TP 3 d'Analyse Numérique

1 /**Algoritme de résolution d'équations différentielles par les méthodes d'Euler et Runge-Kutta**

Soit le problème de Cauchy : $(\forall t \in [a,b])$ $y'(x) = f(x, y(x))$ et $y(a) = y_a$ (donné)
où $(y_a \in \mathbb{R})$ et f est une fonction réelle continue sur $[a,b] \times \mathbb{R}$.

Pour résoudre numériquement cette équation différentielle, on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en N sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. On suppose les points x_i régulièrement répartis avec un pas $h = \dfrac{b-a}{N}$
$x_i = a + i \times h$ $(i = 0, 1, ..., N)$
On calcule les N valeurs y_i $(i = 1, ..., N)$ approximant la solution $y(x)$ dans l'intervalle $[a,b]$.

a/ Méthode d'Euler

En utilisant la formule de dérivation numérique à 2 points (avant), on peut écrire :

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i, y_i)$$

d'où le processus itératif pour calculer les N valeurs des y_i $(i = 1, ..., N)$

$$y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i)$$

b/ Méthode de Rung-Kutta d'ordre 4
Le processus itératif de résolution s'écrit :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ avec } \begin{cases} k_1 = h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 = h\, f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h\, f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = h\, f(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

2 / Travail à faire en séance de TP

Dans chacuns des calculs, on utilisera les deux méthodes d'Euler et de Rung-Kutta

1/ A partir de l'exemple simple (euler_rk.py), écrire un programme permettant de résoudre une équation differentielle:

$$y' = f(x, y) \text{ dans } [a,b] \text{ avec } y_a \text{ donné.}$$

a/ Pour vérifier votre programme, résoudre les équations différentielles
- $y' = 2$ dans $[0., 10.]$ avec $y_a = 0.$
- $y' = 2x$ dans $[0., 10.]$ avec $y_a = 0.$
- $y' = y - \dfrac{(2x)}{y}$ dans $[0., 10.]$ avec $y_a = 1$ (solution exacte : $y = \sqrt{2x+1}$)

b/ Résoudre l'équation différentielle :

$y'(x) = cos(x)$ dans $[0., 2\pi.]$ avec $y_a = 0.$

Comparer avec le résultat du TP précédent (intégration par la méthode des trapèzes).

2/ Adapter votre programme pour la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial x(t)}{\partial t} & = & P_r(y(t)-x(t)) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} & = & R_a x(t)-(x(t)z(t)+y(t)) \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} & = & x(t)y(t)-bz(t) \end{array}\right.$$

C'est un modèle (de E. Lorentz) théorique de convection thermique très simplifié expliquant l'origine de l'imprédictibilité des phénomènes météorologiques à long terme.

On choisira comme valeurs des paramètres les valeurs suivantes:
$P_r = 10$, $R_a = 28$ et $b = \frac{8}{3}$.

Soit (x_0, y_0, z_0) la solution initiale à $t = 0$ et (x_n, y_n, z_n) la solution obtenue au bout d'un certain temps d'intégration t_n.

Si on choisit: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$
alors on obtient la solution théorique évidente $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$

Qu'obtient-on avec une perturbation minime de la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$: ? ($\varepsilon$ très petit comme par exemple $\varepsilon \approx 10^{-20}$)

Tracer les courbes (x,y), (y,z), (x,z), (x,t), (y,t) et (z,t) (pour $t \in [0., 60.]$ avec un nombre points $n = 100000$). On doit retrouver les attracteurs de Lorentz.