programa de pós-graduação em

ENGENHARIA DE DEFESA

Álgebra Linear Computacional

Parte V

Cap Hebert **AZEVEDO** Sá, Ph.D.

Definição: Um **campo** é um conjunto, denotado por $\mathcal{F}$, de elementos chamados *escalares* e duas operações chamadas adição “+” e multiplicação “.”, tais que:

- a todo par de elementos α, $\beta \in \mathcal{F}$, se associa um elemento $\alpha + \beta$ chamado soma de α e β, e um elemento $\alpha.\beta$ chamado produto de α e β.
- Adição e Multiplicação são comutativas: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; $\alpha.\beta = \beta.\alpha$.
- Adição e Multiplicação são associativas: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$.
- Multiplicação é distributiva com respeito a adição: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
- $\mathcal{F}$ contém elementos neutros para a adição e para a multiplicação, denotados 0 e 1. Isto é, $\alpha + 0 = \alpha$ e $\alpha.1 = \alpha$.

Definição: Um **campo** é um conjunto, denotado por $\mathcal{F}$, de elementos chamados *escalares* e duas operações chamadas adição "+" e multiplicação ".", tais que (*Cont.*):

- Para todo $\alpha \in \mathcal{F}$ há um β tal que $\alpha + \beta = 0$. β é chamado inverso aditivo, também denotado por $-\alpha$.
- Para todo $\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha \neq 0$, há um β tal que $\alpha.\beta = 1$. β é chamado inverso multiplicativo, também denotado por $\frac{1}{\alpha}$.

Definição: Um **espaço vetorial** sobre um campo $\mathcal{F}$, denotado por $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é um conjunto $\mathcal{X}$ de elementos chamados *vetores*, um campo $\mathcal{F}$, e duas operações chamadas *adição vetorial* e *multiplicação por escalar*. As duas operações são definidas sobre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{F}$ tal que:

- a todo par de elementos $u, v \in \mathcal{X}$, se associa um elemento $u + v \in \mathcal{X}$ chamado soma de u e v.
- a adição vetorial é comutativa: $u + v = v + u$.
- a adição vetorial é associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- $\mathcal{X}$ contém um vetor $\mathbf{0}$, tal que $u + \mathbf{0} = u$ para todo $u \in \mathcal{X}$. $\mathbf{0}$ é o vetor nulo, ou "origem".
- para todo $u \in \mathcal{X}$, existe um vetor $\bar{u} \in \mathcal{X}$ tal que $u + \bar{u} = \mathbf{0}$.

Definição: Um **espaço vetorial** sobre um campo $\mathcal{F}$, denotado por $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é um conjunto $\mathcal{X}$ de elementos chamados *vetores*, um campo $\mathcal{F}$, e duas operações chamadas *adição vetorial* e *multiplicação por escalar*. As duas operações são definidas sobre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{F}$ tal que (*Cont.*):

- para todo $\alpha \in \mathcal{F}$, e para todo $u \in \mathcal{X}$, existe um vetor $\alpha.u \in \mathcal{X}$ chamado o produto do vetor u pelo escalar α.
- o produto de um vetor por escalares é associativo, i.e., $\alpha.(\beta u) = (\alpha.\beta).u$.
- o produto de um vetor por escalares é distributivo com respeito à adição vetorial, i.e., $\alpha.(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- o produto de um vetor por escalares é distributivo com respeito à adição escalar, i.e., $(\alpha + \beta).u = \alpha u + \beta u$.
- para todo $u \in \mathcal{X}$, $1.u = u$, onde 1 é o elemento neutro multiplicativo de $\mathcal{F}$.

Exemplo: O exemplo mais óbvio de um espaço vetorial é $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Contudo, podemos definir outros espaços vetoriais.

Exemplo: suponha que $\mathbb{M}^{3\times 3}$ é o conjunto de todas as matrizes 3×3, cujos elementos são números reais. Sendo $(\mathbb{R}, +, .)$ um campo, podemos definir o espaço vetorial $(\mathbb{M}^{3\times 3}, \mathbb{R})$.

Exemplo: Nas séries de Fourier, as diferentes senóides podem ser consideradas vetores de um espaço vetorial sobre o campo real.

Definição: Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ um espaço vetorial, e seja $\mathcal{Y}$ um subconjunto de $\mathcal{X}$. $\mathcal{Y}$ será um **subespaço vetorial** de $\mathcal{X}$ se atender aos mesmos axiomas de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Naturalmente, $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ será também um espaço vetorial.

Obs.: Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ um espaço vetorial e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. As proposições a seguir são equivalentes:

- $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ é um subespaço vetorial;
- para todo $u, v \in \mathcal{Y}$, $u + v \in \mathcal{Y}$ (fechado com relação à adição vetorial); e para todo $\alpha \in \mathcal{F}$, $u \in \mathcal{Y}$, $\alpha u \in \mathcal{Y}$ (fechado com relação à multiplicação de vetor por escalar);
- para todo $\alpha \in \mathcal{F}$, $u, v \in \mathcal{Y}$, $\alpha u + v \in \mathcal{Y}$.

Verificação se o espaço nulo N(A) é um espaço vetorial
Espaço nulo da matriz A. Fechamento com adição e multiplicação

Exemplo: Seja A uma matriz $n \times n$. O conjunto de vetores $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $Ax = 0$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ chamado o *espaço nulo* de A, denotado $N(A)$. Para demonstrar, basta verificarmos que:

- $A0 = 0$. Logo, $0 \in N(A)$.
- $x, y \in N(A) \implies Ax = 0, Ay = 0$. Logo, $A(x + y) = Ax + Ay = 0$. Logo, $x + y \in N(A)$. (Fechamento com relação à adição vetorial.)
- $x \in N(A), r \in \mathbb{R} \implies A(tx) = t(Ax) = 0$. Logo, $tx \in N(A)$. (Fechamento com relação à multiplicação vetor por escalar.)

Definição: Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ um espaço vetorial. Uma combinação linear é uma soma *finita* do tipo $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, onde $n \geq 1$, $\alpha_i \in \mathcal{F}$ e $x_i \in \mathcal{X}$.

Definição: Um conjunto finito de vetores em $\mathcal{X}$ dado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é **linearmente dependente** se existe um conjunto de escalares $\alpha_i \in \mathcal{F}$, diferente do conjunto trivial (i.e., em que todos os α_i são nulos), tal que há uma combinação linear que gere o vetor nulo, i.e., $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$. Caso contrário, o conjunto é **linearmente independente**.

Obs. 1: para um conjunto L.I., teremos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \iff \alpha_i = 0, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

Obs. 2: um conjunto será L.I. se todos os seus subconjuntos forem L.I.

Obs. 3: Se um conjunto for L.D., ao menos um elemento deste conjunto pode ser escrito como uma combinação linear dos outros elementos do conjunto.

Exemplos:

- $\{[1\ \ 0]^\top, [0\ \ 1]^\top\}$ é L.I.;
- $\{[1\ \ 0]^\top, [0\ \ 1]^\top\}, [1\ \ 1]^\top\}$ é L.D.;
- $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ é L.I.; Espaço vetorial de n dimensões
- $\{1, t, t^2, (2 + 3t + 5t^2)\}$ é L.D.;
- $\{\sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \dots, \sin(nt), \cos(nt)\}$ é L.I.;

Definição: Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de vetores de um espaço vetorial $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. O **espaço gerado** por $\mathcal{S}$, denotado *span*$\{\mathcal{S}\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares possíveis dos elementos de $\mathcal{S}$.

$$span\{\mathcal{S}\} = \{x \in \mathcal{X} | \exists n \geq 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{F}, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{S}, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\}$$

Obs.: *span*$\{\mathcal{S}\}$ é um subespaço.

Definição: Um conjunto de vetores $\mathcal{B}$ em $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é uma base para $\mathcal{X}$ se:

(1) $\mathcal{B}$ é L.I.; e

(2) $span\{\mathcal{B}\} = \mathcal{X}$.

Definição: Seja $n > 0$ inteiro. O espaço vetorial $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ possui dimensão finita n se:

(1) Existe um subconjunto de n vetores L.I. em $\mathcal{X}$; e

(2) Qualquer subconjunto de $n + 1$ ou mais vetores de $\mathcal{X}$ seja L.D.

Obs.: Um espaço vetorial pode ter dimensão **infinita.**

Obs.: a dimensão do espaço nulo de uma matriz é chamada *nulidade* da matriz.

Os vetores dados por:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Essa base é chamada base canônica, ou base padrão.

No entanto, qualquer outro conjunto de n vetores L.I. em $\mathbb{R}^n$ também será uma base para $\mathbb{R}^n$. Podemos, inclusive, encontrar matrizes que representem a Transformação Linear de Mudança de Base. (Será a inversa da matriz cujas colunas são os vetores que formam a nova base.)

Exemplo:

Sejam os seguintes vetores em $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

O vetor $3u - v = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}^\top$ está contido no plano gerado por u e v, representado por $span\{u, v\}$.

Se montarmos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e encontrarmos seu espaço nulo, qual lugar geométrico o representará?

Exemplo: [Ford], Exemplo 3.6

Definição: O **posto** de uma matriz é a dimensão do espaço vetorial gerado pelos vetores representados por suas linhas (ou colunas).

Observe que o espaço vetorial gerado pelas linhas não se altera quando são realizadas operações elementares na matriz. Logo, o posto de uma matriz não se altera quando esta é escalonada.

Exemplo: [Ford], Exemplo 3.12

Obs.: em uma matriz quadrada $n \times n$, a soma do posto e da nulidade será n. Caso o posto da matriz seja n, diz-se que ela é de *posto cheio*.

O determinante é uma função de uma matriz quadrada que gera um valor escalar. Quando nulo, ele indica que a matriz é singular, i.e., não possui inversa. Caso contrário, a matriz será não-singular.

Para uma matriz 1×1, o determinante será o próprio elemento único da matriz.

Para matrizes de ordens maiores, o determinante será calculado pela soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) pelos determinantes menores equivalentes, alternando-se o sinal dos produtos entre “+” e “-”.

Em outras palavras, para uma matriz A quadrada $n \times n$, teremos,

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}det(M_{1n}),$$

onde M_{ij} é a matriz resultante quando exclui-se a linha i e a coluna j de A.

Em consequência, se uma matriz tiver uma linha composta por zeros, o determinante será nulo.

Outra consequência é que o determinante de uma matriz triangular será o produtos dos termos de sua diagonal principal.

Propriedades:

- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^\top) = det(A)$
- $det(A) = 0 \implies A$ não é de posto cheio
- Seja A e seu $det(A)$. Se uma linha (ou coluna) de A for multiplicada por um fator k, seu determinante também o será
- $det(kA) = k^n det(A)$
- se trocarmos duas linhas ou duas colunas de posição, o determinante é multiplicado por -1
- se somarmos um multiplo de uma linha a outra linha (ou de uma coluna a outra coluna), o determinante não se altera

Determinantes

Definição: O cofator de ordem (i, j) de A será dado por $(-1)^{i+j}det(M_{ij})$

Definição: A matriz adjunta de A será a transposta da matriz de seus cofatores. (Ver [Ford], Exemplo 4.8)

Teorema [Ford, Th 4.3]: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$

Teorema [Ford, Th 4.5]:

- A não singular $\iff det(A) \neq 0$
- A singular $\iff det(A) = 0$
- $Ax = 0$ tem solução não trivial $\iff det(A) = 0$

Teorema [Ford, Th 4.6][Regra de Cramer]: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$