Noter om logik og beviser

Christoffer Øhrstrøm

4. november 2015

Indhold

1 Introduktion

Formèl logik danner en basis for at kunne udtale sig om et arguments gyldighed. Bemærk at dette ikke indbefatter, om konklusionen er korrekt, men blot omkring bevarelse af sandhed. Eksempelvis er følgende et fuldt ud gyldigt argument, men konklusionen er forkert:

a: Hvis jeg kun kan observere hvide svaner, så er alle svaner hvide.
b: Jeg kan kun observere hvide svaner.
c: Altså er alle svaner hvide.

Fejlen i ovenstående argument ligger i, at vi godt kan observere ikke hvide svaner. Udsagn b og c er altså falske. Hvis både a og b havde været sande, så havde vi til gengæld med sikkerhed kunne konkludere c. Logik handler altså om bevarelse af sandhed.

For at kunne udtrykke sammensatte udsagn har vi brug for nogle logiske operatorer (ligesom vi kender det med fx +, -, * og / fra aritmetik). Disse operatorer er følgende:

$\wedge$: konjunktion
$\vee$: disjunktion
$\sim$: negation
$\implies$: implikation

Konjunktion svarer til at sige “og” mellem to udsagn, hvorfor en konjunktion kun er sand, når begge udsagn på begge sider af konjunktionen er sande.
Disjunktion svarer til at sige “eller” mellem to udsagn, hvorfor en disjunktion kun er sand, når mindst et af udsagnene på en af siderne af disjunktionen er sand.
Negation svarer til at sige “ikke” foran et enkelt udsagn, hvorfor en negation kun er sand, når udsagnet, der skal negeres, er falsk.
Implikation svarer til at sige “hvis p_1 så p_2”, hvor p_1 kaldes for hypotesen, og p_2 kaldes for konklusionen eller det udledte. En implikation er kun sand, når p_1 er falsk eller, når p_2 er sand. En vigtig pointe omkring implikationer er, at det ikke skal forstås på den måde, at p_1 forårsager p_2. I stedet skal det forstås sådan, at hvis vi ved, at p_1 er sand, så kan vi udlede, at p_2 også er sand.

Et meget nyttigt redskab i logik er sandhedstabeller. Vi bruger sandhedstabeller til at vise, hvornår et udsagn er sandt (T), og hvornår det er falskt (F). Betragt fx sandhedstabellen i tabel 1 der viser sandhedsværdierne for de fire logiske operatorer, vi lige har set.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \implies q$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	F	T

Tabel 1: Sandhedstabel for de fire viste logiske operatorer.

2 Tautologier og beviser

En tautologi er et udsagn, der altid er sandt. Fx er udsagnet $p \vee \sim p$ altid sandt, da det altid må gælde, at p er sand eller, at p er falsk. Dette kan også ses ved at opstille en sandhedstabel, men det vil ikke blive gjort her.
Tautologier er vigtige i beviser, da et matematisk bevis skal være en endegyldig sandhed. Den logiske struktur, som beviset bygger på, skal derfor altid være sand - med andre ord skal det være en tautologi. Vi vil nu se på to meget anvendte tautologier i beviser: Kontraposition og modstrid.

2.1 Kontraposition

Før vi diskuterer kontraposition er vi nødt til at indføre den logiske operator $\iff$ (“hvis og kun hvis“). Denne operator er sand, når udsagnene på begge sider af operatoren har samme sandhedsværdi. Dette illustreres i tabel 2.

p	q	$p \iff q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Tabel 2: Sandhedstabel for "hvis og kun hvis" operatoren.

Med denne operator på plads kan vi nu undersøge kontraposition. Grundlæggende er kontraposition, at $p \implies q$ er sand, hvis, og kun hvis, at $\sim q \implies \sim p$ er sand. Dvs., at hvis vi kan bevise, at q er sand under antagelse af, at p er sand, så ved vi allerede, at $\sim p$ er sand under antagelse af, at $\sim q$ er sand. Dette illustreres i tabel 3 som også viser, at den logiske struktur bag kontraposition ($p \implies q \iff \sim q \implies \sim p$) er en tautologi.

p	q	$p \implies q$	$\sim q \implies \sim p$	$p \implies q \iff \sim q \implies \sim p$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

Tabel 3: Sandhedstabel for den logiske struktur bag kontraposition.

2.2 Modstrid

Modsat tautologi er absurditet et udsagn, som altid er falsk. Det mest trivielle eksempel på en modstrid er udsagnet F (altså sandhedsværdien F), men et andet ofte set eksempel er $p \wedge \sim p$, da p ikke både kan være sand og falsk. Når vi arbejder med modstridsbeviser vil vi gerne starte med at antage det modsatte af, hvad vi gerne vil vise og så vise, at en absurditet kan udledes ud fra denne antagelse. I så fald må det nemlig gælde, at antagelsen er forkert. Den logiske struktur bag et modstridsbevis er derfor:

$$(\sim p \implies F) \implies p$$

Udsagnet kan læses på denne måde: Hvis det antages, at p ikke er sand, og denne antagelse fører til en absurditet, så er p sand. Vi kan se i tabel 4, at dette er en tautologi.

p	$\sim p \implies F$	$(\sim p \implies F) \implies p$
F	F	T
T	T	T

Tabel 4: Sandhedstabel for den logiske struktur bag modstridsbeviser.

3 Eksempler på beviser

Lad os nu se to eksempler på beviser: Èt bevis ved kontraposition og èt bevis ved modstrid.

3.1 Bevis ved kontraposition

Lad $x, y \in \mathbb{R}$. Vi vil gerne vise, at hvis $x \cdot y > 100$, så er $x > 10$ eller $y > 10$.

Den logiske struktur bag dette udsagn er

$$x \cdot y > 100 \implies ((x > 10) \vee (y > 10))$$

og det kontraponerede udsagn er

$$((x \leq 10) \wedge (y \leq 10)) \implies x \cdot y \leq 100$$

Vi ved, at hvis vi kan vise det kontraponerede udsagn, så har vi også vist det oprindelige udsagn. Fra de to antagelser i de kontraponerede usagn ved vi, at

$$\begin{aligned} x \cdot y &\leq 10 \cdot y && \text{fordi } x \leq 10 \\ &\leq 10 \cdot 10 && \text{fordi } y \leq 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Altså har vi nu vist, at $x \cdot y \leq 100$ under de to antagelser i de kontraponerede udsagn, hvorfor vi har bevist det kontraponerede udsagn og derved også det oprindelige udsagn.

3.2 Bevis ved modstrid (modstridsbevis)

Lad $\mathbb{Z}_{odd}$ være mængden af alle ulige heltal. Vi vil nu vise, at der ikke findes et største ulige heltal. Vi kan skrive det som et logisk udsagn ved brug af eksistens og for-alle kvantorene:

$$\sim (\exists\, Z \in \mathbb{Z}_{odd}\, \forall z \in \mathbb{Z}_{odd} \;:\; z \leq Z)$$

Negationen af dette udsagn er

$$\exists\, Z \in \mathbb{Z}_{odd}\, \forall z \in \mathbb{Z}_{odd} \;:\; z > Z$$

Vi antager, at det negerede udsagn er sandt. I så fald findes der et ulige heltal Z, der er mindre end alle andre ulige heltal $z \in \mathbb{Z}_{odd}$. Men $Z - 2$ er også et ulige heltal, og hvis $z = Z - 2$, så er $z \leq Z$. Vi har altså nu både $z > Z$ og $z \leq Z$. Dette kan ikke lade sig gøre, og vi har derfor nu en absurditet. Antagelsen om, at det negerede udsagn er sandt, må således være forkert. Vi kan altså konkludere, at det oprindelige udsagn er korrekt, og vi har nu vist, at der ikke findes et største ulige heltal.