



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# VISCOSÍMETRO

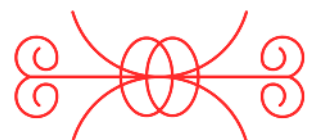
## Práctica 1

**Alba Correal Olmo**

alba.correal@uma.es

05980777H

Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica, Universidad de Málaga.



## Índice de contenidos

Introducción.....	2
Apartado 1. (2 puntos) .....	3
Apartado 2. (2 Puntos) .....	4
Apartado 3. (2 puntos).....	6
Apartado 4. (4 puntos) .....	8
Anexo 1. Cálculo analítico de la Ecuación Diferencial (9).....	10

## Índice de figuras y tablas

Fig. 1. Gráfica que relaciona $\tau$ con $\alpha$ , tanto analítica como numéricamente.....	4
Fig. 2. Gráfica de las variables adimensionales para el valor de $\alpha$ deseado.....	4
Fig. 3. Gráfica que relaciona la altura con el tiempo para distintos valores de la viscosidad. ....	6
Fig. 4. Variación de la velocidad respecto al tiempo de acuerdo con el radio.....	8

# VISCOSÍMETRO

## Introducción.

La práctica sirve de ejemplo de resolución de problemas por métodos numéricos. Tras la misma, se deduce que la diferencia entre el cálculo numérico y analítico no es dispar, pero su dificultad de resolución y, por ende, su carga computacional es muy diferente.

Todos los ejercicios de esta práctica están basados en el mismo código, luego tendrán una estructura similar.

- Se definen las condiciones iniciales o de contorno de nuestro sistema.
- Se realiza un barrido en función de un parámetro que varía de forma arbitraria.
- Se resuelve una ecuación diferencial de forma numérica (con "ode45") tantas veces como valores se escojan de dicho parámetro
- Se obtiene una resolución analítica de la misma ecuación, también de forma iterativa
- Se comparan los distintos valores, tanto numérico como analítico, por medio de una gráfica.

Dicho código se adjunta a continuación:

```
close all % Cierra todas las graficas previas
clear all % Limpia todas las variables previas
clc % Limpia la consola
for alpha=0.2:.2:2 % Abre el bucle for en alpha
% Definicion de la ecuación diferencial
detadtau = @(tau,eta) -(alpha+eta);
% Tau final de la simulacion
tau_f=8;
% Valor de la condición inicial
eta0=1;
% Resolver la ecuación diferencial
[tau,eta] = ode45(@(tau,eta)detadtau(tau,eta),[0 tau_f],eta0);
% Representar graficamente
figure(1), hold on
plot(tau,eta,'LineWidth',2) % Solución numerica
plot(tau,(alpha+1)*exp(-tau)-alpha,'o') % Solución analitica
end % Cierra el bucle for en alpha
% Comandos de etiquetas y de estilo de la grafica
xlabel('$\tau$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', 16)
ylabel('$\eta$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', 16)
set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'Latex', 'FontSize', 16)
grid on;
```

Para facilitar la corrección, en cada apartado se comentarán las modificaciones sobre el código base (o bien, sobre el código del apartado anterior) y se adjuntará el nuevo código en el mismo formato que aparecería en Matlab, con la salvedad de que las adiciones o modificaciones aparecerán subrayadas.

**Apartado 1. (2 puntos)**

Modifica el código anterior para representar el valor de  $\tau$  en el momento final del vaciado  $\tau_v$  dado por  $\eta(\tau_v) = 0$ , mediante interpolación y como función de  $\alpha$ . Representar dicha función  $\tau_v(\alpha)$  numérica y compárela con la analítica obtenida de (8).

Las adiciones al código previo son:

- **Expresión numérica:** en el vector  $\tau_v$  almacenamos los datos de la interpolación para el valor de  $\eta(\tau_v) = 0$ .
- **Expresión analítica:** definimos un nuevo bucle "for" donde calculamos  $\tau_{v_{analit}}$ , calculada despejando de la expresión (8) de la práctica.

$$\tau_{v_{analit}} = \log_{10} \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right)$$

- **Gráficas:** Mostramos tanto la solución numérica como la analítica. Dicha gráfica se muestra a continuación.

```
close all % Cierra todas las gráficas previas
clear all % Limpia todas las variables previas
clc % Limpia la consola
i=0;
for alpha=0.2:.2:2 % Abre el bucle for en alpha
% Definición de la ecuación diferencial
detadtau = @(tau,eta) -(alpha+eta);
% Tau final de la simulación
tau_f=8;
% Valor de la condición inicial y final
eta0=1;
etaf=0;
% Resolver la ecuación diferencial
[tau,eta] = ode45(@(tau,eta)detadtau(tau,eta),[0 tau_f],eta0);
% Representar graficamente
figure(2), hold on
i=i+1;
tau_v(i) = interp1(eta,tau,etaf,'spline');
alpha_v(i) = alpha;
end % Cierra el bucle for en alpha
% Comandos de etiquetas y de estilo de la grafica
xlabel('$\alpha$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize',16)
ylabel('$\tau$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize',16)
set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'LaTeX', 'FontSize',16)
grid on;
for i=1:length(alpha_v)
    tau_v_analit(i)=log((alpha_v(i)+1)/alpha_v(i));
end
hold on
plot(alpha_v,tau_v_analit,'o')
plot(alpha_v,tau_v)
legend("analítica", "numérica")
```

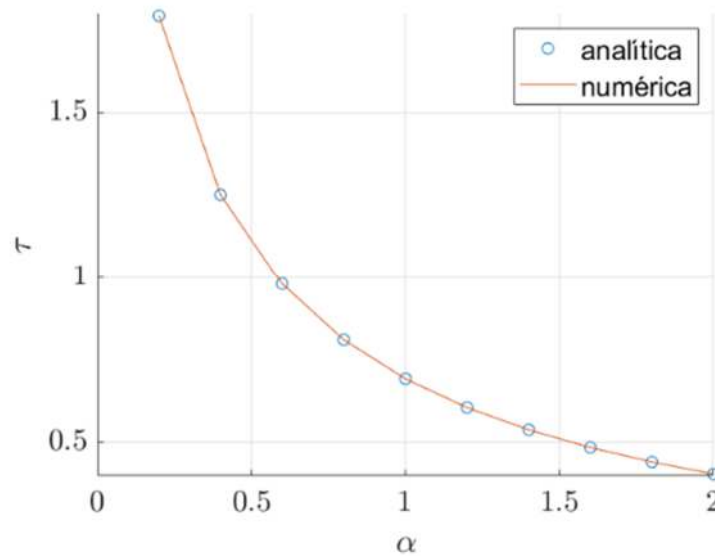


Fig. 1. Gráfica que relaciona  $\tau$  con  $\alpha$ , tanto analítica como numéricamente.

## Apartado 2. (2 Puntos)

Modifique el código anterior para obtener la viscosidad de forma numérica como función de las variables del problema. Las propiedades del dispositivo son

$A = 0,0314\text{m}^2$ ,  $L = 0,25\text{m}$ ,  $D = 0,01\text{m}$  y se realiza un experimento con un fluido de densidad

$\rho = 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Obtenga la viscosidad para un experimento en el que se utiliza una altura inicial de

$h_0 = 0,05\text{m}$  y se mide un tiempo de vaciado de  $t_v = 40\text{s}$ . Para ello, utilice la función  $\tau_v(\alpha)$  obtenida anteriormente.

Finalmente, compruebe que la solución numérica es correcta comparando con la solución analítica.

En este caso, las modificaciones sobre el código son:

- **Supresión de los bucles:** dado que se proporciona un valor fijo  $\alpha = \frac{L}{h_0}$ , no precisamos ningún tipo de iteración para hallar el valor deseado de  $\tau_v$ .
- **Gráfica de  $\tau_v$ :** aunque no lo solicita el enunciado, para una mejor comprensión del ejercicio se ha trazado la gráfica que relaciona las variables adimensionales.

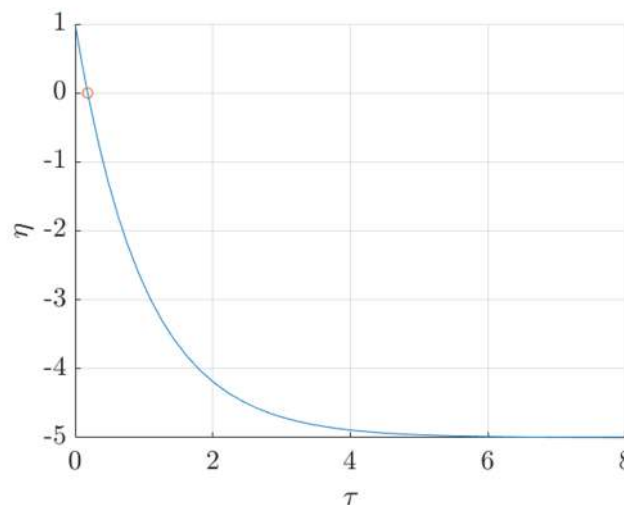


Fig. 2. Gráfica de las variables adimensionales para el valor de  $\alpha$  deseado.

- **Cálculo de  $\mu$ :** si nos fijamos en la ecuación (6), podemos obtener una expresión que relacione  $\mu$  con el tiempo característico. Además, teniendo en cuenta que  $t_c = \frac{t_v}{\tau_v}$ , podemos expresar la viscosidad directamente con los parámetros calculados.

$$\mu = \frac{\pi D^4 \rho g t_v}{128 A L \tau_v}$$

- **Distinción entre  $\mu$  y  $\mu_{analítica}$ :** Gracias a nuestro cálculo previo de  $\tau_v$  y  $\tau_{v_{analítica}}$ , podemos obtener dos valores diferentes de la viscosidad. La variación entre ambos es del orden de las micras ( $10^{-6}$ ).

```
close all % Cierra todas las graficas previas
clear all % Limpia todas las variables previas
clc % Limpia la consola
% Declaración de propiedades
A=0.0314;
L=0.25;
D=0.01;
rho=950;
h0=0.05;
t_v=40;
g=9.8;
alpha=L/h0;
% Definición de la ecuación diferencial
detadtau = @(tau,eta) -(alpha+eta);
% Tau final de la simulacion
tau_f=8;
% Valor de la condición inicial y final
eta0=1;
etaf=0;
% Resolver la ecuación diferencial
[tau,eta] = ode45(@(tau,eta)detadtau(tau,eta),[0 tau_f],eta0);
% Representar graficamente
figure(2), hold on
plot(tau,eta)
tau_v = interp1(eta,tau,etaf,'spline');
plot(tau_v,etaf,'o')
% Comandos de etiquetas y de estilo de la grafica
xlabel('$\tau$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', 16)
ylabel('$\eta$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', 16)
set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'Latex', 'FontSize', 16)
grid on;

tau_v_analit=log((alpha+1)/alpha);
mu = vpa((pi*D^4*rho*g*t_v)/(128*A*L*tau_v),6)
mu = 0.0638616
mu_analit = vpa((pi*D^4*rho*g*t_v)/(128*A*L*tau_v_analit),6)
mu = 0.0638619
```

### Apartado 3. (2 puntos)

Modifique el código inicial para calcular la viscosidad integrando las ecuaciones dimensionales (4). Para ello, elimine el barrido paramétrico en  $\alpha$ , el cual se puede considerar como medido en el experimento, y por tanto, dato de entrada. Valide el código mediante comparación con la solución analítica.

En este apartado, las modificaciones son mayores.

- **Barrido e interpolación de  $\mu$ :** como aproximación inicial, haremos un barrido para un rango de valores posibles de la viscosidad. De este modo, podremos hallar la viscosidad interpolando en función del tiempo de vaciado, que definiremos de acuerdo con el apartado anterior. Mostraremos una gráfica de dicho barrido para comprender mejor el problema.

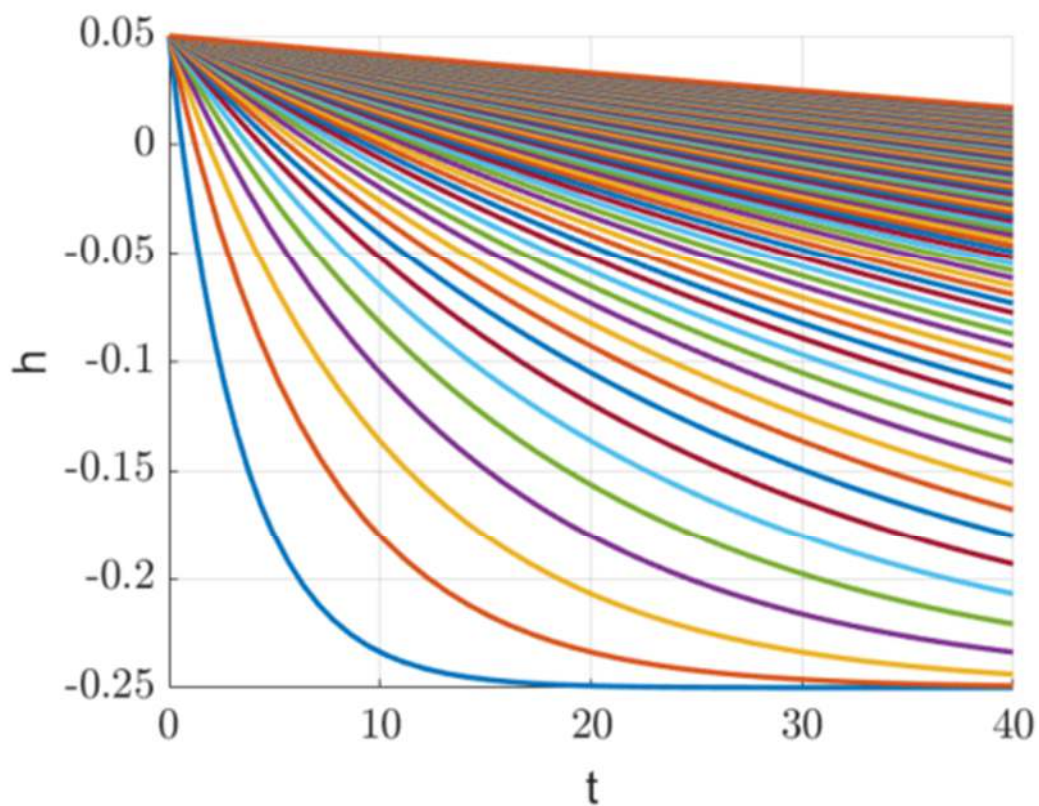


Fig. 3. Gráfica que relaciona la altura con el tiempo para distintos valores de la viscosidad.

- **Modificación de las Ecuaciones Diferenciales:** no vamos a utilizar las ecuaciones adimensionales, luego estas se sustituirán por la expresión (4) de la práctica.

$$\frac{Adh}{dt} = -\frac{\pi D^4}{128\mu L} \rho g(L + h)$$

- **Comparación de resultados:** aprovechamos la  $\mu_{analítica}$  calculada en el apartado anterior. La variación es nula.

```
% Declaración de propiedades

A=0.0314;

L=0.25;

D=0.01;

rho=950;

i=0;

g=9.8;

for mu=linspace(1e-3,1e-1,100)

i=i+1;

mu_v(i)=mu;

% Definición de la ecuación diferencial

dhdt=@(t,h) -(pi*D^4*rho*g*(L+h))/(128*A*L*mu);

% Condiciones iniciales

h0=0.05;

t_v=40;

hf=0;

% Resolver la ecuación diferencial

[t,h] = ode45(@(t,h)dhdt(t,h),[0 t_v],h0);

t_vi(i)=interp1(h,t,hf,'spline');

% Representar graficamente

figure(1), hold on

plot(t,h,'LineWidth',2) % Solución numerica

end % Cierra el bucle for en alpha

% Comandos de etiquetas y de estilo de la grafica

xlabel('t','FontSize',16)

ylabel('h','FontSize',16)

set(gca,'TickLabelInterpreter','Latex','FontSize',16)

grid on;

mu_n=vpa(interp1(t_vi,mu_v,t_v,'spline'),6)

mu_n = 0.0638619

mu_analit

mu = 0.0638619
```



#### Apartado 4. (4 puntos)

Ingrese la ecuación diferencial que gobierna la velocidad de sedimentación de una esfera a bajos números de Reynolds (ecuación 14.49 de los apuntes),  $\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu VR$ . (9)

con condición inicial  $V(0) = V_0$ , siendo  $V_0 = 0 \frac{m}{s}$  y  $V_0 = 1 \frac{m}{s}$ . Para ello, considere esferas de

diferentes radios entre  $R = 1\text{mm}$  y  $5\text{mm}$ , con valores de propiedades  $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ,

$\rho_p = 7000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  y  $\mu = 1\text{mPa}\cdot\text{s}$ , con gravedad  $g = 9,81\text{m/s}^2$ .

El enfoque de esta sección es diferente, siendo el código completamente nuevo. Los pasos que se han seguido para su programación son:

- **Barrido de R:** dado que la ecuación proporcionada depende del radio, hemos empleado un bucle para iterar la resolución en función de dicho dato.
- **Ecuaciones diferenciales:** al igual que en las secciones anteriores, se define la velocidad en función del tiempo tal y como solicita el enunciado, y se resuelve para las condiciones de contorno proporcionadas con la función "ode45". El tiempo de simulación se ha escogido arbitrariamente, pero teniendo en cuenta las limitaciones del enunciado.
- **Resolución analítica:** se ha obtenido también la solución analítica del problema, para poder compararlo con la obtenida experimentalmente. Dicha resolución se adjunta en el Anexo 1.
- **Gráficas:** De nuevo, se muestra gráficamente la diferencia entre un tipo de resolución y otra.

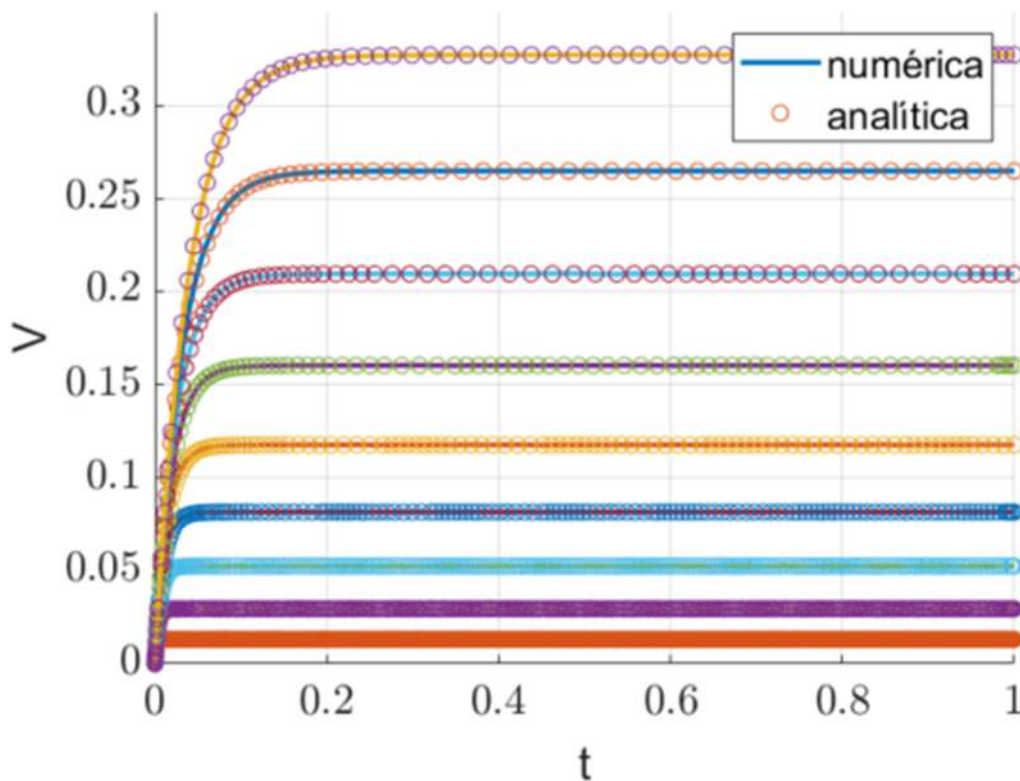


Fig. 4. Variación de la velocidad respecto al tiempo de acuerdo con el radio.

```
close all % Cierra todas las graficas previas

clear all % Limpia todas las variables previas

clc % Limpia la consola

rho=1000;

rho_p=7000;

mu=1;

g=9.81;

for R=0.001:0.005:0.005 % Abre el bucle for en alpha

    % Definicion de la ecuación diferencial

    dvdt = @(t,v) (4/3*pi*R^3*(rho_p-rho)*g-6*pi*mu*v*R)/(4/3*pi*R^3*rho_p);

    % tiempo final de la simulacion

    t_f=1;

    % Valor de la condición inicial

    V0=0;

    % Resolver la ecuación diferencial

    [t,v] = ode45(@(t,v)dvdt(t,v),[0 t_f],V0);

    % Representar graficamente

    figure(1), hold on

    plot(t,v,'LineWidth',2) % Solución numerica

    plot(t,((4/3*pi*R^3*g*(rho_p-rho))/(6*pi*mu*R)-(4/3*pi*R^3*g*(rho_p-
rho))/(6*pi*mu*R)*exp(-6*pi*mu*R/(4/3*pi*R^3*rho_p)*t)), 'o') % Solución analitica

end % Cierra el bucle for en alpha

% Comandos de etiquetas y de estilo de la grafica

xlabel('t','FontSize',16)

ylabel('V','FontSize',16)

set(gca,'TickLabelInterpreter','Latex','FontSize',16)

grid on;

legend("numérica","analítica")
```

**Anexo 1. Cálculo analítico de la Ecuación Diferencial (9)**

Sea la ecuación:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho) - 6\pi\mu VR$$

- 1) Despejamos
- $\frac{dV}{dt}$
- :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho) - 6\pi\mu VR}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p}$$

- 2) Definimos la solución característica como
- $V(t) = C_0 + C_1 e^{-\lambda t}$
- , por lo que sustituimos en la ecuación previa:

$$-\lambda C_1 e^{-\lambda t} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho) - 6\pi\mu(C_0 + C_1 e^{-\lambda t})R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p}$$

De lo cual, podemos extraer dos conclusiones:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho) - 6\pi\mu R C_0}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p} = 0 \rightarrow C_0 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R}$$

$$\lambda = \frac{6\pi\mu R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p}$$

- 3) Además, aplicando las condiciones de contorno conocidas

$$V(0) = 0 \rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R}$$

$$V(0) = 1 \rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R} + C_1 = 1 \rightarrow C_1 = 1 - \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R}$$

- 4) Reformulando la ecuación inicial:

$$V(t) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R} - \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R} e^{-\frac{6\pi\mu R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p} t}$$

$$V(t) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R} + \left(1 - \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_p - \rho)}{6\pi\mu R}\right) e^{-\frac{6\pi\mu R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p} t}$$

Para cada una de las condiciones iniciales facilitadas.