programa de pós-graduação em

ENGENHARIA DE DEFESA

Álgebra Linear Computacional

Parte II

Cap Hebert **AZEVEDO** Sá, Ph.D.

Notação Matemática

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ - Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{q} \,|\, m, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{sem fatores comuns}\}$ - Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos Números Reais

$\mathbb{C} = \{\alpha + j\beta \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}$ - Conjunto dos Números Complexos

$\forall$ - para todo, para cada

$\exists$ - existe (ao menos um)

$\sim$ - negação

$\implies$ - implicação

$\iff$ - "se e somente se"

$\wedge$ / $\vee$ - "e" / "ou"

$\square$ - como quer-se demonstrar (C.Q.D.); "quod erat demonstrandum" (Q.E.D.)

Exemplos

"Todo número real diferente de zero possui um inverso multiplicativo."

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R} \;\; t.q. \;\; xy = 1$$

"Todo número real pode ser arbitrariamente aproximado por um número racional."

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \wedge \; \forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q} \;\; t.q. \;\; |x - y| < \frac{1}{n}$$

Demonstração Direta

Novos resultados são construídos por aplicação de raciocínio lógico aplicado a axiomas, definições e teoremas conhecidos.

Exemplo

Def.: Seja $n \in \mathbb{Z}$. n é dito *par* se $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Caso contrário, é dito *ímpar*.

Prop.: A soma de dois inteiros ímpares é par.

Prova: Sejam a e b dois inteiros ímpares. Então $\exists k_1, k_2$ t.q. $a = 2k_1 + 1$ e $b = 2k_2 + 1$. Logo, $a + b = 2k_1 + 2k_2 + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1)$. Como $(k_1 + k_2 + 1) \in \mathbb{Z}$, $a + b$ é par. $\square$

Prova da contrapositiva

Para provar que $p \implies q$, provamos que $\sim q \implies \sim p$, o que é logicamente equivalente.

Exemplo

Prop.: Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se n^2 é par, então n é par.

Prova:

p: n^2 é par; $\sim$p: n^2 é ímpar;

q: n é par; $\sim$q: n é ímpar.

Mostraremos que: n ímpar $\implies$ n^2 ímpar.

Prova da contrapositiva (Cont.)

Com efeito, n ímpar $\implies n = 2k + 1$.

Logo,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,$$

onde $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, n^2 é ímpar. $\square$

Prova por Exaustão

É necessário reduzir a prova a um número finito de casos e provar cada um deles.

Prova por Indução Matemática

Seja uma proposição $P(n)$ tal que:

- $P(1)$ é verdadeira; *(caso básico)*
- Para $k \geq 1$, $P(k)$ verdadeira $\implies P(k+1)$ verdadeira. *(passo de indução)*

Então, $P(n)$ será verdadeira $\forall n \geq 1$.

Prova por Indução Matemática

Exemplo

Prop.: $\forall n \geq 1$, temos $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Caso básico: $P(1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$. (Verdadeiro)

Passo de indução: assumindo que $P(k)$ é verdadeiro, precisamos tentar provar que $P(k + 1)$ é verdadeiro também. Daí,

$P(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$. Somando $(2k + 1)$ aos dois lados $\implies$

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. $\square$

Prova por Contradição ou por Absurdo

Deve-se: (i) supor o contrário daquilo que se quer provar e (ii) chegar a uma *contradição*.

Uma contradição é uma proposição lógica que se apresenta verdadeira e falsa simultâneamente.

Exemplo

Prova de Euclides de que $\sqrt{2}$ é irracional.

(Consiste em supor que $\sqrt{2}$ é racional e chegar a uma contradição.)

Prova por Contradição ou por Absurdo (Cont.)

Exemplo

Prova de Euclides de que $\sqrt{2}$ é irracional.

Prova: Suponha que $\sqrt{2}$ é *racional*. Daí, $\exists m, n \in \mathbb{N}$ t.q. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, sendo a fração irredutível (i.e., m e n não tem fator comum).

Portanto,

$2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 \implies m^2$ par. $\implies m$ par. $\implies \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $m = 2k$.
$\implies 2n^2 = (2k)^2 \implies n^2 = 2k^2 \implies n^2$ par. $\implies n$ par. $\implies m, n$ têm fator comum, i.e., 2.

$\implies \frac{m}{n}$ não irredutível (*contradição!*). Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional. $\square$

Exercícios

1. Prove, por indução matemática, que $11^n - 6$ é divisivel por 5 para todo inteiro positivo n.
2. Prove, por contradição, que para todo inteiro n, se $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.