DMA 2016

– Ugeseddel 3 –

Arbejdsvejledning

Nu starter vi på matematikdelen af DMA! Vi tager udgangspunkt i jeres ret omfattende kendskab til funktioner givet ved udtryk så som

$$2^x \qquad x^{10} \qquad \log_{10} x$$

fra jeres gymnasieuddannelse, men I vil meget hurtigt erfare at den matematik der ligger øverst i vægtøjskassen hos en datalog er meget anderledes end den I har stiftet bekendtskab med allerede. Udtrykt i fagsproget, så er den matematik I kender primært **kontinuert**, og den I skal bruge som dataloger primært **diskret**.

Det betyder at vi i mange emner starter helt fra bunden, og vi har valgt lærebogen

B. Kolby, R.C. Busby and S.C. Ross
Discrete mathematical structures, 6th edition

(som vi fremover blot benævner KBR) der ikke tager mere for givet end I burde kende i forvejen. Den fås, som I forhåbentlig allerede har bemærket, i en særlig udgave til vores kursus.

I denne første uge tager vi først fat på to emner af stor betydning for algoritmikforløbet, nemlig **størrelsesorden** for datalogisk relevante funktioner og talfølger, og de vigtigste **sumformler**. Disse emner er sådan set fint dækket i KBR, men først temmelig langt inde i bogen, således at de vil være vanskelige at læse for jer. Vi har derfor skrevet nogle kortfattede noter til jer som udgør fundamentet for jeres arbejde i denne første uge af matematikdelen. Vi beder jer også læse afsnit 1.1–1.3 i KBR der (ud over følgebegrebet) primært handler om begrebet **mængde** som I kender i forvejen, men som vi lige skal have repeteret kort inden vi kan gå videre.

Stoffet i noterne er temmelig krævende; I har højst sandsynligt aldrig set noget der ligner det før. Til gengæld er det ret kort. Vi anbefaler at I læser det mindst to gange: en gang hurtigt inden forelæsningerne, så I kan orientere jer i stoffet, og en gang efter forelæsningerne, hvor I burde have en bedre chance for at forstå det hele. Afsnit 1–3 skal bruges tirsdag og afsnit 4 torsdag. Stoffet i lærebogen burde være mere tilgængeligt og det kommer først i brug torsdag. Afsnittet til sidst i KBR 1.3 om regulære udtryk (regular expressions) kan I springe over.

Software til beregninger og visualisering

Præcis som algoritmedelen af kurset ikke indebærer så meget egentlig programmering, så vil matematikdelen ikke indebære så mange beregninger – vores tilgang til stoffet i DMA er først og fremmest teoretisk. Vi har dog brug for at I kan beregne funktionsværdier og tegne grafer for funktioner, og til det formål er I velkomne til at benytte de værktøjer I føler jer mest fortrolige med fra tidligere, uanset om det måtte være en app på jeres telefon, en grafregner eller egentligt matematiksoftware som I kører på jeres computer.

Ved forelæsningerne benytter vi matematikprogrammet Maple 2016 til at foretage sådanne beregninger og visualisere matematik på forskellige måder. Det er ikke noget krav at I benytter jer af det selv, men hvis I har lyst, har vi en licens der tillader at I downloader programmet gratis fra KU's softwarebibliotek.

Program for forelæsninger

Bemærk at den anden skemalagte auditorietime om tirsdagen benyttes som en egentlig forelæsningstime, mens den sidste skemalagte auditorietime om torsdagen er en decideret spørgetime uden et skemalagt program. Sådan er de fleste af matematik-ugerne i DMA lagt op.

Tirsdag 200916, 0815-0900

Velkomst og præsentation. Funktioner og deres grafer. Definitioner: f er $O(g)$; højere, lavere og samme størrelsesorden. Eksempler. Regneregler om O og størrelsesorden.

Tirsdag 200916, 1115-1200

Eksplicit definerede talfølger. Rekursivt definerede talfølger. Sumfølger. Sumformler.

Torsdag 220916, 0915-1000

Størrelsesorden for talfølger. Mere om datalogisk relevante funktioner og følger: $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $\log_2(x)$, $n!$. Θ-notation.

Torsdag 220916, 1315-1400

Flere eksempler om O og størrelsesorden.

Torsdag 220916, 1415-1500

Spørgetime om ugens pensum.

Program for øvelser

Bemærk at der er løsninger til alle de opgaver fra KBR der har et ulige nummer, bag i bogen. Det er klogt at vente med at læse løsningen til man enten er færdig med opgaven eller føler man er gået helt i stå med den.

Tirsdag 200916, 0915-1100

Regn følgende opgaver:

(1) To hold af dataloger kæmper om at skrive den mest effektive algoritme til at løse en opgave på et array med N indgange. Hold 1 har skrevet en algoritme der kører i

$$f_1(N) = 10 \cdot N^{10}$$

trin. Hold 2 har skrevet en algoritme der kører i

$$f_2(N) = 2^N$$

trin. Nu må et af følgende udsagn gælde:

(A) Hold 1's algoritme kører i færrest trin for alle valg af N.

(B) Hold 2's algoritme kører i færrest trin for alle valg af N.

(C) Hold 1's algoritme kører i færrest trin for nogle valg af N, og hold 2's algoritme kører i færrest trin for andre valg af N.

Tegn funktionernes grafer. Hvilket af udsagnene (A), (B) og (C) gælder?

(2) Løs ligningen

$$10 \cdot N^{10} = 2^N$$

Hvad betyder løsningen for problemstillingen diskuteret i opgave (1)?

(3) Hold 1 og hold 2 har tilgang til to forskellige computere der kan køre deres algoritmer på en sådan måde at det tager $c_1 > 0$ sekunder at afvikle et trin for hold 1 og $c_2 > 0$ sekunder at afvikle et trin for hold 2. Nu må et af følgende udsagn gælde:

(A') Hold 1's algoritme kører hurtigst for alle valg af N.

(B') Hold 2's algoritme kører hurtigst for alle valg af N.

(C') Hold 1's algoritme kører hurtigst for nogle valg af N, og hold 2's algoritme hurtigst for andre valg af N.

Er det muligt at udelukke at et eller flere af udsagnene (A'), (B') og (C') gælder, selv om vi hverken kender c_1 eller c_2?

(4) Analysér på tilsvarende vis situationen hvor antallet af trin for de to algoritmer er henholdsvis

$$g_1(N) = N^2 - N$$

og

$$g_2(N) = 3N^2 + 2N$$

(5) Brug regnereglerne S1–S8, O1–O8 til at redegøre for at

- $10x^{10}$ er $O(2^x)$
- 2^x ikke er $O(10x^{10})$
- $10x^{10}$ er lavere størrelsesorden end 2^x
- $x^2 - x$ er $O(3x^2 + 2x)$
- $3x^2 + 2x$ er $O(x^2 - x)$.
- $x^2 - x$ er samme størrelsesorden som $3x^2 + 2x$

(6) Afgør hvilke af funktionerne

$$x^2 + 2^x, (x+2)^2, (x + \log_{10} x)^2, x^3 - x, x^2 + \log_2 x$$

der har samme størrelsesorden som x^2.

Torsdag 220916, 1015-1200

Regn KBR 5.3.1, 5.3.5, 5.3.7, 5.3.9, 5.3.10 samt opgaverne

(7) Ordn følgerne givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= n2^n + n^7 \\ b_n &= 3^n + n^5 \\ c_n &= \sum_{k=1}^{n} 2^k \\ d_n &= \log_2 n + n^7 \end{aligned}$$

i voksende størrelsesorden, udelukkende ved at bruge resultater fra ugens noter.

(8) Benyt sumformler til at beregne

$$\sum_{k=1}^{100}(k^2+k)+\sum_{k=0}^{10}5^k$$

(9) [*] Find et eksplicit udtryk for sumfølgen

$$\sum_{k=n}^{2n}(k+3)$$

(10) [**] Find et eksplicit udtryk for sumfølgen

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$$

Torsdag 220916, 1515-1700

Instruktoren giver en kort introduktion til begreberne: mængde, mængdebygger, mængdeoperationer og indikatorfunktioner. Regn herefter KBR Opgave 1.1.4, 1.2.1, 1.2.14, 1.3.7, 1.3.10 og 1.3.38, og/eller saml op på andre opgaver fra ugens program.

Husk at bruge ugens quiz til at tjekke at I har forstået ugens pensum. Det kan fx ske sidst i den sidste øvelsestime.

Fordybelsesopgaver

(10) [*] Vis at $\cos(x)$ ikke er $O(\sin(x))$. Vis at $\sin(x)$ ikke er $O(\cos(x))$.

(11) [**] Find to følger (a_n) og (b_n) så (a_n) ikke er $O(b_n)$ og (b_n) ikke er $O(a_n)$.

(12) [***] Afgør om følgen $(\cos(n))$ er $O(\sin(n))$. Afgør om følgen $(\sin(n))$ er $O(\cos(n))$.