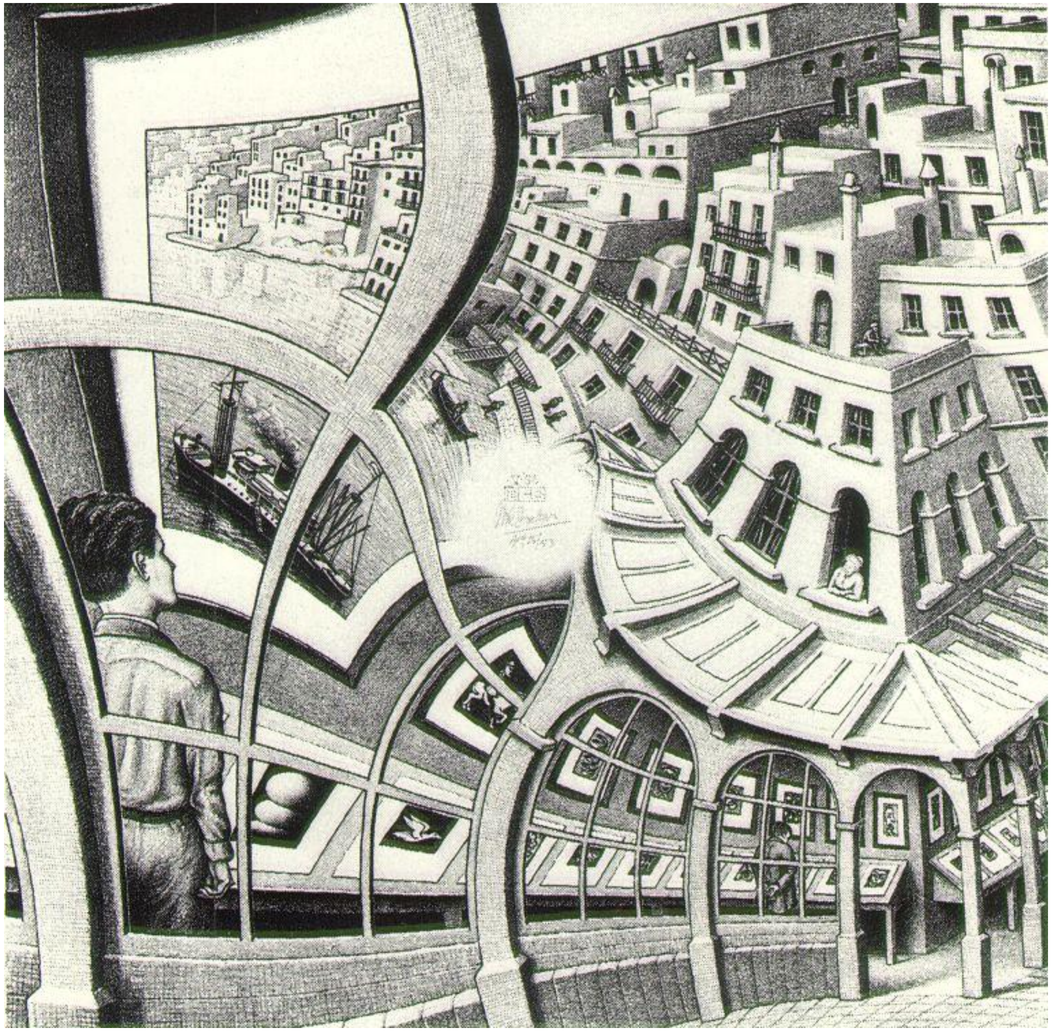
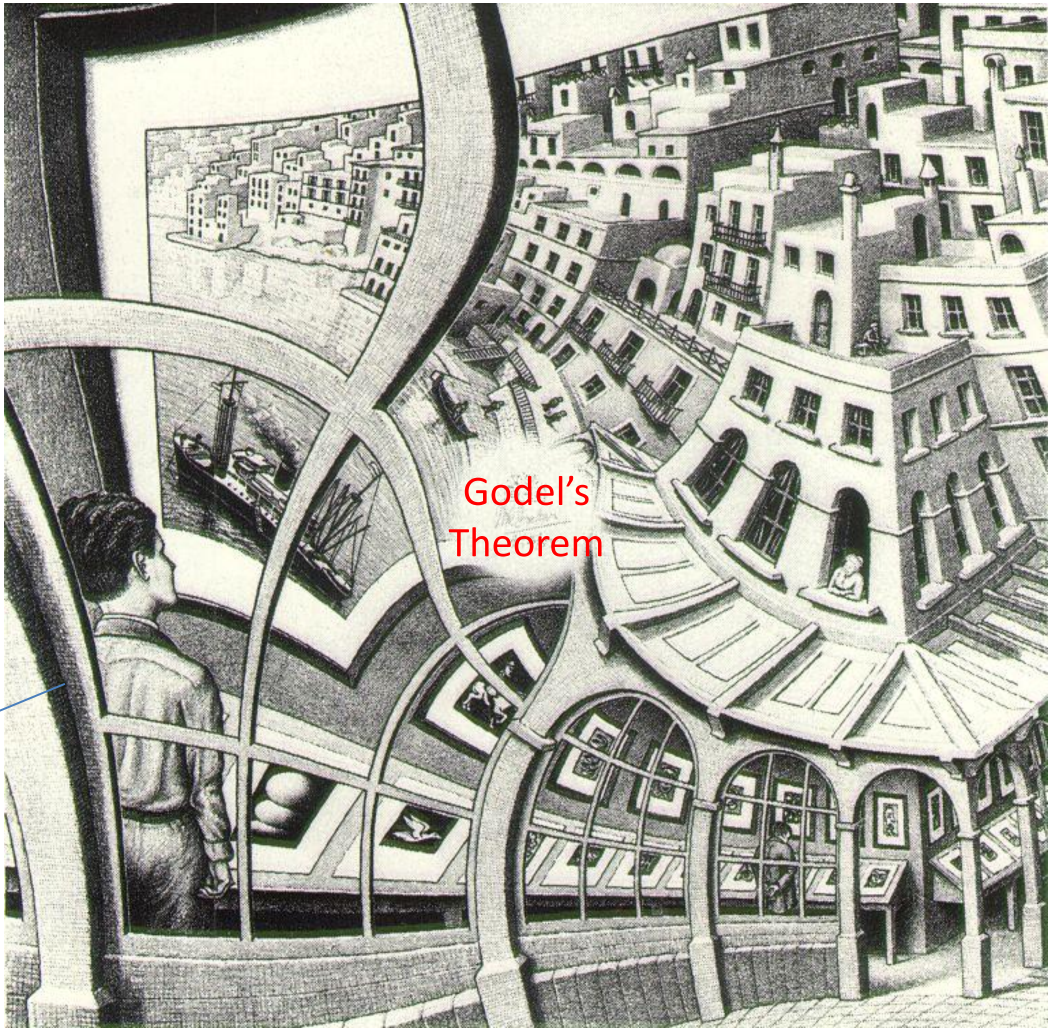


哥德尔定理是个什么玩意儿？

Jake
@ Swarm Agents Club



哥德尔定理是个什么玩意儿?

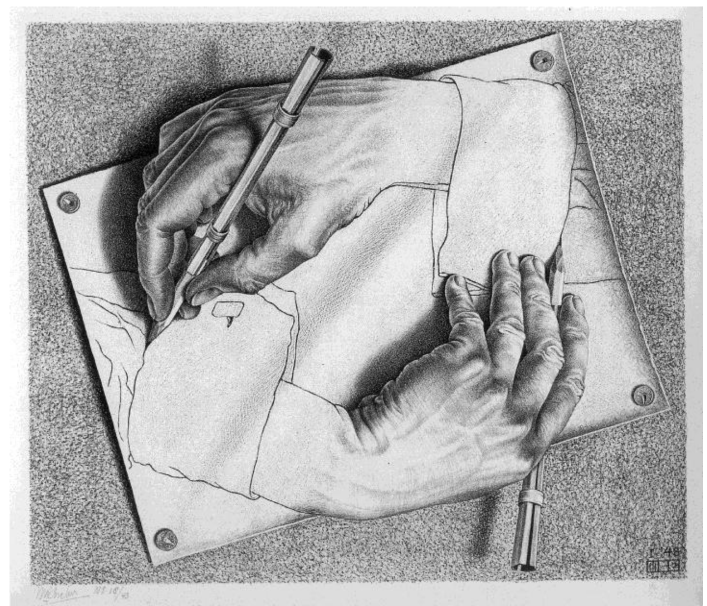
上

你相信科学吗？

- 作为真理与信仰的科学
  - 拉普拉斯的决定论
  - 科学=真理？
- 作为方法与手段的科学
  - 科学v.s.人类语言
  - 科学本身可以告诉你科学的边界

不可能的科学

- 经济学：阿罗不相容原理
- 物理学：海森堡的不确定性原理（测不准）
- 数学：哥德尔不完备性定理



哥德尔的前世

- 欧氏几何——严格和公理化的楷模
- 非欧几何——抽象画的副产品

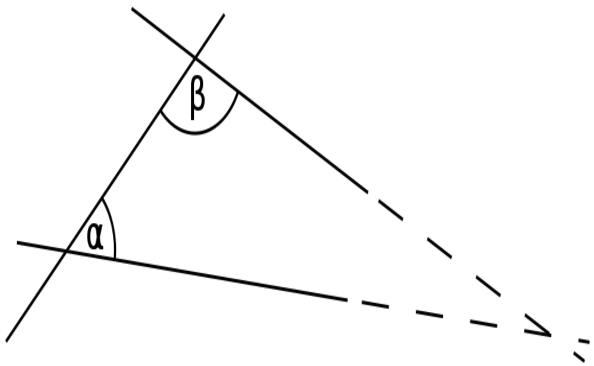
Euclid

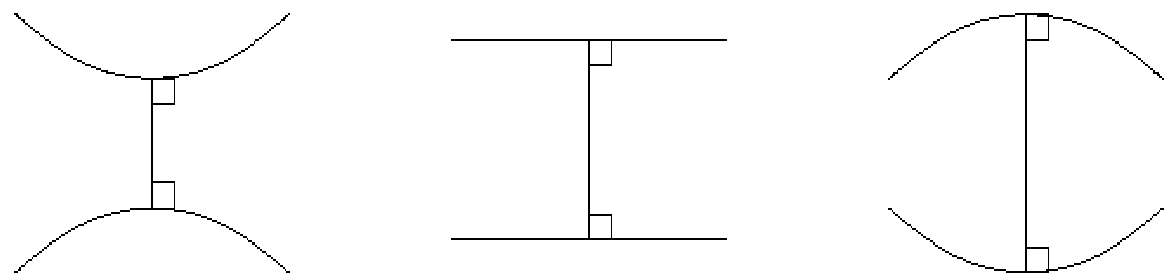
Lobachevsky

Gauss

Riemann

欧几里德第五公设





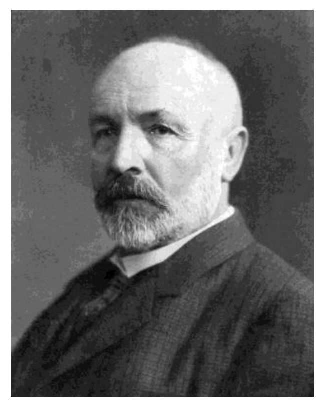
- 如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两直角和，那么这两条直线在不断延伸后，会在内角和小于两直角和的一侧相交。

公理化的力量

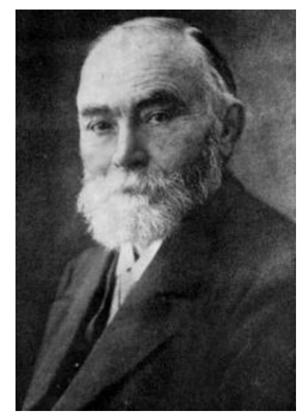
- 牛顿：微积分
- 贝克莱：流数的幽灵
- 柯西：ε-δ语言
- 康托尔：集合论
- 弗雷格：数学大厦的崩塌

Newton

Cauchy

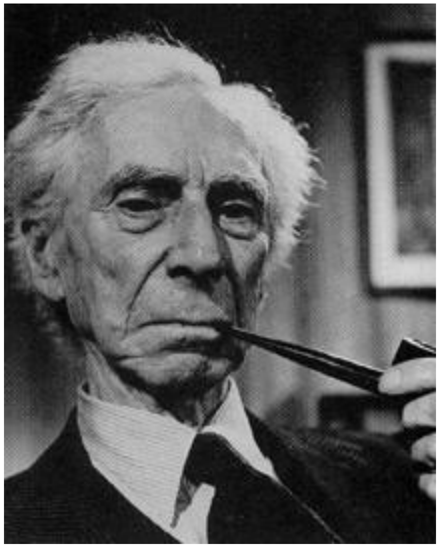


Cantor



Frege

罗素悖论



Bertrand A.W. Russell
1872-1970

- Let us call a set "abnormal" if it is a member of itself, and "normal" otherwise. For example, take the set of all squares in the plane. That set is not itself a square, and therefore is not a member of the set of all squares. So it is "normal". On the other hand, if we take the complementary set that contains all non-squares, that set is itself not a square and so should be one of its own members. It is "abnormal".
- Now we consider the set of all normal sets, *R*. Determining whether *R* is normal or abnormal is impossible: if *R* were a normal set, it would be contained in the set of normal sets (itself), and therefore be abnormal; and if *R* were abnormal, it would not be contained in the set of all normal sets (itself), and therefore be normal. This leads to the conclusion that *R* is neither normal nor abnormal: Russell's paradox.

理发师悖论：村子里面有个理发师，他给自己制订了一条规矩：不给那些自己理发的人理发。有人问：他该不该给自己理发？

希尔伯特纲领

David Hilbert
1862-1943

- 严格按照公理化的方式重构数学
- 消除直观与解释
- 除了公理与推导规则，全部都是机械的演算
- 并且希望严格证明任意公理系统是完备且一致的。——希尔伯特第二问题

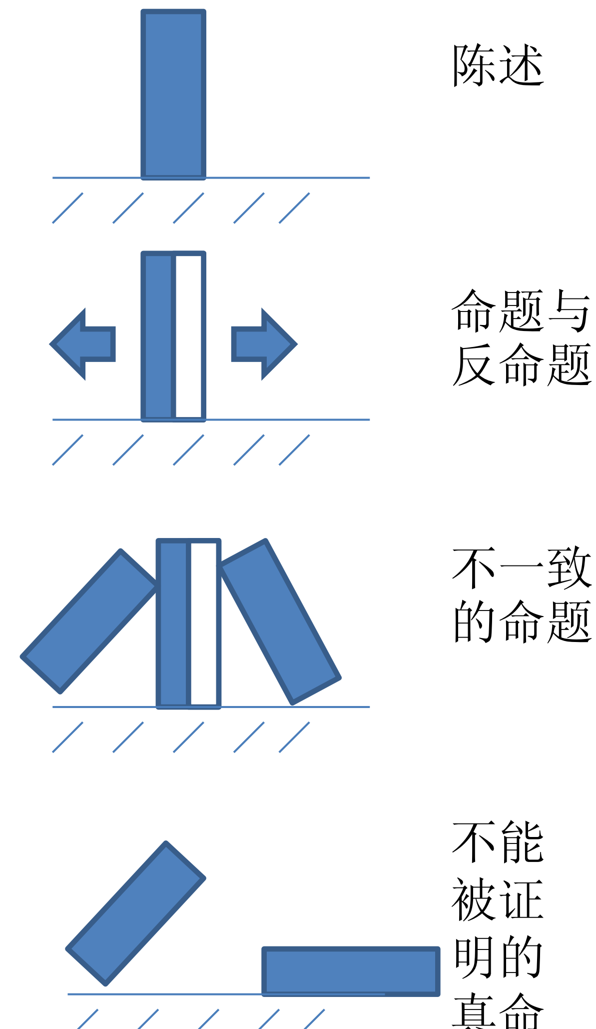
何为公理化系统？

- 公理：第一块被推到的骨牌
- 规则：地球引力和碰撞物理
- 定理：被推倒的骨牌
- 真理：倒掉的骨牌

一致性与完全性

- 竖立的骨牌：陈述
- 正面、反面朝上的骨牌：真命题、假命题

- 一致性：不可能出现让一张骨牌同时朝两个方向倒的情形。
- 完全性：不存在不是被其它骨牌推倒的骨牌



哥德尔定理

- 哥德尔第一定理：一阶谓词逻辑系统是完备的一致的

- 哥德尔第二定理： 任何足够强大（蕴含皮亚诺公理体系）的逻辑系统都不能同时具备完备性和一致性。

- 《〈数学原理〉（指怀德海和罗素所著的书）及有关系统中的形式不可判定命题》

Kurt Godel

1906-1978

足够强大的系统？

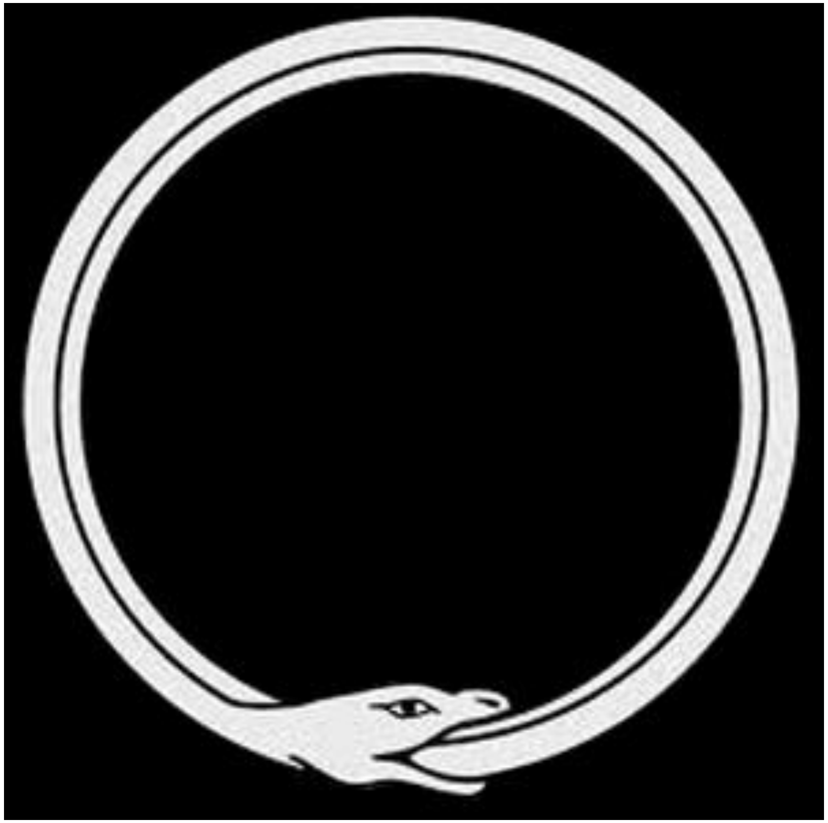
- 何谓足够强大的系统：
  - 系统具备了自指的能力

何谓指涉？

- 语言中的指涉
  - “看到错误”是个病句
  - 妈妈说：“做人要厚道”
- 生活中的指涉——虚拟世界
  - 故事、梦境、游戏、电影等
  - 虚拟机
  - 镜子中的镜子

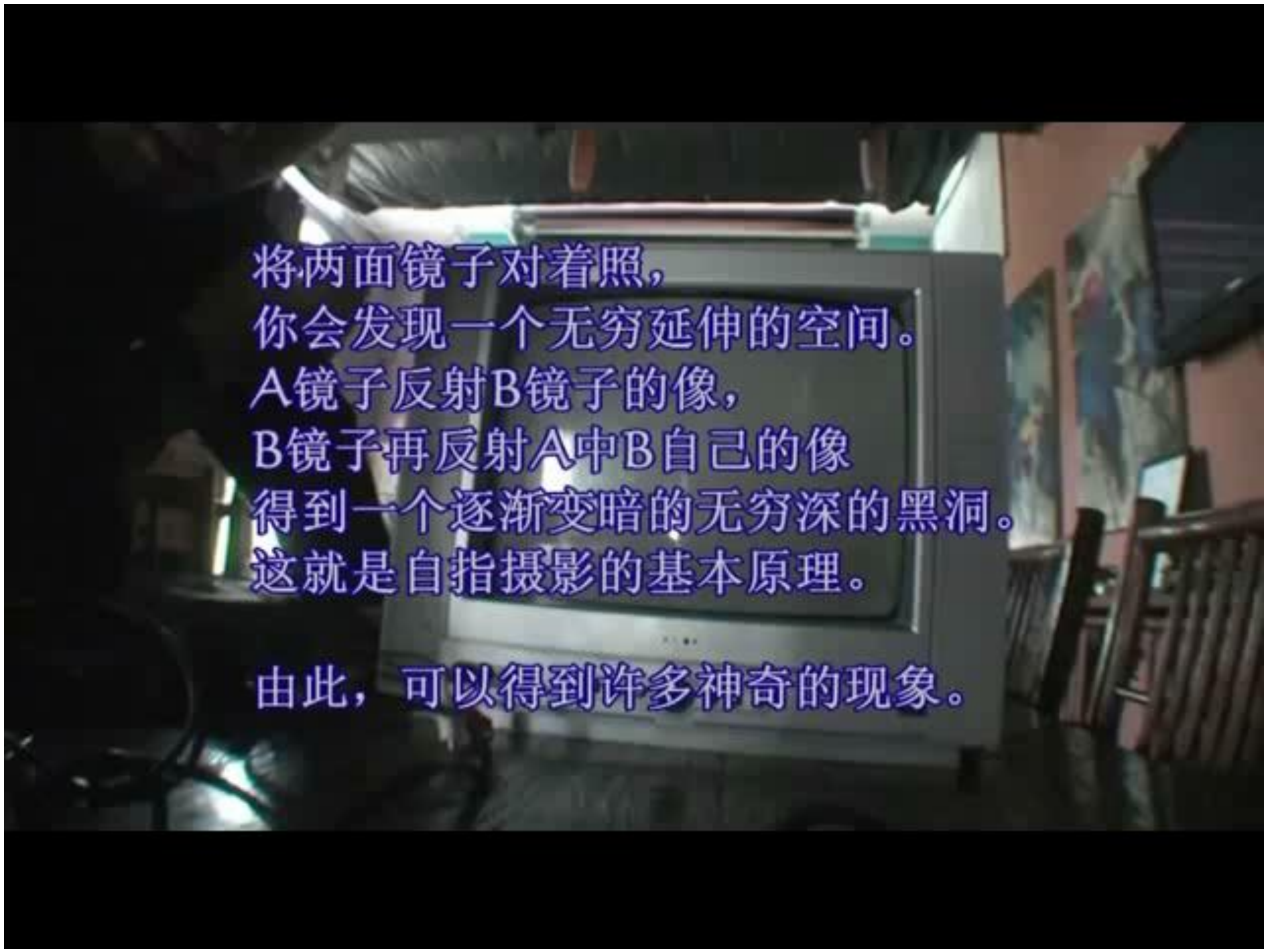
何谓自指

- 这句话是对的
- 这句话有2个‘这’字，2个‘句’字，2个‘话’字，2个‘有’字，7个‘2’字，11个‘个’字，11个‘字’字，2个‘7’字，3个‘11’字，2个‘3’字。

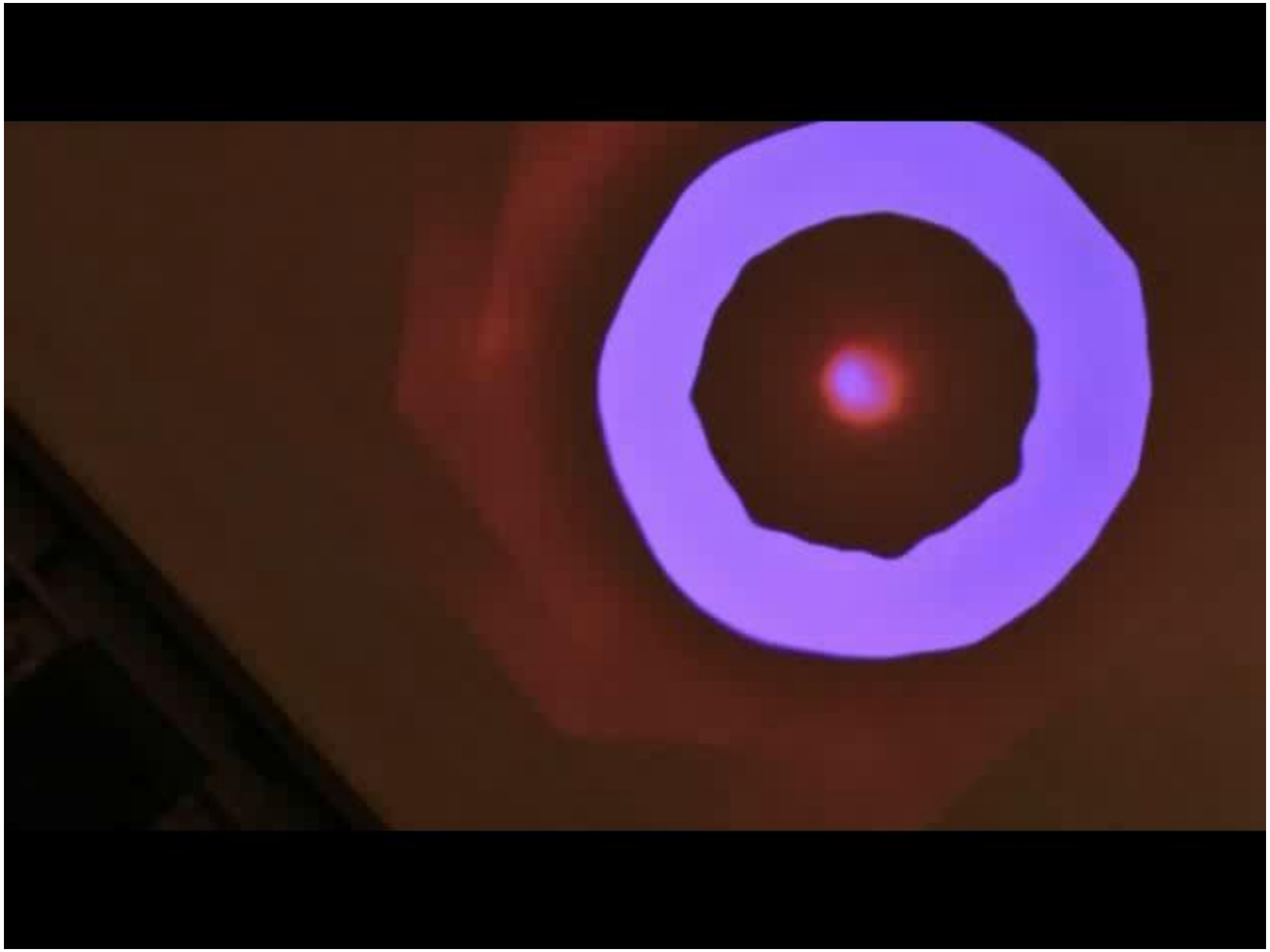


自相似与自指

屏幕-摄像


将两面镜子对着照，
你会发现一个无穷延伸的空间。
A镜子反射B镜子的像，
B镜子再反射A中B自己的像
得到一个逐渐变暗的无穷深的黑洞。
这就是自指摄影的基本原理。
由此，可以得到许多神奇的现象。

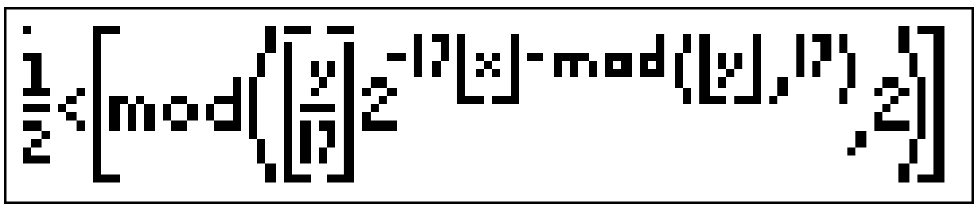
屏幕-摄像



自指函数图形

$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \mathrm{mod}\left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17\lfloor x \rfloor - \mathrm{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2 \right) \right\rfloor$$

当0<=x<=106, k<=y<=k+17,k为一个特殊的整数的时候，所有满足下列不等式的(x,y)点的集合的图形为：



Mathematica code:

```
k=4858450636189713423582095962494202044581400587983244549483093085061934704708809928450644769865524364849997247024915119110411605739177407856919754326571855442057210445735883681829823754139634338225199452191651284348332905131193199953502413758765239264874613394906870130562295813219481113685339535565290850023875092856892694555974281546386510730049106723058933586052544096664351265349363643957125565695936815184334857605266940161251266951421550539554519153785457525756590740540157929001765967965480064427829131488548259914721248506352686630476300;
 out={};
out=Table[If[Floor[Mod[Floor[y/17]2^(-17Floor[x]-Mod[Floor[y],17]),2]]>1/2,1,0],{x,0,106},{y,k,k+17}];
 gra=ArrayPlot[Reverse[Transpose[out]]]
```

多米诺骨牌隐喻

- 如果形式化系统足够强大，从而具备自我指涉的能力，那么哥德尔定理就会成立。
- 如果骨牌不再是骨牌，而是一块屏幕，能够预测某真实骨牌的运作。

哥德尔证明

- 核心思想：
  - 构造了一个自指语句——哥德尔句子
- 自指悖论

无

这句话是假的

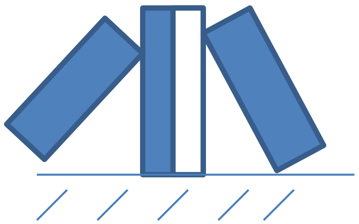
下面那句话是真的

上面那句话是假的

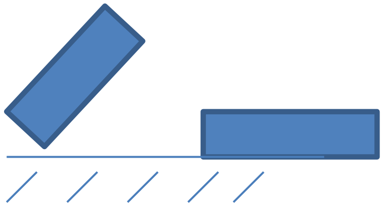
哥德尔句子

- 本命题不可以被证明

- 推理：
  - 如果该句子为假~G，则它是可以被证明的，即为真G，于是G与~G并存，一致性遭到破坏。（G这个骨牌无法被推倒）



  - 如果该句子为真，则它不可以被证明，于是存在着不可证明的真命题，完全性无法满足。（不被推倒的倒着的骨牌）



如何理解哥德尔句子

- 本命题不可以被证明
- 两个层次：
  - 句子本身在陈述的含义，我们姑且不加判断地接受这个含义。
  - 我们的观察：不管句子本身说的对错与否，我们看它的表现。

哥德尔定理的含义

- 在关于整数理论的数学中，存在着不可被证明的真理。
  - Ramsey 定理
  - Montague–Levy reflection定理
- 任何可以等价或者强于数论系统的数学公理系统，都必然存在不可被证明的真理。

哥德尔定理的影响

- 粉碎了很多数学家们2000多年来的梦想
  - 真与可证是两个概念：可证的一定是真的，但真的不一定可证

Hermann Weyl

上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。

哥德尔定理与物理学

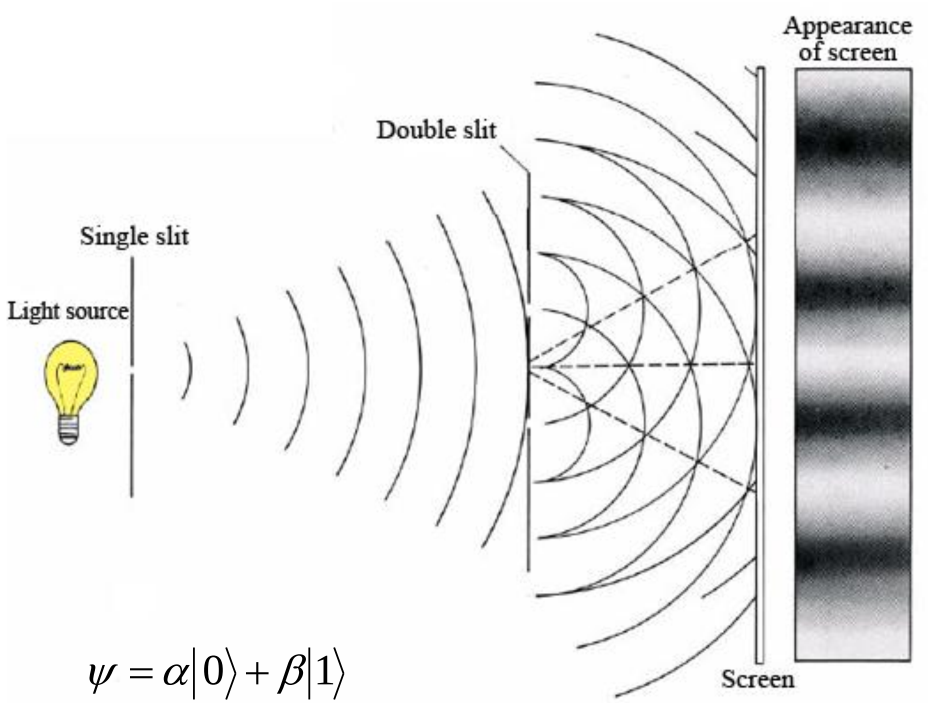
- 哥德尔定理适用于物理吗？

Stephen Hawkin

2002年8月17日，著名宇宙学家霍金在北京举行的国际弦理论会议上发表了题为《哥德尔与M理论》的报告

哥德尔定理与物理学

- 不确定性原理
- 悖论的量子性质？



$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

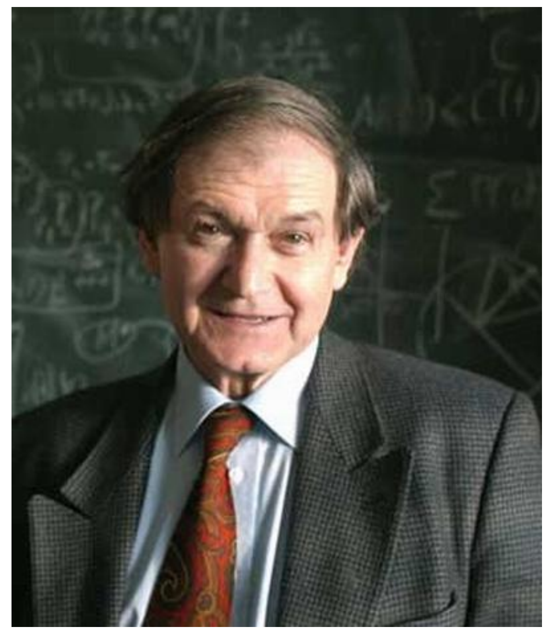
$$\alpha = x + yi, \beta = u + vi$$

Heisenberg

$$\Delta x \, \Delta p \geqslant h$$

哥德尔定理与人工智能

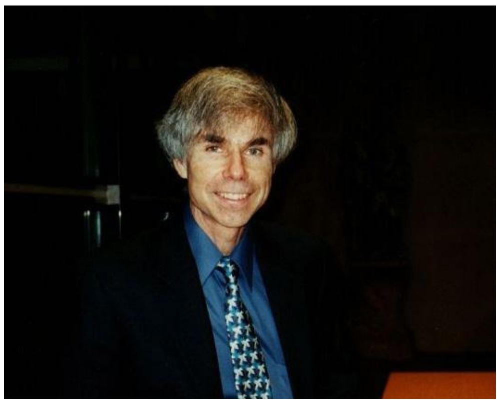
- 人工智能不可能



Roger Penrose

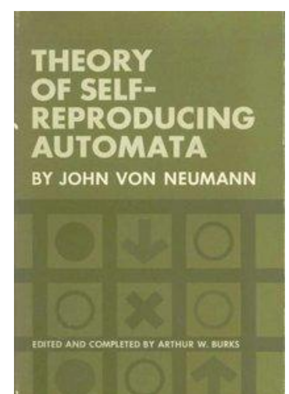
哥德尔定理与人工智能

- 人工智能需要自指



Hofstadter

Von Neumann



结束语

- 哥德尔定理的伟大之处在于，它让我们看到了我们自身的局限。

Ramsey定理

- 对于任意的正整数n,k,m,总能找到整数N，使得：如果我们给集合S={1,2,3,…,N}的n个元素的子集用k种颜色染色，那么我们就能在S中找到一个至少有m个元素的子集Y，使得Y的所有的n元素子集有同样的颜色，且Y中的元素个数至少是Y集合中的最小数。

返回

下

FORMAL SYSTEM

WU puzzle

- Symbols: {W,J,U}
- Well-defined: {WW, JW, UJ,…}
- Rules (x is any string)
  - Rule1: xJ➔xJU
  - Rule2: Wx➔Wxx
  - Rule3: xJJJy➔xUy

Axiom and Theorems

- Axiom: WJ
- Theorems
  - WJ ➔ WJJ ➔ WJJJJ ➔ WJJJJU ➔ WUJU
- Question:
  - Is U a theorem?
  - Is WU a theorem?

pq System

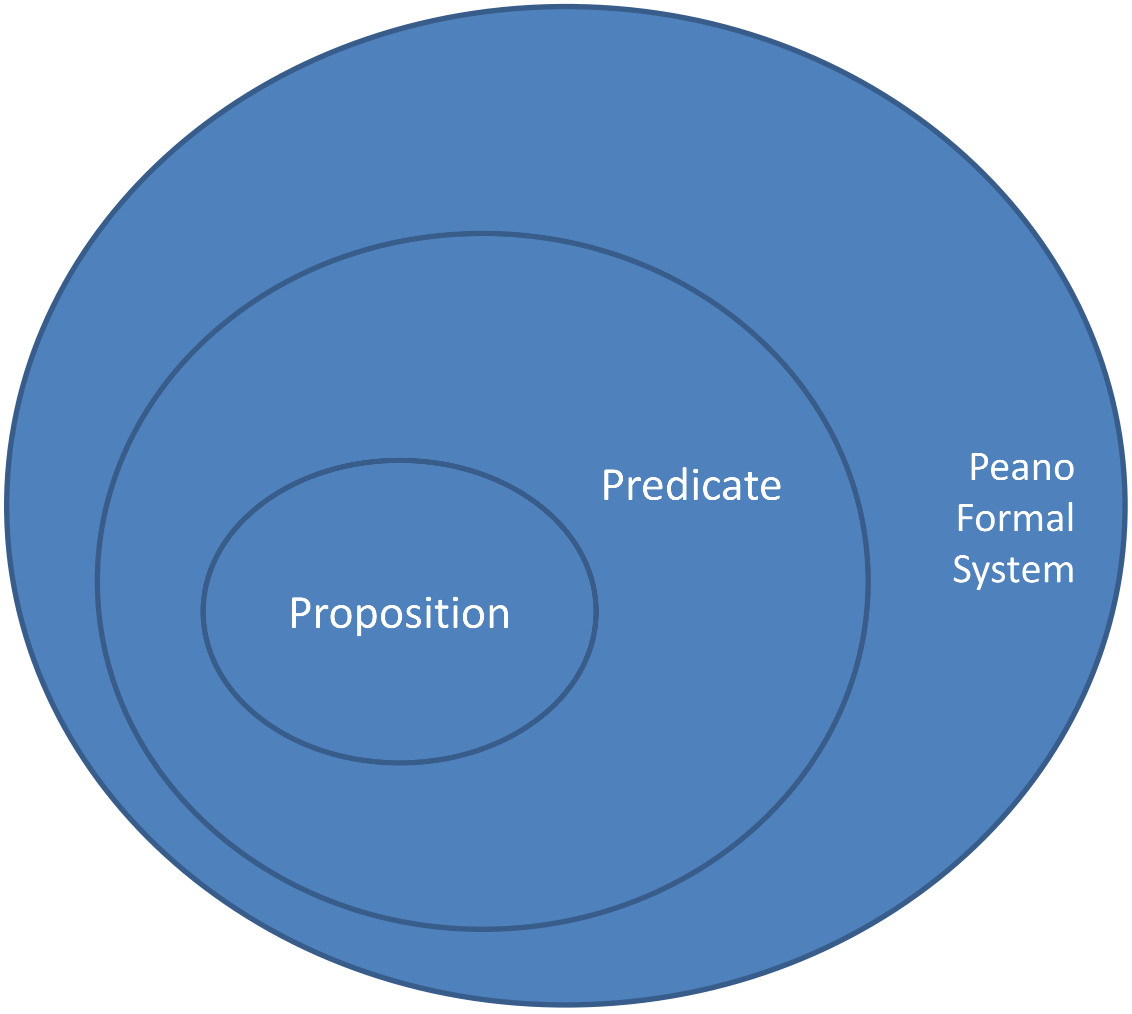
- Symbols:{p,q,-}
- Axioms: infinite axioms
  - x-qxp-
  - x is a string with "-", but two xs stands for the same string
- Rule:
  - xqypz➔x-qypz-
  - x,y,z are strings with only symbol "-"
- How can you decide a string is a theorem or not?

Interpretation

- What is an interpretation
  - An isomorphism between formal system and real world
- An interpretation of pq system
  - q ⇔ equals
  - p ⇔ plus
  - - ⇔ 1
  - -- ⇔ 2
  - --- ⇔ 3
  - …
  - Then, a theorem in pq system is a true proposition about plus operator

An alternative interpretation

- p $\Leftrightarrow$ equals
- q $\Leftrightarrow$ minus
- - $\Leftrightarrow$ 1
- -- $\Leftrightarrow$ 2
- --- $\Leftrightarrow$ 3
- …


Proposition
Predicate
Peano
Formal
System

Elements

- Axiom: {0,s,(,)}
- Numbers:
  - 0
  - S0
  - SS0
  - SSS0
  - If x is an axiom, then Sx is also a number
- Operators:
  - +
  - *
- Terms:
  - 0+S0
  - 0+Sx
  - x*S0

Propositions

- Basic Propositions:
  - Terms linked by “=“
  - Exapmles:
    - x=y
    - S0=0
    - Sx=Sy*(S0+S00)
- Propositions:
  - Basic propositions
  - Combo propositions linked by ~, $\wedge$, $\vee$, →

Examples

- $SS0=S0+S0$
- $SS0=S0+S0 \wedge S0=S0*S0$
- $SSSSS0=S(SS0+SS0)$
- $S0=0$

Each positions should be true or false

Variables and Predicates

- Variables: x,y,z
- Predicate: propositions containing variables
  - f(x): S0=x
  - g(x): Sx=S0
  - h(x,y): x*Sy=x+x*y
  - k(x,y): x=y

Quantifiers

- Quantifiers
  - $\exists$ existence quantifier, there is ...
  - $\forall$ generalized quantifier, for all
- Examples

$$\forall x : \sim Sx = 0$$

$$\sim \exists x : Sx = 0$$

$$\forall x : \forall y : x * y = y * x$$

Translation exercise

- 2 is not a square number
- 1729 is the sum of two quadric numbers
- 6 is an even number
- 5 is a prime number
- There are infinite prime numbers

All Elements

- Numbers: 0,S0,SS0,….
- Variables: a,b’,c’’,…
- Terms:
  - if x is a term, Sx is also a term
  - If x,y are terms, x+y, x*y are terms
- Well-formed formulas
  - s,t are terms, then s=t is a well-formed formula
  - ~s, s $\vee$ t, s $\wedge$ t are all terms

Truth Value

- Each proposition has a truth value
- When the proposition states a true fact, then it is true
- Otherwise, it is false

Rules

- All rules in propositional logic
- All rules in predicative logic
- Rules for equality
  - r=s⇔s=r
  - r=s,s=t⇒r=t
  - r=s⇔Sr=St
- Induction rule:
  - u is a variable, X{u} is a well-formed formula containing u, if

    $$\forall u:(X\{u\} \rightarrow X\{u/.Su\})$$

    $$X\{u/.0\}$$

  - are all theorems, then $\forall u: X\{u\}$

Five Axioms

- Axiom 1 $\forall a :\sim Sa = 0$
- Axiom 2 $\forall a : (a + 0) = a$
- Axiom 3 $\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b)$
- Axiom 4 $\forall a : (a * 0) = 0$
- Axiom 5 $\forall a : \forall b : (a * Sb) = ((a * b) + a)$

Example

$\forall a:\forall b:(a*Sb)=((a*b)+a)$

$\Rightarrow \forall b:(S0*Sb)=((S0*b)+S0)$

$\Rightarrow (S0*S0)=((S0*0)+S0)$

$\forall a:\forall b:(a+Sb)=S(a+b)$

$\Rightarrow \forall b:((S0*0)+Sb)=S((S0*0)+b)$

$\Rightarrow ((S0*0)+S0)=S((S0*0)+0)$

$\forall a:(a+0)=a$

$\Rightarrow ((S0*0)+0)=(S0*0)$

$\forall a:(a*0)=0$

$\Rightarrow (S0*0)=0$

$\Rightarrow ((S0*0)+0)=0$

$\Rightarrow S((S0*0)+0)=S0$

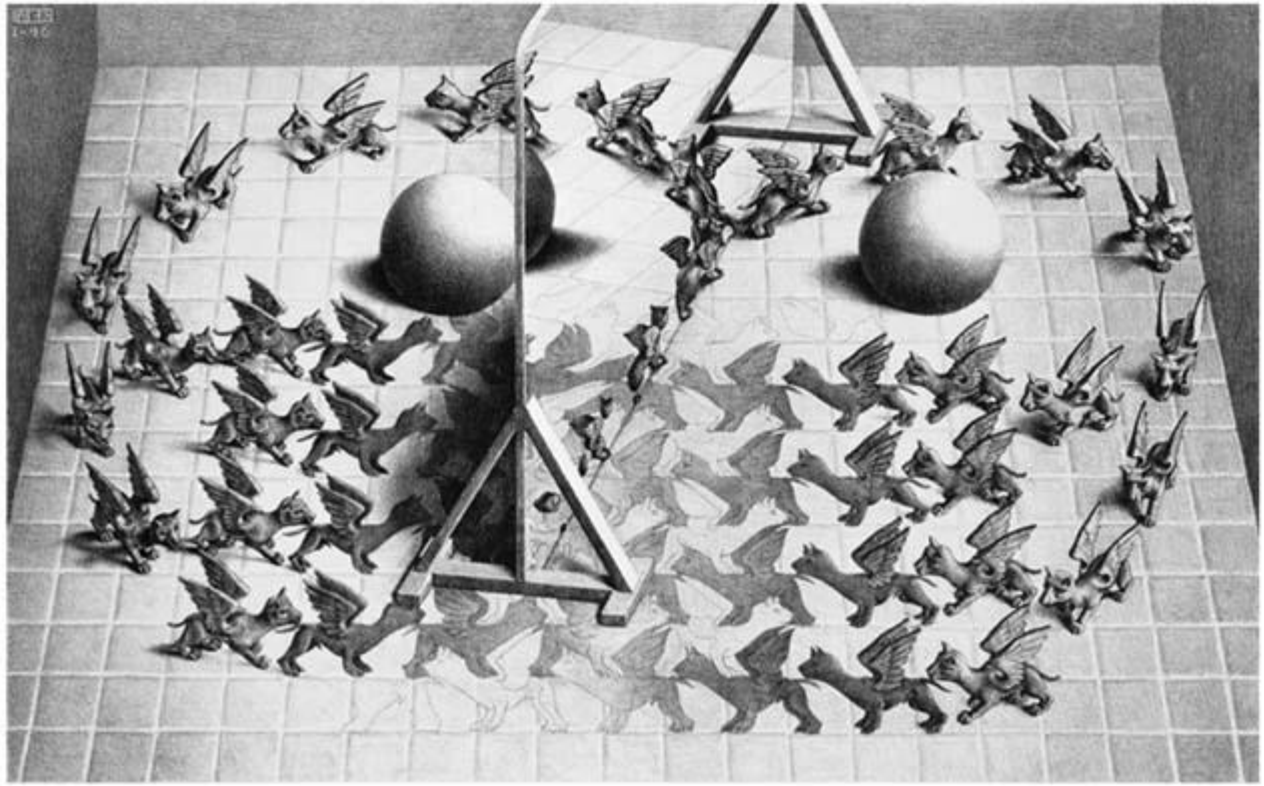
$\Rightarrow ((S0*0)+S0)=S0$

$\Rightarrow (S0*S0)=S0$

1. Axiom 5
2. Specification(a/.S0)
3. Specification(b/.0)
4. Axiom 3
5. Specification(a/.((S0*0))
6. Specification(b/.0)
7. Axiom 2
8. Specification(a/.((S0*0))
9. Axiom 4
10. Specification(a/.S0)
11. Transitive(8,10)
12. Plus S
13. Transitive (6,12)
14. Transitive(3,12)

The Power of Peano

- Almost all the theorems in number theory can be proved by Peano
- For example:
  - Euclidean theorem:
    - There are infinite prime numbers
    - The length of proof is very large



GODEL NUMBERING

What is numbering?

- What is numbering (indexing, coding)
  - A one-one mapping between objects set and natural number
- What is the benefit?
  - We can view the formal system as a number system

WU system

- W,J,U
  - W-----3
  - J-------1
  - U------0
- Then strings
  - WU-----30
  - WJJU---3110
  - …

How about reasoning?

• WJ------------31	Axiom
• WJJ-----------311	Rule 2
• WJJJJ---------31111	Rule 2
• WUJ----------301	Rule 3
• WUJU--------3010	Rule 1
• WUJUUJU---3010010	Rule 2
• WUJJU-------30110	Rule 4

Therefore, a process of reasoning is a set of transformations of numbers

Transformation and Function

- Rule 1: xJ➔xJU
- If 1 is the last digit of the current number, then this number is multiplied by 10
- If mod(x,10)==1, then 10*x
- All rules can be transformed to functions
  - $10m+1 \rightarrow 10*(10m+1)$
  - $3*10^{m}+n \rightarrow 10^{m}*(3*10^{m}+n)+n$
  - $k*10^{(m+3)}+111*10^{m}+n \rightarrow k*10^{(m+1)}+n$
  - $k*10(m+2)+n \rightarrow k*10(m)+n$

Computable Predicate Function

- The predicate function:

$$Even-number(x)$$

- x is an even number, can be described as a well-defined symbols:

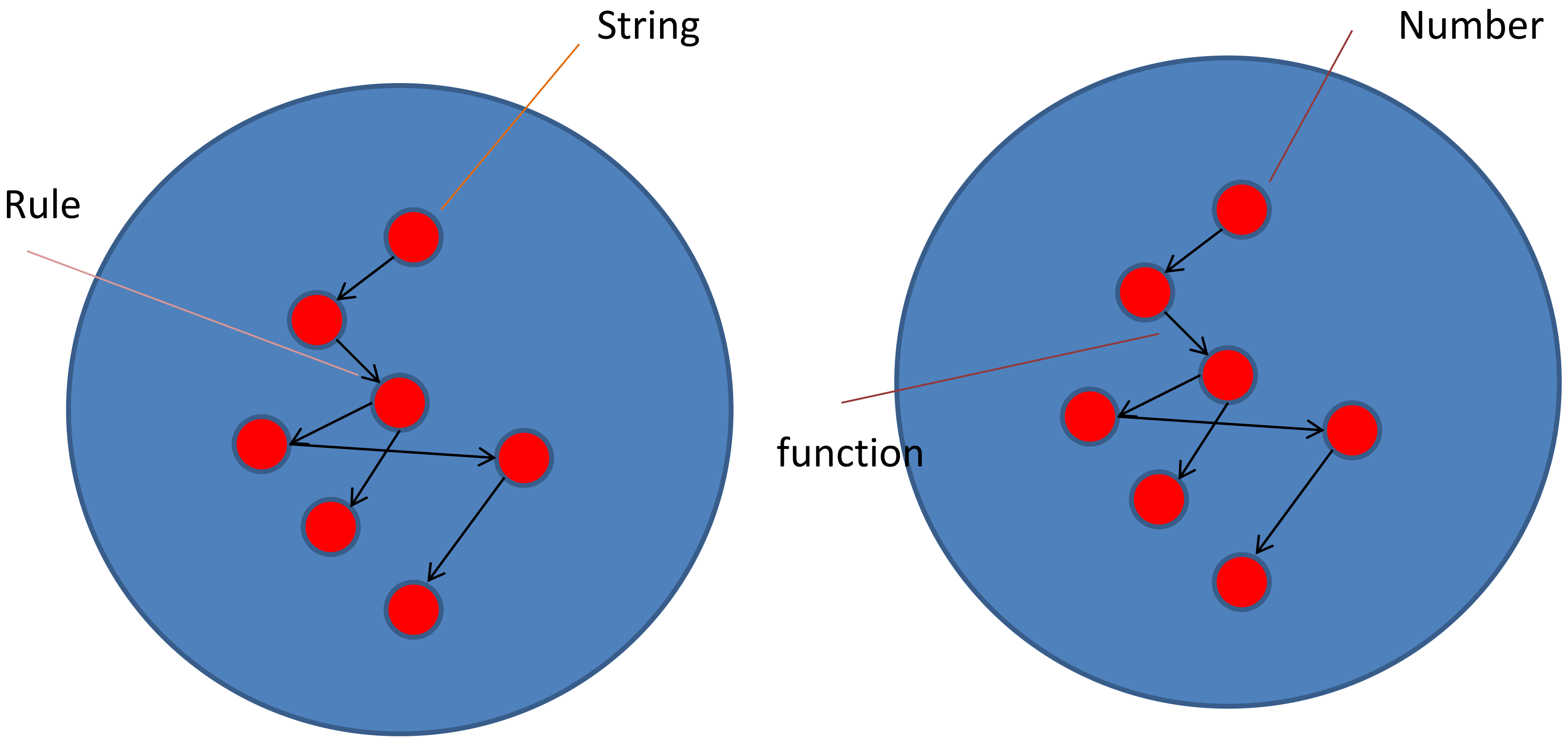
$$\exists a:(SS0*a)=x$$

- General conclusion:
  - Any computable function can be expressed as a predicate described by terms in Peano system.

WJU numbers

- All codes of theorems in WJU can form a set of numbers
  - {31,311,3111,301,….}
  - Then, there exists an effective predicate:
  - WJU-number(x)
  - WJU-number is composed by basic symbols: S,0,/\,….
- "Is WU a theorem in WJU?" can be converted as "is 30 a WJU-number: WJU-number(30)".

Isomorphism



Numbering Peano System

0	666
S	123
=	111
+	112
*	236
(	362
)	323
a	262
‘	163
/\	161
\/	616
→	633
~	223
∃	333
∀	626
:	636
\n	611

$\forall a : \exists a' : Sa = a'$ 626,262,636,333,262,163,636,123,262,111,262,163

Reasoning and functions of numbers

$\forall a : \forall b : (a * Sb) = ((a * b) + a)$

$\Rightarrow \forall b : (S0 * Sb) = ((S0 * b) + S0)$

$\Rightarrow (S0 * S0) = ((S0 * 0) + S0)$

$\forall a : \forall b : (a + Sb) = S(a + b)$

$\Rightarrow \forall b : ((S0 * 0) + Sb) = S((S0 * 0) + b)$

$\forall a : (a + 0) = a$

$\Rightarrow ((S0 * 0) + 0) = (S0 * 0)$

$\forall a : (a * 0) = 0$

$\Rightarrow (S0 * 0) = 0$

$\Rightarrow ((S0 * 0) + 0) = 0$

$\Rightarrow S((S0 * 0) + 0) = S0$

$\Rightarrow ((S0 * 0) + S0)$

$\Rightarrow (S0 * S0) = S0$

- 636,232,323
- 329,324,321
- …
- …

Peano-number

- All codes of theorems in Peano system form a set of numbers
- The predicate Peano-number(x) describes this set and is computable
- So Peano-number(x) is an effective predicate function composed by the elements S,0,a,~,… in Peano system.

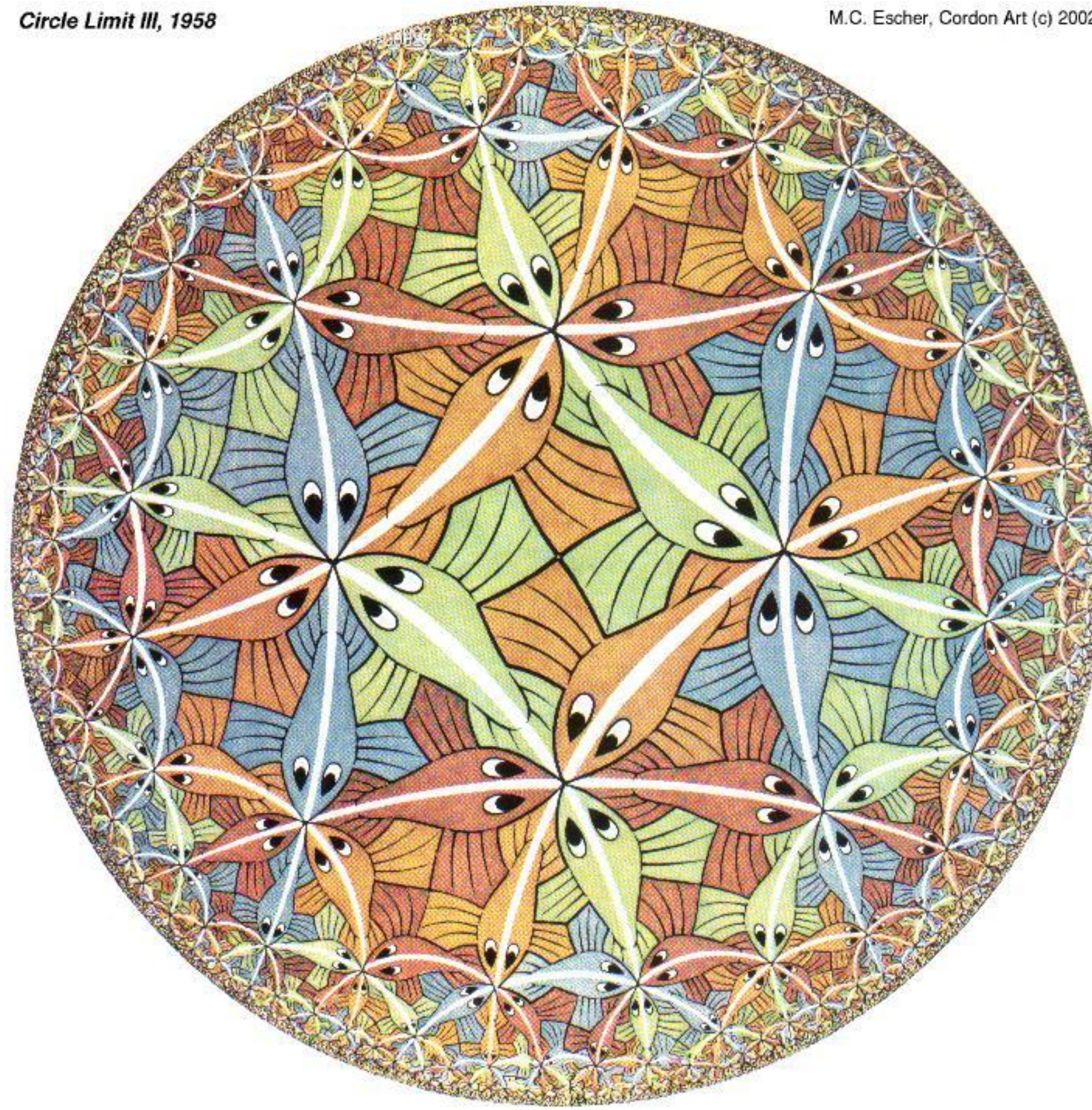
Godel sentence

- Godel sentence
  - G=~Peano-number(g)
- Where G’s number is g
- If G is a theorem in Peano, then we obtain ~G, so Peano system is not consistent
- If G is not a theorem, we know the true statement: ~ Peano-number(g), so G is true, but it is not a theorem, so, Peano system is incomplete

But does g or G exist?

- What is the exact value of g?
- We know, g must be a fixed point, because

$$g = N\left[\sim Peano-number(g)\right] = F\left[g\right]$$



QUINE & GODEL SENTENCE

Godel Sentence in Chinese

- 这句话是假的

Quine, 1908-2000

Quine

- 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变
- 我们记Q(X)为：
  - 把X中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变
  - Q(“ok”)=o”ok”k

  - Q(q)
  - =Q(“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”)
  - =把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变

Godel sentence

- 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子
- 定义新的函数:
  - QoF(X)=把X中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子
  - QoF(qof)
  - =把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子
  - 它的意思相当于：这句话是假的

Isomorphism

把X中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变

$$ARQ(x)$$

“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”

q

把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”

$$ARQ(q) = N\left[ARQ(q)\right]$$

Isomorphism

X是假句子

$$\sim Peono-number(x)$$

把X中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子

$$ARQ(x)\circ \sim Peano-number(x)$$

把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变得到假句子

$$g' = N\left[ARQ(x)\circ \sim Peano-number(x)\right]$$

$$G = ARQ(g')\circ \sim Peano-number(g')$$

Arithmetical Quine

- ARQ computes a Godel number of a formula with a free variable a: f(a), to obtain the Godel number of this formula f(N(f(a))

$$ARQ(N[f(a)]) = N[f(N[f(a)])]$$

- For example
  - Formula: a=a
  - It's Godel number: 262,111,262
  - ARQ(262,111,262)=
  - $\underbrace{123,123,\ldots,123}_{262,111,262},666,111,\underbrace{123,123,\ldots,123}_{262,111,262},666$

SSSSSSSSSSSSSSSSSSS0=SSSSSSSSSSSSSSSSSS0

Godel sentence and Godel number

Godel ‘s half sentence (a free variable a)

G’ $$\exists a' : a' = ARQ(a) \wedge \sim Peano - number(a')$$

Godel ‘s half sentence’s number

Let $$g' = N[G']$$

Godel’s sentence

G $$\exists a' : a' = ARQ(\underbrace{SSS....S}_{g'\ S}0) \wedge \sim Peano - number(a')$$

Godel ‘s number

$$g = N[G]$$

Key Techniques

- Peano axiom system
- Godel numbering
- Mapping between proof process and computation
- Arithmetical Quine

Quine