ANALIZĂ - Extras de curs nr. 2: Serii de numere reale

• O **serie (infinită) de numere reale** este o expresie de forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

unde (a_n) este un şir de numere reale; termenul a_n se numeşte **termenul general** al seriei.
• **Suma parţială de ordinul** $\boldsymbol{n}$ a seriei este suma primilor n termeni: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
• Şirul (S_n) se numeşte **şirul sumelor parţiale** al seriei.

♣ Convergenţa şi divergenţa seriilor

• Seria $\sum a_n$ este **convergentă** d.n.d. şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent.

În acest caz, limita şirului sumelor parţiale $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se numeşte **suma seriei** şi notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
• Seria $\sum a_n$ este **divergentă** dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este divergentă.
• Spunem că seria $\sum a_n$ este **absolut convergentă** dacă şi numai dacă $\sum |a_n|$ este convergentă.
! Remarcă: convergenţa absolută implică convergenţa simplă (dar nu întotdeau şi reciproc). În cazul seriilor cu termeni pozitivi, noţiunile de convergenţa absolută şi convergenţă simplă sunt echivalente.

♣ Criteriu necesar de convergenţă: *Dacă seria* $\sum a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
! Consecinţă: Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sau această limită nu există, seria $\sum a_n$ este divergentă.

! Remarcă: Acest criteriu este doar necesar, nu şi suficient (ex: *seria armonică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă !!)

♣ Operaţii cu serii convergente

Dacă seriile $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ sunt convergente, atunci şi seriile $\sum(a_n + b_n)$ şi $\sum c a_n$ (unde $c \in \mathbb{R}$) sunt convergente şi

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$; 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

♣ Serii geometrice

• Seria cu termenul general $a_n = r^n$, unde $r \in \mathbb{R}$ se numeşte **serie geometrică de raţie** $\boldsymbol{r}$.
• Seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ este convergentă d.n.d. $|r| < 1$. În acest caz, suma ei este $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

♣ Serii armonice ($\boldsymbol{p}$-serii)

• Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, unde $p \in \mathbb{R}$, se numeşte ***p*-serie**, şi este convergentă d.n.d. $p > 1$.

♣ CRITERII DE CONVERGENŢĂ

• **Criteriul integralei:**
Fie $f : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$ o funcţie descrescătoare şi şirul (a_n) definit prin $a_n = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Considerăm $j_n = \int_1^n f(x)\, dx$. Seria $\sum a_n$ este convergentă d.n.d. şirul (j_n) este convergent.
• **Criteriul comparaţiei I:**
Dacă $0 \le a_n \le b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:
1. dacă $\sum b_n$ este convergentă atunci şi $\sum a_n$ este convergentă.
2. dacă $\sum a_n$ este divergentă atunci şi $\sum b_n$ este divergentă.
• **Criteriul comparaţiei II:**
Presupunem că seriile $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ sunt serii cu termeni pozitivi, astfel incât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$.
Atunci, $\sum a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum b_n$ este convergentă.
• **Criteriul lui Leibnitz pentru serii alternante:**
Dacă (b_n) este un şir descrescător de numere reale astfel incât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ atunci seria alternantă $\sum(-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

- **Criteriul raportului:**

Presupunem că limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există sau este infinită. Atunci seria $\sum a_n$
1. este absolut convergentă dacă $L < 1$;
2. este divergenţa dacă $L > 1$.

Dacă $L = 1$, acest criteriu nu este concludent.

- **Criteriul rădăcinii:**

Presupunem că limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ există sau este infinită. Atunci seria $\sum a_n$
1. este absolut convergentă dacă $L < 1$;
2. este divergenţa dacă $L > 1$.

Dacă $L = 1$, acest criteriu nu este concludent.

---

1. Calculaţi suma parţială de rang n şi determinaţi suma seriei:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9n^2+3n-2}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n}{n^4-5n^2+4}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^2-8n-3}$

2. Stabiliţi dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sin\frac{1}{n}}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\dfrac{3}{e}\right)^n$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n+3^n}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arctan 1)^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n+5^n}{3^n}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{7}{11}\right)^n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]$

3. Folosind criteriul integralei, determinaţi dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{e^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan n}{n^2+1}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{1/n}}{n^2}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$

4. Folosind criteriile comparaţiei, determinaţi dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n+1}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n^2+1}$ 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{1/n}}{n}$ 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\dfrac{\pi}{5^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1}{n^4+2}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{3^n}$ 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+n^{3/2}}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2^n}{n+3^n}$ 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2\cdot 3^n}$ 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10n^2}{n^4+1}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n-\ln n}$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n+3^n}$ 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\sin n}{n^2}$ 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{3}{n^2+4n}\right)$

5. Determinaţi dacă următoarele serii alternante sunt convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+2}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{3n^2+2}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n^{3/2}}$

6. Folosind criteriile raportului sau rădăcinii, determinaţi dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $a > 0$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n^2-2}}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 n^2}{(2n)!}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!n}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(an)^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{an+1}{bn+2}\right)^n$, $a, b > 0$

7. Studiaţi dacă următoarele serii sunt absolut convergente, convergente sau divergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-10)^n}{n!}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^n}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^n}{3^{n^2}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n}{n}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$