DMA

Ugeopgave 5

Beate Berendt Søegaard
Mathias Larsen
Simon Rotendahl

Datalogi

6. oktober 2016

Del 1

1

Vi får givet en table med GCD, *Greatest Common Divisor*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3			1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4				1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3
5					1	2	3		3	1	2	3	4	3	1
6						1	2	2	2	3	3	1	2	2	2
7							1	2	3	3	4	4	3	1	2
8								1	2	2	4	2		3	3
9									1	2	3	2	3	4	3
10										1	2	2	3	3	2
11											1	2	3	4	4
12												1	2	2	2
13													1	2	3
14														1	2
15															1

```
fun gcd(a,b)
  if b = then
     return a
  else:
     return gcd(b, a mod b)
```

$$\gcd(8,5) = 1$$

$$\gcd(13,8) = 1$$

Dvs. de manglende tal er hhv. 1 og 1.

2

Lad t_n være det højeste antal trin der skal benyttes til at bestemme GCD(a,b) når $n \geq a \geq b > 0$. Ved at benytte ovenstående figur har vi at $t_1, \cdots, t_{15}$ er,

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= 1 \\ t_3 &= 2 \\ t_4 &= 2 \\ t_5 &= 3 \\ t_6 &= 2 \\ t_7 &= 3 \\ t_8 &= 3 \\ t_9 &= 3 \\ t_{10} &= 3 \\ t_{11} &= 4 \\ t_{12} &= 4 \\ t_{13} &= 4 \\ t_{14} &= 4 \\ t_{15} &= 4 \end{aligned}$$

3

Vi kan vise at t_n er $\mathcal{O}(n)$. Vi ved at det taget n-tid at køre samligningslinjerne i kode igennem samt at vores returneringslinjer tager konstant tid at køre igennem, derfor får vi at

$$t_n = \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$$

4

Ud fra vores pseudokode og konklusionen vedrørende køretid fra delopgave 1-3, kan t_n ikke være $\mathcal{O}(1)$.

5

Nej, ud fra figur 2, fra opgaveformuleringen, er $t_n = \Theta(n^2)$.

Del 2

1

Vi får givet at

$$P(n) : 5 \mid (6^n - 5n + 4) \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$$

Dvs. at højreside divideret med 5 skal være lig med et heltal $I \in \mathbb{Z}$. Vi omskriver udtrykket $P(n) = I$.

Først sætter vi $(6^n - 5n + 4) = x$ så får vi at $5 \mid x = I$, som vi derefter kan omskrive til $x = 5(I)$. Da dette udtryk er nemmere, at arbejde med end $(6^n - 5n + 4)$, kan vi antage at svaret til $(6^n - 5n + 4)$ kan løses af et multuplum af 5 og et positivt heltal I.
Altså får vi udtrykket

$$P(n) : 5 \mid (6^n - 5n + 4) = I \quad I \in \mathbb{Z}^+,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Eller

$$P(n) : (6^n - 5n + 4) = 5(I) \quad I \in \mathbb{Z}^+,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

2

$$\begin{aligned}
&P(n) : (6^n - 5n + 4) = 5(I)\\
&P(1) : (6^1 - 5(1) + 4) = 5(I) \Rightarrow 6 - 5 + 4 = 5(I) = 5(1)\\
&P(2) : (6^2 - 5(2) + 4) = 5(I) \Rightarrow 36 - 10 + 4 = 5(I) = 5(6)\\
&P(3) : (6^3 - 5(3) + 4) = 5(I) \Rightarrow 216 - 15 + 4 = 5(I) = 5(41)\\
&P(4) : (6^4 - 5(4) + 4) = 5(I) \Rightarrow 1298 - 20 + 4 = 5(I) = 5(256)\\
&P(5) : (6^5 - 5(5) + 4) = 5(I) \Rightarrow 7776 - 25 + 4 = 5(I) = 5(1551)
\end{aligned}$$

3

Vi har følgen for b_n,

$$b_n = 6^n - 5n + 4$$

og følgen for b_{n+1} vil se ud på følgende måde for $n \in \mathbb{Z}^+$, altså

$$\begin{aligned}
b_{n+1} : 6^{k+1} - 5(k+1) + 4 &= 5(I_k)\\
6^{k+1} - 5k - 5 + 4 &= 5(I_k)\\
6 \cdot 6^k - 5k + 4 - 5 &= 5(I_k)\\
(5+1) \cdot 6^k - 5k + 4 - 5 &= 5(I_k)\\
6^k - 5k + 4 + 5 \cdot 6^k - 5 &= 5(I_k)
\end{aligned}$$

Da $b_n = 6^n - 5n + 4$ kan vi omskrive ovenstående på følgende måde

$$b_{n+1} : b_n + 5 \cdot 6^k - 5 = 5(I)$$

$5(I)$ og $5(I_k)$ skal forstås således at de begge er $\mathbb{Z}^+$, men ikke nødvendigvis ens.

4

Vi har vist i delopgave 2, at $P(n)$ er sand for $n = 1 \cdots 5$.

$$P(k+1) : 6^k - 5k + 4 + 5 \cdot 6^k - 5 = 5(I)$$

Da $P(k) : 6^n - 5n + 4$ som er lig med b_n som også er lige med $5(I)$, dvs.

$$5(I) + 5 \cdot 6^k - 5 = 5(I)$$

Vi dividere med 5 over hele ligningen, og får

$$I + 6^k - 1 = I_k$$

Da både $I, k, I_k \in \mathbb{Z}^+$ ses det let at dette udtryk er sand.

5

Vi har i tidligere delopgaver vist vha. induktion at $\forall n > 0\ P(n)$, hvor

$$P(n) : 5 \mid (6^n - 5n + 4)$$

I delopgave 2-2 udførte vi 5 basistrin for $n = 1 \cdots 5$. Derefter begyndte vi vores første induktiontrin i delopgave 2-3. Her sammenknyttede vi b_n og b_{n+1} til at være $b_{n+1} = b_n + 5 \cdot 6^n - 5$. I delopgave 2-4 færdiggjorde vi vores udregninger fra delopgave 3-2 samt redegjorde for at $P(k+1)$ er sandt, kombineret med vores basistrin som var sandt, kan vi konkludere at $P(n)$ er sand.