1 Постановка дифференциальной задачи

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в области Ω, выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \rho f_1,\\
&\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu\left(\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \rho f_2,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости $\mathbf{u}$ являются функциями переменных Эйлера

$$(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \bar{\Omega}.$$

Обозначим через Ω_{nm} квадрат, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $n < x < (n+1)$ и $m < y < (m+1)$. Множества точек, составляющие стороны квадрата Ω_{nm} обозначим Γ_{nm}^{x-}, Γ_{nm}^{x+}, Γ_{nm}^{y-} и Γ_{nm}^{y+}, где индекс x или y означает какая из координат на стороне является постоянной, а $+$ или - означает максимальное или минимальное значение принимает эта координата.

Заданная область: $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{00} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{20} \cup \bar{\Omega}_{21}$,

Граничные условия для неизвестного решения: $\rho|_{\Gamma_{00}^{x-}} = \rho_\gamma$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$ На остальных участках границы функция плотности считается неизвестной и подлежит определению, а компоненты функции скорости равны нулю.

2 Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ

Сеточная функция $\mathbf{V}$, приближающая функцию вектора скорости $\mathbf{u}$, определяется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H, приближающей функцию плотности ρ, ищутся в узлах сетки $Q^{1/2}_{\tau\bar{h}}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (1.1)

$$
\begin{array}{l}
H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\}V_{1s_2})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\}V_{2s_1})_{x_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{1/2}_{\bar{h}};\\
\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{1t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_1, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_1, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1} =\\
= \mu\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2}\right) + \dfrac{\mu}{3}(V_2)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} + f_1\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0,\\
\hat{V}_1 = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}};\\
\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{2t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_2, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_2, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2} =\\
= \mu\left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2}\right) + \dfrac{\mu}{3}(V_1)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} + f_2\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0,\\
\hat{V}_2 = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}.
\end{array}
\tag{2.1}
$$

В граничных узлах $\gamma_{\bar{h}}$ значения функции $\mathbf{V}$ считаются известными из граничных условий. В граничных узлах, где газ втекает в область, задаются значения плотности газа, которые также берутся из граничных условий.

Разностные уравнения (**??**) в индексах имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2} - H^n_{m_1,m_2}}{\tau} +\\
+ \frac{((\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2+1} - |(\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2+1}|)H^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{2h_2} + \frac{((\tilde{V}_1)^n_{m_1+1,m_2} - |(\tilde{V}_1)^n_{m_1+1,m_2}|)H^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{2h_1} +\\
+ \left(\frac{1}{2h_1}((\tilde{V}_1)^n_{m_1+1,m_2} + |(\tilde{V}_1)^n_{m_1+1,m_2}| - (\tilde{V}_1)^n_{m_1,m_2} + |(\tilde{V}_1)^n_{m_1,m_2}|) + \right.\\
\left. + \frac{1}{2h_2}((\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2+1} + |(\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2+1}| - (\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2} + |(\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2}|)\right) H^{n+1}_{m_1,m_2} -\\
- \frac{((\tilde{V}_1)^n_{m_1,m_2} + |(\tilde{V}_1)^n_{m_1,m_2}|)H^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} - \frac{((\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2} + |(\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2}|)H^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} = 0,\\
0 \le m_1 < M_1, \ 0 \le m_2 < M_2, \ n \ge 0.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Поскольку разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение неразрывности, в точности совпадает с первым уравнением схемы из параграфа **??**, приведем запись в индексах лишь для двух оставшихся уравнений.

$$
\begin{gathered}
(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}\left(\frac{({V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}-{V_1}^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|+{V_2}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\right.\\
-\frac{|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|+{V_1}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}{V_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right){V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
\left.+\frac{{V_1}^{n}_{m_1,m_2}-|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}{V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{{V_2}^{n}_{m_1,m_2}-|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2+1}\right)+\\
+\frac{p({H_1}^{n+1}_{m_1,m_2})-p({H_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2})}{h_1}=\\
=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{{V_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}+{V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}+{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{{V_2}^{n}_{m_1-1,m_2-1}-{V_2}^{n}_{m_1-1,m_2+1}-{V_2}^{n}_{m_1+1,m_2-1}+{V_2}^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+{f_1}^{n+1}_{m_1,m_2}(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}_{\mathbf{m}}\neq 0,\\
\hat{V}_{1m_1,m_2}=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2}=0;\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{gathered}
(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}\left(\frac{({V_2}^{n+1}_{m_1,m_2}-{V_2}^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|+{V_2}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\right.\\
-\frac{|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|+{V_1}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}{V_2}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right){V_2}^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
\left.+\frac{{V_1}^{n}_{m_1,m_2}-|{V_1}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}{V_2}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{{V_2}^{n}_{m_1,m_2}-|{V_2}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2+1}\right)+\\
+\frac{p({H_2}^{n+1}_{m_1,m_2})-p({H_2}^{n+1}_{m_1,m_2-1})}{h_2}=\\
=\mu\left(\frac{{V_2}^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2}+{V_2}^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{4}{3}\frac{{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2}+{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{{V_1}^{n}_{m_1-1,m_2-1}-{V_1}^{n}_{m_1-1,m_2+1}-{V_1}^{n}_{m_1+1,m_2-1}+{V_1}^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+{f_2}^{n+1}_{m_1,m_2}(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}_{\mathbf{m}}\neq 0,\\
\hat{V}_{2m_1,m_2}=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2}=0;\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Также как и в случае схемы из параграфа **??** по этой схеме на каждом временном слое решается СЛАУ, решением которой является сеточная функция плотности H^{n+1}, а затем в любом порядке решаются СЛАУ, которые задают функции V_1^{n+1} и V_2^{n+1}. Последние две системы можно решать независимо.

Из разностного уравнения (**??**) получаются следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов сетки Ω_h

$$
\begin{aligned}
&av1\_V100\cdot{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}+av1\_V1R0\cdot{V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+av1\_V1L0\cdot{V_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\\
&+av1\_V10R\cdot{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2+1}+av1\_V10L\cdot{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2-1}=bv1,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& av1\_V100 = HT00(1 + \tfrac{\tau}{h_1}|V100| + \tfrac{\tau}{h_2}|V200|) + \tau\mu\left(\tfrac{8}{3h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2}\right), \\
& av1\_V1L0 = -\tfrac{\tau}{2h_1}(V100 + |V100|)HT00 - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
& av1\_V1R0 = \tfrac{\tau}{2h_1}(V100 - |V100|)HT00 - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
& av1\_V10L = -\tfrac{\tau}{2h_2}(V200 + |V200|)HT00 - \tfrac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
& av1\_V10R = \tfrac{\tau}{2h_2}(V200 - |V200|)HT00 - \tfrac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
& bv1 = HT00 * V100 - \tfrac{\tau}{h_1}(p(H100) - p(H1L0)) + \\
& + \tfrac{\tau\mu}{12h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1 HT00.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Аналогичным образом расписывается разностное уравнение (**??**).

3 Заполнение матрицы первой системы

За заполнение матрицы первой системы отвечает следующий код:

```
void fill_first (std::vector<double> &A, std::vector<double> &B,
                 discrete_function &H, discrete_function &V,
                 int n, double h, double tau, discrete_function &/*f*/,
                 discrete_function &f_0)
{
  std::vector<double> &H_cut = H.cut (n);
  std::vector<double> &V_cut = V.cut (n);
  unsigned int M = static_cast<unsigned int> (H_cut.size ());

}
```

4 Таблицы невязок в непрерывном случае:

4.1 MIU = 0.100

Таблица 1: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	1e+01
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	6e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	6e-01	4e-01	2e-01

Таблица 2: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	6e-01	3e-01	2e-01	1e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	8e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 3: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	2e-01	1e-01	1e-01	1e+00
42	2e-01	1e-01	8e-02	5e-02
84	2e-01	1e-01	8e-02	4e-02
168	2e-01	1e-01	8e-02	4e-02

Таблица 4: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	9e+00
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	7e-01	5e-01
168	2e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 5: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	8e-01	3e-01	9e-01
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 6: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	4e-01	3e-01	1e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	6e-01	4e-01	2e-01	1e-01

4.2 MIU = 0.010

Таблица 7: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	7e+01
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01

Таблица 8: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	3e-01	2e-01	4e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	9e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 9: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	3e-01	2e-01	1e-01	6e+00
42	3e-01	2e-01	9e-02	6e-02
84	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02
168	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02

Таблица 10: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	3e+01
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	8e-01	5e-01
168	3e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 11: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	9e-01	4e-01	3e+00
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 12: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	4e-01	3e-01	8e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	2e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

4.3 MIU = 0.001

Таблица 13: Функция: H Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	1e+00	7e-01	4e-01	1e+02
42	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
84	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01
168	1e+00	7e-01	4e-01	2e-01

Таблица 14: Функция: V1 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	3e-01	2e-01	4e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	9e-02
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

Таблица 15: Функция: V2 Тип невязки: C

M/N	21	42	84	168
21	3e-01	2e-01	1e-01	5e+00
42	3e-01	2e-01	9e-02	6e-02
84	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02
168	3e-01	2e-01	9e-02	5e-02

Таблица 16: Функция: H Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	3e+00	2e+00	1e+00	3e+01
42	3e+00	1e+00	9e-01	7e-01
84	3e+00	1e+00	8e-01	5e-01
168	3e+00	1e+00	7e-01	4e-01

Таблица 17: Функция: V1 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	2e+00	9e-01	4e-01	4e+00
42	2e+00	1e+00	5e-01	2e-01
84	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01
168	2e+00	1e+00	6e-01	3e-01

Таблица 18: Функция: V2 Тип невязки: L2

M/N	21	42	84	168
21	7e-01	5e-01	3e-01	9e+00
42	7e-01	4e-01	2e-01	2e-01
84	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01
168	7e-01	4e-01	2e-01	1e-01

4.4 Стабилизация течения в разрывном случае:

4.5 Примеры графиков, непрерывный случай:

cont.png

4.6 Примеры графиков, разрывный случай

cont.png

5 Выводы