MINISTÉRIO DA DEFESA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Seção de Engenharia de Defesa (SE/10)

EE 600200: Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios #2

Cap Filipe José Americano Albeny

Rio de Janeiro, RJ
Maio de 2025

1^a Questão

ELON - 2.7

Sejam $F_1 = S(u_1, v_1)$ e $F_2 = S(u_2, v_2)$ os subespaços de $\mathbb{R}^3$ gerados pelos vetores

$$u_1 = (0, 1, -2), \quad v_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-1, 0, 3), \quad v_2 = (2, -1, 0).$$

Como u_1 e v_1 estão em F_1, devemos ter:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot (-2) = 0 \\ a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema indeterminado, encontramos:

$$(a_1, b_1, c_1) = (-3t, 2t, t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Podemos, por exemplo, tomar $a_1 = -3$, $b_1 = 2$ e $c_1 = 1$, obtendo a equação cartesiana de F_1:

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y + z = 0\}.$$

Analogamente, para F_2, queremos que:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot (-1) + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 3 = 0 \\ a_2 \cdot 2 + b_2 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$(a_2, b_2, c_2) = (3t, 6t, t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Podemos, por exemplo, escolher $a_2 = 3$, $b_2 = 6$, $c_2 = 1$, e assim a equação de F_2 será:

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 6y + z = 0\}.$$

ELON - 2.11

Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores:

$$u = (1, 1, 1), \qquad v = (1, -1, -1).$$

Como u e v estão em F, devemos ter:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Substituindo na primeira equação:

$$0 + b + c = 0 \Rightarrow b = -c$$

Portanto, a solução geral é:

$$(a, b, c) = (0, t, -t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Podemos, por exemplo, escolher $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$.

2^{a} Questão

a) Considere as duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Seja $v = [v]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$. Escreva v como uma combinação linear dos vetores de S.

Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Montamos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 2 \\ b + 2c = 6 \\ a + 2b + 2c = 10 \end{cases}$$

Da segunda equação: $b = 6 - 2c$. Substituindo na primeira:

$$a + 2(6 - 2c) + c = 2 \Rightarrow a = -10 + 3c$$

Substituindo em (3):

$$(-10 + 3c) + 2(6 - 2c) + 2c = 10 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b = -10, \;\; a = 14$$

Portanto:

$$v = 14 \cdot s_1 - 10 \cdot s_2 + 8 \cdot s_3$$

b) A representação de v na base S, isto é, $[v]_S$, é dada pelas coordenadas da combinação linear encontrada no item (a):

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

c) Representação dos vetores de E na base S

Queremos encontrar os vetores $[e_1]_S$, $[e_2]_S$ e $[e_3]_S$, ou seja, expressar cada vetor da base canônica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ como combinação linear dos vetores da base $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, com:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Representação de $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$as_1 + bs_2 + cs_3 = e_1 \Rightarrow a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somando os vetores, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 1 \\ b + 2c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação: $b = -2c$

Substituindo na primeira: $a + 2(-2c) + c = 1 \Rightarrow a = 1 + 3c$

Substituindo na terceira: $(1 + 3c) + 2(-2c) + 2c = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

Logo: $b = 2$, $a = -2$

$$[e_1]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Representação de $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Buscamos a, b, c tais que:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + 2c = 1 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

Da segunda: $b = 1 - 2c$

Substituindo na primeira: $a + 2(1 - 2c) + c = 0 \Rightarrow a = -2 + 3c$

Substituindo na terceira: $(-2 + 3c) + 2(1 - 2c) + 2c = 0 \Rightarrow -2 + 3c + 2 - 4c + 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

Logo: $b = 1$, $a = -2$

$$[e_2]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Representação de $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

Buscamos a, b, c tais que:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + 2b + 2c = 1 \end{cases}$$

Da segunda: $b = -2c$

Substituindo na primeira: $a + 2(-2c) + c = 0 \Rightarrow a = 3c$

Substituindo na terceira: $3c + 2(-2c) + 2c = 1 \Rightarrow 3c - 4c + 2c = 1 \Rightarrow c = 1$

Logo: $b = -2$, $a = 3$

$$[e_3]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Queremos determinar a matriz P tal que:

$$[v]_S = P[v]_E$$

Esta matriz é chamada de **matriz de mudança de base** da base E para a base S. Essa matriz é construída colocando como colunas as coordenadas dos vetores da base E na base S, ou seja:

$$P = [P]_{S \leftarrow E} = \big[[e_1]_S \quad [e_2]_S \quad [e_3]_S\big] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificando:

$$P \cdot [v]_E = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = [v]_S$$

Portanto, a matriz P estabelece uma correspondência direta entre as bases E e S: suas colunas representam precisamente os vetores da base E expressos em coordenadas relativas à base S. Cada coluna de P contém, portanto, a combinação linear que reconstitui o respectivo vetor da base E a partir dos vetores da base S.

e) Mudança de base de um operador linear

Seja a matriz A que representa um operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na base canônica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Desejamos obter a matriz A_S que representa esse mesmo operador na base S, por meio da fórmula:

$$A_S = P^{-1}AP$$

em que P é a matriz de mudança de base de E para S, já conhecida:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de P^{-1} via Gauss-Jordan

Montamos a matriz aumentada $[P \mid I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Etapas do método de Gauss-Jordan:

(a) Troca $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

(c) $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

(d) $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

(e) $L_1 \leftarrow -L_1 + L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Portanto, a inversa é:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $A_S = PAP^{-1}$

Resposta final:

A matriz do operador linear T na base S é:

$\mathrm{A}_S = \begin{bmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 1 & 9 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

3^{a} Questão

SHAUM - 7.57

Vamos verificar se a função abaixo define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, e

$$f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

Propriedade de Linearidade (Axioma $\mathbf{I_1}$)

Considere $a \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, x_2), u' = (x_1', x_2')$.

$$\begin{aligned} f(au + bu', v) &= f((ax_1 + bx_1', ax_2 + bx_2'), (y_1, y_2)) \\ &= (ax_1 + bx_1')y_1 - 2(ax_1 + bx_1')y_2 - 2(ax_2 + bx_2')y_1 + 5(ax_2 + bx_2')y_2 \\ &= ax_1y_1 - 2ax_1y_2 - 2ax_2y_1 + 5ax_2y_2 + bx_1'y_1 - 2bx_1'y_2 - 2bx_2'y_1 + 5bx_2'y_2 \\ &= af(u, v) + bf(u', v) \end{aligned}$$

Portanto, a função f é linear na primeira variável.

Propriedade de Simetria (Axioma $\mathbf{I_2}$)

$$f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$f(v, u) = y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2 = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_2 = f(u, v)$$

Logo, $f(u, v) = f(v, u)$, ou seja, a função é simétrica.

Propriedade Definida Positiva (Axioma $\mathbf{I_3}$)

$$f(u, u) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Fatorando:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

Portanto:

- $f(u, u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$
- $f(u, u) = 0$ somente se $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, ou seja, $u = 0$

Conclusão: os três axiomas foram satisfeitos. Logo, a função $f(u,v)$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

SHAUM - 7.65

Encontrar uma base do subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$ ortogonal aos vetores:

$$u_1 = (1,-2,3,4), \quad u_2 = (3,-5,7,8)$$

Definição do subespaço ortogonal

O subespaço W é o conjunto dos vetores $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tais que:

$$\begin{cases} u_1 \cdot x = 0 \\ u_2 \cdot x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Forma matricial aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Aplicamos eliminação de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema reduzido

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 2x_3 + 4x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Com $x_3 = s$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$, a solução geral é:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão

Uma base do subespaço W ortogonal a u_1 e u_2 é:

$$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

4ª Questão

A seguir, apresentamos o script Python utilizado para analisar o posto e a norma da matriz $A = uv^\top$, conforme os valores de $n \in \{5, 15, 25\}$.

Listing 1: Script Python para análise de posto e norma

```
    # Codigo disponivel em:
    # https://github.com/albenyfjaa/alc-albeny

import numpy as np

def analise_posto_norma(n_valor):
    for n in n_valor:
        u = np.random.rand(n, 1)
        print("u:", u)
        v = np.random.rand(n, 1)
        print("v:", v)
        A = u @ v.T  # Produto externo

        rank = np.linalg.matrix_rank(A)
        norm_u = np.linalg.norm(u, 2)
        norm_v = np.linalg.norm(v, 2)
        norm_A = np.linalg.norm(A, 2)  # Norma 2 (
           espectral)

        print(f"n = {n}")
        print(f"Posto de A = {rank}")
        print(f"||u||_2 = {norm_u:.4f}")
        print(f"||v||_2 = {norm_v:.4f}")
        print(f"||A||_2 = {norm_A:.4f}")
        print(f"||u||_2 * ||v||_2 = {(norm_u*norm_v):.4f
           }")
        print("-" * 40)

# Teste com diferentes dimensoes n (5, 15, 25)
n_dimensoes = [5, 15, 25]

# Execucao
analise_posto_norma(n_dimensoes)
```

Saída do script (execução no terminal)

```
n = 5
Posto de A = 1
||u||_2 = 1.7764290264332967
||v||_2 = 0.9324561167619224
||A||_2 = 1.6564421116911545
||u||_2 * ||v||_2 = 1.6564421116911543
----------------------------------------
n = 15
Posto de A = 1
||u||_2 = 2.2998163548362025
||v||_2 = 2.365993522363587
||A||_2 = 5.441350598168293
||u||_2 * ||v||_2 = 5.441350598168292
----------------------------------------
n = 25
Posto de A = 1
||u||_2 = 2.699252697095054
||v||_2 = 2.950546000047915
||A||_2 = 7.96426924853236
||u||_2 * ||v||_2 = 7.964269248532359
----------------------------------------
```

Análise teórica da matriz $A = uv^\top$

Os experimentos realizados com vetores aleatórios para a construção de matrizes do tipo $A = uv^\top$ evidenciaram as seguintes propriedades:

1. O posto da matriz A é igual a 1, desde que $u \neq 0$ e $v \neq 0$.
2. A norma 2 de A (isto é, a norma de operador induzida pela norma Euclidiana), denotada por $\|A\|$, é exatamente o produto $\|u\| \cdot \|v\|$, ou seja:
$$\|A\| = \|uv^\top\| = \|u\| \cdot \|v\|$$

Observações:

- Caso algum dos vetores u ou v seja nulo, a matriz A torna-se nula e o posto passa a ser 0. Ainda assim, a igualdade da norma permanece válida.
- A notação $\| \cdot \|$ refere-se à norma 2 tanto para vetores quanto para matrizes.

A construção da matriz $A = uv^\top$ resulta em uma matriz $n \times n$ com a seguinte estrutura:

$$A = uv^\top = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}$$

Demonstração da propriedade 1 (posto = 1)

Sabemos que qualquer matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaz:

$$\text{Posto}(M) + \text{Nulidade}(M) = n$$

No caso da matriz $A = uv^\top$, podemos eliminar todas as linhas (ou colunas) por operações lineares elementares, exceto uma. Por exemplo, somando múltiplos da primeira linha às demais:

$$L_k \leftarrow L_k + \left(-\frac{u_k}{u_1}\right) L_1$$

Isso prova que todas as demais linhas são combinações lineares da primeira, logo o posto é 1 e a nulidade é $n - 1$.

Demonstração da propriedade 2 (norma)

Utilizando o teorema 7.7 de Ford, temos que a norma 2 de uma matriz satisfaz:

$$\|A\|^2 = \lambda_{\max}(A^\top A)$$

Calculamos:

$$A^\top A = (uv^\top)^\top (uv^\top) = vu^\top uv^\top = \|u\|^2 vv^\top$$

Portanto:

$$\|A\|^2 = \|uv^\top\|^2 = \|u\|^2 \cdot \lambda_{\max}(vv^\top)$$

Agora, notamos que $vv^\top$ é uma matriz simétrica de posto 1, e seu único autovalor não-nulo é $\|v\|^2$, com autovetor associado v:

$$vv^\top v = \|v\|^2 v$$

Logo:

$$\|A\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \|u\| \cdot \|v\|$$

O resultado está, portanto, demonstrado.

5ª Questão

a)

```
    # Codigo disponivel em:
    # https://github.com/albenyfjaa/alc-albeny

import numpy as np

# ============================
# Funcao 1: Verifica por definicao
# ============================
def is_orthogonal_by_definition(A, tol=1e-5):
    n = A.shape[0]
    identidade = np.eye(n)
    return np.allclose(A.T @ A, identidade, atol=tol
        )

# ============================
# Funcao 2: Verifica pelas colunas (vetores)
# ============================
def is_orthogonal_by_vectors(A, tol=1e-5):
    n = A.shape[1]
    for i in range(n):
        norma = np.linalg.norm(A[:, i])
        if not np.isclose(norma, 1.0, atol=tol):
            return False  # coluna n o tem norma 1
        for j in range(i+1, n):
            prod = np.dot(A[:, i], A[:, j])
            if not np.isclose(prod, 0.0, atol=tol):
                return False  # colunas n o s o
                    ortogonais
    return True

# ============================
# Matrizes dos Exercicios 6.38 e 6.39
# ============================
P1_638a = np.array([
    [-0.40825,  0.43644,  0.80178],
    [-0.8165 ,  0.21822, -0.53452],
    [-0.40825, -0.87287,  0.26726]
])

P2_638b = np.array([
    [-0.51450,  0.48507,  0.70711],
```

```
    [-0.68599, -0.72761,  0.00000],
    [ 0.51450, -0.48507,  0.70711]
])

P1_639a = np.array([
    [-0.58835,  0.70206,  0.40119],
    [-0.78446, -0.37524, -0.49377],
    [-0.19612, -0.60523,  0.77152]
])

P2_639b = np.array([
    [-0.47624, -0.4264 ,  0.30151],
    [ 0.087932, 0.86603, -0.40825],
    [-0.87491, -0.26112, 0.86164]
])

# ============================
# Testes para cada matriz
# ============================
matrizes = {
    "6.38 a (P1)": P1_638a,
    "6.38 b (P2)": P2_638b,
    "6.39 a (P1)": P1_639a,
    "6.39 b (P2)": P2_639b,
}

# Avaliacao
for nome, matriz in matrizes.items():
    by_def = is_orthogonal_by_definition(matriz)
    by_vec = is_orthogonal_by_vectors(matriz)
    print(f"\n{nome}")
    print(f" - Ortogonal pela definicao? {'Sim' if
       by_def else 'Nao'}")
    print(f" - Ortogonal pelas colunas?  {'Sim' if
       by_vec else 'Nao'}")
```

Resultados:
6.38 a (P1)
- Ortogonal pela definição? Sim
- Ortogonal pelas colunas? Sim

6.38 b (P2)
- Ortogonal pela definição? Sim
- Ortogonal pelas colunas? Sim

6.39 a (P1)
- Ortogonal pela definição? Sim
- Ortogonal pelas colunas? Sim

6.39 b (P2)
- Ortogonal pela definição? Não
- Ortogonal pelas colunas? Não