4.2-3 hashing noter CLRS 11

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Disse noter er stærkt inspireret af noter af Philip Bille og Inge Li Gørtz til kurset Algoritmer og Datastrukturer, på DTU,
http://www2.compute.dtu.dk/courses/02105+02326/2015/#generelinfo

Hashing

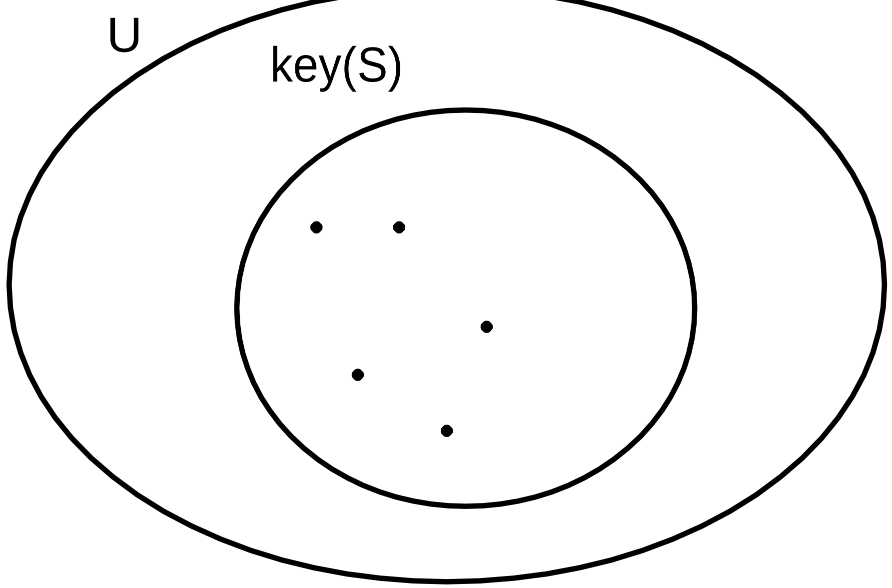
- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Ordbøger

- Ordbøger. Vedligehold en dynamisk mængde S af elementer. Hvert element har en nøgle x.key fra et univers af nøgler U og satellitdata x.data.

- Ordbogsoperationer.
  - SEARCH(k): afgør om element med nøgle k findes i S, og returner elementet.
  - INSERT(x): tilføj x til S (vi antager x ikke findes i forvejen)
  - DELETE(x): fjern x fra S.

- Eksempel.
  - U = {0,..,99}
  - key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}



Ordbøger

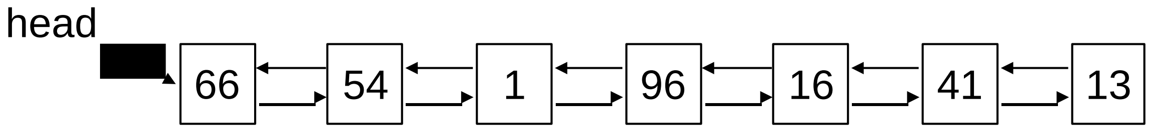
- Anvendelser.
  - Grundlæggende datastruktur til at repræsentere en mængde.
  - Bruges i mange algoritmer og datastrukturer.

Ordbøger

- Udfordring. Hvordan kan vi løse problemet med nuværende teknikker?

Ordbøger

- Løsning med hægtet liste. Gem S i hægtet liste.



- SEARCH(k): lineær søgning i listen efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste.
- DELETE(x): fjern x fra liste.

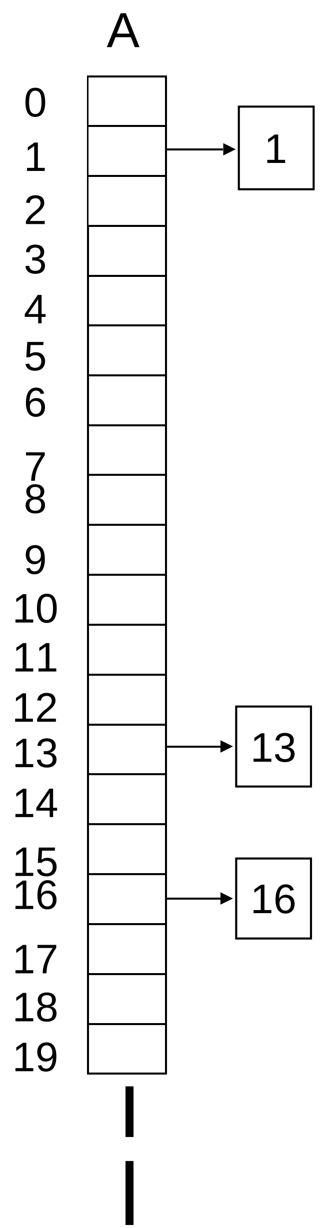
- Tid.
  - SEARCH i O(n) tid.
  - INSERT og DELETE i O(1) tid.
- Plads.
  - O(n).

Ordbøger

- Løsning med direkte addressering (*direct addressing*).
  - Gem S i tabel A af størrelse U.
  - Gem element x på position A[x.key]

- SEARCH(k): returner A[x.key].
- INSERT(x): Sæt A[x.key] = x.
- DELETE(x): Sæt A[x.key] = null.

- Tid.
  - SEARCH, INSERT og DELETE i O(1) tid.
- Plads.
  - O(|U|)



Ordbøger

Datastruktur	SEARCH	INSERT	DELETE	Plads
hægtet liste	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
direkte addressering	O(1)	O(1)	O(1)	O(|U|)

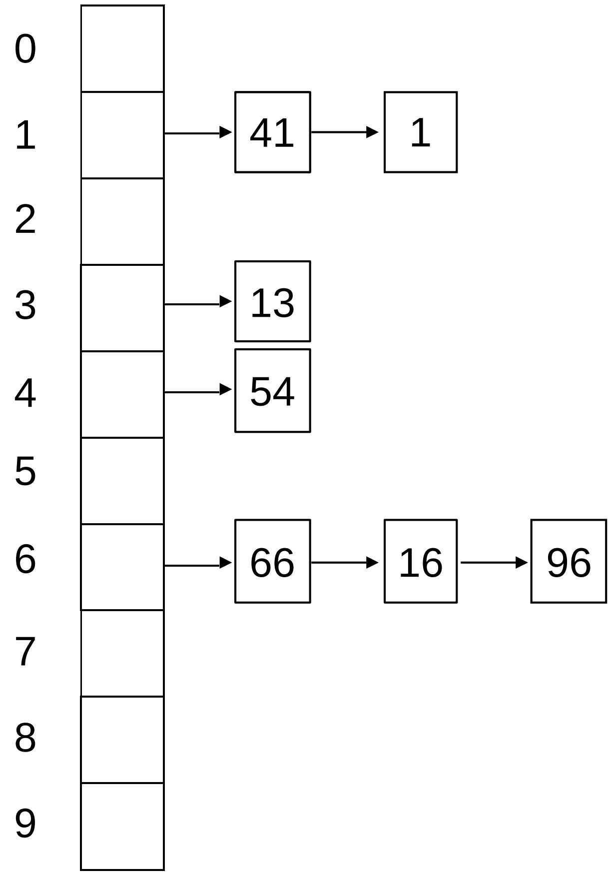
- **Udfordring:** Kan vi gøre det betydeligt bedre?
- **Bemærk:** U kan være meget større end S!

Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Hægtet hashing

- Ide. Find en hashfunktion $h : U \rightarrow \{0, \ldots, m-1\}$, hvor $m = \Theta(n)$. Hashfunktion skal fordele nøglerne fra S nogenlunde jævnt over $\{0, \ldots, m-1\}$.
- Hashing = forkludre, sprede, bikse.
- Hægtet hashing (*chained hashing*).
  - Vedligehold tabel A[0..m-1].
  - Element x gemt i hægtet liste på A[h(x.key)].
- Kollision.
  - x og y kolliderer hvis h(x.key) = h(y.key).
- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].



$U = \{0,..,99\}$

$key(S) = \{1, 13, 16, 41, 54, 66, 96\}$

$m = 10$

$h(k) = k \bmod 10$

Bemærk: Rækkefølgen i listerne afhænger af insert rækkefølge.

Hægtet hashing

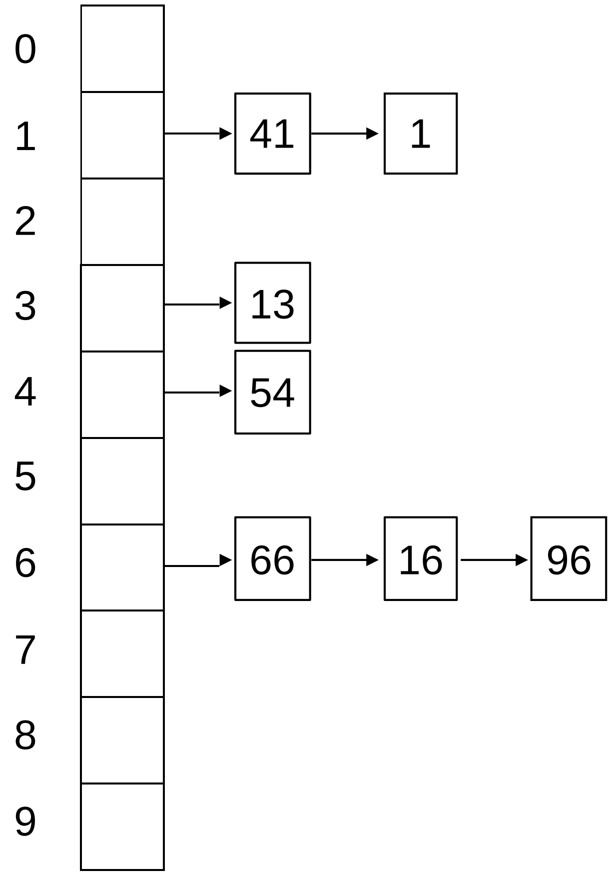
- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].

- Opgave. Indsæt følgende nøglesekvens K = 5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10 i en hashtabel af størrelse 9 vha. hægtet hashing med hashfunktionen h(k) = k mod 9.

Hægtet hashing

- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].

- Tid.
    - SEARCH i O(længde af liste) tid.
    - INSERT og DELETE i O(1) tid.
    - Længde af lister er afhængig af hashfunktion.
- Plads.
    - O(m + n) = O(n).



U = {0,..,99}

key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}

m = 10

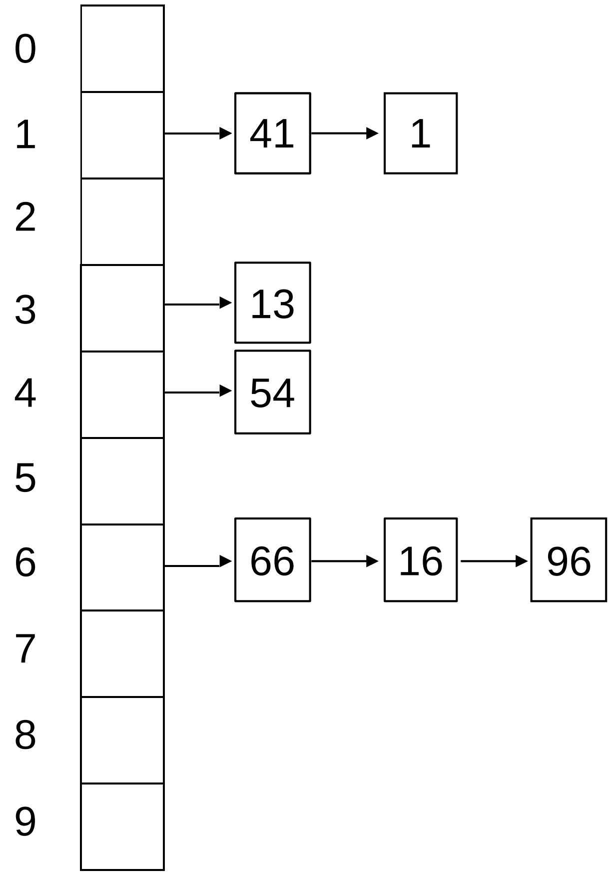
h(k) = k mod 10

Uniform hashing

- Def. Belastningsfaktor *(load factor)* $\alpha = n/m$ = gennemsnitlig længde af lister. $m = \Theta(n) \Rightarrow \alpha = O(1)$.

- Simpel uniform hashing. Antag at hvert element afbildes uniformt tilfældigt i A.
  - Forventet længde af liste = α.
  - $\Rightarrow$ forventet tid for SEARCH er $O(1)$

- Tid.
  - SEARCH i $O(1)$ forventet tid.
  - INSERT og DELETE i $O(1)$ tid.



$U = \{0,..,99\}$

$key(S) = \{1, 13, 16, 41, 54, 66, 96\}$

$m = 10$

$h(k) = k \bmod 10$

Uformelt sagt:
- Uniformt tilfældigt betyder, at enhver x.key *hasher* til hver af den m værdier med samme sandsynlighed (1/m) uafhængigt af hvor andre nøgler er hashet.
- Forventet O(1) tid, betyder at hvis vi bruger datastrukturen mange gange vil det i gennemsnit tage O(1) at søge og indsætte.

Ordbøger

Datastruktur	SEARCH	INSERT	DELETE	Plads
hægtet liste	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
direkte addressering	O(1)	O(1)	O(1)	O(|U|)
hægtet hashing	O(1)†	O(1)	O(1)	O(n)

† = forventet køretid med antagelse om simpel uniform hashing

- Udfordring. Hvad kan vi gøre uden at antage simpel uniform hashing? Findes der hashfunktioner der fordeler en mængde nøgler nogenlunde jævnt?

Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Hashfunktioner

- Divisionsmetoden.
  - $h(k) = k \bmod m$, hvor m er et primtal.
  - Primtal m fordi fælles divisorer af nøgler og m kan reducere udnyttelse af tabel.
  - $h(k) = ak \bmod m$ er lidt bedre. (Her er a et tilfældigt valgt tal, se CLRS for detaljer)

- Multiplikationsmetoden.
  - $h(k) = \lfloor m(kZ - \lfloor kZ \rfloor) \rfloor$, hvor Z er en konstant $0 < Z < 1$.

Hashfunktioner

- Hashfunktioner for andet end heltal. Alt er gemt som bits og kan derfor hashes.

- Flydende tal. Konverter til bitrepræsentation.

- Strenge. Bogstaver er heltal og så streng kan konverteres til sekvens af cifre. F.eks. "CLRS":
    - 256 forskellige ASCII-koder for bogstaver.
    - C = 67, L = 76, R = 82 og S = 83.
    - $\Rightarrow$ "CLRS" = $67 \cdot 256^3 + 76 \cdot 256^2 + 82 \cdot 256^1 + 83 \cdot 256^0 = 1129075283$

- Andre objekter. Definer hashfunktion baseret på datafelter.

Hashing – ikke pensum

- Kan vi konstruere hashfunktioner med beviselige garantier uden antagelse om uniform hashing?
- Ide (universelle hashfunktioner). Vælg en tilfældig hashfunktion h uniformt tilfældigt fra en mængde H af funktioner der kan beskrives kompakt og beregnes hurtigt og tilfredsstiller
- Anvendelser. Kodning, kryptografi, similaritet, geometri, data streaming, ...

Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Lineær probering

- Lineær probering (*linear probing*).
  - Gem S i tabel A af størrelse m.
  - Element x gemt i A[h(x.key)] eller i klynge (*cluster*) til højre for A[h(x.key)].
  - Klynge = fortløbende (cyklisk) sekvens af fyldte indgange.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	41	1	11	13	54			98	

h(k) = k mod 10

Bemærk: Rækkefølgen af indsættelser betyder *meget* med denne metode!

- SEARCH(k): lineær søgning fra A[h(x.key)] i klynge til højre for A[h(x.key)]
- INSERT(x): indsæt x på A[h(x.key)]. Hvis optaget, indsæt på næste tomme indgang til højre for x.
- DELETE(x): Søg efter h(x.key) ligesom i SEARCH. Fjern x fra tabellen og markér dens indgang som ”slettet”.

Lineær probering

Eksempler på lineær probing:

Vi bruger hash funktionen $h(x) = x \bmod 10$

- Indsæt følgende i rækkefølgen: 31, 11, 23, 66, 42, 99, 9
- Bemærk, at 42 kommer på plads 4 da både plads 2 og 3 er optaget (af hhv. 11 og 23)

9	31	11	23	42		66			99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Hvis vi vil søge efter 11: Kigger på plads 1 og 2 (hvor 11 bliver fundet)
- Hvis vi vil søge efter 21: Kigger på plads 1, 2, 3, 4 og 5 (hvor tomt felt bliver fundet, så 21 er ikke blevet indsat)
- Hvis vi vil slette 11:

9	31	X	23	42		66			99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Søgning efter 69: Kigger på plads 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5 (som er tomt). Bemærk, at selvom plads 2 er tom kigger vi vedere, da den er markeret som slettet!

Lineær probering

- Caching. Lineær probering er meget cache-effektivt.
- Klumpning (*clustering*). Nøgler har en tendens at "klumpe" sammen.

	41	1	11	13	54			98	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$h(k) = k \bmod 10$

- Theorem. Simpel uniform hashing $\Longrightarrow$ forventede antal proberinger = $1/(1 - \alpha)$.

- Åben addressering (open addressing).
  - Lineær probering.
  - Kvadratisk probering (ikke pensum).
  - Dobbelt hashing (ikke pensum).

Se CLRS for definitioner af disse!