Лінійна регресія

Система рівнянь для знаходження коефіцієнтів a, b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Тоді формула для знаходження кожного з них:

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(nx_i - 1)}{\sum_{i=1}^{n} x_i(nx_i - 1)} \\ \\ b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)}{n} \end{cases}$$

Кубічна функція

Шукаємо залежність даних у наступному вигляді:

$$y \sim f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Тоді квадратична похибка $g(x)$ становитиме

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2 = min, \text{ де } n \text{ - кількість пар } (x,y) \text{ в наборі даних}$$

Для цього достатньо, аби були виконані наступні умови:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial a} = \frac{\partial g(x)}{\partial b} = \frac{\partial g(x)}{\partial c} = \frac{\partial g(x)}{\partial d} = 0$$

Звідки отримуємо систему рівнянь для МНК:

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^3(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) = 0 \\ \frac{\partial g(x)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) = 0 \\ \frac{\partial g(x)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) = 0 \\ \frac{\partial g(x)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) = 0 \end{cases}$$

Перепишемо у матричному вигляді:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sum_{i=1}^{n} x_i^6 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right)$$

Ще трошки про кубічну функцію

При прогонці цього дива через програму виявилося, що ця система має досить великі числа, тож в реалізації воно є, а от запускати це все-ж таки не рекомендую :D