1 Начально-краевая задача

Изучение свойств численного алгоритма и создание его программной реализации начинается с наиболее простых задач с постепенным их усложнением. Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,\\
&\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f,\\
&p = p(\rho).
\end{aligned} \tag{1}$$

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной неотрицательной константой.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X].$$

В уравнения входят еще две известные функции: давление газа p, зависящее от плотности, и вектор внешних сил f, являющийся функцией переменных Эйлера.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0,\ X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),\ x \in [0, X]. \tag{2}$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{3}$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Дифференциальные уравнения системы этой системы являются следствиями интегральных законов сохранения массы и импульса в случае достаточной гладкости функций плотности и скорости газа. Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов этих законов для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения (но не все), называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

2 Основные обозначения

В заданиях практикума рассматривается пространственные области в виде отрезка $\bar{\Omega} = [0; X]$, где вводится равномерная сетка с шагом h: $\bar{\omega}_h = \{mh \mid m = 0, \ldots, M\}$, где $Mh = X$. На временном интервале $[0; T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \ldots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau h} = \omega_\tau \times \bar{\omega}_{\bar{h}}$. Узлы сетки $\bar{\omega}_h$, попадающие на границу области ω, обозначим γ_h (граничные узлы), а попадающие в область ω через ω_h (внутренние узлы). Узелы $x = 0$ и $x = X$ будем обозначать γ_h^- и γ_h^+ соответственно.

Кроме сетки ω_h в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через $\omega_h^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_h^{1/2} = \{mh + h/2 \mid m = 0, \ldots, M-1\}$, а через $Q_{\tau h}^{1/2} = \omega_\tau \times \omega_h^{1/2}$.

Значение функции g, определенной на сетке $Q_{\tau h}$ (или на сетке $Q_{\tau h}^{1/2}$), в узле (n, m) будем обозначать через g_m^n. Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и m. Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом (n, m), используются следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \qquad g_{m\pm1}^n = g^{\pm1}.$$

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения:

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \quad g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции, зависит от знака компоненты вектора скорости. Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma\{H, V\} = H\frac{|V| - V}{2|V|} + H^{(-1)}\frac{|V| + V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0, \\ H^{(-1)}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

3 Разностная схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ

Функции H, заданная в узлах сетки $\omega_h^{1/2}$, и V, заданная в узлах сетки ω_h, ищутся по схеме:

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, \qquad 0 \le m < M,\ n \ge 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_{\bar{s}} V_t + \hat{H}_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}} f, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \ne 0,\\
&\hat{V} = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0,\\
&0 < m < M,\ n \ge 0,\\
&\hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Разностные уравнения в индексах имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \\
+\frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0,\\
0 \le m < M,\ n \ge 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2\tau} - \\
-\frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{4h} + \\
+\frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{4h} - \\
-\frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{4h} + \\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2}\frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} = \\
= \mu\frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1},\\
\text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \ne 0,\\
V_m^{n+1} = 0, \qquad \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0,\\
0 < m < M,\ n \ge 0,\\
V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

4 Заполнение матрицы первой системы

За заполнение матрицы первой системы отвечает следующий код:

```
void fill_first (std::vector<double> &A, std::vector<double> &B,
                 discrete_function &H, discrete_function &V,
                 int n, double h, double tau, discrete_function &/*f*/,
                 discrete_function &f_0)
{
  std::vector<double> &H_cut = H.cut (n);
  std::vector<double> &V_cut = V.cut (n);
  unsigned int M = static_cast<unsigned int> (H_cut.size ());

}
```

5 Таблицы невязок в непрерывном случае:

5.1 MIU = 0.100

Таблица 1: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	1e+01
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	6e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	6e-01	4e-01	2e-01

Таблица 2: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	6e-01	3e-01	2e-01	1e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	8e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 3: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	2e-01	1e-01	1e-01	1e+00
42	2e-01	1e-01	8e-02	5e-02
84	2e-01	1e-01	8e-02	4e-02
168	2e-01	1e-01	8e-02	4e-02

Таблица 4: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	9e+00
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	7e-01	5e-01
168	2e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 5: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	8e-01	3e-01	9e-01
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 6: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	4e-01	3e-01	1e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	6e-01	4e-01	2e-01	1e-01

5.2 MIU = 0.010

Таблица 7: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	7e+01
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01

Таблица 8: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	3e-01	2e-01	4e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	9e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 9: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	3e-01	2e-01	1e-01	6e+00
42	3e-01	2e-01	9e-02	6e-02
84	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02
168	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02

Таблица 10: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	3e+01
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	8e-01	5e-01
168	3e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 11: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	9e-01	4e-01	3e+00
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 12: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	4e-01	3e-01	8e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	2e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

5.3 MIU = 0.001

Таблица 13: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	1e+02
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01

Таблица 14: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	3e-01	2e-01	4e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	9e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 15: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	3e-01	2e-01	1e-01	5e+00
42	3e-01	2e-01	9e-02	6e-02
84	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02
168	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02

Таблица 16: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	3e+01
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	8e-01	5e-01
168	3e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 17: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	9e-01	4e-01	4e+00
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 18: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	5e-01	3e-01	9e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	2e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

5.4 Стабилизация течения в разрывном случае:

5.5 Примеры графиков, непрерывный случай:

cont.png

5.6 Примеры графиков, разрывный случай

cont.png

6 Выводы