programa de pós-graduação em

ENGENHARIA DE DEFESA

Álgebra Linear Computacional

Parte III

Cap Hebert **AZEVEDO** Sá, Ph.D.

Definição

Uma matriz é um arranjo numérico de m linhas e n colunas. Uma matriz de números reais $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou ainda $A = [a_{ij}]$.

Casos especiais: vetores-coluna pertencentes a $\mathbb{R}^{m \times 1}$ e vetores-linha pertencentes a $\mathbb{R}^{1 \times n}$.

Propriedades

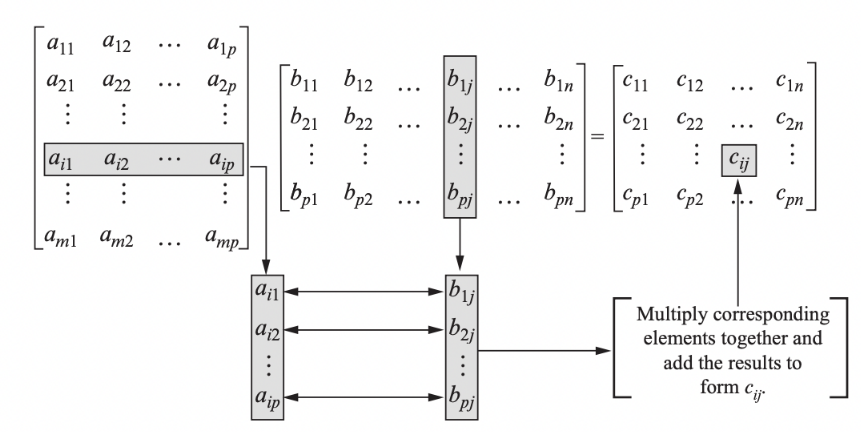
- Igualdade de Matrizes
- Adição e Subtração de Matrizes (somente de matrizes de mesmas dimensões)
- Multiplicação por Escalar
- Matriz Nula
- Demais propriedades usuais da aritmética com escalares

Propriedades

Demais propriedades usuais da aritmética com escalares

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$;
2. $A+B = B+A$;
3. $0+A = A$;
4. $A+(-A) = 0$;
5. $(s+t)A = sA+tA$, $(s-t)A = sA-tA$;
6. $t(A+B) = tA+tB$, $t(A-B) = tA-tB$;
7. $s(tA) = (st)A$;
8. $1A = A$, $0A = 0$, $(-1)A = -A$;
9. $tA = 0 \Rightarrow t = 0$ or $A = 0$.

Produto de Matrizes



Produto de Matrizes

O produto de matrizes **não é comutativo**. As dimensões das matrizes devem ser compatíveis, de forma que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

No Numpy, podemos usar o @ para realizar o produto de duas matrizes.

Traço de uma Matriz Quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \implies tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 12 & -1 \\ 7 & 4 & -8 & 7 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \\ -1 & -9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \implies tr(A) = 6.$$

Teorema [Ford, Theorem 1.2]

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies tr(AB) = tr(BA).$

Exercício: Provar (tentar fazer sem olhar o livro..!)

Definição

Toda matriz $A \in m \times n$ está associada a uma função $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(x) = Ax,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. O vetor $y = T_A(x) = Ax$ terá m dimensões, i.e., $y \in \mathbb{R}^m$, de forma que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Propriedade (de Transformações Lineares em geral)

Sejam x_1 e x_2 vetores de $\mathbb{R}^n$ e $y_1 = T_A(x_1), y_2 = T_A(x_2)$ vetores de $\mathbb{R}^m$. Então:

$$T_A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T_A(x_1) + \beta T_A(x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Exemplo de Transformação Linear: Rotações de vetores n-dimensionais;

Outros Exemplos: experimentar no Python...

Potência de Matrizes

Definição

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $A^k = A \times A \times A \times \cdots \times A$ (k vezes, para $k \geq 1$).

Exemplo

Matriz de Fibonacci (termo de ordem (1,1) é termo da sequência de Fibonacci):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

No numpy: `linalg.matrix_power(a, n)`

Descrição na API: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.matrix_power.html`

Matrizes Não Singulares e Inversas

Definição

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A será não singular (isto é, admitirá uma matriz *inversa*) se houver uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. B é chamada a inversa de A. Além disso, denotamos a inversa de A por A^{-1}.

Exercício

Encontrar a inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. (Conseguimos confirmar a resposta no Python/Numpy?)

Teorema

Se a matriz A dos coeficientes de um sistema linear $Ax = b$ admite inversa, então a solução do sistema será dada por $x = A^{-1}b$.

Um sistema $Ax = 0$ é chamado de **homogêneo**. Se A for não singular, então o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial, i.e., $x = 0$.

Matrizes Transpostas e Simétricas

Definições

Seja uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A = [a_{ij}]$. A transposta de A será $A^\top = [a_{ji}]$, de forma que $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$. A será *simétrica* se $m = n$ e $A = A^\top$.

Propriedades importantes

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- Se $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, então $x^\top x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \implies A^\top A$ simétrica