ANALIZĂ - Extras de curs nr. 1: Şiruri de numere reale

Un **şir de numere reale** este o funcţie $n \mapsto a_n$ a cărei domeniu este mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ şi a cărei valori aparţin mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Notaţia uzuală: (a_n).

Un şir (a_n) se numeşte **crescător** dacă $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Un şir (a_n) se numeşte **descrescător** dacă $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Un şir care este crescător sau descrescător se numeşte **şir monoton**.

Spunem că un şir (a_n) este **mărginit** dacă există un număr $M > 0$ astfel ca $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Şirul (a_n) **converge** la numărul real L (are **limita** L) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - L| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$.

→ Dacă şirul (a_n) este convergent la L, atunci orice subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) converge la L.
→ Există şiruri care nu au limită (de exemplu, şirul $a_n = (-1)^n$).
→ Dacă limita şirului (a_n) există, atunci ea este unică.
→ Dacă şirul (a_n) este convergent la un număr real L, atunci el este mărginit.

Spunem că limita şirului (a_n) este $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât $a_n > M$ pentru orice $n > N_M$.
Spunem că limita şirului (a_n) este $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât $a_n < -M$ pentru orice $n > N_M$.

Mulţimea punctelor limită a a şirului (a_n) (notată cu $\mathcal{L}(a_n)$) este mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care există un subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) astfel încât $\lim\limits_{n_k \to \infty} a_{n_k} = x$.

→ Şirul (a_n) este convergent la L, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$, dacă şi numai dacă $\mathcal{L}(a_n) = \{L\}$.

Limita superioară a şirului (a_n) este $\sup \mathcal{L}(a_n)$. Notaţia uzuală: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Limit inferioară a şirului (a_n) este $\inf \mathcal{L}(a_n)$. Notaţia uzuală: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Convergenţa şirurilor monotone şi mărginite: Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Teorema Bolzano-Weierstrass: Orice şir mărginit (a_n) are cel puţin un subşir convergent.

Reguli de calcul pentru limite:
Dacă limitele $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ există şi sunt finite, atunci:
1. (regula de înmulţire cu un scalar) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
2. (regula sumei) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. (regula produsului) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
4. (regula raportului) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ (presupunând că $b_n \neq 0$ şi $B \neq 0$)

Regula cleştelui pentru şiruri:
Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Regula lui L′Hospital pentru şiruri:
Presupunem că $a_n = f(n)$ şi $b_n = g(n) \neq 0$ unde f şi g sunt două funcţii derivabile pentru care are loc una din condiţiile următoare:
a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ sau **b.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$. Atunci
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (dacă limita din partea dreaptă a egalităţii există).

Lema lui Stolz-Cesaro:
Fie două şiruri (a_n) şi (b_n), şirul (b_n) fiind pozitiv, strict crescător şi nemărginit. Atunci:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ (dacă limita din partea dreaptă a egalităţii există).

Lema lui Cauchy-d′Alembert:
Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (dacă limita din partea dreaptă a egalităţii există).

1. Să se demonstreze riguros (pe baza definiţiei) că $a_n = \frac{1}{n}$ este convergent la 0.

2. Să se demonstreze riguros (pe baza definiţiei) că $a_n = \frac{2n}{5n-3}$ este convergent la $\frac{2}{5}$.

3. Să se demonstreze riguros (pe baza definiţiei) că $a_n = 1 + \left(\frac{9}{10}\right)^n$ este convergent la 1.

4. Calculaţi limitele următoarelor şiruri:

   1. $a_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n$
   2. $a_n = \frac{\sin n}{3^n}$
   3. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   4. $a_n = \frac{\ln n}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$
   5. $a_n = \frac{n^{2005}}{(n+1)^x - n^x}$, $x > 0$
   6. $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)}$
   7. $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt[n]{n}}{n}$
   8. $a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln(n+2)}\right)$
   9. $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$
   10. $a_n = \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$
   11. $a_n = \sqrt[n]{n}$
   12. $a_n = \sqrt[n]{n!}$
   13. $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$
   14. $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

5. Găsiţi $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ pentru următoarele şiruri:

   1. $a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}$
   2. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ \frac{1}{n}, & n = 3k+1 \\ n, & n = 3k+2 \end{cases}$
   3. $a_n = \cos(n\pi)$
   4. $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
   5. $a_n = \frac{[na]}{n+1}$, $a \in \mathbb{R}^\star$
   6. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$
   7. $a_n = \frac{n^{(-1)^n}}{n} + \sin^2\frac{n\pi}{4}$
   8. $\cos^n\frac{2n\pi}{3}$

6. Fie (F_n) şirul lui Fibonacci dat de relaţia de recurenţă $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, cu $F_0 = F_1 = 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ există şi este egală cu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7. Se dă şirul (a_n) definit prin relaţia de recurenţă:

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

Demonstraţi prin inducţie că $a_n < 4$ pentru orice n şi arătaţi că sirul (a_n) este crescător. Găsiţi limita şirului.