

TP 3 : Intégrations numériques

Le but de ce TP est de mettre au point un programme (en langage python), pour le calcul numérique d'intégrales par la méthode des trapèzes. Soit une fonction réelle f définie continue sur un intervalle $[a, b]$ et on veut calculer numériquement l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

La méthode des trapèzes consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_j]$ avec $x_i = a + i * h$ où $h = \frac{(b-a)}{n}$ puis d'approcher l'intégrale I par la somme de toutes les intégrales calculées dans chacun de ces intervalles.

$$I \approx \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx \quad \text{avec} \quad \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_j)]$$

soit

$$I \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

1/ Calcul numérique de de $I = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt$ et comparaison avec le résultat analytique exact.

a/ Saisir et exécuter le programme suivant qui trace la courbe de la fonction *sinus* dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Ajouter à ce programme des éléments (titre et légendes) pour une meilleure présentation.

```
#!/usr/bin/python
#-*- coding: utf-8 -*-
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a=0.
b=2*pi
t=np.linspace(a,b,1000)
plt.plot(t,np.sin(t))
plt.show()
```

b/ Ecrire un programme permettant de calculer numériquement par la méthode des trapèzes, l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x \cos(t) dt$$

pour n points x régulièrement répartis dans l'intervalle $[0, 2\pi]$

c/ Sur un même graphique, tracer $I(x)$ et $\sin(x)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

d/ Quelle est l'erreur d'intégration R sur $I(2\pi)$ pour ces différentes valeurs de n .

2/ Calcul de l'intégrale d'une fonction donnée numériquement

Le fichier *donnees.dat* contient les données d'une fonction réelle f de la variable x . La première ligne contient le nombre de points, les n lignes suivantes contiennent chacune une valeur de x_i et celle de $f(x_i)$, ordonnées dans l'ordre croissant ($i = 0, 1, \dots, n - 1$)

Ecrire un programme permettant de calculer numériquement par la méthode des trapèzes, l'intégrale :

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt$$