programa de pós-graduação em

**ENGENHARIA DE DEFESA**

# Álgebra Linear Computacional

Parte IV

Cap Hebert **AZEVEDO** Sá, Ph.D.

Uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

é chamada *equação linear*.

Um sistema de $m$ equações lineares a $n$ incógnitas é dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

O sistema anterior pode ser denotado por $Ax = b$ se definirmos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad e \;\; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz **aumentada** do sistema é dada por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

# Eliminação de Gauss

Para resolvermos sistemas, podemos usar o processo de eliminação de Gauss. O processo consiste em realizar operações de linhas (*row operations*) para isolar variáveis e resolver o sistema sequencialmente. Em geral, buscamos transformar o sistema em *triangular superior*.

As operações de linha elementares são as seguintes:

- Troca de linhas
- Multiplicação de uma linha por escalar
- Adição de um múltiplo de uma linha a outra

Quando um sistema está em sua forma triangular (superior), a solução pode ser encontrada pelo processo de substituição regressiva (*back substitution*).

Em geral,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \implies x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

**Exercício**

Resolver o sistema:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ -\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = 4 \end{array}$$

Resp.: $x_1 = 18$, $x_2 = -26$, $x_3 = -10$.

**Observação**

Podemos, inclusive, “continuar o escalonamento” até diagonalizar a matriz e, por fim, obter a matriz identidade no lado esquerdo da matriz aumentada. Dessa forma, a coluna da direita será justamente a solução do sistema.

Sistemas de equações lineares podem ser:

- **Possíveis e Determinados:** Há apenas uma solução.
- **Possíveis e Indeterminados:** Há infinitas soluções.
- **Impossíveis:** Não há solução.

Sistemas **Possíveis e Indeterminados** ou Sistemas **Impossíveis** são chamados ***Inconsistentes***.

# Cálculo da Inversa

Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Sabemos que $AA^{-1} = I$. Sejam as colunas de $A^{-1}$ dadas por $v_1, v_2, \dots, v_n$. Portanto, cada $v_i$ será a solução de $Av_i = e_i$, onde $e_i$ é um vetor coluna composto por zeros, exceto na $i$-ésima posição, que será 1. Isto é, $e_i = [0\,0\ \dots\ 1\ \dots\ 0]^\top$.

Podemos, portanto, aumentar a matriz $A$ com a própria matriz $I$, e depois fazer as operações elementares entre linhas para chegar à matriz $I$ do lado esquerdo. A matriz resultante do lado direito será $A^{-1}$.

**Exemplo**

Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

**Exemplo**

Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ -1 & 2 & -0,5 \end{bmatrix}$.

# Exercício

Implementar o algoritmo de substituição regressiva, sendo as entradas:

(1) uma matriz triangular superior; e

(2) um vetor coluna de tamanho correspondente.