

Когда массив заполнен, он увеличивается в 2 раза.

Для записи  $n$  элементов нужно  $\log_2(n)$  по основанию 2 добавлений (Если число не целое, то округляем его, конечно, в большую сторону), то есть добавляем элементы  $\log_2(n)$  раз. Обозначим это число за  $k$ .

Каждый раз нам нужно увеличить массив и скопировать элементы массива в новый, а это происходит за  $O(2^{k-1} + \text{Const}) = O(2^{k-1})$ , где принимает значения от 1 до  $k+1$

Итак, суммарно будем иметь следующее:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$$

А это ничто иное как сумма геометрической прогрессии, которую можно посчитать так:

$$(1 - 2^{k+1}) / (1 - 2) = 2^{k+1} - 1$$

Теперь вспомним, как мы вводили  $k$  и тогда получается  $2^{k+1} = n$

А столь необходимое нам  $O(n-1)$  сравнимо с  $O(n)$ ! Что и требовалось доказать!