdot 2xy^3 + 2x^2 \cdot 3y^2 + \frac{1}{x+y} \cdot (0\right.}{(2x^2y^3 + \ln(x+y))^2}$$

$\triangleright$Упростим полученную производную.

После некоторых вычислений получим:

$$\frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

Как подсказывает опыт,

$$x = x$$

Заметим, что

$$0x^2 = 0$$

Можно упростить:

$$-\sin y \cdot 1 = -\sin y$$

Используя нетривиальные тождества:

$$\cos x \cdot 0 = 0$$

Учёные доказали, что

$$0 + 2 \cdot 2x = 2 \cdot 2x$$

После некоторых вычислений получим:

$$0\cos y = 0$$

После некоторых вычислений получим:

$$0+\sin x\cdot -\sin y = \sin x\cdot -\sin y$$

▷Наконец, получаем окончательный ответ:

$$\left(\frac{\sin x\cdot\cos y}{2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)}\right)'_y = \frac{\sin x\cdot -\sin y\cdot\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)-\sin x\cdot\cos y\cdot\left(2\cdot 2xy^3+2x^2\cdot 3y^2+\frac{1}{x+y}\right)}{\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)^2}$$

Тогда погрешность может быть вычислена по следующей формуле:

$$\sigma_z = \left(\left(\frac{\cos x\cdot\cos y\cdot\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)-\sin x\cdot\cos y\cdot\left(2\cdot 2xy^3+2x^2\cdot 3y^2+\frac{1}{x+y}\right)}{\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)^2}d_x\right)^2 + \left(\frac{\sin x\cdot -\sin y\cdot\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)-\sin x\cdot\cos y\cdot\left(2\cdot 2xy^3+2x^2\cdot 3y^2+\frac{1}{x+y}\right)}{\left(2x^2y^3+\ln\left(x+y\right)\right)^2}d_y\right)^2\right)^{0.5}$$

▷Вычисляя, находим: $\sigma_z = 0.0128263$.

▶Таким образом получаем, что $z = -0.02 \pm 0.013$