Albanian Journal of Mathematics

Për një Shqipëri të shkencës dhe kulturës.

Volume 10, 2016

www.albanian-j-math.com

ALBANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Pages 3–10
ISSN: 1930-1235; (**2016**)

ON REAL FORMS OF A BELYI ACTION OF THE ALTERNATING GROUPS

C. Bagiński
Faculty of Computer Science,
Białystok University of Technology,
Wiejska 45, 15-351 Białystok, Poland
Email: c.baginski@pb.edu.pl

J. J. Etayo
Facultad de Matemáticas, Departamento de Álgebra,
Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain
Email: jetayo@mat.ucm.es

G. Gromadzki
Institute of Mathematics, Gdańsk University,
Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk, Poland
Email: grom@mat.ug.edu.pl

E. Martínez
Departamento de Matemáticas Fundamentales. UNED,
Paseo Senda del Rey 9, 28040 Madrid, Spain
Email: emartinez@mat.uned.es

Abstract. In virtue of the Belyi Theorem a complex algebraic curve can be defined over the algebraic numbers if and only if the corresponding Riemann surface can be uniformized by a subgroup of a Fuchsian triangle group. Such surfaces are known as Belyi surfaces. Here we study certain natural actions of the alternating groups A_n on them. We show that they are symmetric and calculate the number of connected components, called ovals, of the corresponding real forms. We show that all symmetries with ovals are conjugate and we calculate the number of purely imaginary real forms both in case of A_n considered here and S_n considered in an earlier paper [2].

Received: August 15, 2015; *Accepted:* March 30, 2016; *Appeared:* April 15, 2016.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30F40; Secondary 14H37.
Key words and phrases. Automorphisms of Riemann surfaces, Belyi actions of alternating groups, real forms of complex algebraic curves, ovals.
Cz. Bagiński supported by NCN 2012/05/B/ST1/02171, J. J. Etayo by MTM2011-22435 and MTM2014-55565, and UCM910444, G. Gromadzki by NCN 2012/05/B/ST1/02171 and the Max Planck Mathematical Institute in Bonn, and E. Martínez by MTM2011-23092 and MTM2014-55812.

1. Introduction

There is a functorial equivalence between smooth irreducible projective complex algebraic curves and compact Riemann surfaces and in virtue of the Belyi Theorem [1] an algebraic curve can be defined over the algebraic numbers if and only if the corresponding Riemann surface can be uniformized by a subgroup of a Fuchsian triangle group. Such surfaces are known as Belyi surfaces and, by results of Köck, Lau and Singerman [7] and [8] they are symmetric if and only if the above algebraic numbers can be simultaneously chosen belonging to $\mathbb{R}$. An important class of Belyi surfaces is formed by the Riemann surfaces with so called large groups of automorphisms. More precisely, such a surface of genus g has as least $12(g-1)$ automorphisms. Necessary and sufficient algebraic conditions for these surfaces to be symmetric were found by Singerman in [10].

In [4], the third author has developed an algebraic method to calculate the number of connected components of the real forms corresponding to the symmetries given by the above theorem of Singerman. It is also worth to mention here the paper [6] which was the first tool to calculate the number of these components and its recent improvement [11] by Singerman and Watson. In [2], the method from [4] was successfully applied to study the topological type of real forms of certain symmetric Riemann surfaces determined by certain canonical actions of the symmetric groups S_n on them which correspond to certain generating pairs for S_n as described in the next section.

Here, we study the alternating groups actions within the described framework. Namely, we take certain canonical pairs of generators for the alternating groups A_n and we consider the corresponding actions of A_n on a Belyi Riemann surface. We show that such surfaces are symmetric and then we calculate the number of connected components of the corresponding real forms. We deduce that all symmetries with ovals are conjugate. The importance of A_n in this context follows from the Cayley embedding theorem which implies that an arbitrary finite group acts as a group (usually not the full group) of birational automorphisms on some algebraic curve defined over algebraic reals. Another important feature of the surfaces with the actions considered here is that they are particular examples of, so called, quasi-platonic surfaces which form the principal subject of research concerning the classical Grothendieck dessins d'enfants theory and inverse Galois problem [3].

The last section is devoted to purely imaginary real algebraic curves which are the curves which can be defined over the real but which have no $\mathbb{R}$-rational points. We show there that their number for a symmetric quasi-platonic Riemann surface X with the action of $G = \mathrm{Aut}(X)$ corresponding to a pair of generating cycles α, β for which the application $\alpha \mapsto \alpha^{-1}, \beta \mapsto \beta^{-1}$ extends to an automorphism of G does not depend on this pair if $G = \mathrm{S}_n$, while for $G = \mathrm{A}_n$ it depends on it exactly up to such extent up to which it forces $\mathrm{Aut}^{\pm}(X)$ to be S_n or $\mathrm{A}_n \times \mathrm{Z}_2$ which turn out to be the only cases that can happen for the actions considered in this paper.

2. Preliminaries and known results

We shall use the combinatorial method based on the Riemann uniformization theorem and on the algebraic theory of Fuchsian groups. Following them, a compact Riemann surface X of genus $g \geq 2$ can be represented as the orbit space $\mathcal{H}/\Gamma$ of the hyperbolic plane $\mathcal{H}$, with respect to the action of some Fuchsian surface group Γ being a discrete and cocompact subgroup of the group of isometries of $\mathcal{H}$, isomorphic to the fundamental group of the surface. Furthermore, the group of conformal automorphisms of the surface given in such a way can be represented as the factor group $G = \Delta/\Gamma$ for some other Fuchsian group Δ. Thus we can write the faithful action of a finite group G as a group of automorphisms of a Riemann surface X of genus $g \geq 2$ by a smooth epimorphism $\theta : \Delta \to G$, which means that its kernel Γ is torsion free or, equivalently, it preserves the orders of the canonical elliptic generators of Δ. However since we shall deal with surfaces with large groups of automorphisms such a group can be assumed to be a triangle group Δ with signature $(0; k, l, m)$ which means that its algebraic presentation is $\langle x_1, x_2 \,|\, x_1^k, x_2^l, (x_1x_2)^m \rangle$. Such a Fuchsian group is known to be unique up to conjugacy in the group of all isometries of $\mathcal{H}$ and so the corresponding surface is determined, up to conformal isomorphism, by a pair of generators a, b of orders k and l whose product is an element of order m. We shall refer to such surface and action as to the ones corresponding to a generating pair a, b of G. With these notations we have the following, mentioned above, result of Singerman from [10].

Theorem 2.1. *A Riemann surface X with the full large group of automorphisms G, corresponding to a generating pair (a, b), is symmetric if and only if there is an automorphism φ of G for which $\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = b^{-1}$ or $\varphi(a) = b^{-1}, \varphi(b) = a^{-1}$.*

The set of fixed points of a symmetry of a Riemann surface of genus $g \geq 2$ is homeomorphic to the set of $\mathbb{R}$-rational points of a real form of the complex algebraic curve corresponding to this surface and its symmetry. In turn, the latter consists of k disjoint Jordan curves called *ovals* for some k ranging between 0 and $g+1$ in virtue of the classical Harnack theorem [5] with some restrictions depending on the separability of the symmetry given by Weichold in his thesis [12].

Now given an automorphism φ of G, two elements x, $y \in G$ are said to be *φ-conjugate* ($x \sim_\varphi y$) if $x = wy\varphi(w)^{-1}$ for some $w \in G$. Observe that for $\varphi = 1$ this coincides with the ordinary notion of conjugacy $\sim$. Recall also that *the isotropy group* of φ is the subgroup G_φ of G, consisting of all elements fixed by φ. With these notations we have the following result from [4] which describes the number of ovals of the conjugacy classes of symmetries from Theorem 2.1.

Theorem 2.2. *Let a and b be a generating pair of elements of a finite group G of orders $k = 2k' + 1$ and $l = 2l' + 1$ respectively so that ab has order m. Then the corresponding Riemann surface X has at most two types of symmetries: one with and one without ovals. Symmetries with ovals always exist, all of them are conjugate in G and they have N/M ovals, where N is the order of the isotropy group of φ in G and*

(1) *$M/2$ is the order of $(ab)^{m'}a^{-k'}b^{-l'}(ab)^{m'}b^{l'}a^{k'}$ if $m = 2m'$,*
(2) *M is the order of $(ab)^{-m'}b^{l'}a^{k'}$ if $m = 2m' + 1$.*

A symmetry without ovals exists if and only if $\varphi(g) = g^{-1}$ for some $g \in G$ which is not φ-conjugate to the unit of G.

Proof. For $x = ab, y = b^{-1}$, we have a generating pair for G of elements of orders m, l whose product $xy = a$ has order k. So if $m = 2m'$, by Theorem 4.1 in [4], the only symmetry up to conjugacy with fixed points has N/M ovals, where N is the order of the isotropy group of φ in G, where $\varphi(x) = x^{-1}, \varphi(y) = y^{-1}$ and $M/2$

is the order of $x^{m'}(xy)^{-k'}y^{l'}x^{m'}y^{-l'}(xy)^{k'} = (ab)^{m'}a^{-k'}b^{-l'}(ab)^{m'}b^{l'}a^{k'}$. The case (2) follows from [4] in a similar way and we omit it.

□

3. GENERATING PAIRS OF A_n DEFINING OUR ACTIONS

We are going to consider two generating pairs for the alternating group A_n. The starting point, to consider them, goes back to Moore in 1897 who gave in [9] a complete presentation of A_n by means of defining generators and relations. In this paper we take

$$\alpha = (1,2,3) \text{ and } \beta = \begin{cases} (1,2,\dots,n) & \text{if } n \text{ is odd,} \\ (2,3,\dots,n) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{1}$$

Proposition 3.1. *The actions of the group* A_n *on Belyi Riemann surfaces, corresponding to the above generating pairs are symmetric.*

Proof. It is easy to check that for

$$\gamma = \begin{cases} (1,3)(n,4)(n-1,5)(n-2,6)\dots\left(\frac{n+5}{2}, \frac{n+3}{2}\right) & \text{if } n \text{ is odd} \\ (2,3)(n,4)(n-1,5)\dots\left(\frac{n+6}{2}, \frac{n+2}{2}\right) & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \tag{2}$$

we have $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^{-1}$ and $\gamma\beta\gamma^{-1} = \beta^{-1}$ and therefore the map $\alpha \mapsto \alpha^{-1}, \beta \mapsto \beta^{-1}$ induces an automorphism φ of A_n. Hence the corresponding surfaces are symmetric by Theorem 2.1.

□

4. THE NUMBER OF OVALS

In this section we find the number of connected components, that is to say ovals, of real forms corresponding to the symmetries of Riemann surfaces with the action of A_n given by the generating pair (α, β) defined in (1). Since, by Proposition 3.1, φ is the conjugation in $G = \mathrm{A}_n$ by $\gamma \in \mathrm{S}_n$, we obtain

Lemma 4.1. *For the isotropy group* G_φ *of* φ *in* A_n *we have*

$$|G_\varphi| = \begin{cases} 2^{(n-3)/2}((n-1)/2)! & \text{if } n \text{ is odd} \\ 2^{(n-2)/2}((n-2)/2)! & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

Proof. Observe first that γ is a product of disjoint transpositions and so the isotropy group of φ in A_n coincide with the centralizer of γ in A_n. Let

$$X = \begin{cases} \{3,4,\dots,(n+3)/2\} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \{3,4,\dots,(n+2)/2\} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

let $Y = \{1,\dots,n\} - X$, and let for $1 \le i \le n$, $f(i)$ denotes an element for which $(i, f(i))$ is one of the transpositions composing γ. Then it is clear that $\xi \in \mathrm{A}_n$ centralizes γ if and only if

$$\xi(i) = j \Leftrightarrow \xi(f(i)) = f(j)$$

for arbitrary i, j. Now each permutation ξ of X determines an element $\xi\xi' \in \mathrm{A}_n$ centralizing γ, where ξ' is a permutation of Y defined by

$$\xi'(i) = j \Leftrightarrow \xi(f(i)) = f(j).$$

Now it is clear that to get all elements centralizing γ for n odd we need to consider the products of all of such $\xi\xi'$ with even length products of transpositions composing γ given in (2). The case of even n is a bit different since appart of transpositions composing γ we have also the transposition $(1,(n+4)/2)$ which centralizes it.

□

Theorem 4.2. *Let X be a symmetric Riemann surface corresponding to the generating pair (α,β) defined in (1). Then X has a symmetry without ovals and a symmetry with*

$$\begin{cases} 2^{(n-5)/2}\,((n-1)/2)! & \text{if } n \equiv 1 \pmod 2 \\ 2^{(n-2)/2}\,\dfrac{((n-2)/2)!}{n-2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 2^{(n-4)/2}\,\dfrac{((n-2)/2)!}{n-2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

ovals.

Proof. For odd n, the generators of A_n from (1) are of $(3,n,n)$ type i.e. $\alpha,\beta,\alpha\beta$ have orders $3,n,n$ respectively. Observe that $\alpha\beta=(2,1,3,4,\ldots,n-1,n)$. First we show that the surface has a symmetry without ovals. Let $\delta=(1,3)(4,n)$. Then $\varphi(\delta)=\delta=\delta^{-1}$. then for arbitrary $\eta\in\mathrm{A}_n$, we have $\eta\varphi(\eta)^{-1}=\eta\gamma\eta^{-1}\gamma^{-1}$ and so δ is not φ-conjugate to the unit since it does not belong to the commutator of S_n.

Now, in terms of (2) in Theorem 2.2, $k=3$, $l=m=n$, and so $k'=1$, $l'=m'=(n-1)/2$ and so, all symmetries with ovals are conjugate and the number of ovals is equal to N/M where N is given in the Lemma 4.1, whilst M is the order of the element $(ab)^{-(n-1)/2}b^{(n-1)/2}a$ which is equal to $(2,3)((n+3)/2,(n+5)/2)$. So $M=2$ and hence the result.

Let now $n>4$ be even. The group A_n is generated by $\alpha=(1,2,3)$ and $\beta=(2,3,\ldots,n)$. We have $\alpha\beta=(1,2)(3,4,\ldots,n)$ and so these generators are of type $(3,n-1,n-2)$. Therefore (1) of Theorem 2.2 has application here. In particular, all symmetries with ovals are again conjugate. In term of this theorem $k=3$, $l=n-1$, $m=n-2$, and so $k'=1$, $l'=m'=n/2-1$.

As in the case of n odd, the surface has a symmetry without ovals. For, let $\delta=(2,3)(4,n)$. Then $\varphi(\delta)=\delta^{-1}$. Now again, for arbitrary $\eta\in\mathrm{A}_n$, we have $\eta\varphi(\eta)^{-1}=\eta\gamma\eta^{-1}\gamma^{-1}$ and so δ is not φ-conjugate to the unit since it does not belong to the commutator of S_n. Take now the symmetry with ovals. Lemma 4.1 gives value of N in (1) of Theorem 2.2 and $M/2$ is the order of

$$(ab)^{n/2-1}a^{-1}b^{-(n/2-1)}(ab)^{n/2-1}b^{n/2-1}a$$

which is equal to the product

$$(1,2)^{n/2-1}(3,4,\ldots,n)^{n/2-1}(1,3,2)(2,3,\ldots,n)^{-(n/2-1)}$$
$$(1,2)^{n/2-1}(3,4,\ldots,n)^{n/2-1}(2,3,\ldots,n)^{n/2-1}(1,2,3).$$

When n is a multiple of 4, this permutation is

$$(2,4,5,\ldots,n/2+1)(n/2+3,1,n,\ldots,n/2+4),$$

and hence has order $n/2-1$, whilst in the other case, it is

$$(2,4,5,\ldots,n/2+1,1,n,n-1,\ldots,n/2+3)(3,n/2+2),$$

and so has order $n-2$.

Therefore M is respectively $n-2$ and $2(n-2)$, and so we have the respective results, as claimed.

□

5. Purely imaginary forms

From Theorem 2.2 we know necessary and sufficient conditions for Riemann surfaces described there to admit a symmetry without ovals which correspond to purely imaginary forms. Now we shall deal with the number of conjugacy classes of such symmetries of Riemann surfaces corresponding both to the action of $G = \mathrm{A}_n$ considered here and to the one for $G = \mathrm{S}_n$ which was considered in [2]. By [10] (see also [4] for explicit statement), $G^{\pm} = \mathrm{Aut}^{\pm}(X) = G \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle a, b\rangle \rtimes \langle t\rangle$, where $tgt = \varphi(g)$. With these notations we have

Theorem 5.1. *Two elements g_1, g_2 of G give rise to nonconjugate fixed point free symmetries if and only if*

(a) $\varphi(g_i) = g_i^{-1}$ *and* $g_i \not\sim_{\varphi} 1$,
(b) $g_1 \not\sim_{\varphi} g_2$ *and* $g_1 \not\sim_{\varphi} \varphi(g_2)$.

Proof. Clearly each element of $G^{\pm} \setminus G$ has the form gt for some $g \in G$. Now for a symmetry, we have $1 = (gt)^2 = g\varphi(g)$ and gt has ovals if and only if $gt \sim_{G^{\pm}} t$ which in turn means $gt = wtw^{-1} = wtw^{-1}tt$. Consequently $g \sim_{\varphi} 1$ and so (a). Now $g_1t \sim_{G^{\pm}} g_2t$ if and only if $g_1t = w(g_2t)w^{-1} = wg_2\varphi(w)t$ or $g_1t = (wt)(g_2t)(wt)^{-1} = w\varphi(g_2)\varphi(w)^{-1}t$ for some $w \in G$ which gives (b).

□

We shall not only find the number of purely imaginary real forms of surfaces considered in this paper but we shall show, actually, that this number for symmetric quasi-platonic Riemann surfaces with the action of G depends on α and β only up to a certain extent. For effective use of this theorem for our actions we need some preparation.

It is obvious that two cycles δ_1, δ_2 of the same length, say n, are conjugated and in addition there are n conjugating elements with support contained in $\mathrm{supp}(\delta_1) \cap \mathrm{supp}(\delta_2)$. Furthermore for $\delta_2 = \delta_1^{-1}$ all conjugating elements are involutions. In this case for n odd each such involution has exactly one fixed point, while for n even half of the involutions do not have fixed points and each of the remainder ones has exactly two fixed points.

Proposition 5.2. *Let α, β be the generating pair for A_n defined in (1) and let φ be an automorphism of A_n such that*

$$\alpha^{\varphi} = \alpha^{-1} \quad \text{and} \quad \beta^{\varphi} = \beta^{-1}, \tag{3}$$

then

$$\mathrm{A}_n \rtimes \langle\varphi\rangle \cong \begin{cases} \mathrm{A}_n \times \mathbb{Z}_2 & \text{if } n \equiv 1,2 \pmod 4 \\ \mathrm{S}_n & \text{if } n \equiv 0,3 \pmod 4. \end{cases}$$

Proof. From the proof of Proposition 3.1 we know that φ is the conjugation by $\gamma \in \mathrm{S}_n$ defined by (2). Now it is clear that if $n \equiv 1,2 \pmod 4$, then $\gamma \in \mathrm{A}_n$ and by standard considerations $\mathrm{A}_n \rtimes \langle\varphi\rangle \cong \mathrm{A}_n \times \mathbb{Z}_2$. If $n \equiv 0,3 \pmod 4$, then $\gamma \in \mathrm{S}_n - \mathrm{A}_n$ and it cannot be replaced by an involution from A_n. Therefore $\mathrm{A}_n \rtimes \langle\varphi\rangle \cong \mathrm{S}_n$.

□

The case of S_n is simpler.

Proposition 5.3. *Let $\alpha = (1,2)$ and $\beta = (1,2,\ldots,n)$ and let φ be an automorphism of* S_n *defined by* (3). *Then* $\mathrm{S}_n \rtimes \langle\varphi\rangle \cong \mathrm{S}_n \times \mathbb{Z}_2$.

Notice that again φ is uniquely determined by (3) and is realized by the conjugation by $\pi = (1,2)(3,n)(4,n-1)\ldots(n-3,n-2)$.

Now observe that for a fixed positive even integer m in the range $1 \le m \le n$, the set of all involutions $\tau \in \mathrm{A}_n$ such that $|\mathrm{supp}(\tau)| = m$ form one conjugacy class of A_n and S_n as well. The symmetric group S_n has $\lfloor n/2 \rfloor$ different conjugacy classes of involutions while the alternating group A_n has $\lfloor n/4 \rfloor$ such classes. So in particular we get

Lemma 5.4. *Let* $\tilde{G} = G \rtimes \langle\varphi\rangle$.

- (*a*) *If* $G = \mathrm{S}_n$ *then the number of conjugacy classes of involutions from* $\tilde{G} - G$ *is equal to* $\lfloor n/2 \rfloor$.
- (*b*) *Let* $G = \mathrm{A}_n$. *If* $\tilde{G} \cong G \times \mathbb{Z}_2$ *then the number of conjugacy classes from* $\tilde{G} - G$ *is equal to* $\lfloor n/4 \rfloor$. *If* $\tilde{G} \cong \mathrm{S}_n$ *then the number of conjugacy classes of involutions from* $\tilde{G} - G$ *is equal to* $\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/4 \rfloor$.

Proof. (a) By Proposition 5.3, $\tilde{G} - G = G\tau$, where τ is an involution centralizing G. If C_γ is the conjugacy class of γ in G then $C_\gamma\tau$ is a conjugacy class of $\gamma\tau$ in $\tilde{G}$. Hence, the number of conjugacy classes of involutions of G is the same as the number of conjugacy classes of involutions of $\tilde{G}$ contained in $\tilde{G} - G$.

(b) For the case $\tilde{G} \cong G \times \mathbb{Z}_2$ the proof is the same as for (a). Let $\tau \in \tilde{G} - G$ be a fixed involution. Let $\tilde{G} = \mathrm{S}_n$. If $\tau \in \mathrm{A}_n$ is an involution, then the conjugacy class of τ in S_n is equal to the conjugacy class of this element in A_n. Hence the number of conjugacy classes of involutions of $\tilde{G} - G$ is equal to $\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/4 \rfloor$.

□

Suppose now that α and β are fixed arbitrary cycles generating $G \in \{\mathrm{A}_n, \mathrm{S}_n\}$, such that $\tau\alpha\tau = \alpha^{-1}$ and $\tau\beta\tau = \beta^{-1}$ for an involution τ. From the proof of Theorem 5.1, it follows that in order to calculate the number of purely imaginary forms we have to find in $\tilde{G} = G \rtimes \langle\tau\rangle$ the number of conjugacy classes of involutions of $\tilde{G}$ which are not in G and which are not conjugated to $\alpha\tau$, τ and $\beta\tau$. Observe however that for $G = \mathrm{S}_n$ with $|\mathrm{supp}(\beta)|$ odd, the elements τ and $\beta\tau$ are conjugated but τ and $\alpha\tau$ not, as $|\mathrm{supp}(\alpha)|$ is even. If both $|\mathrm{supp}(\alpha)|$ and $|\mathrm{supp}(\beta)|$ are even then $\alpha\tau$ is conjugated to $\beta\tau$ but not conjugated to τ. If $G = \mathrm{A}_n$ then the three elements τ, $\alpha\tau$, $\beta\tau$ are conjugated with each other. As a consequence we obtain our final theorem.

Theorem 5.5. *Let G be the symmetric group* S_n *or the alternating group* A_n *generated by two cycles α, β, so that the correspondence $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$ and $\varphi(\beta) = \beta^{-1}$ induces an automorphism of G. Then the complex algebraic curve corresponding to α, β has*

$$\begin{array}{ll} \lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{if } G = \mathrm{S}_n, \\ \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/4 \rfloor - 1 & \text{if } \tilde{G} \cong \mathrm{S}_n, \\ \lfloor n/4 \rfloor - 1 & \text{if } \tilde{G} \cong \mathrm{A}_n \times \mathbb{Z}_2, \end{array}$$

purely imaginary forms. □

Remark 5.6. If α and β giving the action of G are not cycles, and $\tau\alpha\tau = \alpha^{-1}$ and $\tau\beta\tau = \beta^{-1}$ for some involution τ, then in all three cases the elements τ, $\alpha\tau$, $\beta\tau$ may lie in one, two or three conjugacy classes.

Acknowledgments: The authors thank to referee for some suggestions which improve the readability of the paper.

References

[1] G. Belyi, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 247-256.

[2] J. J. Etayo, G. Gromadzki, E. Martínez, On real forms of Belyi surfaces with symmetric groups of automorphisms, *Mediterr. J. Math.* **9** (4) (2012), 669-675.

[3] E. Girondo, G. González-Díez, *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, London Mathematical Society Student Texts **79** (2012), Cambridge University Press.

[4] G. Gromadzki, On Singerman symmetries of a class of Belyi Riemann surfaces, *Journal of Pure and Applied Algebra* **213** (2009), 1905-1910.

[5] A. Harnack, Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Kurven, *Math. Ann.* **10** (1876), 189-199.

[6] A. H. M. Hoare, Subgroups of NEC groups and finite permutations groups, *Quart. J. Math.* (Oxford) **41** (1990), 45-59.

[7] B. Köck, D. Singerman, Real Belyi Theory, *Quart. J. Math.* (Oxford) **58** (2007), 463-478.

[8] B. Köck, E. Lau, A note on Belyi's theorem for Klein surfaces, *Quart. J. Math.* (Oxford) **61** (2010), 103-107.

[9] E. H. Moore, Concerning the abstract groups of order $k!$ and $\frac{1}{2}\,k!$, *Proc. London Math. Soc.* **28** (1897), 357-366.

[10] D. Singerman, Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. *Math. Ann.* **210** (1974), 17-32.

[11] D. Singerman, P. Watson, Using Hoare's theorem to find the signature of a subgroup of an NEC group, Preprint 2014, arXiv:1408.0127.

[12] G. Weichold, Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmodulen der zugerhörigen Abelschen Normalintegrale erstes Gattung, Dissertation, Leipzig, 1883.

ALBANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Pages 11–19
ISSN: 1930-1235; (**2016**)

EIGENVALUES OF COMPOSITION COMBINED WITH DIFFERENTIATION

ELKE WOLF
Mathematical Institute,
University of Paderborn,
D-33095 Paderborn, Germany;
Email: lichte@math.uni-paderborn.de

ABSTRACT. Let ϕ be an analytic self-map of the open unit disk $\mathbb{D}$ in the complex plane. Such a map induces through composition the linear composition operator $C_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$. The eigenvalues and the spectrum of such an operator acting on different spaces of analytic functions have been investigated in several articles, see e.g. [1], [8], [16], [28] and [29]. In this article we continue this line of research by combining the composition operator with the differentiation $D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \to f'$. Then we obtain two linear operators $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto \phi'(f' \circ \phi)$ and $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto f' \circ \phi$. Now, we calculate the eigenvalues of the operators DC_ϕ and $C_\phi D$.

1. INTRODUCTION

Let $H(\mathbb{D})$ denote the class of all analytic functions on the unit disk $\mathbb{D}$ of the complex plane $\mathbb{C}$. In this article we consider an analytic self-map ϕ of $\mathbb{D}$. First, we consider the differentiation operator D given by

$$D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto f'.$$

Then we combine this with the composition operator

$$C_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}), f \mapsto f \circ \phi$$

to obtain the differentiation followed by composition

$$C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto f' \circ \phi$$

and the composition followed by differentiation

$$DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto \phi'(f' \circ \phi).$$

Obviously, the operators $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto f' \circ \phi$ and $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}),\ f \mapsto \phi'(f' \circ \phi)$ are well-defined and bounded. The study of composition operators has quite a long and rich history. Among other reasons this comes from the fact that composition operators link operator theory with complex analysis. A very good introduction to the theory of composition operators is given in the excellent monographs by Shapiro [26] and Cowen and MacCluer [14]. Composition operators have been studied by many authors on various spaces of holomorphic functions, see e.g. [5], [6], [7], [9], [10], [11], [15], [17], [19], [22], [23], [24] and the references therein. Since the literature is growing steadily this can only be a sample of articles. The spectrum of the composition operator C_ϕ acting on various spaces has been determined by several authors, see e.g. the articles

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47B33; Secondary 47B38.

Key words and phrases. composition combined with differentiation; eigenvalues.

[1], [8], [16], [28] and [29]. In this article we continue this line of research by calculating the eigenvalues of the operators $C_\phi D$ and DC_ϕ. To do this we consider analytic self-maps of $\mathbb{D}$ that are not conformal automorphisms and have a fixed point $a \in \mathbb{D}$. For the study of both operators we need to consider the following two cases:

(a) a is an attracting fixed point of ϕ: In this case it turns out that both operators do not have any eigenvalues.

(b) a is a super-attracting fixed point of ϕ: Here both operators also show the same behavior, i.e. in case that $\phi(z) = z^2$ both operators have the eigenvalue 2 and in all the other cases both operators have no eigenvalues.

2. RESULTS

We start this section with the introduction of the setting we are working in. In this article we are mainly interested in analytic self-maps of $\mathbb{D}$ that are not conformal automorphisms of $\mathbb{D}$ and have a fixed point $a \in \mathbb{D}$. We distinguish the following cases:

(1) a is an *attracting* fixed point of ϕ, i.e. $\phi'(a) \neq 0$. Model maps are functions $f(z) = \lambda z$ for $z \in \mathbb{D}$ with $|\lambda| < 1$.
One can change variables analytically in a neighborhood of a and conjugate ϕ to the map $f(z) = \lambda z$ for $\lambda = \phi'(a)$, for details see e.g. [25]. Originally, this was shown by Koenigs in [18]

(2) a is a *super-attracting* fixed point of ϕ, i.e. $\phi'(a) = 0$. In this case model maps are given by $\phi(z) = z^n$, $n \geq 2$. Again we can change variables analytically in a neighborhood of a and conjugate ϕ to the map $\phi(z) = z^n$ for some $n \geq 2$. The proof of this fact goes back to Böttcher [4].

2.1. **Differentiation followed by composition.**

We start with investigating the behavior of the operator

$$C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D}).$$

Then, we have the following:

Theorem 1. *Suppose that ϕ is a holomorphic self-map of $\mathbb{D}$ with fixed point 0. Moreover, we assume that $C_\phi D f = \lambda f$ holds for some $\lambda \in \mathbb{C}$ and a function f of the type*

$$f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} a_l z^l \in H(\mathbb{D}),$$

for some $n \geq 2$. Then, $\lambda = (n-1)\phi'(0)^{n-2}\phi''(0)$.

Proof. Obviously, the assumption yields

$$f'(\phi(z)) = \lambda f(z), \text{ for every } z \in \mathbb{D} \text{ and some } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Since $f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} a_l z^l$ and therefore $f'(z) = \sum_{l=n+1}^{\infty} l a_l z^{l-1}$ we arrive at the following equation

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{f'(\phi(z))}{f(z)} &= \frac{\phi(z)^{n-1}}{z^n} \cdot \frac{n a_n + a_{n+1}\phi(z) + \dots}{a_n + a_{n+1}z + \dots} \\ &= \left(\frac{\phi(z)}{z}\right)^{n-1} \frac{1}{z} \cdot \frac{n a_n + a_{n+1}\phi(z) + \dots}{a_n + a_{n+1}z + \dots}. \end{aligned}$$

Now, letting $z \to 0$ and applying the rule of L'Hôpital we have

$$\lambda = (n-1)\phi'(0)^{n-2}\phi''(0),$$

as desired. $\square$

Next, we study the situation in case that f is either a constant function or a function of the form $f(z) = cz + d$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some constants $c, d \in \mathbb{C}$.

Remark 1. (a) *We assume that $f(z) = c$ for every $z \in \mathbb{D}$, $c \neq 0$, and that the equation $C_\phi Df(z) = \lambda f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ and some $\lambda \in \mathbb{C}$. Obviously this yields $0 = \lambda c$. Since $c \neq 0$ this means that λ must be equal to zero.*

(b) *Now, we suppose that f is a holomorphic function of the form $f(z) = cz + d$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $c, d \in \mathbb{C}$. Moreover let $C_\phi Df(z) = \lambda f(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $\lambda \in \mathbb{C}$. Then $f'(\phi(z)) = \lambda f(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$ is equivalent with $c = \lambda cz + \lambda d$. Hence λ must be equal to zero.*

Corollary 1. *Operators $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ induced by a rotation ϕ, i.e. by a map ϕ of the form $\phi(z) = e^{i\Theta\pi}z$, $z \in \mathbb{D}$, where $\Theta \in [0, 2)$ is fixed, do not have any eigenvalues.*

In the following we will determine the eigenvalues of the operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ induced by a symbol of the form $\phi(z) = \nu z$ for every $z \in \mathbb{D}$, where $\nu \in \mathbb{C}$, $|\nu| < 1$, or a symbol of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. We start with the first case.

Corollary 2. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = \nu z$ for some $\nu \in \mathbb{C}$ with $|\nu| < 1$. Then the induced operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ has no eigenvalues.*

We can prove this corollary in another way by using a power series argument, which we will do below.

Theorem 2. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = \nu z$, for every $z \in \mathbb{D}$, and some $\nu \in \mathbb{C}$ with $|\nu| < 1$. Then the operator*

$$C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$$

has no eigenvalues.

Proof. We show this by contradiction and assume that we can find an eigenvalue $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Then there exists an eigenfunction f given by

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ for every } z \in \mathbb{D},$$

where $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, are suitable coefficients. Now, we obtain the following derivative

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

and

$$[C_\phi D](f(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \nu^{n-1} z^{n-1}.$$

Hence, $[C_\phi D](f(z)) = \mu f(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$ holds if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \nu^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu a_n z^n.$$

Now, we compare the coefficients. If $a_0 = 0$, then we obtain successively, that $a_n = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$. In this case we are done. Thus, without loss of generality, we may assume that $a_0 \neq 0$. Next, we have that

$$a_1 = \mu a_0 \text{ which is equivalent with } \mu = \frac{a_1}{a_0}.$$

Moreover, we obtain $2a_2\nu = \mu a_1 = \mu^2 a_0$ and hence

$$a_2 = \frac{\mu a_1}{2\nu} = \frac{\mu^2 a_0}{2\nu}.$$

For every $n \geq 3$ we have the following formula

$$a_n = \frac{\mu^n a_0}{n!\nu^{n(n-2)-\sum_{k=2}^{n-2}(n-k)}}. \tag{2.1}$$

We show this inductively. For $n = 3$ a comparison of coefficients yields

$$3a_3\nu^2 = \mu a_2 = \frac{\mu^2 a_1}{2\nu} \iff a_3 = \frac{\mu^2 a_1}{6\nu^3} = \frac{\mu^3 a_0}{6\nu^3}.$$

Next, we assume that (2.1) is satisfied for some $n \in \mathbb{N}$. Again, by comparison of coefficients we get

$$(n+1)a_{n+1}\nu^n = \mu a_n = \frac{\mu^{n+1} a_0}{n!\nu^{n(n-2)-\sum_{k=2}^{n-2}(n-k)}}$$

is equivalent to

$$a_{n+1} = \frac{\mu^{n+1} a_0}{(n+1)!\nu^{(n-2)n-\sum_{k=2}^{n-2}(n-k)+n}}.$$

Easy calculations show

$$n(n-2) - \sum_{k=2}^{n-2}(n-k) + n = (n-1)(n+1) - \sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k)$$

is equivalent to $-n+1 = -n+1$. Hence, the claim follows.

Next, we compute the radius of convergence of the power series generated by the coefficients we got above and arrive at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mu}{(n+1)\nu^n}\right| = \infty,$$

since $|\nu| < 1$. Hence the radius is 0 and f is not a holomorphic function in $\mathbb{D}$ which is a contradiction. Finally, the claim follows. □

Next, we turn our attention to symbols of the form $\phi(z) = z^n$, for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. First, again we obtain a corollary of Theorem 1 and Remark 1.

Corollary 3. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. If $n = 2$, only $\lambda = 2$ may be an eigenvalue of the operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$. In $n \geq 3$ the operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ does not have any eigenvalues.*

Using the same methods as in Theorem 2 we arrive at:

Theorem 3. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ with $n \geq 2$. Then, in case of $n = 2$, $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ has the unique eigenvalue $\mu = 2$, while for $n \geq 3$ the operator has no eigenvalues.*

Proof. First, we treat the case $n = 2$. Obviously, with the function $f(z) = z^2$, we get

$$[C_\phi D](f(z)) = 2z^2 = 2f(z) \text{ for every } z \in \mathbb{D}.$$

To show that μ is unique, we assume that there is another eigenvalue ν. In that case there must be an eigenfunction $f \in H(\mathbb{D})$ which can be written as

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^n \text{ with some coefficients } a_k \in \mathbb{C}.$$

Hence

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \quad \text{and} \quad f'(\phi(z)) = f'(z^2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{2k-2}.$$

Then $[C_\phi D](f(z)) = \nu f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ if and only if

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{2k-2} = \nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

which is equivalent to

$$a_1 + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^4 + 4a_4 z^6 + \cdots = \nu a_0 + \nu a_1 z + \nu a_2 z^2 + \ldots$$

Then a comparison of coefficients yields $a_1 = \nu a_0$, $a_1 = 0$ and hence $a_0 = 0$, $2a_2 = \nu a_2$ and $a_k = 0$ for every $k \geq 3$. Thus, a_2 either is 0 but then $f \equiv 0$ on $\mathbb{D}$ which is a contradiction or $\nu = 2$. Hence the claim follows. Next, we consider the case $n \geq 3$. Again we show this indirectly and assume that there is an eigenvalue $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Then, since, the eigenfunction f must be an element of $H(\mathbb{D})$ we get that

$$[C_\phi D](f(z)) = \mu f(z) \text{ for every } z \in \mathbb{D}$$

is equivalent to

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{nk-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu a_k z^k \text{ for every } z \in \mathbb{D}.$$

But this is equivalent to

$$a_1 + 2a_2 z^n + 3a_3 z^{2n} + 4a_4 z^{3n} + \cdots = \mu a_0 + \mu a_1 z + \mu a_2 z^2 + \ldots$$

Hence a comparison of coefficients yields that $a_k = 0$ for every $k \in \mathbb{N}_0$. Thus, the claim follows. $\square$

2.2. **Composition followed by differentiation.** In this section we study composition followed by differentiation $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$. We use the same methods and ideas as in the previous section but for the reader's benefit we give the full proofs.

Theorem 4. *Suppose that ϕ is a holomorphic self-map of $\mathbb{D}$ with fixed point 0. Moreover, we assume that $DC_\phi f = \lambda f$ holds for some $\lambda \in \mathbb{C}$ and a function f of the type*

$$f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} a_l z^l \in H(\mathbb{D}),$$

with $n \geq 2$. Then, $\lambda = n\phi'(0)^{n-1}\phi''(0)$.

Proof. By assumption we have that $f'(\phi(z))\phi'(z) = \lambda f(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $\lambda \in \mathbb{C}$. Since $f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} a_l z^l$ and therefore $f'(z) = \sum_{l=n}^{\infty} l a_l z^{l-1}$ we arrive at the following equation

$$\lambda = \frac{f'(\phi(z))\phi'(z)}{f(z)} = \phi'(z)\frac{\phi(z)^{n-1}}{z^n}\frac{na_n + a_{n+1}\phi(z) + \ldots}{a_n + a_{n+1}z + \ldots} =$$
$$= \phi'(z)\left(\frac{\phi(z)}{z}\right)^{n-1}\frac{1}{z}\frac{na_n + a_{n+1}\phi(z) + \ldots}{a_n + a_{n+1}z + \ldots}$$

Now, letting $z \to 0$ we get

$$\lambda = n\phi'(0)^{n-1}\phi''(0),$$

as desired. $\square$

It remains to study the case when f is either a constant function or a function of the form $f(z) = cz + d$ with $c, d \in \mathbb{C}$.

Remark 2. (1) *We assume that $f(z) = c$ for every $z \in \mathbb{D}$, $c \neq 0$ and that the equation $DC_\phi f(z) = \lambda f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ and some $\lambda \in \mathbb{C}$. Then, obviously, $\phi'(z)f'(\phi(z)) = \lambda f(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$ is equivalent with $0 = \lambda c$. Since $c \neq 0$, λ must be equal to zero.*

(2) *Next, we suppose that the equation $DC_\phi f(z) = \lambda f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$, some $\lambda \in \mathbb{C}$ and a function $f(z) = cz + d$ for every $z \in \mathbb{D}$, $c, d \in \mathbb{C}$. Then $\phi'(z)f'(\phi(z)) = \lambda f(z)$ holds if and only if $\phi'(z)c = \lambda(cz + d) = \lambda cz + \lambda d$. But this is satisfied if and only if $\phi'(z) = \lambda z + \frac{\lambda}{c} d$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$. Hence, this is always fulfilled if ϕ is given by $\phi(z) = \lambda z^2 + \frac{\lambda}{c} dz + k$ with some constant $k \in \mathbb{C}$.*

Corollary 4. *Operators $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ induced by a rotation ϕ do not have any eigenvalues.*

In the following we will determine the eigenvalues of the operator $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ induced by a symbol of the form $\phi(z) = \nu z$ for every $z \in \mathbb{D}$, where $\nu \in \mathbb{C}$, $|\nu| < 1$, or a symbol of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. We start with the first case.

Corollary 5. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = \nu z$ for some $\nu \in \mathbb{C}$ with $|\nu| < 1$. Then the induced operator $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ has no eigenvalues.*

We can prove this corollary in another way by using a power series argument, which we will do below.

Theorem 5. *Let ϕ be a holomorphic self-map of $\mathbb{D}$ that has an attracting fixed point $a \in \mathbb{D}$, i.e. we assume ϕ to be of the form $\phi(z) = \nu z$ for some $\nu \in \mathbb{C}$ with $|\nu| < 1$ and every $z \in \mathbb{D}$. Then the operator $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ has no eigenvalues.*

Proof. We show this indirectly and assume to the contrary that we can find an eigenvalue $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Then the eigenfunction can be written in the following way

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ with suitable coefficients } a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Now, the derivative is given by

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \text{ and}$$

$$[DC_\phi](f(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \nu^n z^{n-1} = \phi'(z)f'(\phi(z)) = \nu \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \nu^{n-1} z^{n-1}.$$

This yields that the equation $[DC_\phi](f(z)) = \mu f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \nu^n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu a_n z^n.$$

If $a_0 = 0$, we obtain successively that $a_n = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$. In this case we are done. Thus, w.l.o.g. we may assume that $a_0 \neq 0$. Next, we have that

$$a_1 \nu = \mu a_0 \Longleftrightarrow a_1 = \frac{\mu}{\nu} a_0.$$

Furthermore another comparison of coefficients yields

$$2a_2\nu^2 = \mu a_1 = \frac{\mu}{\nu}a_0 \Longleftrightarrow a_2 = \frac{\mu^2}{2\nu^3}a_0.$$

For every $n \geq 3$ the following formula holds

$$a_n = \frac{\mu^n a_0}{n!\nu^{(n+1)(n-1)-\sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k)}}. \tag{2.2}$$

We prove this formula by induction. In case $n = 3$ the comparison of coefficients yields

$$3a_3\nu^3 = \mu a_2 = \frac{\mu^3}{2\nu^3}a_0 \Longleftrightarrow a_3 = \frac{\mu^3}{6\nu^6}a_0.$$

Now, we assume that (2.2) holds for some $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. We obtain

$$(n+1)a_{n+1}\nu^{n+1} = \mu a_n = \frac{\mu^{n+1}}{n!\nu^{(n+1)(n-1)-\sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k)}}a_0,$$

which means that

$$a_{n+1} = \frac{\mu^{n+1}}{(n+1)!\nu^{(n+1)(n-1)-\sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k)+n+1}}.$$

Now, easy calculations show

$$\begin{aligned}(n+1)(n-1) - \sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k) + n + 1 = (n+2)n - \sum_{k=2}^{n}(n+2-k)\\ \Longleftrightarrow -n = -n\end{aligned}$$

and the claim follows. □

Next, we turn our attention to symbols of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. First, again we obtain a corollary of Theorem 4 and Remark 2.

Corollary 6. *Let ϕ be of the form $\phi(z) = z^n$ for every $z \in \mathbb{D}$ and some $n \geq 2$. If $n = 2$, only $\lambda = 2$ may be an eigenvalue of the operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$. In $n \geq 3$ the operator $C_\phi D : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ does not have any eigenvalues.*

Again, we can prove this using another method involving power series.

Theorem 6. *Let ϕ be an analytic self-map of $\mathbb{D}$ that is not a conformal automorphism and has a super-attracting fixed point $a \in \mathbb{D}$, i.e. we assume ϕ to be of type $\phi(z) = z^n$, $n \geq 2$. Then, in case $n = 2$, $DC_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ has the unique eigenvalue $\mu = 2$, while for $n \geq 3$, the operator has no eigenvalues.*

Proof. First, we treat the case $n = 2$. Obviously, with the function $f(z) = z$ we have that

$$[DC_\phi](f(z)) = 2z = 2f(z) \text{ for every } z \in \mathbb{D}:$$

Hence $\mu = 2$ is an eigenvalue. To show that it is the only one, we assume to the contrary that there is another eigenvalue ν. In this case we can find an eigenfunction $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ for every $z \in \mathbb{D}$. Then the derivative can be written as

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1}.$$

This yields

$$f'(z^2) = f'(\phi(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{2k-2}$$

and thus we obtain

$$\phi'(z)f'(\phi(z)) = 2zf'(z^2) = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{2k-1}.$$

Then $[DC_\phi](f(z)) = \nu f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ if and only if

$$2\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{2k-1} = \nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Hence a comparison of coefficients yields that either $\nu = 0$ or $\nu = 2$ and we are done. Next, we consider the case $n \geq 3$. Again, we show this indirectly and assume that there is an eigenvalue $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Then, since the eigenfunction f must be an element of $H(\mathbb{D})$, $[DC_\phi](f(z)) = \mu f(z)$ holds for every $z \in \mathbb{D}$ if and only if

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k n z^{nk-1} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

A comparison of coefficients yields that $a_k = 0$ for every $k \in \mathbb{N}_0$. Finally, the claim follows. $\square$

REFERENCES

[1] R. Aron, M. Lindström, Spectra of weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, *Israel J. Math.* **141** (2004), 263-276.

[2] K.D. Bierstedt, J. Bonet, A. Galbis, Weighted spaces of holomorphic functions on bounded domains, *Michigan Math. J.* **40** (1993), 271-297.

[3] K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Taskinen, Associated weights and spaces of holomorphic functions, *Studia Math.* **127** (1998), 137-168.

[4] L.E. Böttcher, The principal laws of convergence of iterates and their applications to analysis (Russian), *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch.* **14** (1904), 155-234.

[5] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström, Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), no. 2, 139-148.

[6] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström, Weakly compact composition operators on analytic vector-valued function spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **26** (2001), 233-248.

[7] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström, J. Taskinen, Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions, *J. Austral. Math. Soc. (Serie A)* **64** (1998), 101-118.

[8] J. Bonet, P. Galindo, M. Lindström, Spectra and essential spectral radii of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, *J. Math. Anal. Appl.* **340** (2008), no. 2, 884-891.

[9] J. Bonet, M. Lindström, E. Wolf, Differences of composition operators between weighted Banach spaces of holomorphic functions, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* **84** (2008), 8-20.

[10] J. Bonet, M. Lindström, E. Wolf, Isometric weighted composition operators on weighted Banach spaces of type H^∞, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 12, 4267-4273.

[11] J. Bonet, M. Lindström, E. Wolf, Topological structure of the set of weighted composition operators on weighted Bergman spaces of infinite order, *Integral Equations Operator Theory* **65** (2009), no. 2, 195-210.

[12] P. Domański, M. Lindström, Sets of interpolation and sampling for weighted Banach spaces of holomorphic functions, *Ann. Polon. Math.* **79**(2002), no. 3, 233?264.

[13] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, 100. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[14] C. Cowen, B. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Baca Raton, 1995.

[15] Ž. Čučković, R. Zhao, Weighted composition operators on the Bergman space, *J. London Math. Soc.* (2) **70** (2004), no. 2, 499-511.

[16] P. Galindo, T. Gamelin, M. Lindström, Spectra of composition operators on algebras of analytic functions on Banach spaces, *Proc. Roy. Soc. Eding. Sect. A.* **139** (2009), no. 1, 107-121.

[17] T. Hosokawa, K. Izuchi, S. Ohno, Topological structure of the space of weighted composition operators on H^∞, *Integral Equations Operator Theory* **53** (2005), no. 4, 509-526.

[18] G. Koenigs, Recherches sur les intégrals de certaines équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3rd series)* **1** (1884), Supplément 3-41.

[19] M. Lindström, E. Wolf, Essential norm of the difference of weighted composition operators, *Monatshefte Math.* **153** (2008), no. 2, 133-143.

[20] W. Lusky, On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, *J. London Math. Soc.* **51** (1995), 309-320.

[21] W. Lusky, On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, *Studia Math.* **175** (2006), no. 1, 19-45.

[22] B. MacCluer, S. Ohno, R.Zhao, Topological structure of the space of composition operators on H^∞, *Integral Equations Operator Theory* **40** (2001), no. 4, 481-494.

[23] S. Ohno, Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space, *Taiwanese J. Math.* **5** (2001), no. 3, 555-563.

[24] S. Ohno, K. Stroethoff, R. Zhao, Weighted composition operators between Bloch type spaces, *Rocky Mountain J. Math.* **33** (2003), no. 1, 191-215

[25] P. Poggi-Corradini, Iteration of analytic self-maps of the disk: an overview, *Cubo Mathematical Journal* **6** (2004), no. 1, 73-80.

[26] J.H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, 1993.

[27] E. Wolf, On weighted composition operators acting between weighted Bergman spaces of infinite order and weighted Bloch type spaces, *to appear in Ann. Polon. Math.*

[28] E. Wolf, A note on spectra of weighted composition operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2) **31** (2008), no. 2, 145-152.

[29] E. Wolf, Eigenvalues and spectra of composition operators acting on weighted Bergman spaces of infinite order on the unit polydisk, *Mediterr. J. Math.* **7** (2010), no. 4, 565-572.

ALBANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Pages 21–36
ISSN: 1930-1235; (**2016**)

A CHARACTERIZATION OF SOME LAGUERRE-HAHN ORTHOGONAL POLYNOMIALS OF CLASS ONE

MOHAMED ZAATRA
Institut Suprieur des Sciences et Techniques des Eaux de Gabés
Campus universitaire,
Gabés 6072, Tunisia.
Email: medzaatra@yahoo.fr

ABSTRACT. In this present work, we give an characterization of quasi-symmetric Laguerre-Hahn orthogonal polynomial sequences of class one through the study of the differential functional equation fulfilled by its corresponding regular linear form.

1. INTRODUCTION

The study of the Laguerre-Hahn polynomial sequences is one of the interesting popular problems in the area of orthogonal polynomials. Since the system corresponding to the problem of determining all the Laguerre-Hahn linear forms of class $s \geq 1$ becomes non-linear, the problem was only solved when $s = 1$ and for the symmetric case [3]. Thus, several authors use different processes in order to obtain Laguerre-Hahn linear forms of class $s \geq 1$. For instance, we can mention the adjunction of either a Dirac mass or its derivative to Laguerre-Hahn linear forms [2], [9], [10], the product and the division of a linear form by a polynomial [8], [15]. So, some examples of Laguerre-Hahn linear forms are given in terms of classical ones. But, they are just few examples. The aim of this work is to study a family of quasi-symmetric Laguerre-Hahn orthogonal polynomial sequences $\{W_n\}_{n\geq 0}$ of class $s_w = 1$ verifying the following three-term recurrence relation:

$$
\begin{aligned}
&W_{n+2}(x) = (x - (-1)^{n+1})W_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}W_n(x)\ , \quad n \geq 0\ ,\\
&W_1(x) = x - 1\ , \qquad W_0(x) = 1\ ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

through the study of the Pearson differential functional equation satisfied by its corresponding regular linear form w and using the framework of the quadratic decomposition.

In section 2, the preliminaries results as well as the notations in use throughout the text are given. One of the properties of the linear form w indicates that there is a relationship between w and a symmetric regular linear form ϑ. In section 3, we deal with the Laguerre-Hahn character of the symmetric linear form ϑ, which allows us to characterize the structure of the polynomial elements of the differential functional equation satisfied by the linear form w. As an exploitation of these results, we treat in detail all Laguerre-Hahn polynomial sequences of class $s_w = 1$ satisfying (1). The obtained linear forms are in connection of modified linear forms of the Laguerre-Hahn linear forms of class zero

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 33C45; Secondary 42C05 .
Key words and phrases. orthogonal polynomial sequences; Laguerre-Hahn forms; symmetric sequences; quadratic decomposition.

analogous to the classical Jacobi's one. The regularity conditions and the recurrence coefficients $\gamma_{n+1},\ n \geq 0$ are given.

2. PRELIMINARIES

Let $\mathcal{P}$ be the vector space of polynomials with complex coefficients and let $\mathcal{P}'$ be its dual. The elements of $\mathcal{P}'$ will be called either linear form or linear functional. We denote by $\langle v, f\rangle$ the action of $v \in \mathcal{P}'$ on $f \in \mathcal{P}$. For $n \geq 0$, $(v)_n = \langle v, x^n\rangle$ are the moments of v. In particular a linear form is called symmetric if all of its moments of odd order are zero [7].

We define in the space $\mathcal{P}'$ the derivative $v^{'}$ of the form v by $\langle v', f\rangle := -\langle v, f'\rangle$, the left multiplication by a polynomial hv by $\langle hv, f\rangle := \langle v, hf\rangle$, the shifted form $h_a v$, $\tau_b v$ by $\langle h_a v, f\rangle := \langle v, h_a f\rangle = \langle v, f(ax)\rangle$, $\langle \tau_b v, f\rangle := \langle v, \tau_{-b} f\rangle = \langle v, f(x+b)\rangle$, the Dirac form at origin δ_0 by $\langle \delta_0, f\rangle := f(0)$ and the inverse multiplication by a polynomial of degree one $(x-c)^{-1}v$, through

$$\big\langle (x-c)^{-1}v, f\big\rangle := \langle v, \theta_c f\rangle \text{ with } \big(\theta_c f\big)(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c},\ f \in \mathcal{P}.$$

We also denote $(f(\xi))(x) = f(x)$ for the dummy variable ξ.

It is straightforward to prove that for $v \in \mathcal{P}'$ and $f \in \mathcal{P}$, we have [13]

$$\begin{aligned} x^{-1}(xv) &= v - (v)_0\delta_0\ , \\ x(x^{-1}v) &= v\ , \end{aligned} \tag{2}$$

$$f(x^{-1}v) = x^{-1}(fv) + \langle v, \theta_0 f\rangle \delta_0\ . \tag{3}$$

We also define the right-multiplication of a form v by a polynomial h with

$$(vh)(x) := \left\langle v, \frac{xh(x) - \xi h(\xi)}{x-\xi}\right\rangle\ . \tag{4}$$

Next, it is possible to define the product of two forms through

$$\langle uv, f\rangle := \langle u, vf\rangle\ ,\quad u, v \in \mathcal{P}',\ f \in \mathcal{P}.$$

For $f \in \mathcal{P}$ and $v \in \mathcal{P}'$ we have the following result [1]

$$f^2v^2 = (fv)^2 + 2xf(x)(v\theta_0 f)(x)v\ . \tag{5}$$

Let us define the operator $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ by $(\sigma f)(x) := f(x^2)$ for all $f \in \mathcal{P}$. By transposition we define σv from the following:

$$\langle \sigma v, f\rangle = \langle v, \sigma f\rangle.$$

Thus we have the well-known formulas [2], [5], [12],

$$\begin{aligned} \sigma\Big(f(x^2)v\Big) &= f(x)\sigma v\ , \\ \sigma v^{'} &= 2\Big(\sigma(xv)\Big)^{'}\ , \\ \sigma v^2 &= (\sigma v)^2 + x^{-1}\Big(\sigma(xv)\Big)^2\ , \\ \sigma(x^{-1}v^2) &= 2x^{-1}(\sigma v)\sigma(xv)\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Let us recall that a form w is said to be regular (quasi-definite) if there exists a sequence $\{W_n\}_{n\geq 0}$ of polynomials with $\deg W_n = n,\ n \geq 0$, such that

$$\langle w, W_nW_m\rangle = r_n\delta_{n,m}\quad ,\quad r_n \neq 0,\quad n \geq 0\ .$$

We can always assume that each W_n is monic, i.e. $W_n(x) = x^n +$ lower degree terms. Then the sequence $\{W_n\}_{n\geq 0}$ is said to be orthogonal with respect to w (monic orthogonal polynomial sequence (MOPS) in short). It is a very well-known fact that the sequence $\{W_n\}_{n\geq 0}$ satisfies a three-term recurrence relation (see, for instance, the monograph by Chihara [7]

$$(7) \qquad \begin{aligned} &W_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})W_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}W_n(x) \ , \quad n \geq 0 \ , \\ &W_1(x) = x - \beta_0 \ , \qquad W_0(x) = 1 \ . \end{aligned}$$

with $\big(\beta_n, \gamma_{n+1}\big) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\quad n \geq 0$. By convention we set $\gamma_0 = (w)_0$. The form w is said to be normalized if $(w)_0 = 1$. In this paper, we suppose that any form will be normalized.

Here, we will be considering a MOPS $\{W_n\}_{n\geq 0}$ with respect to the form w satisfying a three-term recurrence relation (7) with

$$(8) \qquad \beta_n = (-1)^n \ , \ n \geq 0 \ .$$

In this case, we have:

Lemma 1. [6], [12] *Let $\{W_n\}_{n\geq 0}$ be a MOPS with respect to the form w. The following statements are equivalents:*

(a) $\{W_n\}_{n\geq 0}$ satisfies (7)-(8).

(b) $(w)_{2n+1} = (w)_{2n},\ n \geq 0$.

(c) The sequence $\{W_n\}_{n\geq 0}$ has the following quadratic decomposition

$$W_{2n}(x) = P_n(x^2) \ , \quad W_{2n+1}(x) = (x-1)R_n(x^2) \ , \ n \geq 0 \ ,$$

where the sequences $\{P_n\}_{n\geq 0}$ and $\{R_n\}_{n\geq 0}$ are respectively orthogonal with respect to $u = \sigma(w)$ and $v = \gamma_1^{-1}(x-1)\sigma(w)$. Moreover, their recurrence elements are respectively, given by (for all $n \geq 0$)

$$(9) \qquad \begin{cases} \beta_0^P = \gamma_1 + 1 \ , \\ \beta_{n+1}^P = \gamma_{2n+2} + \gamma_{2n+3} + 1 \ , \\ \gamma_{n+1}^P = \gamma_{2n+1}\gamma_{2n+2} \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0^R = \gamma_1 + \gamma_2 + 1 \ , \\ \beta_{n+1}^R = \gamma_{2n+3} + \gamma_{2n+4} + 1 \ , \\ \gamma_{n+1}^R = \gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3} \ . \end{cases}$$

For more details about the quadratic decomposition of MOPS, see [12]. According to the statement (b) of Lemma 1, the form $(x-1)w$ is antisymmetric, that is to say $((x-1)w)_{2n} = 0,\ n \geq 0$. Equivalently,

$$(10) \qquad \sigma(xw) = \sigma(w) \ .$$

Let now λ be a non-zero complex number and ϑ be the linear form such that

$$(11) \qquad \lambda x\vartheta = (x-1)w \ .$$

Equivalently, from (2)

$$(12) \qquad \vartheta = \frac{1}{\lambda}(w - x^{-1}w) + (1 - \frac{1}{\lambda})\delta_0 \ .$$

Applying the operator σ in (11) and taking into account of (10), we get $\sigma(x\vartheta) = 0$. Hence ϑ is a symmetric form. Then, ϑ is regular if and only if $\sigma(\vartheta)$ and $x\sigma(\vartheta)$ are regular [12]. Now, multiplying (11) by x and applying the operator σ, we get $\lambda x\sigma(\vartheta) = \gamma_1 v$. That is

$\lambda x\sigma(\vartheta)$ is regular since $\lambda \neq 0$ and $\gamma_1 v = (x-1)\sigma(w)$ is regular, see [12]. So, according to [14], the form ϑ is regular if and only if $\lambda \neq \lambda_n$ where λ_n , $n \geq 0$ is defined by

$$\lambda_n = -\gamma_1 \frac{R_{n-1}^{(1)}(0)}{R_n(0)} \ , \ n \geq 0 \ ,$$

with [8]

$$R_n^{(1)}(x) = \left\langle v, \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(y)}{x-y} \right\rangle \ , \ n \geq 0 \ , \ R_{-1}^{(1)}(x) = 0 \ .$$

Proposition 1. [17] *There exists a non-zero constant λ such that the form ϑ given by (11) is regular.*

Now, let us recall some features about the Laguerre-Hahn character [2], [?AM)], [4].

Definition 1. *A linear form w is said to be Laguerre-Hahn when it is regular and there exist three polynomials Φ, a monic polynomial, Ψ and B, $\deg(\Phi) = t \geq 0$, $\deg(\Psi) = p \geq 1$, $\deg(B) = r \geq 0$, such that*

$$(\Phi w)' + \Psi w + B(x^{-1}w^2) = 0 \ . \tag{13}$$

The corresponding MOPS $\{W_n\}_{n\geq 0}$ is said to be Laguerre-Hahn.

Remark 1. *When $B = 0$, the form w is semiclassical.*

Proposition 2. *The Laguerre-Hahn linear form w satisfying (13) is said to be of class $s_w = \max(t-2, r-2, p-1)$ if and only if the following condition is satisfied*

$$\prod_{c \in \mathcal{Z}_\Phi} \Big(|\Phi'(c) + \Psi(c)| + |B(c)| + |\langle w, \theta_c^2 \Phi + \theta_c \Psi + w\theta_0\theta_c B \rangle| \Big) \neq 0 \ , \tag{14}$$

where $\mathcal{Z}_\Phi$ is the set of zeros of Φ.

The Laguerre-Hahn character of a linear form is kept by shifting. Indeed, the shifted form $\tilde{w} = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})w$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{C}$ is also Laguerre-Hahn having the same class as that w and fulfilling the equation

$$(\tilde{\Phi}\tilde{w})' + \tilde{\Psi}\tilde{w} + \tilde{B}(x^{-1}\tilde{w}^2) = 0 \ ,$$

where

$$\tilde{\Phi}(x) = a^{-t}\Phi(ax+b) \ , \ \tilde{\Psi}(x) = a^{1-t}\Psi(ax+b) \ , \ \tilde{B}(x) = a^{-t}B(ax+b) \ .$$

The sequence $\{\tilde{W}_n\}_{n\geq 0}$, where $\tilde{W}_n(x) = a^{-n}W_n(ax+b)$, $n \geq 0$ is orthogonal with respect to $\tilde{w}$. The recurrence coefficients are given by

$$\tilde{\beta}_n = \frac{\beta_n - b}{a} \ , \quad \tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{a^2} \ , \ n \geq 0 \ .$$

The next result [3] characterizes the elements of the functional equation satisfied by any symmetric Laguerre-Hahn linear form.

Proposition 3. *Let w be a symmetric Laguerre-Hahn linear form of class s_w satisfying (13). The following statements hold.*

(i) When s_w is odd then Φ and B are odd and Ψ is even.

(ii) When s_w is even then Φ and B are even and Ψ is odd.

3. MAIN CHARACTERIZATION PROPERTIES

Let w be a Laguerre-Hahn linear form of class $s_w = 1$ satisfying (13) which its corresponding MOPS $\{W_n\}_{n\geq 0}$ fulfills (8).

Our aim is to characterize the structure of the polynomial elements of the functional equation (13) satisfied by the linear form w. This is possible through the study of the Laguerre-Hahn character of the form ϑ.

3.1. Class and functional equation of the form ϑ. The form ϑ define by (13) when it is regular, is also Laguerre-Hahn of class s_ϑ such that $s_\vartheta \leq s_w + 2$ and satisfying the functional equation [16]

$$(E\vartheta)^{'} + F\vartheta + G(x^{-1}\vartheta^2) = 0\ , \tag{15}$$

with

$$\begin{aligned} &E(x) = x(x-1)\Phi(x)\ , \quad G(x) = \lambda x^2 B(x)\ , \\ &F(x) = x\Big((x-1)\Psi(x) + 2(1-\lambda)B(x) - 2\Phi(x)\Big)\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Denoting by λ_{-1} and λ_{-2} the solutions of the equation

$$B(0)\lambda^2 + (\Phi^{'} + \Psi - 2B)(0)\lambda + B(0) - \Phi^{'}(0) - \Psi(0) - \langle w, \theta_0^2\Phi + \theta_0\Psi + w\theta_0^2 B\rangle = 0$$

if $B(0) \neq 0$ and $\lambda_{-1} = \lambda_{-2} = \frac{\langle w, \theta_0^2\Phi + \theta_0\Psi + w\theta_0^2 B\rangle}{\Phi^{'}(0) + \Psi(0)} + 1$ otherwise.

Theorem 1. *Let λ be a complex number such that $\lambda \neq \lambda_n,\ n \geq -2$. Then, the linear form ϑ is Laguerre-Hahn of class s_ϑ satisfying*

$$(\tilde{E}\vartheta)^{'} + \tilde{F}\vartheta + \tilde{G}(x^{-1}\vartheta^2) = 0\ .$$

Moreover,

(a) If $(\Phi(1), B(1)) \neq (0,0)$, then

$$\tilde{E}(x) = E(x)\ , \quad \tilde{F}(x) = F(x)\ , \quad \tilde{G}(x) = G(x)\ ,$$

and $s_\vartheta = 3$.

(b) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$ and $(\Psi(1), B^{'}(1)) \neq (0,0)$, then

$$\begin{aligned} &\tilde{E}(x) = x\Phi(x)\ , \quad \tilde{G}(x) = \lambda x^2(\theta_1 B)(x)\ , \\ &\tilde{F}(x) = x\Big(\Psi + 2(1-\lambda)(\theta_1 B) - (\theta_1\Phi)\Big)(x)\ , \end{aligned}$$

and $s_\vartheta = 2$.

(c) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$ and $(\Psi(1), B^{'}(1)) = (0,0)$, then

$$\begin{aligned} &\tilde{E}(x) = x(\theta_1\Phi)(x)\ , \quad \tilde{G}(x) = \lambda x^2(\theta_1^2 B)(x)\ , \\ &\tilde{F}(x) = x\Big((\theta_1\Psi) + 2(1-\lambda)(\theta_1^2 B)\Big)(x)\ , \end{aligned}$$

and $s_\vartheta = 1$.

For the proof, we need the following lemma.

Lemma 2. *(i) For all root c of Φ, we have*

$$\begin{aligned} \langle \vartheta, \theta_c^2 E + \theta_c F + \vartheta\theta_0\theta_c G\rangle = &\ \tfrac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w, \theta_c^2\Phi + \theta_c\Psi + w\theta_0\theta_c B\rangle \\ &+ (1-\tfrac{1}{\lambda})\Big((c-1)(\Phi^{'} + \Psi)(c) + (1-\lambda)B(c)\Big)\ , \end{aligned} \tag{17}$$

$$E^{'}(c) + F(c) = c(c-1)\big(\Phi^{'} + \Psi\big)(c)\ , \quad G(c) = \lambda c^2 B(c)\ . \tag{18}$$

(ii) For any $\lambda \neq \lambda_n,\ n \geq -2$, the class of the linear form ϑ depends only the zero $x = 1$.

Proof. (i) Let c be a root of Φ. Then we can write

$$E(x) = x(x-1)(x-c)\Phi_c(x)\ , \quad \Phi_c(x) = (\theta_c\Phi)(x)\ . \tag{19}$$

Using the definition of the operator θ_c, it is easy to prove that, for $f\ , g \in \mathcal{P}$, we have

$$\Big(\theta_c(fg)\Big)(x) = \Big(\theta_c f\Big)(x)g(x) + f(c)\Big(\theta_c g\Big)(x)\ . \tag{20}$$

So, from (12) and (19), we have

$$\langle \vartheta, \theta_c^2 E\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle w, \theta_c\Big(\xi(\xi-1)\Phi_c\Big)(x)\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle w, \theta_c\Big((\xi-1)\Phi_c\Big)(x)\rangle + (1-\frac{1}{\lambda})(c-1)\Phi^{'}(c)\ .$$

Taking $f(x) = x(x-1)$ and $g(x) = \Phi_c(x)$ in (20), we obtain

$$\langle w, \theta_c\Big(\xi(\xi-1)\Phi_c\Big)(x)\rangle = \langle w, (x+c-1)\Phi_c(x)\rangle + c(c-1)\langle w, \theta_c^2\Phi\rangle\ .$$

Replacing $f(x) = x-1$ and $g(x) = \Phi_c(x)$ in (20), we deduce

$$\langle w, \theta_c\Big((\xi-1)\Phi_c\Big)(x)\rangle = \langle w, \Phi_c\rangle + (c-1)\langle w, \theta_c^2\Phi\rangle\ .$$

Therefore,

$$\langle \vartheta, \theta_c^2 E\rangle = \frac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w, \theta_c^2\Phi\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle w, (x+c-2)\Phi_c(x)\rangle + (1-\frac{1}{\lambda})(c-1)\Phi^{'}(c)\ . \tag{21}$$

Proceeding as in (21), we can easily prove that

$$\begin{aligned}\langle \vartheta, \theta_c F\rangle &= \tfrac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w, \theta_c\Psi\rangle + \tfrac{1}{\lambda}\langle w, (x+c-2)\Psi\rangle + 2(\tfrac{1}{\lambda}-1)\langle w, B\rangle\\ &\quad +2(\tfrac{1}{\lambda}-1)(c-1)\langle w, \theta_c B\rangle - \tfrac{2}{\lambda}\langle w, (x-1)\Phi_c\rangle\\ &\quad +(1-\tfrac{1}{\lambda})\Big((c-1)\Psi(c) + 2(1-\lambda)B(c)\Big)\ .\end{aligned} \tag{22}$$

On the other hand, from (12), we obtain

$$\begin{aligned}\langle \vartheta^2, \theta_0\theta_c G\rangle &= \tfrac{1}{\lambda^2}\langle w^2 + x^{-2}w^2 - 2x^{-1}w^2, \theta_0\theta_c G\rangle + \tfrac{2}{\lambda}(1-\tfrac{1}{\lambda})\langle w - x^{-1}w, \theta_0\theta_c G\rangle\\ &\quad + \lambda(1-\tfrac{1}{\lambda})^2 B(c).\end{aligned}$$

By applying the same process as we did to obtain (21), we get after some straightforward calculations

$$\begin{aligned}\langle \vartheta^2, \theta_0\theta_c G\rangle &= \tfrac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w^2, \theta_0\theta_c B\rangle + \tfrac{1}{\lambda}\langle w^2, \theta_0\big((\xi+c-2)B\big)\rangle\\ &\quad +2(c-1)(1-\tfrac{1}{\lambda})\langle w, \theta_c B\rangle + 2(1-\tfrac{1}{\lambda})\langle w, B\rangle + \lambda(1-\tfrac{1}{\lambda})^2 B(c)\ .\end{aligned} \tag{23}$$

Adding (21), (22) and (23), we obtain

$$\begin{aligned}\langle \vartheta, \theta_c^2 E + \theta_c F + \vartheta\theta_0\theta_c G\rangle &= \tfrac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w, \theta_c^2\Phi + \theta_c\Psi + w\theta_0\theta_c B\rangle\\ &\quad +\tfrac{1}{\lambda}\langle(\Phi w)^{'} + \Psi w + B(x^{-1}w^2), x+c-2\rangle\\ &\quad +(1-\tfrac{1}{\lambda})\Big((c-1)(\Phi^{'}+\Psi)(c) + (1-\lambda)B(c)\Big)\ .\end{aligned}$$

This yields (17), since $\langle(\Phi w)^{'} + \Psi w + B(x^{-1}w^2), x+c-2\rangle = 0$, from (13). Next, it is easy to find (18) from (16).

(ii) Let c be a root of E such that $c \neq 1$. According to (16) we get $c\Phi(c) = 0$.

Two cases occur to discuss:

• If $c \neq 0$, then $\Phi(c) = 0$. We suppose $|E^{'}(c) + F(c)| + |G(c)| = 0$. According to (17) and (18), we obtain

$$\langle \vartheta, \theta_c^2 E + \theta_c F + \vartheta\theta_0\theta_c G\rangle = \frac{1}{\lambda}(c-1)^2\langle w, \theta_c^2\Phi + \theta_c\Psi + w\theta_0\theta_c B\rangle \neq 0,$$

since $|\Phi^{'}(c) + \Psi(c)| + |B(c)| = 0$.

• If $c = 0$, then $|E^{'}(0) + F(0)| + |G(0)| = \Phi(0)$. We suppose that $\Phi(0) = 0$.

When $|\Phi^{'}(0) + \Psi(0)| + |B(0)| = 0$, we get

$$\langle \vartheta, \theta_0^2 E + \theta_0 F + \vartheta\theta_0^2 G\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle w, \theta_0^2\Phi + \theta_0\Psi + w\theta_0^2 B\rangle \neq 0,$$

from (17) and (18).

When $|\Phi^{'}(0) + \Psi(0)| + |B(0)| \neq 0$, the assumption $\lambda \notin \{\lambda_{-1}, \lambda_{-2}\}$ gives $\langle \vartheta, \theta_0^2 E + \theta_0 F + \vartheta\theta_0^2 G\rangle \neq 0$. Therefore, equation (15) is not simplified by $x - c$ for $c \neq 1$.

□

Proof. (of Theorem 1) We may write $E^{'}(1) + F(1) = 2(1-\lambda)B(1) - \Phi(1)$ and $G(1) = \lambda B(1)$.

(a) If $(\Phi(1), B(1)) \neq (0,0)$, then $|E^{'}(1)+F(1)|+|G(1)| \neq 0$. Thus, equation (15) cannot be simplified and so the form ϑ is of class

$$s_\vartheta = \max\big(\deg(E)-2, \deg(F)-1, \deg(G)-2\big) = \max\big(\deg(\Phi), \deg(\Psi)+1, \deg(B)\big)\,.$$

Hence, $s_\vartheta = 3$.

(b) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$, then

$$|E^{'}(1) + F(1)| + |G(1)| = 0 \text{ and } \langle \vartheta, \theta_1^2 E + \theta_1 F + \vartheta\theta_0\theta_1 G\rangle = 0,$$

according to (17) and (18). So, equation (15) can be simplified by the polynomial $x - 1$ and becomes

$$(\tilde{E}\vartheta)^{'} + \tilde{F}\vartheta + \tilde{G}(x^{-1}\vartheta^2) = 0\,, \tag{24}$$

where

$$\begin{aligned} &\tilde{E}(x) = x\Phi(x)\,, \quad \tilde{G}(x) = \lambda x^2(\theta_1 B)(x)\,,\\ &\tilde{F}(x) = x\big(\Psi + 2(1-\lambda)(\theta_1 B) - (\theta_1\Phi)\big)(x)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

It is easy to see that (24) is not simplified, since

$$(\tilde{E}^{'}(1) + \tilde{F}(1), \tilde{G}(1)) = (\Psi(1) + 2(1-\lambda)B^{'}(1), \lambda B^{'}(1)) \neq (0,0).$$

Therefore $s_\vartheta = 2$.

(c) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$ and $(\Psi(1), B^{'}(1)) = (0,0)$, then

$$(\tilde{E}^{'}(1) + \tilde{F}(1), \tilde{G}(1)) = (\Psi(1) + 2(1-\lambda)B^{'}(1), \lambda B^{'}(1)) = (0,0).$$

A simple calculation gives $\langle \vartheta, \theta_1^2\tilde{E} + \theta_1\tilde{F} + \vartheta\theta_0\theta_1\tilde{G}\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle w, \Psi\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle w^2, \theta_0 B\rangle = 0$. So, (24)-(25) is simplified by the polynomial $x - 1$ and it becomes

$$(\hat{E}\vartheta)^{'} + \hat{F}\vartheta + \hat{G}(x^{-1}\vartheta^2) = 0\,, \tag{26}$$

where

$$\begin{aligned} &\hat{E}(x) = x(\theta_1\Phi)(x)\,, \quad \hat{G}(x) = \lambda x^2(\theta_1^2 B)(x)\,,\\ &\hat{F}(x) = x\big((\theta_1\Psi) + 2(1-\lambda)(\theta_1^2 B)\big)(x)\,. \end{aligned} \tag{27}$$

If 1 is a root of $\theta_1\Phi$, then $\Phi^{'}(1)+\Psi(1)=B(1)=0$. Assuming that $|\hat{E}^{'}(1)+\hat{F}(1)|+|\hat{G}(1)|=0$. A simple calculations gives

$$\langle\vartheta,\theta_1^2\hat{E}+\theta_1\hat{F}+\vartheta\theta_0\theta_1\hat{G}\rangle=\frac{1}{\lambda}\langle w,\theta_1^2\Phi+\theta_1\Psi+w\theta_0\theta_1 B\rangle\neq 0,$$

since w is a Laguerre-Hahn and it satisfies (14). Hence, equation (26)-(27) is not simplified and so $s_\vartheta=1$. □

3.2. Structure of the polynomials Φ, Ψ and B. We can decompose the polynomials Φ, Ψ, B, $\theta_1\Phi$, $\theta_1\Psi$, $\theta_1 B$ and $\theta_1^2 B$ into their odd and even parts. Set

$$\begin{aligned}
&\Phi(x)=\Phi^e(x^2)+x\Phi^o(x^2)\ ,\ (\theta_1\Phi)(x)=\Phi_1^e(x^2)+x\Phi_1^o(x^2)\ ,\\
&\Psi(x)=\Psi^e(x^2)+x\Psi^o(x^2)\ ,\ (\theta_1\Psi)(x)=\Psi_1^e(x^2)+x\Psi_1^o(x^2)\ ,\\
&B(x)=B^e(x^2)+xB^o(x^2)\ ,\ (\theta_1 B)(x)=B_1^e(x^2)+xB_1^o(x^2)\ ,\\
&(\theta_1^2 B)(x)=B_2^e(x^2)+xB_2^o(x^2)\ .
\end{aligned}\tag{28}$$

Proposition 4. *Let w be a Laguerre-Hahn linear form of class $s_w=1$ satisfying (13) and $\{W_n\}_{n\geq 0}$ be its corresponding MOPS, such that $\beta_n=(-1)^n,\ n\geq 0$. The following statements hold:*

(a) If $(\Phi(1),B(1))\neq(0,0)$, then $\Phi^e(x)=\Phi^o(x)=\frac{1}{2}\big(x\Psi^o(x)-\Psi^e(x)\big)$ and $B^e=0$.

(b) If $(\Phi(1),B(1))=(0,0)$ and $(\Psi(1),B^{'}(1))\neq(0,0)$, then $\Phi^e=B_1^o=0$ and $\Psi^o(x)=\Phi_1^o(x)$.

(c) If $(\Phi(1),B(1))=(0,0)$ and $(\Psi(1),B^{'}(1))=(0,0)$, then $\Phi^e(x)+\Phi^o(x)=\Psi^e(x)+x\Psi^o(x)=0$ and $(x+1)B^e(x)+2xB^o(x)=0$.

Proof. Writing

$$\tilde{E}(x)=\tilde{E}^e(x)+x\tilde{E}^o(x)\ ,\ \tilde{F}(x)=\tilde{F}^e(x)+x\tilde{F}^o(x)\ ,\ \tilde{G}(x)=\tilde{G}^e(x)+x\tilde{G}^o(x)\ .\tag{29}$$

(a) $(\Phi(1),B(1))\neq(0,0)$. According to (28), (29) and from the expression of polynomials $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ and $\tilde{G}$ given in Theorem 1, we get

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}^e(x)=x(\Phi^e-\Phi^o)(x)\ ,\quad \tilde{E}^o(x)=x\Phi^o(x)-\Phi^e(x)\ ,\\
&\tilde{F}^e(x)=x\big(\Psi^e-\Psi^o-2\Phi^o+2(1-\lambda)B^o\big)(x)\ ,\\
&\tilde{F}^o(x)=x\Psi^o(x)+\big(2(1-\lambda)B^e-\Psi^e-2\Phi^e\big)(x)\ ,\\
&\tilde{G}^e(x)=\lambda xB^e(x)\ ,\quad \tilde{G}^o(x)=\lambda xB^o(x)\ .
\end{aligned}$$

Then, $\tilde{E}^e=\tilde{F}^o=\tilde{G}^e=0$, from Proposition 3, since $s_\vartheta=3$. This gives (a).

(b) $(\Phi(1),B(1))=(0,0)$ and $(\Psi(1),B^{'}(1))\neq(0,0)$. Similar as above,

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}^e(x)=x\Phi^o(x)\ ,\quad \tilde{E}^o(x)=\Phi^e(x)\ ,\\
&\tilde{F}^e(x)=x\big(\Psi^o+2(1-\lambda)B_1^o-\Phi_1^o\big)(x)\ ,\\
&\tilde{F}^o(x)=\Psi^e(x)+2(1-\lambda)B_1^e(x)-\Phi_1^e(x)\ ,\\
&\tilde{G}^e(x)=\lambda xB_1^e(x)\ ,\quad \tilde{G}^o(x)=\lambda xB_1^o(x)\ .
\end{aligned}$$

If $s_\vartheta=2$, then $\tilde{E}^o=\tilde{F}^e=\tilde{G}^o=0$. This leads to result (b).

(c) $(\Phi(1),B(1))=(0,0)$ and $(\Psi(1),B^{'}(1))=(0,0)$. In this case, we have

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}^e(x)=x\Phi_1^o(x)\ ,\quad \tilde{E}^o(x)=\Phi_1^e(x)\ ,\\
&\tilde{F}^e(x)=x\big(\Psi_1^o+2(1-\lambda)B_2^o\big)(x)\ ,\quad \tilde{F}^o(x)=\Psi_1^e(x)+2(1-\lambda)B_2^e(x)\ ,\\
&\tilde{G}^e(x)=\lambda xB_2^e(x)\ ,\quad \tilde{G}^o(x)=\lambda xB_2^o(x)\ .
\end{aligned}$$

Since ϑ is of odd class, $\tilde{E}^e = \tilde{F}^o = \tilde{G}^e = 0$. Therefore $\Phi_1^o = B_2^e = 0$ and $\Psi_1^e = 0$. Moreover we can write $\Phi(x) = (x-1)(\theta_1\Phi)(x) = (x-1)\Phi_1^e(x^2)$, $B(x) = (x-1)^2(\theta_1^2 B)(x) = (x-1)^2 x B_2^o(x^2)$ and $\Psi(x) = (x-1)x\Psi_1^o(x^2)$. So $\Phi^e(x) = -\Phi_1^e(x)$, $\Phi^o(x) = \Phi_1^e(x)$, $B^e(x) = -2xB_2^o(x)$, $B^o(x) = (x+1)B_2^o(x)$, $\Psi^e(x) = x\Psi_1^o(x)$, $\Psi^o(x) = -\Psi_1^o(x)$. This gives the desired result. □

Theorem 2. *Let w be a Laguerre-Hahn linear form of class one satisfying (13) and $\{W_n\}_{n\geq 0}$ be its corresponding MOPS fulfilling (8). The solutions of the functional equation (13) are given by*

$$\Phi(x) = x(x^2-1)\ , \quad \Psi(x) = ax^2 + x + c\ , \quad B(x) = (x-1)(dx^2+f)\ , \tag{30}$$

with

$$\begin{aligned} &|a+2d| + |d+f| \neq 0\ , \quad |a+d+2| + |f| + |c-1| \neq 0\ , \\ &|a+c+3| + |a+d+2| \neq 0\ , \quad |a+c+1| + |d+f| \neq 0\ . \end{aligned} \tag{31}$$

For the proof, we use the following lemma.

Lemma 3. *We have the following formulas:*

$$\begin{aligned} (w)_1 &= 1\ , \\ (w)_2 = (w)_3 &= \gamma_1 + 1\ , \\ (w)_4 = (w)_5 &= (1+\gamma_1)^2 + \gamma_1\gamma_2\ , \\ (w)_6 &= \gamma_1(\gamma_2+\gamma_1+1)^2 + (\gamma_1+1)^2 + \gamma_1\gamma_2(\gamma_3+1)\ , \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} (w^2)_1 &= 2\ , \\ (w^2)_2 &= 2\gamma_1 + 3\ , \\ (w^2)_3 &= 4(\gamma_1+1)\ , \\ (w^2)_4 &= 3(\gamma_1+1)^2 + 2(\gamma_1+1) + 2\gamma_1\gamma_2\ , \\ (w^2)_5 &= 6(\gamma_1+1)^2 + 4\gamma_1\gamma_2\ , \\ (w^2)_6 &= 2\gamma_1(\gamma_2+\gamma_1+1)^2 + (2\gamma_1+7)(\gamma_1+1)^2 + 2\gamma_1\gamma_2(\gamma_3+\gamma_1+3)\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Proof. We have $(w)_{2n} = (u)_n\ ,\ n \geq 0$. Then we can easily prove that $(w)_2 = \beta_0^P$, $(w)_4 = \left(\beta_0^P\right)^2 + \gamma_1^P$ and $(w)_6 = \left(\beta_0^P\right)^3 + \left(2\beta_0^P + \beta_1^P\right)\gamma_1^P$. Hence, from (9) and the statement (b) of Lemma 1, we can deduce the desired result (32).

Finally, from (4) we have $(w^2)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(w)_{n-k}(w)_k\ ,\ n \geq 0$. Thus leads to results (33) from (32). □

Proof. (of Theorem 2) When $\deg(\Phi) \leq 2$, $\deg(B) \leq 3$ and $\deg(\Psi) \leq 2$, we consider $(a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{C}^7$ such that $\Psi(x) = ax^2 + bx + c$ and $B(x) = dx^3 + ex^2 + fx + g$ with $(a,d) \neq (0,0)$. From Proposition 4, we have the following:

(i) If $(\Phi(1), B(1)) \neq (0,0)$, then $\Phi^e(x) = \Phi^o(x) = \frac{1}{2}(x\Psi^o(x) - \Psi^e(x))$ and $B^e = 0$. So, from (28), $\Phi(x) = (x+1)\Phi^e(x^2)$ and $B(x) = xB^o(x^2)$. Since Φ is a monic polynomial of degree at most two, then necessarily $\Phi^e(x) = 1$. In addition, we have $x\Psi^o(x) - \Psi^e(x) = 2$. This implies that $a = b$ and $c = -2$. Then $\Phi(x) = x+1$,

$B(x) = dx^3 + fx$ and $\Psi(x) = ax^2 + ax - 2$ with $(a, d) \neq (0, 0)$. According to equation (13), we have

$$\langle (\Phi w)' + \Psi w + B(x^{-1}w^2), x^n \rangle = 0 \ , \ n = 0, 1, 2 \ . \tag{34}$$

Then, from (30) we deduce

$$\begin{aligned} &\langle w, ax^2 + ax - 2\rangle + \langle w^2, dx^2 + f\rangle = 0 \ , \\ &\langle w, ax^3 + ax^2 - 3x - 1\rangle + \langle w^2, dx^3 + fx\rangle = 0 \ , \\ &\langle w, ax^4 + ax^3 - 4x^2 - 2x\rangle + \langle w^2, dx^4 + fx^2\rangle = 0 \ . \end{aligned}$$

Taking into account the Lemma 3, it is equivalent to

$$(\gamma_1 + 1)(a + 2d) + a + d + f - 2 = 0 \ , \tag{35}$$

$$(\gamma_1 + 1)(a + 2d) + f - 2 = 0 \ , \tag{36}$$

$$(\gamma_1 + 1)\big((\gamma_1 + 1)d + f - 2\big) + (a + 2d)\gamma_1\gamma_2 = 0 \ . \tag{37}$$

Subtracting identities (35) and (36), we obtain

$$\begin{aligned} a + d &= 0 \ , \\ d(\gamma_1 + 1) + f - 2 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{38}$$

Hence, relation (37) becomes

$$d\gamma_1\gamma_2 = 0 \ .$$

Then, from the above relation, (38) and taking into account the regularity of w, we obtain $a = d = 0$, that is a contradiction with $(a, d) \neq (0, 0)$.

(ii) If $(\Phi(1), B(1)) = (0, 0)$ and $(\Psi(1), B'(1)) \neq (0, 0)$, then $\Phi^e = 0$. So, $\Phi(x) = x$, since Φ is monic polynomial and $\deg(\Phi) \leq 2$. This contradicts $\Phi(1) = 0$.

(iii) If $(\Phi(1), B(1)) = (0, 0)$ and $(\Psi(1), B'(1)) = (0, 0)$, hence

$$\Phi(x) = x - 1 \ , \quad \Psi(x) = ax(x - 1) \ , \quad B(x) = dx(x - 1)^2 \ . \tag{39}$$

Using (34) and (39), we deduce

$$\begin{aligned} &(a + 2d)\gamma_1 = 0 \ , \\ &(a + 2d)(\gamma_2 + \gamma_1 + 1) + (d\gamma_1 - 2)\gamma_1 = 0 \ . \end{aligned}$$

From the above equation and taking into account the regularity of w, we obtain

$$a + 2d = 0 \ , \quad d\gamma_1 - 2 = 0 \ . \tag{40}$$

Now, using (13) and (39), we get

$$a\langle w, x^6 - x^5\rangle - 4\langle w, x^4 - x^3\rangle + d\langle w^2, x^6 - 2x^5 + x^4\rangle = 0 \ .$$

Hence, from the above equation and taking into account (40) and Lemma 3, we obtain $\gamma_2\gamma_1 = 0$. It is a contradiction by virtue of the orthogonality of the sequence $\{W_n\}_{n\geq 0}$.

When $\deg(\Phi) = 3$, we obtain from (28) $\deg(\Phi^e) \leq 1$ and $\deg(\Phi^o) = 1$. According to Proposition 4, we have the following:

(i) If $(\Phi(1), B(1)) \neq (0, 0)$, then $\Phi^e(x) = \Phi^o(x)$, $\Psi^e(x) = x\Psi^o(x) - 2\Phi^e(x)$ and $B^e = 0$. We get $\Phi(x) = (x + 1)\Phi^o(x^2)$, $\Psi(x) = x(x + 1)\Psi^o(x^2) - 2\Phi^e(x^2)$ and $B(x) = xB^o(x^2)$. Therefore Ψ^o is constant polynomial, $\deg(B^o) \leq 1$ and Φ^o is a monic polynomial of degree one since $\deg(\Psi) \leq 2$, $\deg(B) \leq 3$ and $\deg(\Phi) = 3$. Hence, if denoting $\Phi^o(x) = x + h$, we get

$$\Phi(x) = (x + 1)(x^2 + h) \ , \quad \Psi(x) = (b - 2)x^2 + bx - 2h \ , \quad B(x) = dx^3 + fx \ . \tag{41}$$

From (34) and (41), we obtain

$$\langle w, (b-2)x^2 + bx - 2h\rangle + \langle w^2, dx^2 + f\rangle = 0 \ ,$$
$$\langle w, (b-2)x^3 + bx^2 - 2hx\rangle - \langle w, (x+1)(x^2+h)\rangle + \langle w^2, dx^3 + fx\rangle = 0 \ ,$$

$$\langle w, (b-2)x^4 + bx^3 - 2hx^2\rangle - 2\langle w, (x^2+x)(x^2+h)\rangle + \langle w^2, dx^4 + fx^2\rangle = 0 \ , \tag{42}$$

what implies

$$\begin{aligned} &(b+2d-2)(\gamma_1+1) + b + d + f - 2h = 0 \ , \\ &(b+2d-2)(\gamma_1+1) + f - 2h = 0 \ , \end{aligned} \tag{43}$$

$$(b+3d-4)(\gamma_1+1)^2 + (b+2d-4)\gamma_1\gamma_2 + (b+2d+2f-4h)(\gamma_1+1) + f - 2h = 0 \ . \tag{44}$$

Using (43), we get

$$b + d = 0 \ , \quad (d-2)(\gamma_1+1) + f - 2h = 0 \ . \tag{45}$$

Now, from (13), we get $\langle w, x^3\Psi(x) - 3x^2\Phi(x)\rangle + \langle w^2, x^2B(x)\rangle = 0$. Taking into account Lemma 3 and the second identity in (45), we obtain

$$(b+3d-4)(\gamma_1+1)^2 + (b+2d-4)\gamma_1\gamma_2 + (2f-4h)(\gamma_1+1) = 0 \ . \tag{46}$$

Then, from (44), (46) and taking into account the first identity in (45), we have

$$d(\gamma_1+1) + f - 2h = 0 \ .$$

Thus, by virtue of (45), we get

$$\gamma_1 + 1 = 0 \ , \quad f - 2h = 0 \ . \tag{47}$$

Hence, from (46), we can deduce

$$(d-2)\gamma_2 = 0 \ . \tag{48}$$

Now, from (42), we can write

$$2\langle w, W_2^2\rangle = \langle w, (b-2)x^4 + bx^3 - 2hx^2\rangle - 2\langle w, x(x^2+hx+h)\rangle + \langle w^2, dx^4 + fx^2\rangle \ ,$$

since $W_2(x) = x^2$. Thus, from (45), (47), (48) and taking into account Lemma 3, we have $\langle w, W_2^2\rangle = 0$, that is a contradiction of regularity of the form w.

(ii) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$ and $(\Psi(1), B^{'}(1)) = (0,0)$, then $\Phi^e = -\Phi^o$, $\Psi^e(x) = -x\Psi^o(x)$ and $2xB^o(x) = -(x+1)B^e(x)$. Therefore

$$\Phi(x) = (x-1)(x^2+h) \ , \quad \Psi(x) = ax(x-1) \ , \quad B(x) = dx(x-1)^2 \ , \tag{49}$$

with $a \neq 0$ since $1 \leq \deg(\Psi) \leq 2$. Thus, from (34) and (49), we can deduce

$$(a+2d)\gamma_1 = 0 \ , \quad (a+2d-2)(\gamma_2+\gamma_1+1) + d\gamma_1 - 2h = 0 \ .$$

By virtue of the above equations and taking into account the regularity of the form w, we obtain

$$a + 2d = 0 \ , \quad 2(\gamma_2+\gamma_1+h+1) - d\gamma_1 = 0 \ . \tag{50}$$

Now, using (13) and (49), we get

$$4\langle w, x^3(x-1)(x^2+h)\rangle - a\langle w, x^5(x-1)\rangle - d\langle w^2, x^4(x-1)^2\rangle = 0 \ .$$

Hence, from the above equation and taking into account (50) and Lemma 3, we obtain $\gamma_2\gamma_3 = 0$. It is a contradiction by virtue of the regularity of w.

(iii) If $(\Phi(1), B(1)) = (0,0)$ and $(\Psi(1), B^{'}(1)) \neq (0,0)$, then $\Phi^e = 0$, $\Psi^o(x) = \Phi_1^o(x)$ and $B_1^o = 0$. So $\Phi(x) = x(x^2-1)$, $\Psi(x) = ax^2 + x + c$ and $B(x) = (x-1)(dx^2+f)$. If $(a+2d, d+f) = (0,0)$, then $a+c+1 = 0$ and $d = -f$ since $\langle w, \Psi\rangle + \langle w^2, \theta_0 B\rangle = 0$.

Thus $\Psi(x) = (x-1)(ax+a+1)$ and $B(x) = d(x+1)(x-1)^2$ which contradiction $(\Psi(1), B^{'}(1)) \neq (0,0)$. Necessarily $(a+2d, d+f) \neq (0,0)$. Moreover the form w is of class one, we shall have the condition (14) with $\mathcal{Z}_{\Phi} = \{-1,0,1\}$, which leads to relation (31). □

Remark 2. *If $d = f = 0$, then we obtain the result given in* [6], [11], [17]. *Indeed the form $w = \kappa$ is semiclassical and satisfies the functional equation*

$$(51)\qquad \big(x(x^2-1)\kappa\big)^{'} + (ax^2+x+c)\kappa = 0 \ ,$$

with

$$(52)\qquad a(a+c+1) \neq 0 \ , \quad |a+2| + |c-1| \neq 0 \ , \quad |a+c+3| + |a+2| \neq 0 \ .$$

3.3. The Computation of γ_{n+1}. We will study the form w given in Theorem 2. The form w fulfills the following equation

$$(53)\qquad \big(x(x^2-1)w\big)^{'} + (ax^2+x+c)w + (x-1)(dx^2+f)(x^{-1}w^2) = 0 \ .$$

On the other hand, while applying the operator σ in (53) and using relations (6) and (10), the form $u = \sigma(w)$ is Laguerre-Hahn satisfying

$$(54)\qquad \big(x(x-1)u\big)^{'} + \frac{1}{2}(ax+c+1)u + \frac{1}{2}(x-1)(dx+f)(x^{-1}u^2) = 0 \ .$$

Multiplying (54) by $(x-1)^2$, then the form $v = \gamma_1^{-1}(x-1)u$ fulfills

(55)

$$\big(x(x-1^2)v\big)^{'} + \frac{1}{2}(x-1)\big((2d+a-4)x+2f+c+1\big)v + \frac{\gamma_1}{2}(x-1)(dx+f)(x^{-1}v^2) = 0 \ ,$$

according to (2), (3) and (5).

Two cases arise:

(1) If $a+d+2 \neq 0$, then we distinguish two subcases.

(i) Taking

(56)

$$\begin{cases} a = 2(1-\frac{2}{\rho})(\alpha+\beta+2\tau) - \frac{4}{\rho} \ , \\ c = (\frac{4}{\rho}-1)(\alpha+\beta+2\tau+1) + \frac{\alpha^2-\beta^2-4(\tau+1)(\tau+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+2}) \ , \\ d = 2(\frac{1}{\rho}-1)(\alpha+\beta+2\tau+1) \ , \\ f = (1-\frac{2}{\rho})(\alpha+\beta+2\tau+1) - 2\rho\frac{(\tau+1)(\tau+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+1} + \frac{4(\tau+1)(\tau+\beta+1)+\beta^2-\alpha^2}{\alpha+\beta+2\tau+2} + 1 \ . \end{cases}$$

Moreover, the form v is of class one fulfilling (55), (56) and

$$(57)\qquad u = h_{-\frac{1}{2}} o \tau_{-1} \mathfrak{J}_1(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu_1) \ ,$$

with

$$\nu_1 = \frac{1}{(\alpha+\beta+2\tau+2)}\Big(2\rho\frac{(\tau+1)(\tau+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+1} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau}\Big) - 1 \ ,$$

where $\mathfrak{J}_1(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)$ is the non-singular Laguerre-Hahn form of class zero analogous to the classical Jacobi, this last form satisfies [4]

$$\big(\phi_1\mathfrak{J}_1(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)\big)^{'} + \psi_1\mathfrak{J}_1(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu) + \varphi_1\big(x^{-1}\mathfrak{J}_1^2(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)\big) = 0 \ ,$$

when

$$\begin{aligned}
&\phi_1(x) = x^2 - 1 \ , \\
&\psi_1(x) = \big((1-\tfrac{2}{\rho})(\alpha+\beta+2\tau) - \tfrac{2}{\rho}\big)x + \tfrac{2}{\rho}(\alpha+\beta+2\tau+1)\varsigma - \tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau+2} \ , \\
&\varphi_1(x) = (\tfrac{1}{\rho}-1)(\alpha+\beta+2\tau+1)x^2 + \big\{\big((\alpha+\beta+2\tau)(1-\tfrac{2}{\rho}) - 2(\tfrac{1}{\rho}-1)\big)\varsigma \\
&\qquad + \tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau+2}\big\}x + \tfrac{\alpha+\beta+2\tau+1}{\rho}\varsigma^2 - \tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau+2}\varsigma + (\alpha+\beta+2\tau+3)\varpi - 1 \ ,
\end{aligned}$$

with

$$\varsigma = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2\tau)(\alpha+\beta+2\tau+2)} + \nu \ ,$$

$$\varpi = \frac{4\rho(\tau+1)(\tau+\alpha+1)(\tau+\beta+1)(\tau+\alpha+\beta+1)}{(2\tau+\alpha+\beta+1)(2\tau+\alpha+\beta+2)^2(2\tau+\alpha+\beta+3)} \ .$$

$\mathfrak{J}_1(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)$ is regular if and only if $\rho \neq 0$, $\tau \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha \neq -(n+1)$, $\tau+\beta \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha+\beta \neq -(n+1)$, $n \geq 0$. Moreover, the coefficients of its corresponding MOPS $\{Z_n^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)}\}_{n\geq 0}$ are given by (for $n \geq 0$)

(58)
$$\begin{cases} \beta_0^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)} = \varsigma \ , \ \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+2\tau+\alpha+\beta+2)(2n+2\tau+\alpha+\beta+4)}, \\ \gamma_1^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)} = \varpi \ , \ \gamma_{n+2}^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu)} = \frac{4(n+\tau+2)(n+\tau+\alpha+2)(n+\tau+\beta+2)(n+\tau+\alpha+\beta+2)}{(2n+2\tau+\alpha+\beta+3)(2n+2\tau+\alpha+\beta+4)^2(2n+2\tau+\alpha+\beta+5)} \ . \end{cases}$$

Proposition 5. *Let w be a form of class one satisfying (53)-(56). The form w is regular for $\rho \neq 0$, $\tau \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha \neq -(n+1)$, $\tau+\beta \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha+\beta \neq -(n+1)$, $n \geq 0$. The recurrence coefficient coefficients of its MOPS $\{W_n\}_{n\geq 0}$ are given by (for $n \geq 1$)*

(59)
$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\rho\frac{(\tau+\beta+1)(\tau+1)}{(\alpha+\beta+2\tau+1)(\alpha+\beta+2\tau+2)} \ , \\
\gamma_{n+1} &= -\frac{1}{4}\frac{\big((n+2\tau+2+(\alpha-\frac{1}{2})(1-(-1)^n)\big)\big((n+2\tau+2\beta+2+(\alpha-\frac{1}{2})(1-(-1)^n)\big)}{(n+2\tau+\alpha+\beta+1)(n+2\tau+\alpha+\beta+2)} \ .
\end{aligned}$$

Proof. Taking into account (9), we obtain

$$\frac{\gamma_{2n+3}}{\gamma_{2n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}^R}{\gamma_{n+1}^P} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Hence, from the following relation: [8]

$$\gamma_{n+1}^R = \frac{P_{n+2}(1)P_n(1)}{P_{n+1}^2(1)}\gamma_{n+1}^P \ ,$$

it is to see that

$$\frac{\gamma_{2n+3}}{\gamma_{2n+1}} = \frac{P_{n+2}(1)P_n(1)}{P_{n+1}^2(1)} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Then, we obtain by induction

(60)
$$\gamma_{2n+1} = -\frac{P_{n+1}(1)}{P_n(1)} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Therefore, from (9) we can deduce

(61)
$$\gamma_{2n+2} = -\gamma_{n+1}^P\frac{P_n(1)}{P_{n+1}(1)} \ , \ n \geq 0 \ .$$

On the other hand, from (57) we have

(62)
$$P_{n+1}(1) = (-2)^{-n-1}Z_{n+1}^{(\alpha,\beta,\rho,\tau,\nu_1)}(-1) \ , \ n \geq 0 \ .$$

Thus, from (7) and (58), we obtain for $n \geq 0$

$$P_{n+1}(1) = \rho \frac{\Gamma(2\tau+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\tau+2)\Gamma(n+\tau+\beta+2)}{\Gamma(\tau+1)\Gamma(\tau+\beta+1)\Gamma(2n+2\tau+\alpha+\beta+3)} . \tag{63}$$

By virtue of (60), (61), (63) and from a simple calculation we can deduce (59). □

(ii) Putting

$$\begin{cases} a = 2(1-\frac{2}{\rho})(\alpha+\beta+2\tau) - \frac{4}{\rho} , \\ c = (\frac{4}{\rho}-1)(\alpha+\beta+2\tau+1) + \frac{\alpha^2-\beta^2-4(\tau+\alpha+1)(\tau+\alpha+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+2}) , \\ d = 2(\frac{1}{\rho}-1)(\alpha+\beta+2\tau+1) , \\ f = (1-\frac{2}{\rho})(\alpha+\beta+2\tau+1) - 2\rho\frac{(\tau+\alpha+1)(\tau+\alpha+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+1} \\ \qquad +\frac{4(\tau+\alpha+1)(\tau+\alpha+\beta+1)+\beta^2-\alpha^2}{\alpha+\beta+2\tau+2} + 1 . \end{cases} \tag{64}$$

Moreover, the form v is of class one fulfilling (55)-(64) and

$$u = h_{-\frac{1}{2}} o \tau_{-1} \mathfrak{J}_1(\alpha, \beta, \rho, \tau, \nu_2) , \tag{65}$$

with

$$\nu_2 = \frac{1}{\alpha+\beta+2\tau+2}\Big(2\rho\frac{(\tau+\alpha+1)(\tau+\alpha+\beta+1)}{\alpha+\beta+2\tau+1} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau}\Big) - 1 .$$

By applying the same process as we did to obtain (63) and using (65), we get after some straightforward calculation

$$P_{n+1}(1) = \rho\frac{\Gamma(2\tau+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\tau++\alpha+2)\Gamma(n+\tau+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\tau+\alpha+1)\Gamma(\tau+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+2\tau+\alpha+\beta+3)} , \ n \geq 0 .$$

Hence, by virtue of the previous equation, (60) and (61) we get

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = -\rho\frac{(\tau+\alpha+\beta+1)(\tau+\alpha+1)}{(\alpha+\beta+2\tau+1)(\alpha+\beta+2\tau+2)} , \\ &\gamma_{n+1} = -\frac{1}{4}\frac{\big((n+2\tau+1+(\alpha+\frac{1}{2})(1+(-1)^n)\big)\big((n+2\tau+2\beta+1+(\alpha+\frac{1}{2})(1+(-1)^n)\big)}{(n+2\tau+\alpha+\beta+1)(n+2\tau+\alpha+\beta+2)} . \end{aligned} \tag{66}$$

consequently, The form w is regular for $\rho \neq 0$, $\tau \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha \neq -(n+1)$, $\tau+\beta \neq -(n+1)$, $\tau+\alpha+\beta \neq -(n+1)$, $n \geq 0$.

Remark 3. *If we take $\tau = 0$ and $\rho = 1$ in (59) and (66), we obtain $w = \kappa$ where κ is the form satisfying (51)-(52).*

(2) If $a+d+2=0$, choosing

$$a = 2(\alpha-2) , \ c = -\alpha-\mu+1 , \ d = 2(1-\alpha) , \ f = 2\mu\frac{\alpha-1}{\alpha-2} - \alpha\nu . \tag{67}$$

Moreover, v is of class one fulfilling (55)-(67) and

$$u = h_{-\frac{1}{2}} o \tau_{-1} \mathfrak{J}_2(\alpha, \rho_1, \nu, \mu) , \tag{68}$$

with

$$\rho_1 = \frac{(\mu-\alpha)(\mu+2\nu+2-\alpha-\alpha\nu)}{(\alpha+1)(\alpha-2)} ,$$

where is the singular Laguerre-Hahn form of class zero analogous to the classical Jacobi, this last form satisfies [4]

$$\big(\phi_2\mathfrak{J}_2(\alpha,\rho,\nu,\mu)\big)' + \psi_2\mathfrak{J}_2(\alpha,\rho,\nu,\mu) + \varphi_2\big(x^{-1}\mathfrak{J}_2^2(\alpha,\rho,\nu,\mu)\big) = 0 ,$$

when

$$\phi_2(x) = x^2 - 1 \ ,$$
$$\psi_2(x) = (\alpha - 2)x + \mu \ ,$$
$$\varphi_2(x) = (1-\alpha)x^2 + \big(\alpha\nu - 2\mu\tfrac{\alpha-1}{\alpha-2}\big)x - \tfrac{\mu^2}{\alpha-2} + \mu\nu + \rho(\alpha+1) - 1 \ .$$

$\mathfrak{J}_2(\alpha,\rho,\nu,\mu)$ is regular if and only if $\rho \neq 0$, $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq -n$, $\alpha \neq \pm\mu - 2n$, $n \geq 1$. Moreover, the coefficients of its corresponding MOPS $\{Q_n^{(\alpha,\rho,\nu,\mu)}\}_{n\geq 0}$ are given by (for $n \geq 0$)

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_0^{(\alpha,\rho,\nu,\mu)} = \frac{\mu}{2-\alpha} + \nu \ , \ \beta_{n+1}^{(\alpha,\rho,\nu,\mu)} = -\frac{\alpha\mu}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}, \\ \gamma_1^{(\alpha,\rho,\nu,\mu)} = \rho \ , \ \gamma_{n+2}^{(\alpha,\rho,\nu,\mu)} = \frac{(n+1)(n+\alpha+1)(2n+\alpha-\mu+2)(2n+\alpha+\mu+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} \ . \end{array}\right. \tag{69}$$

Proposition 6. *Let w be a the form of class one satisfying (53)-(67). The form w is regular for $(\alpha-2)(\nu-1)+\mu \neq 0$, $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq -n$, $\alpha \neq \pm\mu - 2n$, $n \geq -1$. The recurrence coefficients of its MOPS $\{W_n\}_{n\geq 0}$ are given by*

$$\begin{array}{l} \gamma_1 = -\frac{\mu+2+2\nu-\alpha-\alpha\nu}{2(2-\alpha)} \ , , \\ \gamma_{n+1} = -\frac{1}{4}\frac{\big(n+(\alpha-\frac{1}{2})(1-(-1)^n)\big)\big(n+\alpha+\mu+(1+2\mu)(\frac{(-1)^n-1}{2})\big)}{(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \ , \ n \geq 0 \ . \end{array} \tag{70}$$

Proof. From (68), we have

$$P_{n+1}(1) = (-2)^{-n-1} Q_{n+1}^{(\alpha,\rho_1,\nu,\mu)}(-1) \ , \ n \geq 0 \ .$$

Hence, by virtue (7), (68) and (69), we get for $n \geq 0$

$$P_{n+1}(1) = \frac{(\mu+2+2\nu-\alpha-\alpha\nu)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\frac{\alpha+\nu}{2})}{2(2-\alpha)\Gamma(1+\frac{\alpha+\nu}{2}))\Gamma(2n+\alpha+1)} \ .$$

Hence, by virtue of the last equation, (60) and (61) we can deduce (70). □

Acknowledgment. Thanks are due to the referee for his valuable comments and useful suggestions and for his careful reading of the manuscript.

REFERENCES

[1] A. Alaya, *Suites de polynômes orthogonales particulières. Suites de polynômes D_u-classiques.* Thse de Doctorat, Universit de Sfax-Tunis 2010.
[2] J. Alaya, *Quelques rsultats nouveaux dans la thorie des polynomes de Laguerre-Hahn.* Thse de Doctorat, Universit de Tunis II 1996.
[3] J. Alaya and P. Maroni, *Symmetric Laguerre-Hahn forms of class $s = 1$,* Integral Transforms Spec. Funct. **4**, (1996), pp. 301-320.
[4] H. Bouakkaz, *Les polynmes orthogonaux de Laguerre-Hahn de classe zro.* Thèse de Doctorat. Universit Pierre et Marie Curie, Paris 1990.
[5] B. Bouras and F. Marcellán, *Quadratic decomposition of a Laguerre-Hahn polynomial sequence I.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **17(4)**, 2010 pp. 641-659.
[6] B. Bouras and A. Alaya, *A large family of semi-classical polynomials of class one,* Integral Transforms Spec. Funct., **18 (12)** (2007), 913-931.
[7] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials,* Gordon and Breach, New York, 1978.
[8] J. Dini, *Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn,* Thèse de l'Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.
[9] H. Dueñas and F. Marcellán, *Perturbations of Laguerre-Hahn functional: Modification by the derivative of a Dirac delta,* Integral Transforms Spec. Funct. **20 (1)** (2009), pp. 59-77.
[10] F. Marcellán and E. Prianes, *Perturbations of Laguerre-Hahn linear functionals,* J. Comput. Appl. Math., **105** (1999), pp. 109-128.

[11] P. Maroni and M. Mejri, *Some semi-classical orthogonal polynomials of class one,* Eurasian Mathematical Journal, **2 (2)** (2011), pp. 108-128.

[12] P. Maroni, *Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux,* I, Rivista di Mat. Pura ed Appl. **6** (1991) , pp. 19-53.

[13] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques, in: Orthogonal Polynomials and their applications.* (C. Brezinski et al Editors.) IMACS, Ann. Comput. Appl. Math. **9**, (Baltzer, Basel), (1991), pp. 95-130.

[14] P. Maroni, *Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme* $u = \delta_c + \lambda(x-c)L$*,* Period. Math. Hunger. **21** (1990) , pp. 223-248.

[15] M. Sghaier and J. Alaya, *Building some symmetric Laguerre-Hahn functionals of class two at most at most through the sum of symmetric functionals as pseudofunctions with a Dirac measure at origin,* Int. J. Math. Sci. **(7)** (2006), pp. 1-19.

[16] M. Sghaier and J. Alaya, *Orthogonal polynomials associated with some modifications of a linear form,* Methodes and Applications of Analysis, **11 (2)** (2004), pp. 267-294.

[17] M. I. Tounsi, *A Characterization Of A Family Of Semiclassical Orthogonal Polynomials Of Class One,* AMEN, **12** (2012), pp. 210-220.

ALBANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Pages 37–45
ISSN: 1930-1235; (**2016**)

GRAPH BASED LINEAR ERROR CORRECTING CODES

MONIKA POLAK
University of Maria Curie–Sklodowska
Lublin, Poland
Email: monika.katarzyna.polak@gmail.com

EUSTRAT ZHUPA
University of Maria Curie–Sklodowska
Lublin, Poland
Email: e.zhupa@gmail.com

ABSTRACT. In this article we present a construction of error correcting codes, that have representation as very sparse matrices and belong to the class of Low Density Parity Check Codes. LDPC codes are in the classical Hamming metric. They are very close to well known Shannon bound. The ability to use graphs for code construction was first discussed by Tanner in 1981 and has been used in a number of very effective implementations. We describe how to construct such codes by using special a family of graphs introduced by Ustimenko and Woldar. Graphs that we used are bipartite, bi-regular, very sparse and do not have short cycles C_4. Due to the very low density of such graphs, the obtained codes are fast decodable. We describe how to choose parameters to obtain a desired code rate. We also show results of computer simulations of BER (bit error rate) of the obtained codes in order to compare them with other known LDPC codes.

1. INTRODUCTION

All information in a computer is represented as a sequence of binary digits. Data are stored and shared with others. Both in the case of data storage and during data transfer, we need protection against transmission errors or data loss. In the first scenario, unreliable or faulty hardware (computer memories, compact discs, QR Code) can seriously corrupt data. Coding techniques are one of the important measures for improving reliability.

As to the second scenario, very often digital data are sent over unreliable communication channels (air, a telephone line, a beam of light or a cable). Because of the channel, noise errors may be introduced during transmission from the source to the receiver. It is very important for the recipient to receive the correct message as intended. In order to minimize the number of errors during transmission, we can use error correcting codes.

Coding of information with the use of error correcting codes consists of adding to sequences of K elements some extra bits in a certain way. Such additional bits don't carry any information and they only have check purposes. An error correcting code is $A \subset \mathbb{F}_2^N$, where $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ and codewords follow the classical Hamming metric:

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 94B05 and 94B05 and 05C50 .
Key words and phrases. LDPC codes and sparse graph and graph based algorithm and quality of transmission.

We denote with $[N, K]$ the code with code words length N and K information bits. In such a code there are $R = N - K$ parity check equations. The ratio K/N is called *code rate* and is denoted by R_C. It is interesting to look at codes with the best correction properties and the biggest code rate for cost reasons.

Linear error correcting code can be represented in three ways: by the generator matrix G, by parity check matrix H or by Tanner graph $\Gamma(V, E)$. Parity check matrix H for $[N, K]$ code is $R \times N$ matrix whose words are zeros or ones. Rows of such matrix correspond to the parity checks and the columns correspond to codeword bits. If bit number j in the codeword is checked by parity check number i then in position (i, j) in matrix H there is a 1, if not there is a 0. Switching column does not change code properties and provides an equivalent code. A simple example of linear error correcting code is Hamming code $[7, 4]$ with matrix H of the form:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To encode vector of 4 bits by using $[7, 4]$ Hamming code we add 3 extra bits. Each bit is checked by a unique set of control equations. We assume that every codeword is from the set

$$C = \{y \in \mathbb{F}_2^N : Hy^T = 0\}.$$

Let's recall few simple facts from Graph Theory that can be found for example in (Biggs, 1993). The *distance* between vertices v_1 and v_2 of the graph is the length of minimal path from v_1 and v_2. The graph is connected if for arbitrary pair of vertices v_1, v_2 there is a path from v_1 to v_2. The *girth* of simple graph is the length of the shortest cycle in graph. A *bipartite* graph is a graph $\Gamma(V, E)$, in which a set of nodes V can be divided into two subsets $V = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) in such a way that no two vertices from each set V_i , $i = 1, 2$ are connected with an edge. We refer to bipartite graph $\Gamma(V, E)$ with partition sets V_i, $i = 1, 2$, $V = V_1 \cup V_2$ as bi-regular one if the number of neighbours for representatives of each partition set are constants s and r (bi-degrees); we say that we have bi-regularity (s, r). We call the graph *regular* in the case $s = r$.

Tanner in 1981 introduced an effective graphical representation for LDPC Tanner codes, i.e. Tanner graph. *Tanner graph* is the bipartite graph in which one subset V_1 corresponds to the codeword bits and second V_2 to the parity checks. Vertex from the set V_1 is connected to a vertex from the set V_2 if and only if a bit corresponding to the vertex from V_1 is controlled by the parity check corresponding to the vertex from V_2.

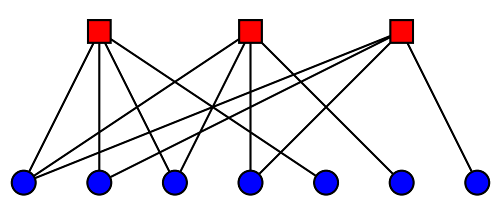


FIGURE 1. Tanner graph for $[7, 4]$ Hamming code

Tanner graph represents parity check equations. There is a standard way to create error correcting code codes depending on adjacency matrix of bipartite, bi-regular graph. Parity check matrix H is a part of the adjacency matrix A of the graph with desired properties used to create the code:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^T & 0 \end{pmatrix}$$

Determination of the matrix H is equivalent to code designation. However parity check matrix is not unique. Switching columns doesn't change code properties and gives us an equivalent code.

One famous class of error correcting codes is Low Density Parity Check Codes introduced in 1962 by Robert G. Gallager (Gallager, 1962). Such codes have a wide range for selection of parameters, enabling creation of codes with a large block size and excellent correction properties. In the present work we show new results on applications of Computer Algebra and Theory of Algebraic Graphs in constructions of new LDPC error correcting codes. Only specific graphs are suitable for such purpose. Usually, simple graphs are used. The graph should be bipartite, sparse, without small cycles and bi-regular or regular with the possibility to obtain bi-regularity. Codes related to graph defined below have all such important properties.

A code with a representation as a sparse matrix or a sparse Tanner graph is a Low-Density Parity-Check Code, (Gallager, 1962). A matrix is sparse if number of ones in it is small compared to number of zeros. Low Density Parity Check Codes have a very sparse parity check matrix. A *sparse* graph has a small number of edges in relation to the number of vertices. A simple relationship describing the density of the graph $\Gamma(V, E)$ is

$$D = \frac{2|E|}{|V|(|V|-1)}, \tag{1}$$

where $|E|$ is the number of edges of graph Γ and $|V|$ the number of vertices.

2. DESCRIPTION OF THE GRAPH

Let q be a prime power and let $\mathbb{F}_{q^2}$ be the quadratic extension of $\mathbb{F}_q$. The family of graphs $F = F(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2})$ was introduced in (Ustimenko and Woldar, 2003). In fact, the described graphs are affine part of generalized quadrangles. The following representation can be found in (Ustimenko, 2011), where they are denoted as $I4_q$. Those graphs are bipartite with set of vertices $V = V_1 \cup V_2$, where $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. They have girth at least 8 and very different bi-regularity (q, q^2). Traditionally because of geometric construction, one partition set $V_1 = P$ is called set of points and other $V_2 = L$ is called the set of lines:

$$P = \{(a, b, c) : a \in \mathbb{F}_q, b \in \mathbb{F}_{q^2}, c \in \mathbb{F}_q\},$$

$$L = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{F}_{q^2}, y \in \mathbb{F}_{q^2}, z \in \mathbb{F}_q\}.$$

Two types of brackets are used to distinguish points and lines. Let $x \longrightarrow x^q$ be the Frobenius automorphism of $\mathbb{F}_{q^2}$. We say point (p) is *incident* to line $[l]$ in graph $F(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2})$, and we write $(p)I[l]$, if the following relations on their coordinates hold:

$$\begin{cases} y - b = ax \\ z - c = ay + ay^q \end{cases} \tag{2}$$

The set of vertices is $V(F) = P \cup L$ and the set of edges consists of all pairs $((p), [l])$, for which $(p)I[l]$. Because $a \in \mathbb{F}_q, b \in \mathbb{F}_{q^2}, c \in \mathbb{F}_q, x \in \mathbb{F}_{q^2}, y \in \mathbb{F}_{q^2}, z \in \mathbb{F}_q$ we have $|P| = q^4$ and $|L| = q^5$ ($|V(F)| = q^5 + q^4 = q^4(q+1)$). This is a family of simple graphs.

Proposition 2.1. *$F(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2})$ is a family of sparse graphs.*

Proof. If we set point $(p) = (a, b, c)$ and x coordinate of line $[l]$ ($x \in \mathbb{F}_{q^2}$) then we can calculate y and z from 2. There is just one solution. So it's easy to see that each point has exactly q^2 neighbours. We have $|P| = q^4$ so set of edges has $|E| = q^4 \cdot q^2 = q^6$ elements. Using formula 1 the density of described graphs is

$$D = \frac{2q^6}{q^4(q+1)(q^4(q+1)-1)} = \frac{2q^2}{2q^6 + 2q^5 + q^4 - 1} \approx \frac{2}{2q^4 + 2q^3 + q^2}.$$

□

Instead of using elements of fields $\mathbb{F}_{q^2}$ and $\mathbb{F}_q$ as coordinates, we propose to use two rings $\mathbb{Z}_{n^2}, \mathbb{Z}_n$ and modulo operations. In such case sets P and L for the graph $F(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n^2})$ are the following :

$$P = \{(a, b, c) : a \in \mathbb{Z}_n, b \in \mathbb{Z}_{n^2}, c \in \mathbb{Z}_n\},$$
$$L = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{Z}_{n^2}, y \in \mathbb{Z}_{n^2}, z \in \mathbb{Z}_n\}.$$

We say point (p) is *incident* to line $[l]$, and we write $(p)I[l]$, if the following relations on their coordinates hold:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (y-b) \mod n^2 = (ax) & \mod n^2 \\ (z-c) \mod n = (ay + ay^n) & \mod n \end{array} \right. \tag{3}$$

Graphs defined in terms of finite rings as coordinates are bipartite, have girth at least 6 (probably 8, but not tested) and bi-regularity (n, n^2). In this case they are not affine part of generalized quadrangles. Set of lines L has n^5 elements and $|P| = n^4$. Set of vertices has $V = n^4(n+1)$ elements and set of edges consists of n^6 elements. By analogy with 2.1, the density of graphs $F(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n^2})$ is

$$\frac{2}{nq^4 + nq^3 + n^2}.$$

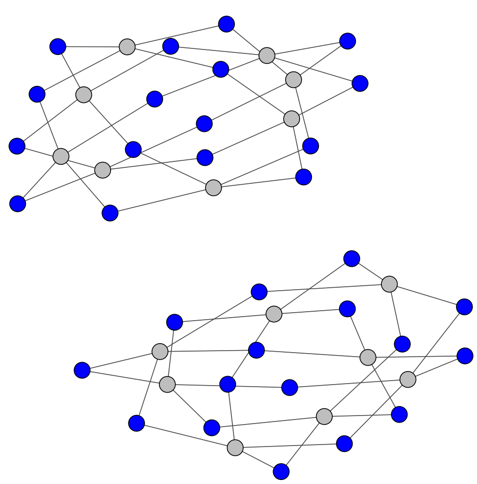


FIGURE 2. Graph $F(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$

Table 1 contains some properties of small representatives of described families. Figure 2 shows the smallest example: $F(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$ with $|P| = 16$ (grey colour) and set of lines with $|L| = 32$ elements. Each point has exactly 4 neighbours and each line has two neighbours.

TABLE 1. Properties of described graphs, for example number fields and finite rings

Graph	Graph density	biregularity	$\|V\|$	$\|E\|$
$F(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_9)$, $F(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_9)$	≈ 0.014	(3,9)	324	729
$F(\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_{16})$, $F(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{16})$	≈ 0.005	(4,16)	1280	4096
$F(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{25})$, $F(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{25})$	≈ 0.002	(5,25)	3750	15625
$F(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{36})$	≈ 0.001	(6,36)	9072	46656
$F(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{49})$, $F(\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{49})$	≈ 0.0006	(7,49)	19208	117649

The advantages of using finite rings (and modulo operations) instead of prime powers is that graphs $F(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n^2})$ are defined for all $n \geq 2$.

2.1. **Code construction.** Our graphs F are already biregular but they also have a structure that enables us to remove points and lines in such a way as to obtain a subgraph with different bidegree. This operation yields a code with better error correcting properties, but it reduces code rate and makes the code less convenient. We can construct LDPC codes in two ways:

(1) In graphs $F(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2})$ or $F(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n^2})$z set of lines is bigger than set of points: $|L| > |P|$, so lines correspond to code words bits and points correspond to parity checks. We decide to put one or zero in parity check matrix by checking if relations 2 between corresponding points and lines hold. Every bit of the codeword is checked by q or n parity checks. In this case parity check matrix H is simply a part of adjacency matrix of used graph. $|L| = q^5$ and $|P| = q^4$ (or $|L| = n^5$ and $|P| = n^4$) so the size of H is $q^4 \times q^5$ ($n^4 \times n^5$) and
$$R_C = \frac{q^5 - q^4}{q^5} = \frac{q^5(q-1)}{q^5} = \frac{(q-1)}{q}$$
($R_C = \frac{n-1}{n}$).

(2) Recalling that L is the set of all lines and P is the set of all points in graph F, in order to obtain a bi-degree (q, r) different from (q, q^2), where $q < r < q^2$ we propose to put restrictions on the coordinates ((n, r) different from (n, n^2), where $n < r < n^2$) in the following way. Let $R \subset \mathbb{F}_{q^2}$ ($R \subset \mathbb{Z}_{n^2}$) be an r-element subset and let V_L be the set of lines in a new bipartite graph. This is the following set:
$$V_L = \{[l] \in L | x \in R\},$$
where lines $[l]$ are represented by vectors $[x, y, z]$. Bi-degree reduction can only increase the girth. After reduction, the bi-degree graph can be disconnected and we use only one component to create a parity check matrix H. In this case parity check matrix H is a part of adjacency matrix of a subgraph of the used graph. $|V_L| = r \cdot q^3$ and $|P| = q^4$ (or $|V_L| = r \cdot n^3$ and $|P| = n^4$) so the size of H is $q^4 \times r \cdot n^3$ ($n^4 \times r \cdot n^3$) and
$$R_C = \frac{r \cdot q^3 - q^4}{r \cdot q^3} = 1 - \frac{q}{r} = \frac{(r-q)}{q}$$
($R_C = \frac{r-n}{n}$).

In first case $r = q^2$ and $s = q$ ($r = n^2$ and $s = n$). In the second case we choose r and $s = q$ ($s = n$). In regular LDPC code every row has the same constant weight r and every

TABLE 2. Properties of described $[N, K]$ codes for example number fields and finite rings

Graph	$N = \|L\|$	$R = \|P\|$	$K = N - R$	R_C	Girth
$F(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4)$	2^5	2^4	16	0.5	≥ 8
$F(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$	2^5	2^4	16	0.5	≥ 6
$F(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_9)$	3^5	3^4	162	≈ 0.67	≥ 8
$F(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_9)$	3^5	3^4	162	≈ 0.67	≥ 6
$F(\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_{16})$	4^5	4^4	768	0.75	≥ 8
$F(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{16})$	4^5	4^4	768	0.75	≥ 6
$F(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{25})$	5^5	5^4	2500	0.8	≥ 8
$F(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{25})$	5^5	5^4	2500	0.8	≥ 6
$F(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{36})$	6^5	6^4	6480	≈ 0.83	≥ 6
subgraph of $F(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{25})$	2000	625	1375	≈ 0.69	≥ 6
subgraph of $D(6, 7)$	2401	686	1715	≈ 0.71	≥ 10
subgraph of $D(8, 5)$	625	250	375	0.6	≥ 12
subgraph of $D(10, 3)$	243	162	81	≈ 0.33	≥ 14

column has the same constant weight s. Despite the fact that graphs F have very different bidegree, they give us regular LDPC codes. Every column of parity check matrix H has the same weight.

2.2. **Corresponding LDPC codes.** Transmission quality depends mainly on code, on decoding algorithm and level of noise in the communication channel. Code error correcting properties are often tested by determining the relationship between noise level and bit error rate. *Bit error rate* (BER) is the ratio of number of error bits to the total number of transferred bits. The generated codes are based on the described graphs and we performed computer simulation of a noisy channel. We encoded vectors, added White Gaussian Noise and decoded. The lack of short cycles guaranty convergence of the decoding algorithm. Presented LDPC codes work well with existing decoding algorithms, so there is no need do implement dedicated decoding technique. Table 2 contains properties of described $[N, K]$ codes and other previously known codes in order to compare thein properties. Fig. 3 and Fig. 4 present bit error rate for LDPC codes corresponding to described graphs. The code rates R_C of such codes are bigger than 0.5, so they are very convenient and have a small number of redundant bits. Tab. 2 contains properties of codes, for which results of the simulation are presented in this article, and parameters for a code based on graphs $D(n, q)$, $A(n, q)$ with similar code rate.

Codes corresponding to graphs from special family $D(n, q)$ were presented in (Guinand and Lodge, 1997a). The presented codes have as good error correcting properties as codes constructed by Guinand and Lodge in (Guinand and Lodge, 1997b), whose construction is based on infinite family of graphs $D(n, q)$ constructed by Lazebnik and Ustimenko (Lazebnik and Ustimenko, 1993). In the case $q = p$ is a prime number the MATLAB code to generate LDPC codes is available in (Polak, 2016).

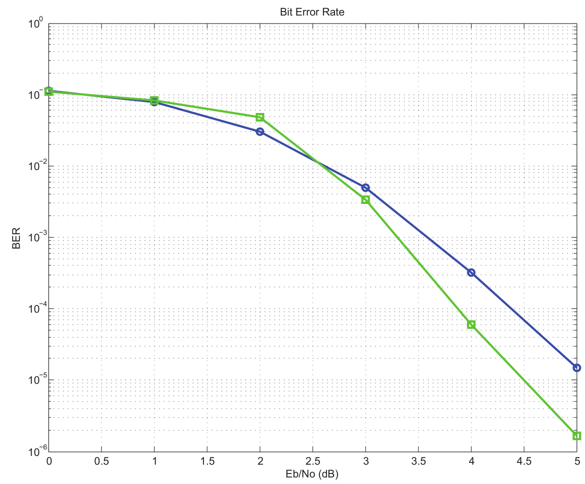


FIGURE 3. Bit error rate for $[243, 162]$ code (blue) corresponding to graph $F(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_9)$ and $[1024, 768]$ code (green) corresponding to graph $F(\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_{16})$

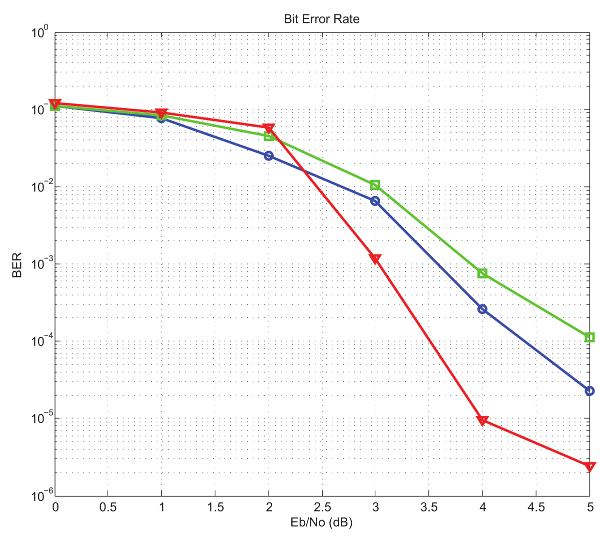


FIGURE 4. Bit error rate for $[243, 162]$ code (blue) corresponding to graph $F(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_9)$, $[1024, 768]$ code (green) corresponding to graph $F(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{16})$ and $[2000, 1375]$ code (red) corresponding to subgraph of $F(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{25})$

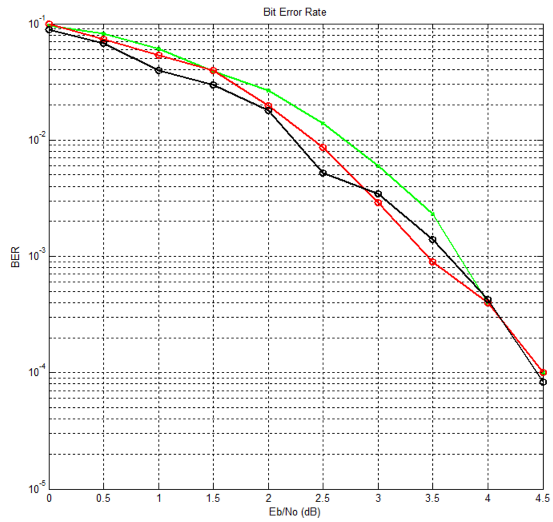


FIGURE 5. Bit error rate for $[2401, 1715]$ code (green) corresponding to graph $D(6, 7)$, $[625, 375]$ code (red) corresponding to graph $D(8, 5)$ and $[243, 81]$ code (black) corresponding to graph $D(10, 3)$

Fig. 5 presents bit error rate for example LDPC codes corresponding to graphs $D(n, q)$. Green and red codes have similar code rate like codes based on graphs F. Comparing figures Fig. 3 and Fig. 4 with Fig. 5 we can see that our codes perform very well and have better error correcting properties.

3. CONCLUSION

The present work shows a modification of the family of graphs introduced by Ustimenko and Woldar by changing the finite field to a finite ring. LDPC codes are constructed based on the original family and on the modified one. An analysis is performed on such codes as well as a BER simulation. A comparison of the results with former graph based codes shows an improvement of the error correcting properties with the graphs introduced here. It's also important to mention that they can easily be combined and work with existing decoding techniques.

REFERENCES

Biggs, N. 1993. *Algebraic graph theory*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press.

Bollobs, Bla. 1978. *Extremal graph theory*, London Mathematical Society Monographs, vol. 11, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York. MR506522

Brouwer, A. E., A. M. Cohen, and A. Neumaier. 1989. *Distance-regular graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 18, Springer-Verlag, Berlin. MR1002568

Gallager, R. G. 1962. *Low-density parity-check codes*, IRE Trans. **IT-8**, 21–28. MR0136009

Guinand, P. and J. Lodge. 1997a. *Graph theoretic construction of generalized product codes*, Proc. IEEE International Symposium on Information Theory ISIT'97.

Guinand, P. and J Lodge. 1997b. *Tanner type codes arising from large girth graphs*, Proc.Canadian Workshop on Information Theory CWIT'97.

Huffman, W. Cary and Vera Pless. 2003. *Fundamentals of error-correcting codes*, Cambridge University Press, Cambridge. MR1996953

Lazebnik, Felix and Vasiliy A. Ustimenko. 1993. *New examples of graphs without small cycles and of large size*, European J. Combin. **14**, no. 5, 445–460. Algebraic combinatorics (Vladimir, 1991). MR1241911

Polak, Monika. 2016. *Some implementations of a(n,q) and d(n,q) graphs*.

Polak, Monika and Vasyl Ustimenko. 2011. *On LDPC codes corresponding to affine parts of generalized polygons*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. AI-Inform. **11**, no. 2, 143–152. MR3164287

Seress, kos. 2000. *Large families of cospectral graphs*, Des. Codes Cryptogr. **21**, no. 1-3, 205–208. Special issue dedicated to Dr. Jaap Seidel on the occasion of his 80th birthday (Oisterwijk, 1999). MR1801201

Shannon, C. E. 1948. *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27**, 379–423, 623–656. MR0026286

Ustimenko, V. A. 2009. *Algebraic groups and small world graphs of high girth*, Albanian J. Math. **3**, no. 1, 25–33. MR2487018

______. 2011. *Algebraic graphs and security of digital communications*, Maria Curie-Skodowska University. Institute of Computer Science.

Ustimenko, V. A. and A. J. Woldar. 2003. *Extremal properties of regular and affine generalized m-gons as tactical configurations*, European J. Combin. **24**, no. 1, 99–111. MR1957968

Ustimenko, Vasiliy A. 2005. *Maximality of affine group, and hidden graph cryptosystems*, Algebra Discrete Math. **1**, 133–150. MR2148826

ALBANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Pages 47–80
ISSN: 1930-1235; (**2016**)

MËSIMDHËNIA E MATEMATIKËS NËPËRMJET PROBLEMEVE KLASIKE

BEDRI SHASKA AND TANUSH SHASKA

Kushtuar ish-studentëve tanë të të gjitha moshave.

Abstract. Në këtë artikull ne trajtojmë se si mësimdhënia e matematikës në shkollat 9-vjeçare dhe të mesme mund të përmirësohet në mënyrë të ndjeshme kur motivimi i koncepteve dhe ideve bëhet nëpërmjet problemeve klasike dhe historisë së matematikës. Kjo përmirëson intuitën e studentëve, zgjon kuriozitetin e tyre, shmang mësimin përmendësh të formulave të panevojshme, dhe i vendos konceptet në këndvështrimin e duhur historik. Ne ilustrojmë me disa probleme si diagonalizimi i formave kuadratike, integralet eliptike, dallorin e polinomeve me gradë të lartë, dhe disa ndërtime gjeometrike.

Abstract. In this paper we discuss how teaching of mathematics for middle school and high school students can be improved dramatically when motivation of concepts and ideas is done through the classical problems and the history of mathematics. This method improves intuition of students, awakens their curiosity, avoids memorizing useless formulas, and put concepts in a historical prospective. To illustrate we show how diagonalizing quadratic forms, elliptic integrals, discriminants of high degree polynomials, and geometric constructions can be introduced successfully in high school level.

Mathematics Subject Classes 2010: 94B05; 97A30; 97C70; 97D40
Keywords: mathematics education; teaching methods; mathematics curriculum

1. Hyrje

Programet mësimore të matematikës gjithmonë kanë shkaktuar diskutime jo vetëm mbi përmbajtjen e tyre, por edhe mbi këndvështrimin pedagogjik, psikollogjik, dhe filozofik që duhet të kenë programe të tilla. Diskutime këto që kanë ndodhur jo vetëm në vendin tonë, por në gjithë vendet e tjera. Pikat kryesore të diskutimit janë të njëjta pothuajse në gjithë vendet e botës dhe përmblidhen në përgjigjen e pyetjes që vijon: Cili është qëllimi apo objektivi i programit të matematikës në arsimin 12-vjeçar?

English title: **Teaching of mathematics through classical problems**.

The first author taught mathematics in middle school and high school in Albania during the period 1960-1995. In 1996, he was awarded the medal "Mësues i popullit" from the President of Albania for his services in teaching, the highest award awarded in teaching in Albania.

Pyetja kjo që ka përgjigje të ndryshme të cilat varen kryesisht nga politikat arsimore të çdo vendi. Pak a shumë përgjigjet përmblidhen si më poshtë:

- Të pregatisë nxënës me një formim të përgjithshëm matematik për të përballuar me sukses sfidat e jetës. Këtu futet kryesisht grupi i nxënësve për të cilët njohuritë matematike nuk përbëjnë bazën e profesionit të tyre.
- Të pregatisë nxënës me një formimin e nevojshëm matematik për studentët e shkencave dhe inxhinjerive. Këtu futet kryesisht grupi i nxënësve për të cilët njohuritë matematike do të jenë baza e profesionit të tyre.
- Të pregatisë matematikanët e ardhshëm apo mësuesit e ardhshëm të matematikës.

Zakonisht sisteme të ndryshme arsimore përpiqen që të realizojnë të tre këto objektiva, pavarësisht se metodat dhe rruga ndryshon sipas vendeve të ndryshme. Duhet theksuar se tashmë edhe tek profesionet ku roli i matematikës konsiderohej minimal si shkencat shoqërore, mjekësore,juridike, roli i matematikës në dekadat e fundit është rritur në mënyrë të konsiderueshme falë rolit të statistikës, "big data", aplikimeve të matematikës në mjekësi, në shkencat biologjike, etj.

Nga ana pedagogjike diskutimi kryesor është se cila është rruga më e mirë për të realizuar këto objektiva? Në këtë artikull modest, ne do të përpiqemi të sygjerojmë disa ide se si të rrisim efektivitetin e mësimdhënies në orën e matematikës.

Ideja kryesore e këtij artikulli është që mësimdhënia e matematikës duhet të bëhet nëpërmjet problemeve klasike që kanë zhvilluar matematikën si shkencë dhe historia e zhvillimit të matematikës duhet të jetë pjesë e mësimdhënies. Kjo i jep matematikës jetë në klasë dhe e bën të jetë diçka më shumë se një grup formulash të thata. Për më tepër kjo motivon konceptet bazë dhe u jep nxënësve një arsye më shumë përse këto koncepte janë të rendësishme dhe duhen mësuar.

Në proçesin e studimit të literaturës së këtij artikulli ne zbuluam një sasi të konsiderueshme artikujsh të tjerë që kanë mështetur këtë ide. Më i njohuri dhe më i përkushtuari pas kësaj ideje është Felix Klein në [20–27]. Filozofia e Klein ka dominuar pedagogjinë e matematikës në fillimet e shekullit të XX, megjithëse mund të themi se implementimi i kësaj filozofie në masë lë shumë për të dëshiruar. Këto shënime janë organizuar si më poshtë:

Në Kreun 2, ne japim një përshkrim të shkurtër të disa problemeve dhe koncepteve ku një mësues i talentuar mund të zgjerohet më shumë në program dhe si pasojë të lerë një mbresë të thellë në formimin matematik të nxënësve. Ne nuk pretendojmë se lista e problemeve që ne sygjerojmë është e plotë, Një listë e tillë mund të plotësohet më tepër duket pasur parasysh eksperiencat individuale të secilit mësues dhe grupin e nxënësve.

Në Kreun 3 ne diskutojmë rolin kritik dhe konstruktiv të historisë së shkencës në formimin e studentëve të matematikës. Ky rol duhet të jetë i ingranuar me programin. Ne duhet të përpiqemi t'u shpjegojmë nxënësve jo vetëm teoritë që i mbijetuan kohës, por edhe përpjekjet e dështuara pasi nga këto dështime në shumicën e rasteve mësohet shumë.

Në Kreun 4 ne përqëndrohemi tek problemi më klasik dhe më themelor i matematikës, ai i zgjidhjes së ekuacioneve polinomiale. Pjesa kryesore e matematikës mund të lidhet me këtë temë. Pikërisht algjebra, gjeometria, gjeometria algjebrike, një pjesë e mirë e analizës, kriptografia, teoria e kodeve, etj i kanë themelet e tyre tek polinomet ose zgjidhja e ekuacioneve polinomiale ose siç quhen ndryshe ekuacione algjebrike. Si mund të trajtohet kjo temë në kontekstin e duhur historik duke i mësuar nxënësit jo thjesht formulën e zgjidhjes së ekuacionit kuadratik, por edhe diskriminantin, polinomet simetrike, teorinë Galua, format binare, algjebrën lineare, teorinë e invariantëve, seritë e Taylor, varietetet algjebrike, kurbat eliptike dhe hipereliptike e shumë koncepte të tjera të matematikës bashkëkohore?

Në Kreun 5 ne trajtojmë konceptin e diskriminantit nga një këndvështrim intuitiv dhe historik. Eshtë ndoshta shembulli më i mirë që një koncept kaq intuitiv është kthyer nga programet mësimore ne një koncept të thatë dhe në një formulë që shumica e nxënësve dhe mësuesve nuk ja kuptojnë vlerën. Duhet pranuar se ky nuk është vetëm problem i shkollave tona. Shumica e studentëve të matematikës mësojnë për diskriminantin në algjebrën e lartë dhe edhe atëherë thjesht formulat bazë dhe asgjë më shumë. Cila është lidhja e diskriminantit të një polinomi dhe determinantit (ose përcaktorit) të një matrice, kur filluan këto dy koncepte të ndaheshin nga njeri-tjetri në historinë e matematikës?

Format binare trajtohen në Kreun 6. Koncepti i formave është një nga konceptet bazë të matematikës që ka luajtuar dhe vazhdon të luajë një rol të rëndësishëm në matematikë, por që çuditërisht trajtohet shumë pak në programet e matematikës së shkollës së mesme. Ne trajtojmë vetëm format kuadratike megjithëse me fare pak përpjekje gjithë teoria mund të trajtohet për gjithë format me gradë $n \geq 2$. Edhe vetëm me format kuadratike ne mund të ngremë një teori të tërë dhe të drejtojmë nxënësin tek koncepte fondamentale të matematikës si hapësirat vektoriale, veprimi i një grupi mbi një bashkësi, ndryshimi i koordinatave, teoria e invariantëve dhe puna kolosale e matematikanëve te shekullit të XIX si Clebsch, Gordan, Bolza, Hilbert, etj.

Format kuadratike mund të hapin edhe horizonte të tjera si teorinë e reduktimit (shih Beshaj [6]), bashkësitë Julia [19], gjeometrinë hiperbolike, etj. Ne zhvillojmë aq teori në Kreun 6 sa të klasifikojmë gjithë prerjet konike dhe sipërfaqet quadratike. Që kjo të realizohet saktë ne duhet të prezantojmë nxënësit me matricat, eigenvlerat dhe eigenvektorët, procesin e diagonalizimit të një matrice, gjetjen e bazës ortonormale të eigenhapësirave. Ky është një kurs i plotë i algjebrës lineare i cili vjen si një aplikim i një ushtrimi në dukje elementar atij të klasifikimit të prerjeve konike. Në të vërtetë kjo është edhe ana historike se si këto koncepte janë zhvilluar. Kush i mëson këto koncepte pa kuptuar motivimin e tyre historik duhet të ndihet sikur ka parë një film që nuk e kuptoi dot kurrë.

Në Kreun 7 ne studiojmë ndërtimet gjeometrike. Ndërtimet gjeometrike janë probleme klasike që mund të implementohen me sukses që në klasat e 5-ta dhe të 6-ta. Nga ndërtimet gjeometrike mund të zhvillohet koncepti i fushës dhe shtrirjes algjebrike. Ne japim një përshkrim të shkurtër të ndërtimeve algjebrike dhe vërtetimin e rezultateve kryesore. Ne supozojmë se lexuesi ka njohuri mbi fushat të krahasueshme me nivelin e [35].

Ja vlen të përmendet se edhe një program ideal nuk do të funksiononte në se efektivi mësimdhënës nuk është në gjendje të kuptojë dhe implementojë me sukses këto koncepte intuitive. Pikërisht për këtë, formimi i një plejade matematikanësh me koncepte të qarta është më se i nevojshëm.

Ne japim një sasi të konsiderueshme të literaturës, sidomos të disa botimeve të fundme në gjuhën Shqipe ku disa nga këto tema trajtohen në detaje [35–37]. Duke mos pretenduar se kjo është fjala e fundit për mësimdhënien e matematikës, ne shpresojmë që mësuesit e matematikës do ti gjejnë këto ide një ndihmë në profesion e tyre të vështirë.

2. NJË VËSHTRIM I SHKURTËR MBI DISA PROBLEME TË VEÇANTA NË PROGRAMIN E MATEMATIKËS

Njerëz të ndryshëm kanë perceptime të ndryshme mbi nivelin a nxënësve tanë sidomos para vitit 1990. Pjesa më e madhe me të drejtë mendojnë se nxënësit tanë ishin të pregatitur mjaft mirë nga ana matematike. Nga ana tjeter nuk mund të mos mohohet se programi i matematikës ka pasur dhe vazhdon të ketë probleme të shumta. Ajo çka vihet re nga nxënësit shqiptarë që shkojnë me studime jashtë shtetit është se në shumicën e rasteve ata janë të pregatiur në mënyrë të pranueshme nga shkollat tona. Ajo çfarë nuk kuptohet nga shumica e njerëzve është se nxënësit shqiptarë këtë e kanë arritur me një punë të jashtëzakonshme, se avantazhi më i madh i tyre karshi studentëve të tjerë ka qenë pikërisht disiplina në punë. Duke i shtuar kësaj edhe njohuritë e përfituara nga një sistem ku shkohej në shkollë gjashtë ditë në javë, ku bëhej matematikë çdo ditë për 12 vjet me rradhë, atëherë nxënësi i mirë i dalë nga shkollat tona kishte një avantazh të madh me shumicën e bashkëmoshatarëve te vet nga vendet e tjera.

Para shumë vjetësh një nxënës i vitit të tretë të një prej gjimnazeve të Vlorës, i bëri këtë pyetje njërit prej autorëve të këtij artikulli: *Profesor, më kanë thënë që shkolla në Amerikë është më e lehtë se në Shqipëri. Eshtë e vërtetë?*

Ka diçka me substancë në këtë pyetje. Natyrisht ne po shohim përtej faktit që nxënës të shkëlqyer tanët shkojnë në shkolla mesatare në Amerikë apo vende të tjera. A janë programet e matematikës apo tekstet që përdoren më të thjeshta për nxënësin në vendet e tjera? A mund të përmirësohen programet tona që mësimdhënia e matematikës të bëhet më efiçente? Përgjigja është "po". Për nxënësin e mirë shkolla është më e lehtë në Amerikë, sepse ka programe solide, tekste të shkëlqyera dhe pedagogë që kuptojnë jo vetëm subjektin që japin, por edhe shumë më tej.

Më poshtë po japim disa shembuj konkretë ku disa koncepte mund të trajtoheshin më mira në programin e matematikës.

Problem 1. *Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Shumica e nxënësve tanë të vitit IV, do ta bëjnë pa vështirësi këtë ushtrim, por problemi qëndron diku tjetër. Çfarë është **bashkësia e përcaktimit**? Ne përdorim termin **përkufizim** dhe jo **përcaktim**. Ndryshimi midis dy termave në gjuhën Shqipe është i qartë. Atëherë përse ky konfuzion në matematikë? Ne i kemi ngjitur një koncepti fare të qartë matematik një term tepër konfuz. Në fakt termi **bashkësia e përkufizimit** duhet përdorur sepse ne përkufizojmë një funksion nuk e përcaktojmë atë.

Vazhdojmë me një shembull nga fizika.

Problem 2. *Një nga konceptet kryesorë në historinë e shkencës eshte koncepti i **shpejtësisë** (ose ajo çka në Anglisht quhet **velocity**). Natyrisht koncepti i saktë i shpejtësisë jepet vetëm nëpërmjet derivatit.*

A e kuptojnë nxënësit dhe mësuesit tanë ndryshimin midis **shpejtësisë** dhe **shpejtësisë mesatare** (në Anglisht **velocity** dhe **speed**). Në fjalët e një studente shqiptare që studion në Princeton, - "Ndryshimin e kuptova vetëm në Princeton".

A kuptohet nga nxënësit dhe mësuesit tanë rëndësia historike e përkufizimit të saktë të shpejtësisë (pra të derivatit të funksionit). Ishte pikërisht nevoja e përkufizimit saktë të shpejtësisë ajo që detyroi Newtonin së pari të zhvillonte Kalkulusin dhe së dyti të formulonte tre ligjet bazë te mekanikës të cilat ishin pikënisja e fizikës dhe e gjithë shkencës moderne.

Shumica e gjuhëve sot kanë terma të veçantë për shpejtësinë dhe shpejtësinë mesatare, por në tekstet dhe programet tona këto ndërthuren si pa të keq. Për shembull, kur një mësues i klasës së tretë jep problemin:

Një udhëtar shkoi nga Vlora në Fier për 5 orë. Distanca Vlorë-Fier është 35 km. Sa është shpejtësia?.

Eshtë e qartë se këtu bëhet fjalë për shpejtësinë mesatare dhe jo shpejtësinë e çastit. Madje në të folurën e përditshme shumica e përdorin fjalën *shpejtësi* si shpejtësi mesatare. Janë pikërisht këto pakujdesi që gjenden kudo në tekstet tona që i bejnë gjërat tepër të vështira për nxënësit tanë.

2.1. **Koncepti i dallorit të polinomeve.** Vazhdojmë me një shembull tjetër nga matematika e klasës së 10-të. Dallori i polinomeve është një nga konceptet themelore të matematikës. Në programet tona trajtohet fare cekët. Supozojmë se u japin një grupi nxënësish dhe studentësh problemin e mëposhtëm:

Pyetje 1. *Jepet polinomi quadratic*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Përkufizoni dallorin e $f(x)$.

Shumica e nxënësve të shkollave të mesme si dhe gjithë mësuesët e matematikës do të japin përgjigjen e menjëhershme

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A është kjo përgjigja e saktë? Shumë prej lexuesve do të thonë se 'po'. Por në se pyetja është të përkufizohet dallori i polinomit të gradës së tretë

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

atëherë shumica dërrmuese e nxënësve dhe mësuesve nuk do të jenë në gjendje të japin një përgjigje të saktë. Kjo përforcohet edhe më shumë në se pyesim për dallorin e një polinomi të gradës $n \geq 4$. Pra ç'është dallori? A e kuptojnë nxënësit dhe mësuesit tanë konceptin e dallorit?

Në se në algjebrën e lartë jepet problemi që vijon:

Problem 3. *Jepet një polinom $p(x)$ i gradës $n \geq 2$*

$$p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0.$$

Përkufizoni dallorin e këtij polinomi.

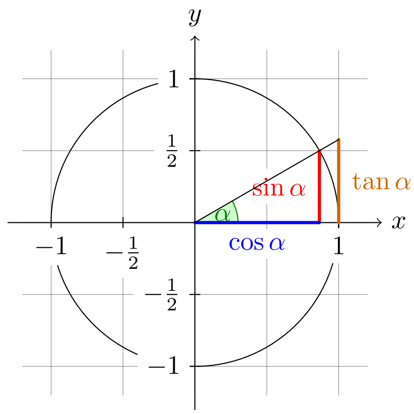
A është gati nxënësi të përgjithsojë konceptin e dallorit të polinomit kuadratik tek një polinom e gradës $n \geq 2$?

Natyrisht, gjëja më e lehtë nga ana pedagogjike është të flasësh për zgjidhjen e ekuacionit kuadratik kur $\Delta < 0$. Eshtë pikërisht këtu që në mënyrë fare të vazhdueshme mund të prezantohen numrat kompleksë dhe jo vetëm të prezantohen, por të shpenzohet kohë e mjaftueshme me bashkësinë e numrave kompleksë.

2.2. **Një shembull nga trigonometria, rrethi njësi.** Nxënësit tanë kanë bërë trigonometri, në programin para 1990, për gjithë vitin III-të të shkollës së mesme. Kjo siguronte një bazë solide për gjithë studentët e mirë. Në fakt në shumicën e programeve të matematikës në vendet perëndimore trigonometria bëhet vetëm një simestër ose ndërthuret në simestra të ndryshëm, por asnjëherë nuk zë kohën ekuivalente me dy simestra. Funksionet trigonometrike janë:

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \tan x, \quad f(x) = \cot x,$$

Në rrethin njësi ato paraqiten si në figurë.



Një problem disi interesant nga klasa e 9-të është të shprehësh gjithë funksionet trigonometrike si funksione racionale të $\tan\frac{\alpha}{2}$. Një kërkesë e tillë i duket disi e çuditshme një nxënësi të vitit të III-të.

Problem 4. *Shprehni funksionet* $\sin\alpha$ *dhe* $\cos\alpha$ *në varësi të funksionit* $\tan\frac{\alpha}{2}$.

Shumica e nxënësve janë në gjendje ta bëjnë këtë ushtrim dhe të vërtetojnë formulat e mëposhtme:

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Historia në programet tona mbyllet këtu, por kjo duhet të ishte vetëm fillimi i një dashurie të bukur midis nxënësit dhe trajetoreve algjebrike.

Ne do të shohim më poshtë se si një ushtrim kaq i thjeshtë mund të përdoret për të prezantuar nxënësit me ide dhe koncepte të thella matematike si ai i pikave racionale në trajektoret algjebrike.

Ndoshta një problem fare i natyrshëm që mund të bëhej me lehtësi në trigonometri ishte koncepti i rrenjëve të njësisë. Për shembull, sa nga nxënësit apo mësuesët tanë mund ti përgjigjen saktë pyetje së mëposhtme.

Pyetje 2. *Gjeni gjithë rrënjët e ekuacionit*

$$x^3 = 1$$

Koncepti i rrënjëve të njësisë me shumë lehtësi na çon tek numrat kompleksë, shumëzimi i numrave kompleksë, grupi i rrethit njësi, dhe grupet ciklikë.

2.3. **Integrimi i funksioneve racionalë.** Le të supozojmë se audiencës sonë i shtrojmë pyetjen:

Pyetje 3. *Jepet funksioni racional*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

ku $p(x), q(x)$ *janë polinome me koeficientë realë. Përshkruani një mënyrë për të llogaritur integralin*

$$\int f(x)\, dx$$

Ndoshta pyetja e mësipërme mund të thjeshtohet në një pyetje më konkrete,

Shembull 1. *Njehsoni* $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$.

A është në gjendje maturanti ynë të mbaroj një ushtrim të tillë? Për më tepër është një nga klasat më elementare të funksioneve. Për një trajtim të kësaj teme lexuesi mund të lexojë [37, Kap. 6].

Më poshtë po japin një zgjidhje të këtij ushtrimi për të kuptuar që trajtimi është fare elementar. Meqënëse $x^3+4x = x(x^2+4)$ dhe nuk mund të faktorizohet më tej mbi numrat realë, atëherë ne mund të shkruajmë

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Duke shumëzuar të dy anët me $x(x^2+4)$, kemi

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

Duke barazuar koefiçentët pranë fuqive të njëjta të x, kemi $A = 1$, $B = 1$, dhe $C = -1$ dhe prej këtej

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right)\, dx$$

Në mënyrë që të integrojmë termin e dytë, e ndajmë atë në dy pjesë:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\, dx = \int \frac{x}{x^2+4}\, dx - \int \frac{1}{x^2+4}$$

Bëjmë zëvendësimin $u = x^2+4$ në integralin e parë të kësaj pjese, kështu që $du = 2x\, dx$ dhe përfundimisht kemi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K\end{aligned}$$

A mund të përgjithsohet kjo teknikë tek gjithë integralet e funksioneve racionalë? Cila është teorema nga ana teorike që kjo metodë të funksionojë për gjithë funksionet racionalë?

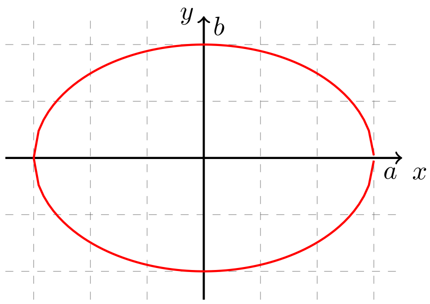
Për çudi kjo metodë elementare nuk është trajtuar në programet tona megjithëse bazohet në një fakt në dukje elementar, por shumë themelor nga ana teorike.

Lemma 1. *Çdo polinom me koefiçenta realë faktorizohet si prodhim faktorësh linearë ose kuadratikë.*

Arsyeja që kjo lemë është e vërtetë është sepse fusha e numrave realë është invariant nën konjugimin kompleks. Pra një tjetër rezultat goxha i pafajshëm në dukje por me rendësi të madhe teorike.

2.4. **Elipsi dhe rrethi.** Le të konsiderojmë disa ide nga gjeometria. Jepet ekuacioni i nje elipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Pyetje 4. *A mund të gjeni formula për sipërfaqen dhe perimetrin e këtij elipsi?*

Nxënësit e mirë padyshim që mund ta zgjidhnin një ushtrim të tillë. Duke e zgjidhur këtë ekuacion në lidhje me y, ne marrim

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

ose

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Meqë elipsi është simetrik në lidhje me të dy boshtet koordinative, sipërfaqja totale A është katërfishi i sipërfaqes së kuadrantit të parë.

Pjesa e elipsit në kuadrantin e parë jepet nga funksioni

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq a \tag{1}$$

dhe kështu

$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Për të gjetur këtë integral bëjmë zëvendësimin

$$\boxed{x = a \sin t}.$$

Atëherë $dx = a \cos t \, dt$. Për të ndryshuar kufijtë e integrimit, shohim se kur $x = 0$, $\sin t = 0$, pra $t = 0$ ndërsa kur $x = a$, $\sin t = 1$, pra $t = \pi/2$. Gjithashtu

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a|\cos t| = a \cos t$$

meqë $0 \leq t \leq \pi/2$. Prej nga,

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \cos t \, dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt \\ &= 2ab \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) = \pi ab. \end{aligned}$$

Vërtetuam kështu se sipërfaqja e elipsit me gjysmëboshte a dhe b është

$$\boxed{A = \pi ab}$$

Në veçanti kur marrim $a = b = r$, kemi vërtetuar formulën se sipërfaqja e rrethit me rreze r është πr^2.

Në nivelin e shkollave tona ku lloj integrali është e mundur që të bëhet. Ajo çka është e vecanta është se na orienton në dy probleme interesante. Së pari, përgjithësimi i zëvendësimit të mësipërm na çon tek *zëvendësimet trigonometrike* dhe prej andej tek formulat e integrimit për

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \quad \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

Së dyti, gjetja e perimetrit të elipsit na çon drejt një lëndine plot me lule, atë të integraleve eliptike.

Gjatësia e grafikut të një funksioni $y = f(x), \quad a \leq x \leq b$ jepet nga formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

shihni [37, Kapitulli 9]. Në rastin tonë, $f(x)$ jepet ne Eq. (1). Derivati i tij është

$$f'(x) = \frac{b}{2a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Pra perimetri i elipsit është

$$P = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \, dx = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$$

ku $e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Duke bërë zëvendësimin

$$\boxed{x = a \sin t}$$

lexuesi të vërtetojë se

$$P = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} \, dt$$

Ky quhet një **integrali i plotë eliptik i llojit të dytë**. Prej tij marrin emrin *trajektoret eliptike* që janë nga objektet mjaft popullore të matematikës. Integralet eliptike ishin edhe pikënisja e punës së Abelit dhe Jacobit që vazhdoi më pas me Riemann.

Eshtë për të ardhur keq që në programet e shkollave të mesme integralet eliptike nuk trajtohen fare. Ato janë të vështira për tu zgjidhur, por një pjesë e konsiderueshme e matematikës moderne nisi pikërisht nga integrale të tilla si për shembull funksionet theta [5], integralet hypereliptike dhe supereliptike, trajektoret hipereliptike dhe supereliptike [7], etj.

Më poshtë po japim një tjetër problem në dukje shumë afër problemit të mësipërm, por që na çon në një fushë tjetër të matematikës.

Pyetje 5. *A mundet qe ky elips të transformohet në një rreth me një ndryshim koordinatash të planit? A ndryshojnë sipërfaqja dhe perimetri gjatë këtij transformimi?*

Zgjidhja e këtij problemi është një mundësi për të prezantuar nxënësit me transformimet lineare dhe matricat ortogonale. Ne flasim pak për to në vijim.

2.5. **Prerjet konike.** Kjo ideja e transformimeve na çon edhe më thellë. Naturisht në se ne transformojmë planin në një sistem tjetër koordinativ, për shembull origjina shkon tek pika $(2, 3)$, atëherë ekuacioni i elipsit bëhet

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1.$$

Ekuacion që ndryshe shkruhet

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x - 6a^2y = a^2b^2 - 4b^2 - 9a^2$$

Ne e dimë qe ky është ekuacioni i një elipsi, edhe pse kjo nuk është plotësisht e lehtë të verifikohet.

A mund ta përgjithsojmë këtë rast në një teori më të përgjithshme. Për shembull, jepet ekuacioni i përgjithshëm i gradës së dytë

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + s = 0$$

Pyetje 6. *Për ç'vlera të koefiçentëve a, b, c, d, f, s grafiku i mësipërm është një rreth, elipse?*

Por ndoshta edhe më themelore është pyetja

Pyetje 7. *Jepet ekuacioni i gradës së dytë*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = \lambda \tag{2}$$

Çfarë paraqet një ekuacion i tillë nga ana grafike? A mund të gjendet një metodë që kësaj pyetje t'i jepet përgjigje thjesht nga koefiçentët a, b, c, d, e, λ, pa ndërtuar grafikun?

Nxënësi ynë e di se grafikët e ekuacineve të tilla janë grafikët e prerjeve konike, pra prerjet e një koni të dyfishtë me një plan si në figurën më poshtë.

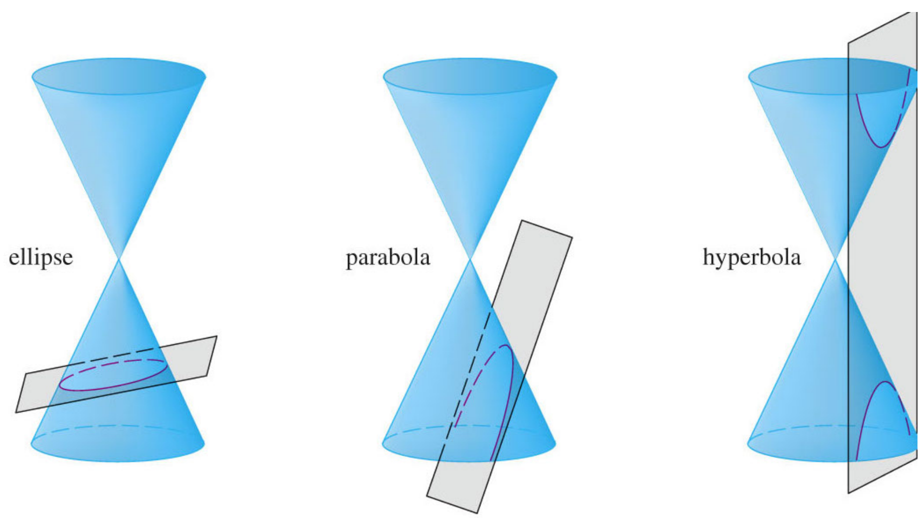


Figure 1. Prerjet konike

Nxënësit e shkollave tona e dinë që, elipsi, parabola, dhe hiperbola kanë përkatësisht ekuacione

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1, \qquad y^2 = 4\lambda_1 x, \qquad \frac{x^2}{\lambda_1^2} - \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1 \tag{3}$$

për disa vlera jozero λ_1, l_2. Rrethi është rasti i veçantë i elipsit kur $\lambda_1 = \lambda_2$.

Secili prej këtyre ekuacioneve është shumë herë më i thjeshtë se ekuacioni Eq. (2) dhe kjo sepse sistemi koordinativ është zgjedhur në qendrën e rrethit, elipsit, hiperbolës, apo kulmin e parabolës dhe boshtet në mënyrë të përshtatshme. Këto ekuacione kanë të mirën e madhe që ne e dimë formën e grafikut thjesht duke parë ekuacionin. Atëherë shtrohet pyetja, e kuptueshme nga çdo gjimnazist:

Pyetje 8. *Si duhet ndryshuar sistemi yne koordinativ që ekuacioni (2) të transformohet në një nga ekuacionet e mësipërme?*

Rëndësia e kësaj pyetje dhe konceptet që mund të zhvillohen duke ju përgjigjur kësaj pyetje janë një mrekulli e vërtetë. Për herë të parë nxënësi ekspozohet tek ideja që ekuacionet janë diçka pak e rëndësishme, diçka që ndryshon. Eshtë objekti gjeometrik ai që nuk ndryshon. Apo ka vallë ndonjë koncept sasior që mund të shprehet në varësi të koefiçentëve dhe që nuk ndryshon pavarësisht ndryshimit të sistemit koordinativ?

Si pa kuptuar ne jemi futur në teori invariantesh, një nga degët më aktive të matematikës së shekullit XIX. Gjithashtu, pikërisht ky diskutim kaq modest është fillimi i gjeometrisë ose më mirë i gjeometrisë algjebrike, një nga degët më aktive të matematikës moderne. Ne do ti japim zgjidhje pyetjes së mësipërme ne kreun në vazhdim.

Pyetje 9. *A mund të gjejmë një parametrizim racional të prerjeve konike? Ose me konkretisht, a mund të shprehet ekuacioni i çdo prerje konike si ekuacion parametrik $(x(t), y(t))$ ku $x(t)$ dhe $y(t)$ janë funksione racionalë?*

Kujtoni që është një problem elementar që zakonisht është bërë me nxënësit e mirë që ekuacionet parametrik i elipsit është

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta$$

i parabolës

$$x = at^2, \qquad y = 2at$$

dhe i hiperbolës

$$x = a\sec\theta, \qquad y = b\tan\theta.$$

Natyrisht parabola ka një parametrizim racional. Për elipsin dhe hiperbolën mjafton të zevendësojmë $t = \tan\frac{\theta}{2}$ dhe ne bazë të Problemit 4 ne marrim një parametrizim racional. Pra kemi se prerjet konike gjithmonë kanë një parametrizim racional. Për entuziastuet e gjeometrisë algjebrike, kjo do të thotë se **prerjet konike janë trajektore algjebrike me genus zero**. Kjo konkluzion na hap një pyetje tjetër:

Pyetje 10. *A ka ndonjë rëndësi ky parametrizimi racional?*

Si pa dashur jemi futur në problemin klasik të Diofantit, atë të gjetjes së zgjidhjeve integrale (në mënyrë ekuivalente racionale për ekuacionet homogjenë) të ekuacioneve algjebrikë.

Ne nuk do të zgjerohemi shumë në këtë fushë, por thjesht duam të theksojmë se gjithë teoria moderne e numrave vërtitet rreth këtij problemi. Duam gjithashtu të theksojmë që një ekuacion algjebrik që ka një parametrizim racional ka një bashkësi të pafundme zgjidhjesh racionale.

Eshtë gjithashtu me vlerë për tu theksuar se shumica e ekuacioneve polinomiale kanë vetëm njue numër të fundëm zgjidhjesh racionale. Kjo është teorema Faltings (83) dhe konsiderohet si teorema e shekullit të XX.

Pra prerjet konike nga ky këndvështrim duken mjaft speciale dhe nga një ushtrim elementar i trigonomestrisë ne kuptojmë përse ato janë tue tilla.

2.6. **Maximumet dhe minimumet lokale te funksioneve.** Vazhdojmë me një shembull tjetër nga analiza. Një pjesë e mirë e vitit IV në analizë kalohet me gjetjen e maksimumeve dhe minimumeve lokale të funksioneve me një ndryshore. Nxënësit harxhojnë me javë të tëra duke bërë probleme optimizimi. Asnjë fjalë në analizën e vitit IV nuk thuhet për funksionet me dy ndryshore. Mendoni sa kuriozitet do të zgjonte tek nxënësi ideja e gjetjes se majave të kodrave dhe thellësive të detit, apo llogaritja e sipërfaqes së një relievi. Ishtje një pyetje që shqetësonte autorin e dytë të këtij artikulli si adoleshent: *Sa sipërfaqe reale tokë ka Shqipëria?*

Pra problemi i mëposhtëm mund ë shtrohet tek maturantët tanë dhe ndoshta të punohet vetëm me ata më të talentuarit.

Problem 5. *Jepet një sipërfaqe*

$$z = f(x, y)$$

e përkufizuar në një zonë $D \subset \mathbb{R}^2$. Të gjenden maksimumet dhe minimumet lokale të kësaj sipërfaqeje.

Natyrisht analiza është një minierë e vërtetë idesh dhe aplikimesh. Gjetja e vorbullës së një lumi, volumi i një kodre, kurbatura e një kthese, shpejtësia dhe nxitimi i një objekti që lëviz në hapësirë, ligjet e Keplerit, etj. Duhet pranuar se analiza e funksioneve me shumë ndryshore edhe në programet tona universatere është bërë cekët dhe ilustrimi me aplikime nga fizika dhe inxhinjeritë gjithmonë ka qenë i varfër.

Gjithashtu ja vlen të përmendet se shumë prej këtyre temave trajtohen në shkollat e mesme në shumë vende. Për shembull në Amerikë nxënësit që janë të orientuar drejt shkencave dhe inxhinjerive futen ne klasa të avancuara dhe marrin lendë si Kalkulusi I dhe Kalkulusi II që në shkollë të mesme.

2.7. **Ndërtimet gjeometrike.** Ata që kuptojnë historinë e matematikës të paktën njëherë në jetën e tyre duhet të shkojnë të vizitojnë varrezat Albani në Gottingen ku pushon një prej njerëzve më me influencë në historinë e njerëzimit, Carl Friedrich Gauss. Gauss është i njohur për shumë rezultate të famshme në matematikë dhe një prej tyre ishte edhe ndërtimi me vizore dhe kompas i një 17-këndëshi të rregullt ose siç quhet ndryshe *heptadecagon*, pas 2000 vjetësh përpjekje nga matematikanë të shumtë. Ishte një nga arritjet që e bënin Gaussin krenar më shumë se çdo gjë tjetër. Çfarë është kaq e vështirë për këto ndërtimet gjeometrike që i dha Gausit kaq famë dhe krenari?

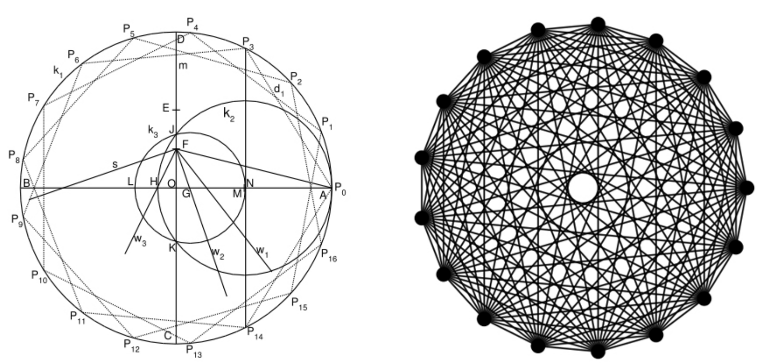


Figure 2. Heptadecagon ose 17-këndëshi i rregullt

Në tekstet tona të shkollës 8-vjeçare dhe të mesme, gjithmonë ka pasur copëza historike mbi ndërtimet gjeometrike, por këto nuk janë shfrytëzuar për të ndërtuar koncepte matematike mbi to. Një libër i shkëlqyer i Petro Priftit, *Probleme të zgjidhura të gjeometrisë* ka pasur plot probleme të vlefshme, por ky tekst ishte gjithmonë diçka që shfrytëzohej vetëm nga studentët e talentuar. Pak përdoreshin probleme të tilla për të orientuar nxënësin drejt koncepteve të matematikës bashkëkohore, madje shumica e mësuesve nuk ishin fare në dijeni të këtij libri kaq të vyer. Le të përpiqemi ti organizojmë disi këto probleme klasike të gjeometrisë.

Në Greqinë e lashtë kishte disa problema klasike. Këto probleme janë nga gjeometria në natyrë dhe përfshijnë ndërtimet vetëm me vizore dhe kompas. Problemet mund të formulohen si më poshtë.

(1) Jepet një kënd i çfarëdoshëm, a mund ta ndajmë këndin në tre kënde të barabartë duke përdorur vetëm vizore dhe kompas?
(2) Jepet një rreth i çfarëdoshëm, a mund të ndërtojmë një katror me të njëjtën sipërfaqe, duke përdorur vetëm vizore dhe kompasin?
(3) Jepet një kub, a mund të ndërtojmë brinjën e një kubi tjetër, i cili të ketë dyfishin e vëllimit të kubit origjinal duke përdorur vetëm vizore dhe kompas.
(4) Për cilat n, n-këndëshi i rregullt është i ndërtueshëm?

Pas përpjekjeve dymijë vjeçare nga ana e matematikanëve, u tregua, ndërtimet në tre problemet e para janë të pamundura. Në Kreun 6 ne do të japim disa ide se si këto tema mund të trajtohen që në shkollë të mesme.

3. Historia e shkencës - një mjet kritik dhe konstruktiv për programin e matematikës

Ka mendime dhe këndvështrime të ndryshme për pregatitjen e nxënësve në matematikë. Këto pikëpamje kanë lidhje me shoqërinë, traditën e një vendi, filozofinë e shkollës përkatëse. Ajo që pothuajse është e pranueshme nga të gjithe është që intuita matematike zhvillohet në një moshë të vogël dhe konceptet merren herët. Diskutimet sot në ambjentet pedagogjike janë kryesisht mbi rrugët që duhen ndjekur me moshat e reja.

Shkolla jonë ka të theksuar përsëritjen e vazhdueshme dhe për një kohë të gjatë dhe kjo shpesh është bërë në kurriz të anës intuitive. Po të kemi parasysh se para viteve 1990 fëmijët shkonin 6 ditë në shkollë dhe bënin përditë matematikë, atëherë duhet të pranojmë se femijët shqiptarë harxhonin një pjesë të konsiderueshme të fëmijërisë me matematikën. Po të shohësh materialin që bëhej për 12 vjet shkollë është më pak se shumica e vendeve të tjera. Ky material përsëritej aq herë sa bëhej i mërzitshëm, sidomos për nxënësit e mirë. Ç'mund të bëhet me këta nxënës? Si mund të zhvillohet intuita tek të gjithë nxënësit dhe veçanërisht tek nxënësit me prirje në matematikë?

Zakonisht rruga më e mirë është kur konceptet zhvillohen në mënyrën në të cilën janë zbuluar. Pra shtrohet pyetja, orientohen nxënësit drejt ideve të dukshme edhe pse ato mund të jenë të gabuara. Eshtë e nevojshme që nxënësi të kuptojë se çfarë nuk funksionon dhe të detyrohet vetë, ndoshta edhe duke vuajtur pak, që të gjejë zgjidhjen e duhur. Faktet historike, vënia e çdo teoreme në ambjentin historik është një ndihmë shumë e madhe. Historia e matematikës moderne është një dramë e ngjeshur emocionale e shekujve XVIII, XIX, XX.

Edukimi i përgjithshëm i matematikës sot është distancuar nga kjo lloj mësimdhënie. Ne shkojmë në klasë me një tufë teoremash dhe faktesh dhe detyrojmë nxënësit ti mësojnë ato. Një mënyrë tepër komode për mësuesin mediokër, por tepër katastrofike për nxënësin. Megjithatë ka plot raste dhe shkolla ku matematika mësohet ndryshe. Ne do ti sygjeronin lexuesit librin *Perfect rigor* [14], mbi jetën e një prej matematikanëve më të medhenj të këtij shekulli Grigory Perelman.

Nje pjesë e mirë e librit flet për *Një shkollë të mrekullueshme* ku Grigory 12-vjeçar trajnohej përditë.

Një shkollë tjetër e nisur vitet e fundit është *The Proof school* në San Francisco, ku intuita dhe konceptet klasike të matematikës marrin përparësi.

Natyrisht vështirësia më e madhe në këtë lloj shkolle është mungesa e mësuesve të aftë, të cilët të kenë njohuri të thella të matematikës së lartë dhe të dinë se si këto koncepte ti ingranojnë në programet mësimore. Matematika, kur mësohet nga njerëzit e duhur hap shumë dyer dhe labirinte të thella në mendjen e një fëmije. Problemi është se si mund ti gjejmë këta vizionerë, këta njerëz të duhur që kuptojnë se ç'donte të bënte Gauss, Abel, Jakobi, që njohin thellë matematikën e shekullit XIX, që janë gati të sakrifikojnë karierën e tyre shkencore për tu mësuar disa 12-vjeçarëve matematikë. Këta nuk është e lehtë ti gjesh! Prandaj shoqëria duhet të bëj një përpjekje të madhe që të rekrutojë dhe pregatisë njerëz të tillë.

Për mësuesit e apasionuar të cilët duan të gjejnë rrugë të reja se si historia e matematikës mund të futet në klasën e matematikës ne do t'u sygjeronim librat e Felix Klein [20–27], Wilder [40], Roberts [31], dhe veçanërisht librin nga Arnold [2],

4. Ekuacionet algjebrike

Tani japin disa ide mbi disa tema që janë themelore në historinë e zhvillimit të matematikës dhe që mund të futen me sukses ne programet e shkollave të mesme.

4.1. **Ekuacionet me grade 2 dhe 3.** Zgjidhja e ekuacioneve polinomiale ka qenë dhe vazhdon të jetë një nga problemet themelore të matematikës që ka nxitur zhvillimin e disa prej degëve më elegante dhe më produktive të matematikës si teoria Galua, gjeometria algjebrike, gjeometria Diofantine, etj. Më poshtë japim një ide se si zgjidhen disa nga ekuacionet me gradë të vogël me një ndryshore. Të gjithë polinomet kanë koefiçientë në $\mathbb{C}$.

Kur kemi të bëjmë me një ekuacion me një ndryshore

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{4}$$

thjeshtimi i parë është të zëvendësojmë

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{n}$$

i cili rezulton në një ekuacion

$$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \dots + b_0 = 0$$

me termin y^{n-1} zero. Ky e zgjidh ekuacionin kuadratik (duke plotësuar katrorin). Pra për $n = 2$, ne thjesht marrim $y^2 = -b_0$.

Konsiderojmë tani rastin për $n = 3$, pra, ekuacionin

$$y^3 + ay + b = 0. \tag{5}$$

Duke zëvendësuar $y = u + v$, marrim

$$u^3 + v^3 + 3\left(uv + \frac{a}{3}\right)(u+v) + b = 0 \tag{6}$$

qe është i vërtetë, në qoftë se u dhe v kënaqin

$$u^3 + v^3 = -b, \qquad uv = -\frac{a}{3} \tag{7}$$

Ekuacioni i fundit na jep

$$(Z - u^3)\,(Z - v^3) \;=\; Z^2 \;+\; bZ \;-\; \frac{a^3}{27}$$

pra,

$$\begin{aligned} u^3 \;&=\; \frac{-b \;+\; \sqrt{b^2 \;+\; \frac{4a^3}{27}}}{2} \\ v^3 \;&=\; \frac{-b \;-\; \sqrt{b^2 \;+\; \frac{4a^3}{27}}}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Nga ana tjetër, ne mund të zgjedhim u dhe v si rrënjë kubike të përshtatshme të anës së djathtë, të tilla që, Eq. (6) të jetë i vërtetë. Atëherë $u + v$ është një nga zgjidhjet e Eq. (5), të tjerat i marrim nga zgjedhjet e ndryshme të rrënjëve kubike. Më saktë, në qoftë se, ϵ është një rrënjë primitive e tretë e njëshit, pra $\epsilon^3 = 1$, atëherë zgjidhjet e Eq. (4), janë

$$y_1 = \; u \;+\; v, \quad y_2 = \; \epsilon u \;+\; \epsilon^2 v, \quad Y_y = \; \epsilon^2 u \;+\; \epsilon v,$$

të cilat mund të verifikohen duke faktorizuar $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$. Këto janë **formulat Kardano**, të cilat zakonisht shkruhen si

$$y_i \;=\; \left(-\frac{b}{2} \;+\; \sqrt{\frac{b^2}{4} \;+\; \frac{a^3}{27}} \right)^{1/3} \;+\; \left(-\frac{b}{2} \;-\; \sqrt{\frac{b^2}{4} \;+\; \frac{a^3}{27}} \right)^{1/3} \tag{9}$$

Shohim se, këto formula kanë disa simetri, duke filluar nga zgjedhjet e ndryshme të rrënjëve katrore, të rrënjëve kubike dhe gjithashtu nga zgjedhja e një rrënje të tretë të njëshit. Gjëja pozitive është, që çështja e simetrive midis zgjidhjeve mund të përkufizohet pa përdorur formulën e shtjellur të zgjidhjeve.

Ideja themelore e teorisë Galois tani mund të formulohet thjesht si vijon:
Për çdo $n \geq 4$, zëvendësojmë formulën e shtjellur për zgjidhjet (megjithëse ajo nuk ekziston) duke përdorur grupin Galois.

Për më tepër për zgjidhjen e ekuacioneve dhe një prezantim mbi teorinë e Galois shihni [35].

Në fakt koncepti i grupit në algjebrën moderne lindi pikërisht nga koncepti i bashkësisë së simetrive midis rrënjëve të një polinomi. Megjithë rolin qëndror të teorisë Galua në algjebër, në programet tona, duke përfshirë edhe ato universitare, kjo teori as përmendej fare. Pra studentët tanë të shkencave asnjëherë nuk arritën të bëjnë lidhjen apo të kuptojnë motivimin se përse studioheshin grupet apo fushat në universitet. Dhe kur ata vetë nuk e kuptonin këtë lidhje nuk mund të pretendosh që ata t'u shpjegonin nxënësve në klasën e X degëzimet apo idetë që dalin nga zgjidhja e ekuacionit.

5. DISKRIMINANTI DHE IDENTITETET E NEWTONIT

Në proçesin e diskutimit të rrënjëve të një polinomi është shumë i rëndësishëm fakti në se ndonjë prej këtyre rrënjëve përsëritet. Në fund të fundit, ekuacioni

$$(x-2)^4\,(x-3)^5 = 0$$

është më i lehtë për tu zgjidhur edhe pse është i gradës 9. Pyetje e mëposhtme është fare e natyrshme për çdo nxënës së klasës IX apo X.

Pyetje 11. *Jepet polinomi i gradës $n \geq 2$*

$$f(x) \;=\; a_n x^n \;+\; a_{n-1} x^{n-1} \;+ \cdots +\; a_0 \;=\; a_n (x-\alpha_1) \dots (x-\alpha_n)$$

ku $a_n \neq 0$. A mund të gjeni një kriter për koefiçentët $a_0, \dots, a_n$ që $f(x)$ të ketë rrënjë që përsëriten?

Ky nuk është një problem i vështirë, por na çon në një nga konceptet më të rëndësishëm të matematikës, atë të **dallorit** ose **diskriminantit**. Le ti rradhisim gjithë rrënjët si më poshtë

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n$$

dhe marrim prodhimin

$$\Delta_f \;=\; \Pi_{i\neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Natyrisht, kemi një factor (-1) që varet nga renditja e rrënjëve. Për ta bërë Δ_f të pandjeshëm nga kjo renditje e rrënjëve si edhe nga koefiçenti udhëheqës $a_n \neq 0$ ne modifikojmë përkufizimin si më poshtë:

$$\Delta_f \;= (-1)^{n(n-1)/2} \cdot a_n^{2n-2} \cdot \Pi_{i\neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{10}$$

Atëherë, lema e mëposhtme është e besueshme për çdo nxënës

Lemma 2. *$f(x)$ ka rrënjë që përsëriten atëherë dhe vetëm atëherë kur $\Delta_f = 0$.*

Pikërisht, është Δ_f në Eq. (10) se si duhet të përkufizohet discriminanti i çdo polinomi. Ky është koncepti i natyrshëm, koncepti që mbahet mend, dhe koncepti që na tregon vetitë e diskriminantit.

Megjithatë ne ende nuk i jemi përgjigjur pyetjes së mësipërme. Ne nuk i njohim rrënjët e $f(x)$. Pra, a mund të themi diçka për shumëfishmërinë e rrënjëve pa i gjetur rrënjët? Kjo pyetje është ekuivalente me

Pyetje 12. *Jepet polinomi*

$$f(x) \;=\; a_n x^n \;+\; a_{n-1} x^{n-1} \;+ \cdots +\; a_0 \;=\; a_n (x-\alpha_1) \dots (x-\alpha_n)$$

A mund të shprehet diskriminanti Δ_f në varësi të koefiçentëve $a_0, \dots, a_n$?

Ushtrimi i mëposhtëm është një ushtrim që çdo nxënës duhet ta ketë bërë të paktën një herë në jetë.

Ushtrim 1. *Jepet polinomi quadratik*

$$f(a) \;= a\, x^2 \;+\; bx \;+\; c \;=\; a\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2).$$

Atëherë, nga përkufizimi dallori është

$$\Delta_f = a^2\,(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

Vërtetoni se

$$\Delta_f \;=\; b^2 \;-\; 4ac.$$

Natyrisht, zgjidhja e ushtrimit të mëposhtëm kërkon vetëm njohuri elementare të algjebrës dhe mund të bëhet nga shumica e nxënësve të klasës X.

Ushtrim 2. *Jepet polinomi kubik*

$$f(a) \;= ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Atëherë, vërtetoni se

$$\Delta_f \;= b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

Tani le të përpiqemi të nxjerrim një formulë të shtjellur për discriminantin. Le të jepet $f(x)$ si vijon

$$f(x) \quad = \quad x^n \ + \ a_{n-1}x^{n-1} \ + \cdots + \ a_0 \quad = \quad (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$

dhe përkufizojmë

$$\Delta \quad = \quad \prod_{i\neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Matrica

$$X := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

ka

$$\det(X) \quad = \quad \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

nga formula e mirënjohur e përcaktorit të matricës Vandermonde.

Shembull 2. *Vërtetoni formulën*

$$\Delta = \det(X)^2 = \det(XX^t) = \det \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{pmatrix}$$

ku

$$S_\mu \ := \quad x_1^\mu \ + \ \dots \ + \ x_n^\mu.$$

Vërtetim. Duhet të shprehim shumat fuqi S_μ në lidhje me funksionet simetrikë elementarë

$$\sigma_\nu \quad = \quad \sum_{i_1<i_2<\dots<i_\nu} x_{i_1}x_{i_2} \ \dots \ x_{i_\nu}$$

*(ku vetia bazë e tyre është, që $\sigma_\nu(x_1,\dots,x_n) \ = \ (-1)^\nu \ a_{n-\nu}$). Kjo mbështetet te **identitetet e Newtonit** (c.f. Cox et al., p. 317):*

$$S_\mu - \sigma_1 S_{\mu-1} + \cdots + (-1)^{\mu-1}\sigma_{\mu-1}S_1 + (-1)^\mu \mu\sigma_\mu = 0, \quad \textit{for } 1 \le \mu \le n$$

$$S_\mu - \sigma_1 S_{\mu-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{\mu-n+1} + (-1)^n\sigma_n S_{\mu-n} = 0, \quad \textit{for } \mu > n$$

Jepet z një variabël i ri, përkufizojmë

$$\sigma(z) \quad = \quad \prod_{i=1}^n (1 \ - \ x_i z)$$

Atëherë

$$\begin{aligned} \frac{-z\sigma'(z)}{\sigma(z)} \quad &= \quad \frac{z \ \sum_{i=1}^n \ x_i \prod_{jni} (1 \ - \ x_j z)}{\sigma(z)} \quad = \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i z}{1 \ - \ x_i z} \\ &= \sum_{i=1}^n \ \sum_{\nu=1}^\infty \ x_i^\nu z^\nu \quad = \quad \sum_{\nu=1}^\infty (\sum_{i=1}^n \ x_i^\nu) \ z^\nu \quad = \quad \sum_{\nu=1}^\infty \ S_\nu \ z^\nu \end{aligned} \tag{11}$$

Kështu që, ne marrim identitetin në vazhdim ndërmjet serive fuqi formale në z:

$$\sigma(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu \; z^\nu \quad = \quad -z\sigma'(z)$$

Vetia bazë e funksioneve simetrikë elementarë na çon në

$$\sigma(z) \quad = \quad \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \sigma_\mu z^\mu$$

Kështu që,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j z^j \;\cdot\; \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu \; z^\nu \quad = \quad \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu+1} \mu \sigma_\mu z^\mu$$

Duke krahasuar koefiçientët marrim atë, që duam.

$\square$

Shembull 3. *Çdo polinom kubik $f(x)$ mund të shkruhet në formën*

$$f(x) \; = \; x^3 \; + \; ax \; + \; b$$

Vërtetoni se

$$\Delta_f \; = \; -4a^3 \; - \; 27b^2.$$

Kështu që, formulat Kardano bëhen

$$x_i \; = \; \left(-\frac{b}{2} \; + \; \sqrt{\frac{-\Delta_f}{108}} \right)^{1/3} \; + \; \left(-\frac{b}{2} \; - \; \sqrt{\frac{-\Delta_f}{108}} \right)^{1/3}$$

6. Format quadratike dhe një hyrje në algjebrën lineare

Teoria e formave është një nga më të vjetrat dhe më të bukurat e matematikës. Ka vlera të pazëvendësueshme nga ana metodike sepse motivon përkufizimin e matricave (në fakt matricat lindën pikërisht nga format kuadratike), një pjesë të mirë të terminollogjise së algjebrës lineare (p.sh. definitisht pozitive, matricat simetrike, etj), dhe na jep ilustrime të shkëlqyera të aplikimit të algjebrës si per shembull klasifikimi i prerjeve konike, klasifikimi i sipërfaqeve algjebrike, etj.

Një **formë binare kuadratike** është një polinom homogjen i gradës së dytë me dy ndryshore, pra një polinom i formës

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cx^2 \tag{12}$$

Pra është thjesht polinomi kuadratik ku ne fusim një ndryshore të re y dhe i bëjmë të gjitha termat me gradë totale dy. Në fakt ky proçes është i rëndësishëm në matematikën e lartë dhe quhet **homogjenizim** i polinomeve. Më poshtë ne do të spjegojmë këtë proçes për polinomet e gradës më të lartë, por për momentin le të përqëndrohemi tek polinomet kuadratike. Ne duam të studiojmë këto polinome kuadratike dhe rrënjet e tyre.

Le të vërejmë fillimisht disa veti të formave kuadratike.

Lemma 3. *Për çdo dy forma kuadratike $f(x, y)$ dhe $g(x, y)$ shuma e tyre*

$$(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$$

është përsëri një formë kuadratike. Për çdo konstante $\lambda \in \mathbb{C}$, polinomi $h(x, y) := \lambda f(x, y)$ është një formë kuadratike.

Vërtetimi i kësaj leme është elementar, por rëndësia e saj është e madhe. Ky rezultat elementar na jep përkufizimin e parë të një hapësire vektoriale. Pra bashkësia e gjithë formave kuadratike me koefiçentë në k, ku k është secila prej $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ është një hapësirë vektoriale edhe pse një nxënës i klasës IX apo X nuk e ka dëgjuar më parë këtë koncept.

Një formë kuadratike $f(x, y)$ si në Eq. (12) përcaktohet në mënyrë të vetme nga treshja e renditur e numrave (a, b, c) dhe nga çifti i renditur i ndryshoreve (x, y). Në një farë mënyre ne duam që të organizojme këto treshe të renditura në se duam të studiojmë format kuadratike. Gauss dhe me vonë Hermite filluan ti vinin këto treshe në tabela të tipit

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

e cila quhet **matricë**. Në fakt Gauss filloi të përdorte M dhe $\mathbf{v}$ si më poshtë

$$M = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}, \quad \textit{and} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kjo terminollogji ishte mjaft efiçente me marrëveshjen që

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

dhe

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = [ax + by, bx + cy]$$

Në vend të $[x, y]$ ne shpesh përdorim simbolin $\mathbf{v}^t$ dhe e quajmë **transpose** të $\mathbf{v}$-së. Atëherë forma kuadratike $f(x, y)$ jepet si më poshtë

$$f(x, y) = \mathbf{v}^t M \mathbf{v} = (x, y) \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + cx^2.$$

Pra, kemi një korespondencë biunivoke midis formave kuadratike dhe matricave të formës

$$\begin{bmatrix} a & r \\ r & c \end{bmatrix}$$

Për një formë të dhënë $f(x, y)$ matrica koresponduese shënohet me M_f.

Pozicionet në një matricë shënohen me (i, j) ku i tregon numrin e rradhës dhe j numrin e kolonës. Matricat e mësipërme M quhen matrica 2×2 meqënëse kanë 2 rradhë dhe 2 kolona. Një matricë 2×2 quhet **matricë simetrike** kur termat në pozicionet $(1, 2)$ dhe $(2, 1)$ janë të barabarta. Pra matricat tona që korespondojnë me format kuadratike janë matrica 2×2 dhe simetrike.

Perfundiminsht, kemi rezultatin si më poshtë:

Lemma 4. *Ekziston një korespondencë biunivoke midis formave kuadratike dhe matricave 2×2, simetrike. Më konkretisht, kjo korespondencë jepet si më poshtë*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \mapsto M_f = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Matrica M_f quhet matrica koresponduese e formës $f(x, y)$.

Shihni pra se pa njohuri shtesë dhe pa shumë punë ne mund të prezantojmë nxënësin me konceptin e polinomeve homogjenë, matricave, matricave simetrike, shumëzimit të matricave, hapësirës vektoriale. Pra thjesht polinomi i gradës së dytë është një minerë floriri. Dhe ne vetëm sa kemi filluar.

Diskriminanti if një forme kuadratike përkufizohet njësoj si diskriminanti i polinomit $f(x, 1)$. Pra, diskriminanti i $f(x, y)$ dhënë në Eq. (12) është $\Delta_f = b^2 - 4ac$.

Për një matricë $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ ne përkufizojmë **determinantin** $\det A$ (ose **përcaktorin** siç përdoret në Shqip) si

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

Atëherë,

$$\det M_f = ac - \frac{b^2}{4}$$

Vërtetimi i Lemës së mëposhtme tani është një ushtrim elementar.

Lemma 5. *Diskriminanti Δ_f i një forme kuadratike $f(x, y)$ është zero atëherë dhe vetëm atëherë kur* $\det M_f = 0$. *Për më tepër,*

$$\Delta_f = -4 \det M_f$$

Ka shumë autorë që i përkufizojnë format kuadratike si

$$f(x, y) = ax^2 + 2b\,xy + cy^2$$

në mënyrë që matrica korresponduese është $M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Atëherë, diskriminanti $\Delta_f = ac - b^2$ në vend të $b^2 - 4ac$. Kjo është thjesht çështje preference, në se autori preferon ta nisë nga format kuadratike apo nga matricat.

6.1. **Ekuivalenca e formave, matricat e ngjashme.** I kthehemi edhe njëherë problemit të prerjeve konike, pra Prob. (10). Jepet një prerje konike

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = \lambda$$

Si duhet ndryshuar sistemi koordinativ , pra $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ që kjo prerje konike të jetë një nga format standart. Së pari vemë re se grada e ekuacionit të ri nuk mund të ndryshojë pasi në këtë rast nuk do të kishim më një prerje konike. Pra trasformimet e mundshme janë vetëm transformimet

$$T : (x, y) \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_3 x + \lambda_4 y)$$

Me fjalë të tjera, ne kemi një sistem të ri koordinatash që jepet nga

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Funksioni $T(x, y)$ quhet **transformim linear** dhe matrica $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ quhet **matrica e transformimit** T. $T(x, y)$ është funksion bijektiv dhe i anasjellti i tij T^{-1} është gjithashtu linear. Pra ekziston nje matricë për T^{-1} qe ne e shënojmë me C^{-1}. Matrica C^{-1} quhet matrica e anasjelltë e matricës C. Atëherë paraqisim edhe një herë problemin tonë:

Problem 6. *Gjeni numrat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ të tillë që prerja konike transformohet në ekuacionin standart.*

Kjo motivon përkufizimin e mëposhtëm. Dy forma kuadratike $f(x,y)$ dhe $g(x,y)$ do të quhen **ekuivalente** në qoftë se ekzistojnë $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ të tillë që

$$f\left(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\, \lambda_3 x + \lambda_4 y\right) = g(x,y).$$

Vini re se

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\, \lambda_3 x + \lambda_4 y\right) = \mathbf{x}^t\, M_f\, \mathbf{x} &= \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^t M_f \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\ &= [x,y] \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^t M_f \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pra

$$f\left(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\, \lambda_3 x + \lambda_4 y\right) = \mathbf{x}^t\, M_f\, \mathbf{x}$$

ku

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matricat korresponduese të dy formave ekuivalente i quajmë **matrica të ngjashme**.

Ushtrim 3. *Dy matrica A dhe B janë të ngjashme atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston një matricë C e tillë që*

$$A = C^{-1} B C$$

Ushtrimi i mëposhtëm është standart në shkollat tona.

Shembull 4. *Për një polinom kuadratik*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

me koefiçentë realë, shenja e vlerës së $f(x)$ përcaktohet si vijon: $f(x)$ ka shenjën e kundert të a-së në intervalin $(-\alpha_1, \alpha_2)$ dhe ka shenjën e a-së kudo tjetër.

x		α_1 α_2	
f(x)	a	-a	a

TABLE 1. Studimi i shenjës së polinomeve kuadratike.

Një formë kuadratike $f(x,y)$ quhet **definitisht pozitive** në qoftë se $f(x,1) > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$.

Ushtrim 4. *$f(x,y)$ është definitisht pozitive atëherë dhe vetëm atëherë kur $a > 0$ dhe $\Delta_f < 0$.*

Për një matricë çfardo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ne quajmë **eigenvlera** të matricës zgjidhjet e ekuacionit

$$(\lambda - a)(\lambda - c) - bc = 0$$

6.2. **Klasifikimi i prerjeve konike.** Le të përpiqemi tani ti përgjigjemi Pyetjes 7. Pra jepet Equacioni (2), ç'mund të themi për formën e grafikut?

Në se ekuacioni në (2) do të kishte $b = 0$ atëherë ky do të ishte një ushtrim elementar. Ne plotësonim katrorin për $ax^2 + dx$ si edhe katrorin për $cy^2 + ey$ dhe do të merrnim njue ekuacion të formës

$$A(x + \alpha)^2 + B(x + \beta)^2 = C.$$

Me zëvendësimet $X = x + \alpha$ dhe $Y = y + \beta$ ne kemi

$$AX^2 + BY^2 = C,$$

i cili është bashkësi boshe në $\mathbb{R}^2$ kur $C < 0$, një elips kur A, B janë me të njëjtën shenjë, dhe një hiperbolë kur A, B janë me shenja të ndryshme.

Forma kuadratike

$$G(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

quhet **formë diagonale** dhe matrica korresponduese

$$M_g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

është njue matricë diagonale.

Pra termi $b\,xy$ është çfare ne duam të bejmë zero që të përcaktojmë formën e grafikut. Ne mund të supozojmë që pas plotësimit të katrorëve dhe zëvendësimeve përkatëse, ekuacioni na është dhënë në formën $ax^2 + bxy + cy^2 = \lambda$.

Pra kemi problemin e mëposhtëm

Problem 7. *Jepet forma kuadratike*

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Gjeni zëvendësimet e nevojshme algjebrike (pra ndryshimin e sistemit koordinativ)

$$x = ax + by, \qquad y = cx + dy$$

që forma $G(x, y) = F(ax + by, cx + dy)$ është diagonale.

Ne po i shmangim detajet e zgjidhjes së këtij problemi pasi ky problem është thjesht një rast i vaçantë i problemit pasardhës. Po anallogjia është e qartë, matrica M_F diagonalizohet ne mënyrë ortogonale, pra

$$M_F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e tillë qe λ_1, λ_2 janë eigenvlerat e M_F. Lema në vijim përcakton formën e grafikut të $F(x, y) = k$, për çdo konstant $k \in \mathbb{R}^*$.

Lemma 6. *Grafiku*

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = k$$

është elipse në qoftë se të dy egeinvalutat e M_F janë pozitive dhe hiperbolë në se njëra është pozitive dhe tjetra negative.

Ne i sygjerojmë lexuesit të shoh [36] për detajet.

6.3. **Sipërfaqet kuadratike dhe klasifikimi i tyre.** Ne mund të homogjenizojmë ekuacionin e dhënë në Ek. (2) si më poshtë

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

duke futur një ndryshore të re z. Pra ne kalojmë nga plani $\mathbb{R}^2$ në sistemin në hapësirë $\mathbb{R}^3$. Prerjet tona konike tashmë janë thjesht projeksione në plan të grafikut të sipërfaqes së mësipërme. Pa ndonjë kusht shtesë ne mund të supozojmë se koefiçentët d, e, f janë $2d, 2e, 2f$.

Një **formë ternare kuadratike** quhet polinomi homogjen kuadratik me tre ndryshore x, y, z. Pra një polinom i formës

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

ku koefiçentët a, b, c, d, e, f janë numra realë. Konsiderojmë ekuacionin

$$F(x, y, z) = h.$$

për ndonjë $h \in \mathbb{R}$. Në mënyrë plotësisht të ngjashme me format binare, ky ekuacion mund të shkruhet

$$F(x, y, z) \;=\; \mathbf{x}^t \, M_F \, \mathbf{x}$$

ku

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad dhe \quad M_F = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ \mathrm{d} & \mathrm{b} & \mathrm{f} \\ \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{c} \end{bmatrix}$$

M_F quhet matrica korresponduese e $F(x, y, z)$. Teoria e formave binare përgjithësohet në këtë rast fjalë për fjalë.

Pyetje 13. *Ç'mund të themi për grafikun*

$$F(x, y, z) = h,$$

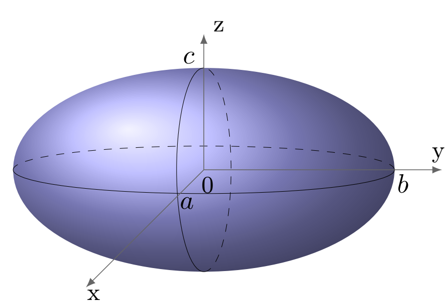
në varësi të koefiçentëve të $F(x, y, z)$.

Grafiku është një sipërfaqe kuadratike në $\mathbb{R}^3$. Një përshkrim i detajuar i këtyre sipërfaqeve jepet në [37]. Ne po i përkufizojmë më poshtë shkurtimisht.

Një prej llojeve të sipërfaqeve kuadratike është **elipsoidi**, i cili jepet me ekuacionin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

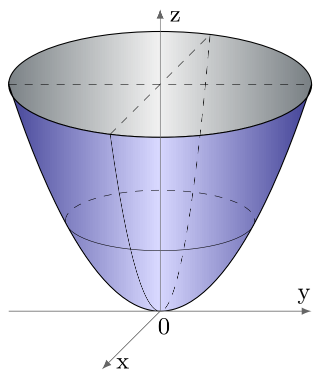
Në rastin kur $a^2 = b^2 = c^2$ ekuacioni i elipsoidit paraqet një sferë. Prerjet tërthore të tij me planet koordinative janë elipsa. Elipsoidi është një nga sipërfaqet më të pergjithshme kuadratike, sferoidi dhe sferat janë raste të veçanta të ellipsoidit.



Ekziston një tjetër elipsoid që quhet imagjinar dhe ka ekuacion

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Për detaje të mëtejshme shih [37].



Paraboloidi eliptik është një tjetër sipërfaqeje kuadratike ekuacioni i së cilës është i formës:

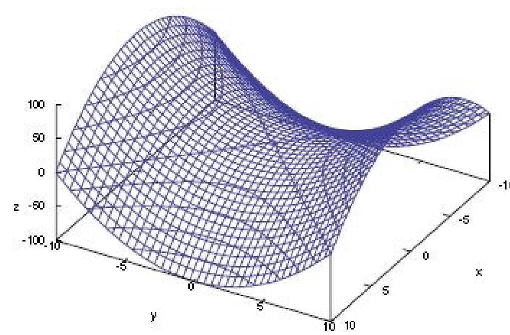
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Prerjet me planet paralele me planin xy janë elipse, ndërsa prerja me vetë planin xy është një pikë e vetme.
Figura tregon rastin kur $c > 0$, ndërsa kur $c < 0$, sipërfaqja është e kthyer me kokë poshtë. Në rastin kur $a = b$, sipërfaqja është një cilindër.

Një tjetër sipërfaqe kuadratike është **paraboloidi hiperbolik** që jepet me ekuacionin

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Pra, një nga ndryshoret është e gradës së parë kurse pjesa tjetër është diferenca e dy katrorëve të ndryshoreve të tjera. Paraboloidi hiperbolik jep një shembull të atyre që ne i quajmë **pika shalë** të cilat janë edhe maksimume lokale edhe minimume lokale; shih kapitujt mbi analizën me disa ndryshore në [37].



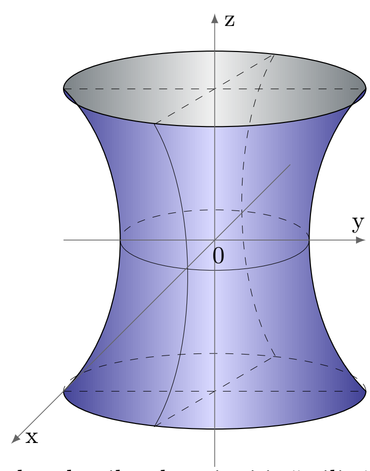
Ne sygjerojmë ushtrimin e mëposhtëm.

Ushtrim 5. *Diskutoni se çfarë vëndi gjeometrik mund të jetë prerja e një sferoidi me një paraboloidi hiperbolic. A është kjo gjithmonë një kurbë konike?*

Një lloj tjetër sipërfaqesh kuadratike është **hiperboloidi me një fletë** i cili jepet me ekuacionin:

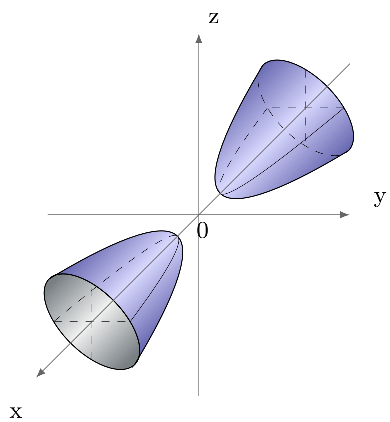
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Për hiperboloidin me një fletë, prerja tërthore me çdo plan paralel me planin xy është një elips, ndërsa prerjet tërthore me plane paralele me planet xz ose yz janë hiperbola. Përjashtim bëjnë rastet e veçanta kur $x = \pm a$ dhe $y = \pm b$; në këto plane prerjet janë çifte drejtëzash prerëse.



Hiperboloidi me dy fletë është sipërfaqja kuadratike ekuacioni i të cilit është

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



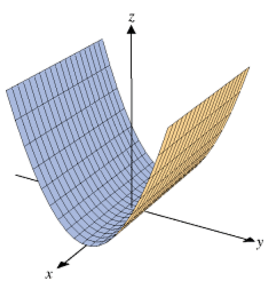
Për hiperboloidin me dy fletë, prerja tërthore me çdo plan paralel me planet xy ose yz është një hiperbolë. Me planin yz nuk ka prerje tërthore, sepse për $x = 0$ ekuacioni

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nuk ka zgjidhje. Me çdo plan paralel me planin yz për të cilin $|x| > a$, prerja është elips.
Në vijim ne do të mësojmë se si të klasifikojmë gjithë sipërfaqet kuadratike sipas këtyre llojeve.

Cilindri parabolik është sipërfaqja kuadratike ku një nga ndryshoret është në fuqi të dytë dhe tjetra në fuqi të parë, ndryshorja e tretë nuk ekziston. Pra një sipërfaqe e tillë

$$x^2 = \lambda z$$



Megjithëse ka forma të tjera të sipërfaqeve kuadratike, secila prej tyre mund të përftohet si një degjenerim i formave të mësipërme.

I kthehemi tani problemit tonë ku na jepet një sipërfaqe kuadratike e përgjithshme dhe duam të gjejmë llojin a saj në varësi të koefiçentëve. Si në rastin e prerjeve konike, është e përshtatshme që të rrotullojmë sistemin koordinativ që termat xy, yz, xz të zhduken. Forma të tilla, pa termat xy, yz, xz, quhen **forma kuadratike diagonale**.

Përkufizojmë **inercinë** in M_F e një forme quadratike $F(x, y, z)$ si treshen e renditur

$$\text{in } M_F := (n_1, n_2, n_3),$$

ku n_i, $i = 1, 2, 3$ është përkatësisht numri pozitiv, negativ, dhe zero i eigenvlerave të M_F-së. Atëherë kemi lemën e mëposhtme.

Lemma 7. *Jepet forma kuadratike ternare $F(x, y, z)$ dhe matrica korresponduese A. Pohimet e mëposhtme janë të vërteta:*

i) *Në qoftë se in $M_F = (3, 0, 0)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një ellipsoid.*
ii) *Në qoftë se in $M_F = (2, 0, 1)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një paraboloid eliptik.*
iii) *Në qoftë se in $M_F = (2, 1, 0)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një hyperboloid me një fletë.*
iv) *Në qoftë se in $M_F = (1, 2, 0)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një hyperboloid me dy fletë.*
v) *Në qoftë se in $M_F = (1, 1, 1)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një paraboloid hiperbolik.*

vi) *Në qoftë se in $M_F = (1, 0, 2)$, atëherë sipërfaqja kuadratike është një cylinder parabolic.*

Vërtetimi i Lemës mund të gjendet në [36] dhe bazohet në faktin se numri i engenvlerave pozitive, negative, ose zero nuk ndryshon pavarësisht sistemit koordinativ të zgjedhur. Në fund të fundit një konfirmim që forma e sipërfaqes nuk ndryshon, pra një elipsoid nuk mund të bëhet parabolois apo anasjelltas. Një koncept që nxënësi e beson shumë më kollaj sepse bazohet në intuitën gjeometrike.

Më poshtë po japim shkurtimisht metodën se si përkaktohet forma diagonale dhe zevendësimet algjebrike që e bëjnë këtë të mundur.

Problem 8. *Gjeni diagonalizimin ortogonal të një matrice simetrike A.*

Pra, ne duam të gjejmë një matricë ortogonale S dhe një matricë diagonale D të tillë që
$$A = S^T DS.$$
Kujtoni që për matricat ortogonale $S^T = S^{-1}$; shihni [36] për detajet.

Së pari gjejmë gjithë eigenvlerat e A-së
$$\lambda_1, \dots, \lambda_r,$$
dhe shumfishmëritë e tyre.

Së dyti, për çdo eigenvlerë λ_i gjejmë një bazë ortonormale
$$\mathcal{B} = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,s_i}\}$$
Së treti, krijojmë matricën
$$S = [v_{1,1} \mid \dots \mid v_{1,s_1} | v_{2,1} | \dots | v_{2,s_2} | \dots | v_{r,s_r}]$$
dhe matricën diagonale
$$D = \text{diag}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$
që janë matricat e kërkuara.

Problemi i mësipërm ka vlerë për çdo matricë simetrike (pra në mënyrë ekuivalente për çdo formë kuadratike, jo vetëm format binare dhe ternare). Një nxënës që kupton gjithë hapat e zgjidhjes së këtij problemi mund të thuhet se ka një bazë të shendoshë të algjebrës lineare.

I përshtatur për sipërfaqet kuadratike ky problem bëhet:

Problem 9. *Konsideroni formën kuadratike*
$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
i) Gjeni matriocën korresponduese A të $q(x, y, z)$.

ii) Gjeni matricat C dhe D të tilla që $A = C^{-1}DC$, ku C është ortogonale dhe D matricë diagonale.

iii) Përcaktoni zëvendësimet lineare
$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z, \end{aligned}$$
të tilla që $q(x', y', z')$ transformohet në një formë diagonale që i korespondon D-së.

iv) Gjeni $q(x', y', z')$ algjebrikisht për të kontrolluar që vërtet i korespondon matricës diagonale D.

v) Çfarë është forma e sipërfaqes $q(x', y', z') = 4$? Ç'mund të thoni për formën e sipërfaqes $q(x, y, z) = 4$?

Kur ushtrimi i mësipërm është metodollogjik dhe përmban brenda të paktën një simestër të algjebrës lineare dhe një simestër të gjeometrisë analitike, të gjitha keto njohuri mund të bëhen në shkollën e mesme dhe nxënësi arrin nivelin e një studenti të vitit të dytë të universitetit.

Problemi i mëposhtëm, në dukje më inoçent, është një shembull konkret i metodës së mësipërme.

Problem 10. *Klasifikoni sipërfaqen kuadratike*

$$x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 5xz + 4yz = 1.$$

7. Ndërtimet gjeometrike

Këtu po japim një permbledhje elementare të materialit të trajtuar ne Kapitullin 14 të [35]. Ne supozojmë njohuri elementare të algjebrës dhe konceptin e fushës. Në rast se ky koncept nuk është zhvilluar, mësuesi mund të zëvendësojë fjalën fushë me një nga bashkësitë $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ose $\mathbb{C}$.

Gjithashtu ne supozojmë se nxënësi kupton konceptin e zgjerimit të fushave ose nënfushe e një fushe të dhënë. Pra ne do të përdorim shtrirjet algjebrike të fushave. Një material pregatitor për të lexuar këtë material është materiali elementar në Kapitullin 13 në [35].

7.1. Numrat e ndërtueshëm.

Një numër real α është **i ndërtueshëm**, në qoftë se mund të ndërtojmë një segment me gjatësi $|\alpha|$ në një numër të fundëm hapash nga një segment njësi, duke përdorur një vizore dhe një kompas.

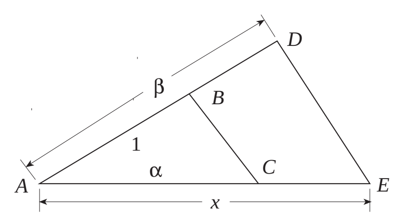


Figure 3. Ndërtimi i produkteve të numrave

Theorem 1. *Bashkësia të gjithë numrave realë të ndërtueshëm formon një nënfushë F, të fushës së numrave realë $\mathbb{R}$.*

Vërtetim. Le të jenë α dhe β, numra të ndërtueshëm. ne duhet të vërtetojmë se, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, dhe α/β ($\beta \neq 0$), janë gjithashtu numra të ndërtueshëm. Ne mund të supozojmë, që të dy α dhe β, janë pozitivë, ku $\alpha > \beta$. Është pothuajse e qartë , sesi të ndërtojmë $\alpha + \beta$ dhe $\alpha - \beta$. Për të gjetur një segment me gjatësi $\alpha\beta$, supozojmë, që $\beta > 1$ dhe ndërtojmë trekëndëshin në Figurën 3, i tillë që, trekëndëshat $\triangle ABC$ dhe $\triangle ADE$ janë të ngjashëm. Meqënëse $\alpha/1 = x/\beta$, segmenti x ka gjatësi $\alpha\beta$. Një ndërtim i ngjashëm mund të bëhet, në qoftë se $\beta < 1$. Po e lëmë si ushtrim të vërtetoni se, i njëjti trekëndësh mund të përdoret për të ndërtuar α/β, për $\beta \neq 0$. □

Lemma 8. *Në qoftë se α është një numër i ndërtueshëm, atëherë edhe $\sqrt{\alpha}$ është numër i ndërtueshëm.*

Vërtetim. Në Figurën 4 trekëndëshat $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, dhe $\triangle ABC$ janë të ngjashëm; pra, $1/x = x/\alpha$, ose $x^2 = \alpha$. □

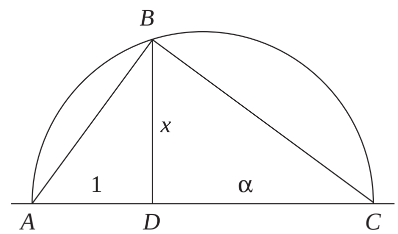


FIGURE 4. Ndërtimi i rrënjëve të numrave

Lema e mëposhtme mund të jetë një detyrë e përshtatshme.

Lemma 9. *Është i mundur ndërtimi i trekëndëshave të ngjashëm.*

Ne mund të gjejmë në plan çdo pikë $P = (p, q)$, e cila ka koordinata racionale p dhe q. Ne duam të dimë se, cilat pika të tjera mund të ndërtohen me kompas dhe vizore, nga pikat me koordinata racionale.

Lemma 10. *Le të jetë F një nënfushë e $\mathbb{R}$.*

i) Në qoftë se një drejtëz përmban dy pika në F, atëherë ajo ka ekuacionin $ax + by + c = 0$, ku a, b, dhe c janë në F.

ii) Në qoftë se një rreth e ka qendrën në një pikë me koordinata në F dhe me rreze, cila është gjithashtu në F, atëherë ai ka ekuacionin $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, ku d, e, dhe f janë në F.

Vërtetim. Le të jenë (x_1, y_1) dhe (x_2, y_2), pika të një drejtëze me koordinata në F. Në qoftë se $x_1 = x_2$, atëherë ekuacioni i drejtëzës, që kalon nga dy pikat është $x - x_1 = 0$, i cili ka formën $ax + by + c = 0$. Në qoftë se $x_1 \neq x_2$, atëherë ekuacioni i drejtëzës, që kalon nga dy pikat jepet nga

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1),$$

i cili mund të kthehet në formën e duhur.

Për të vërtetuar pjesën e dytë të lemës, supozojmë se, (x_1, y_1) është qendra e një rrethi me rreze r. Atëherë rrethi ka ekuacionin

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r^2 = 0.$$

Ky ekuacion mund të shkruhet lehtë në formën e duhur.

□

Duke filluar me fushën e numrave të ndërtueshëm F, kemi tre mënyra të ndryshme për të ndërtuar pikat shtesë në $\mathbb{R}$ me kompas dhe vizore .

(1) Për të gjetur pika e reja të mundshme në $\mathbb{R}$, ne mund të marrim prerjen e dy drejtëzave, ku seicila prej tyre kalon nga dy pika të dhëna me koordinata në F.
(2) Prerja e një drejtëze, e cila kalon nga dy pika me koordinata në F me një rreth, qendra e të cilit i ka koordinatat në F me gjatësi rrezje në F, do të na japë pika të reja në $\mathbb{R}$.
(3) Ne mund të përftojmë pika të reja në $\mathbb{R}$, duke prerë dy rrathë, qendrat e të cilëve i kanë koordinatat në F dhe gjatësitë e rrezeve të tyre janë në F.

Rasti i parë, nuk na jep pika të reja në $\mathbb{R}$, meqë zgjidhja e dy ekuacioneve të formës $ax + by + c = 0$, me koefiçientë në F, gjithmonë do të jetë në F. Rasti i tretë mund të sillet te rasti i dytë. Le të jenë

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1x + f_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2x + f_2 = 0$$

ekuacionet e dy rrathëve, ku d_i, e_i, dhe f_i janë në F për $i = 1, 2$. Këta rrathë kanë të njëjtën prerje si, rrethi

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1x + f_1 = 0$$

dhe drejtëza

$$(d_1 - d_2)x + b(e_2 - e_1)y + (f_2 - f_1) = 0.$$

Ekuacioni i fundit, është ai i kordës, që kalon në pikat e prerjes së dy rrathëve. Pra, prerja e dy rrathëve mund të sillet në rastin e prerjes së një drejtëze me një rreth.

Konsiderojmë rastin e prerjes së një drejtëze me një rreth, duhet të përcaktojmë natyrën e zgjidhjeve të ekuacioneve.

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f &= 0. \end{aligned}$$

Në qoftë se eleminojmë y nga këto ekuacione, përftojmë një ekuacion të formës $Ax^2 + Bx + C = 0$, ku A, B, dhe C janë në F. Koordinata x e pikave të prerjes jepet nga

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dhe është në $F(\sqrt{\alpha}\,)$, ku $\alpha = B^2 - 4AC > 0$. Kemi vërtetuar lemën në vazhdim.

Lemma 11. *Le të jetë F fusha e numrave të ndërtueshëm. Atëherë pikat e prerjes së drejtëzave dhe rrathëve në F, ndodhen në fushën $F(\sqrt{\alpha}\,)$ për ndonjë α në F.*

Theorem 2. *Një numër real α është numër i ndërtueshëm, atëherë dhe vetëm atëherë, kur ekziston një varg fushash*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k$$

të tilla që, $F_i = F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i}\,)$ ku $\alpha \in F_k$. Në veçanti, ekziston një numër i plotë $k > 0$, i tillë që, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^k$.

Vërtetim. Ekzistenca e F_i-ve dhe e α_i-ve është pasojë direkte e Lemës së mësipërme dhe e faktit, që

$$[F_k : \mathbb{Q}] = [F_k : F_{k-1}][F_{k-1} : F_{k-2}] \cdots [F_1 : \mathbb{Q}] = 2^k.$$

□

Rrjedhim 1. *Fusha e gjithë numrave të ndërtueshëm është një shtrirje algjebrike e* $\mathbb{Q}$.

Siç mund ta shihni nga fusha e numrave të ndërtueshëm, jo çdo shtrirje algjebrike e një fushe është shtrirje e fundme.

7.2. **Dyfishimi i një kubi dhe katrori i rethit.** Tani jemi gati të shqyrtojmë problemet klasike të dyfishimit të kubit dhe të kthimit të rrethit në katror. Ne mund të përdorim fushën e numrave të ndërtueshëm për të treguar me saktësi se, kur një ndërtim i veçantë algjebrik mund të realizohet.

Dyfishimi i kubit është i pamundur. Kur jepet brinja e kubit, është e pamundur të ndërtosh me vizore dhe kompas brinjën e kubit, i cili ka dyfishin e vëllimit të kubit origjinal. Le të jetë kubi origjinal me brinjë me gjatësi 1 dhe me vëllim po 1. Në qoftë se mund të ndërtojmë një kub me vëllim 2, atëherë ky kub i ri do ta ketë brinjën me gjatësi $\sqrt[3]{2}$. Megjithatë, $\sqrt[3]{2}$ është një rrënjë e polinomit të pathjeshtuar $x^3 - 2$, mbi $\mathbb{Q}$; pra,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,) : \mathbb{Q}] = 3$$

Kjo është e pamundur, sepse 3 nuk është fuqi e 2.

Theorem 3. *Është e pamundur, që të dyfishojmë kubin.*

Vërtetim. Marrim një kub me vëllim 1. Për të dyfishuar kubin duhet të ndërtojmë një x, të tillë që,

$$x^3 = 2.$$

Polinomi

$$f(x) = x^3 - 2$$

është i pathjeshtueshëm mbi $\mathbb{Q}$ dhe prandaj, për çdo rrënjë α të $f(x)$, kemi $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, e cila nuk është fuqi e 2.

□

7.3. **Kthimi i rrethit në katror.** Supozojmë, që kemi një rreth me rreze 1. Sipërfaqja e rrethit është π; prandaj, ne duhet të ndërtojmë një katror me brinjë$\sqrt{\pi}$. Kjo është e pamundur, sepse si π dhe $\sqrt{\pi}$ janë të dy transhendentë. Kështu që, me përdorimin e vizores dhe kompasit, është e pamundur të ndërtosh një katror me të njëjtën sipërfaqe sa të rrethit.

Theorem 4. *Është e pa mundur ta kthesh rrethin në katror.*

Vërtetim. Jepen r i ndërtueshëm dhe një rreth me rreze r. Duam të ndërtojmë një katror me brinjë x, i tillë që,

$$x^2 = \pi r^2$$

Meqënëse π nuk është as numër algjebrik, atëherë rrënjët e ekuacionit të mësipërm nuk janë as algjebrikë dhe prandaj nuk mund të jenë të ndërtueshme.

□

7.4. **Ndarja në tresh e një këndi.** Ndarja në tresh e një këndi të çfarëdoshëm është e pamundur. Do të vërtetojmë se, është e pamundur të ndërtosh një kënd 20°. Për pasojë, një kënd 60° nuk mund të ndahet në tresh. Si fillim, duhet të llogaritim formulën e këndit trefish për kosinusin:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{13}$$

Këndi θ mund të ndërtohet, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\alpha = \cos\theta$ është i ndërtueshëm. Le të jetë $\theta = 20^\circ$. Atëherë $\cos 3\theta = \cos 60^\circ = 1/2$. Nga formula e këndit të trefishtë për kosinusin,

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}.$$

Kështu që, α është një rrënjë e $8x^3 - 6x - 1$. Ky polinom nuk ka faktorë në $\mathbb{Z}[x]$, pra është i pathjeshtueshëm mbi $\mathbb{Q}[x]$. Kështu që, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$. Për pasojë, α nuk mund të jetë një numër i ndërtueshëm.

Theorem 5. *Është e pamundur të ndahet një kënd në tresh.*

Vërtetim. Të ndash në tresh një kënd 3α, është njësoj si të ndërtosh $\cos\alpha$, kur jepet $\cos 3\alpha$. Ekuacioni (13) na jep polinomin

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \cos 3\alpha,$$

për të cilin $\cos\alpha$ është rrënjë. Për disa vlera të α polinomi $f(x)$ është i pathjeshtueshëm dhe $[\mathbb{Q}(\cos\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, e cila nuk është fuqi e 2. Marrim $\alpha = 20^\circ$. Atëherë,

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 1$$

është i pathjeshtueshëm mbi $\mathbb{Q}$. Pra, në qoftë se, α është rrënjë e $f(x)$, atëherë $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, e cila nuk është fuqi e 2. □

Shembull 5. *Përcakto në se këta kënde mund të ndahet në tresh.*
i) Këndi β, i tillë që, $\cos\beta = \frac{1}{3}$.
ii) $\beta = 120^\circ$

Solution: Të ndash në tresh një kënd $\beta = 3\alpha$, është njësoj si të ndërtosh $\cos\alpha$, kur jepet $\cos 3\alpha$. Ekuacioni

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

na jep polinomin

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \cos 3\alpha,$$

për të cilin $\cos\alpha$ është rrënjë.

i) Në qoftë se, $\cos 3\alpha = \frac{1}{3}$, atëherë $\cos\alpha$ është një rrënjë e polinomit

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{3}$$

i cili është i pathjeshtueshëm. Atëherë, $[\mathbb{Q}(\cos\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, i cili nuk është fuqi e 2. Pra, ky kënd nuk mund të ndahet në tresh.

ii) Në qoftë se, $\beta = 120^\circ$, atëherë $\cos\beta = -\frac{1}{2}$. Atëherë

$$f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$$

i cili është i pathjeshtueshëm mbi $\mathbb{Q}$ dhe, si më lart, këndi nuk mund të ndahet në tresh. □

7.5. Ndërtimi i një shumëkëndëshi të rregullt.

Theorem 6. *n-këndëshi është i ndërtueshëm, atëherë dhe vetëm atëherë, kur*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_s,$$

ku p_i janë numrat e thjeshtë Fermat, të dalluar, pra të formës $p = 2^{2^r} + 1$.

Vërtetim. Ndërtimi i një n-këndëshi është ekuivalent me ndërtimin e $\cos \frac{2\pi}{n}$. Shënojmë me $e_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ rrënjën primitive të njësisë. Atëherë, $\cos \frac{2\pi}{n} = (\varepsilon_n + \varepsilon_n^{-1})/2$. Pra, $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ është një shtrirje e $\mathbb{Q}(\frac{2\pi}{n})$. Ne e mbarojmë vërtetimin vetëm për n numër të thjeshtë p, pjesa tjetër do të vërtetohet në kapitullin e fushës ciklotomike në [35]. Pra, $\cos \frac{2\pi}{n}$ është i ndërtueshëm, në qoftë se, $\frac{p-1}{2} = 2^r$ për ndonjë $r \geq 0$. Kështu që, kjo është e mundur vetëm për numra të thjeshtë p, të formës $p = 2^k + 1$. Këta janë saktësisht numrat e thjeshtë Fermat dhe ata janë të formës $p = 2^{2^r} + 1$. $\square$

Disa problema të përshtatshëm për gjeometrinë e shkollës së mesme janë:

Problem 11. *Vërtetoni se, 9-këndëshi i rregullt nuk është i ndërtueshëm me vizore dhe kompas kurse 20-këndëshi i rregullt është i ndërtueshëm.*

Problem 12. *Vërtetoni se, kosinusi i një grade ($\cos 1^\circ$) është algjebrik mbi $\mathbb{Q}$, por nuk është i ndërtueshëm.*

Problem 13. *Vërtetoni se në qoftë se α dhe β janë numra të ndërtueshëm, të tillë që $\beta \neq 0$, atëherë i tillë është edhe α/β.*

Problem 14. *Jepni një mënyrë gjeometrike për të ndërtuar një n-gon të rregullt, për*

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24$$

Ndërtimi i n-këndëshit të rregullt për $n = 3, \ldots, 6$ zakonisht është trajtuar bë programet tona të gjeometrisë. Natyrisht, nga kjo rastet $n = 8, 10, 12, 16, 20, 24$ janë rrjedhime elementare. Rasti $n = 15$ është një problem interesant për nxënësin e vitit të dytë të gjimnazit. Rasti $n = 17$ është më i vështiri.

REFERENCES

[1] Andrew N. Aheart, *Mathematical Education Notes: The Mathematics Curriculum of the Junior Colleges, Colleges, and Universities in West Virginia 1962-63*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), no. 1, 82–85. MR1532491

[2] V. I. Arnold, *Lectures and problems: a gift to young mathematicians*, MSRI Mathematical Circles Library, vol. 17, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. Translated by Dmitry Fuchs and Mark Saul, with a preface by Saul. MR3409220

[3] E. G. Begle, *Mathematical Education Notes: Remarks on the Memorandum "On the Mathematics Curriculum of the High School*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), no. 5, 425–426. MR1531691

[4] Lubjana Beshaj, *Reduction theory of binary forms*, Advances on superelliptic curves and their applications, 2015, pp. 84–116. MR3525574

[5] Lubjana Beshaj, Artur Elezi, and Tony Shaska, *Theta functions of superelliptic curves*, Advances on superelliptic curves and their applications, 2015, pp. 47–69. MR3525572

[6] Lubjana Beshaj, *Integral binary forms with minimal height*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2016. Thesis (Ph.D.)–Oakland University. MR3579531

[7] L. Beshaj, T. Shaska, and E. Zhupa, *The case for superelliptic curves*, Advances on superelliptic curves and their applications, 2015, pp. 1–14. MR3525570

[8] Lubjana Beshaj, Tony Shaska, and Eustrat Zhupa (eds.), *Advances on superelliptic curves and their applications*, NATO Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security, vol. 41, IOS Press, Amsterdam, 2015. Including papers based on the NATO Advanced Study Institute (ASI) on Hyperelliptic Curve Cryptography held in Ohrid, August 25–September 5, 2014. MR3495135

[9] David Dennis, *Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: Geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of functions*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1995. Thesis (Ph.D.)–Cornell University. MR2692321

[10] J. William Drew, *Mathematical Education Notes: The Mathematics Curriculum in the Small College*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), no. 7, 664. MR1531789

[11] H. F. Fehr, *Mathematical Education Notes: Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), no. 5, 533. MR1533801

[12] H. F. Fehr and James Fey, *Mathematical Education: The Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), no. 10, 1132–1137. MR1535690

[13] Joseph Lowell Garrison, *The evaluation of a probabilistic intuition supplement to the secondary mathematics curriculum*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1997. Thesis (Ph.D.)–Georgia State University. MR2695669

[14] Masha Gessen, *Perfect rigor*, Houghton Mifflin Harcourt, Boston, MA, 2009. A genius and the mathematical breakthrough of the century. MR2598223

[15] James Henkelman, *Mathematical Education Notes: Effecting Mathematics Curriculum Change in the Secondary School*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), no. 8, 895–897. MR1533427

[16] Peter J. Hilton, *The emphasis on applied mathematics today and its implications for the mathematics curriculum*, New directions in applied mathematics (Cleveland, Ohio, 1980), 1982, pp. 155–163. MR661288

[17] Robert E. Horton, *Learning Theories and the Mathematics Curriculum*, Math. Mag. **33** (1959), no. 2, 79–98. MR1571005

[18] Dae-Heung Jang and Hyo-Jeong Lee, *A study on probability and statistics education in Practical mathematics and Mathematics I textbooks according to the 7th national mathematics curriculum in Korea*, Korean J. Appl. Statist. **18** (2005), no. 2, 453–469. MR2119590

[19] Gaston Julia, *Étude sur les formes binaires non quadratiques Ãă indÃľterminÃľes rÃľelles, ou complexes, ou Ãă indÃľterminÃľes conjuguÃľes*, NUMDAM, [place of publication not identified], 1917. MR3532882

[20] Felix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. Arithmetic, algebra, analysis, Translated from the third German edition by E. R. Hedrick and C. A. Noble, Reprint of the 1932 translation. MR2098410

[21] ———, *Elementary mathematics from a higher standpoint. Vol. II. Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2016. Translated from the fourth (1926) German edition by Gert Schubring. MR3495524

[22] ———, *Elementary mathematics from a higher standpoint. Vol. III*, Springer-Verlag, Berlin, 2016. Precision mathematics and approximation mathematics, Translated from the third (1928) German edition by Marta Menghini in collaboration with Anna Baccaglini-Frank, Mathematical advisor for the English translation: Gert Schubring, With prefaces to previous editions by Conrad Heinrich MÃijller and Fritz Seyfarth. MR3495525

[23] ———, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Vol. I. Arithmetic, Algebra, Analysis*, Dover Publications, New York, N. Y., 1945. MR0015349

[24] ———, *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Arithmetic-algebra-analysis*, Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1953. Translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble. MR0055397

[25] F. Klein, *Famous problems of elementary geometry. The duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle*, Dover Publications, Inc., New York, 1956. MR0076336

[26] Felix Klein, *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, revised, Dover Publications, Inc., New York, N.Y., 1956. Translated into English by George Gavin Morrice. MR0080930

[27] ———, *Development of mathematics in the 19th century*, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, IX, Math Sci Press, Brookline, Mass., 1979. With a preface and appendices by Robert Hermann, Translated from the German by M. Ackerman. MR549187

[28] Vishwanath Krishnamoorthy, Tanush Shaska, and Helmut Völklein, *Invariants of binary forms*, Progress in Galois theory, 2005, pp. 101–122. MR2148462

[29] Kimberly Elizabeth Long, *Statistics in the high school mathematics curriculum: Is the curriculum preparing students to be quantitatively literate?*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)–The American University. MR2698592

[30] Kenneth O. May, *Mathematical Education: History in the Mathematics Curriculum*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), no. 8, 899–901. MR1537517

[31] Fred S. Roberts, *The introductory mathematics curriculum: misleading, outdated, and unfair*, College Math. J. **15** (1984), no. 5, 383–399. With responses. MR767867

[32] T. Shaska and L. Beshaj, *The arithmetic of genus two curves*, Information security, coding theory and related combinatorics, 2011, pp. 59–98. MR2963126

[33] ———, *Heights on algebraic curves*, Advances on superelliptic curves and their applications, 2015, pp. 137–175. MR3525576

[34] Tanush Shaska, *Some open problems in computational algebraic geometry*, Albanian J. Math. **1** (2007), no. 4, 297–319. MR2367221

[35] T. Shaska, *Algjebra abstrakte*, AulonaPress, 2011.

[36] ———, *Algjebra lineare*, AulonaPress, 2011.

[37] ———, *Kalkulus*, Vol. 2, AulonaPress, 2012.

[38] Roland J. K. Stowasser, *History of science—a critical and constructive tool for the mathematics curriculum*, Mathematical papers given on the occasion of Ernst Mohr's 75th birthday, 1985, pp. 251–270. With an appendix by Stowasser and Trygve Breiteig. MR809008

[39] Alfred J. van der Poorten, *A note on NUCOMP*, Math. Comp. **72** (2003), no. 244, 1935–1946 (electronic). MR1986813

[40] R. L. Wilder, *History in the mathematics curriculum: Its status, quality, and function*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 479–495. MR0297501

48619 STONERIDGE DR, NORTHVILLE, MI 48168
E-mail address: bshaska@risat.org

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, OAKLAND UNIVERSITY, 368 MATHEMATICS SCIENCE CENTER, ROCHESTER MI 48309-4479
E-mail address: shaska@oakland.edu

Albanian Journal of Mathematics (ISSN: 1930-1235) was founded by T. Shaska in 2007 with the idea to support Albanian mathematicians in Albania and abroad.

The journal is not associated with any government institutions in Albania or any public or private universities in Albania or abroad. The journal does not charge any fees to the authors and has always been an open access journal. The journal supports itself with private donations and voluntary work from its staff. Its main office is in Vlora, Albania.

www.albanian-j-math.com