Lista I: Q6

Alberson Miranda

2022-09-02

1 Dado o processo $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + a_t$:

A Simule 1000 observações considerando $|\phi| < 1$, $\sigma^2 = 5$ e $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$. Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial.

Primeiramente, o código para simular um processo AR(1):

```
# reprodutibilidade
set.seed(1)

# função geradora de processo AR(1)
ar1 = function(
    # quantidade de t (incluindo horizonte de previsão)
    t,
    # constante
    phi_0 = 0,
    # coeficiente autoregressivo
    phi_1,
    # variância
    v
) {

  # y_t inicial
  # se a série é estacionária E[y_t-1] = E[y_t])
  y_t = phi_0 / (1 - phi_1)

  # gerando processo a partir de t_2 até t
  for (i in 2:t) {
```

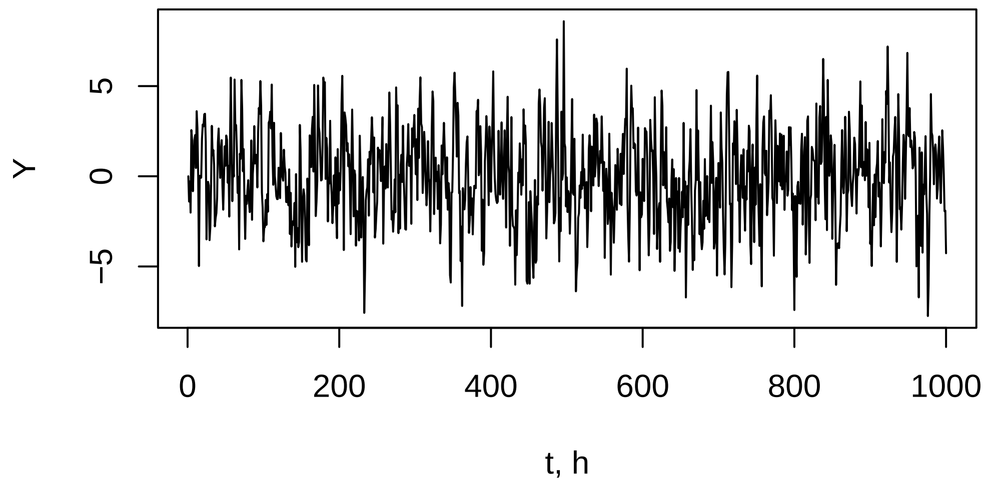
```r
    # ruído branco
    erro = rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(v))
    # AR1
    y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
  }

  # retorna processo
  return(y_t)
}
```

Obtendo a série simulada:

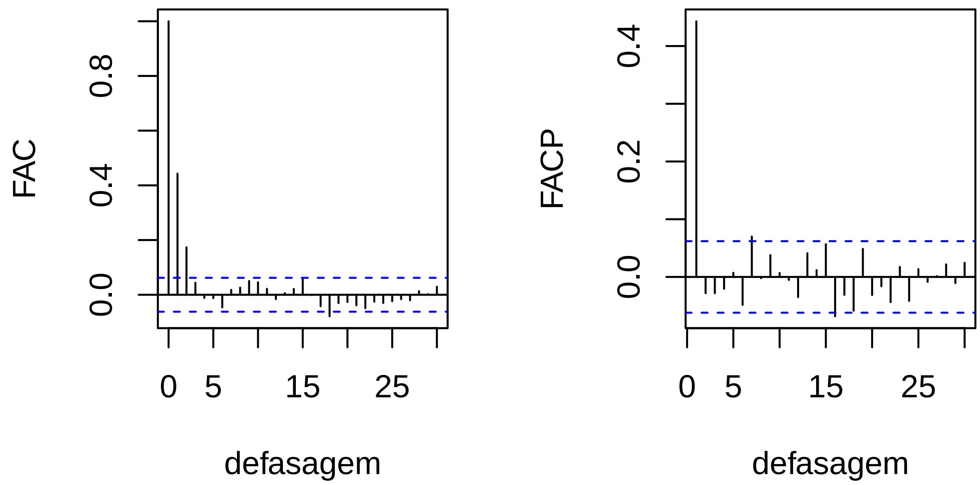
```r
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5
)
```

Os gráficos:

```r
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```




```r
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



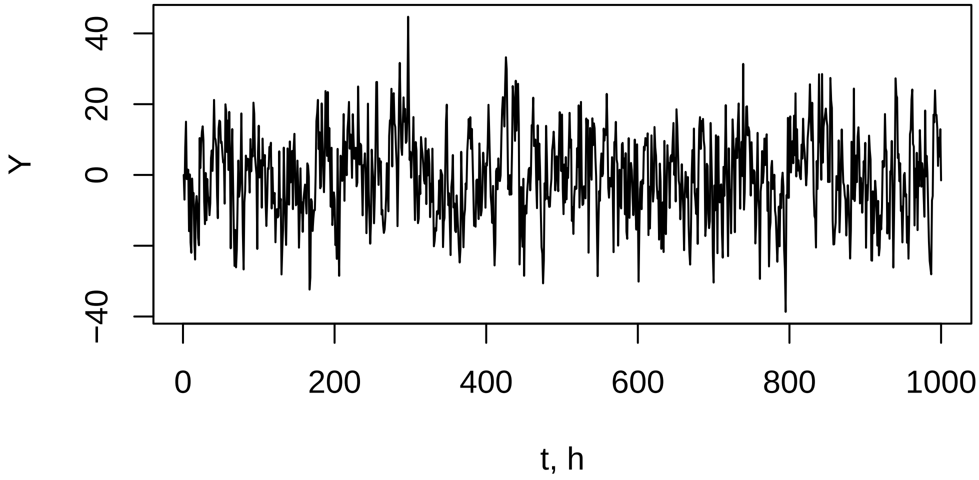
B Repita a letra A, agora considerando $\sigma^2 = 100$.

```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 100
)

head(y_t)
```

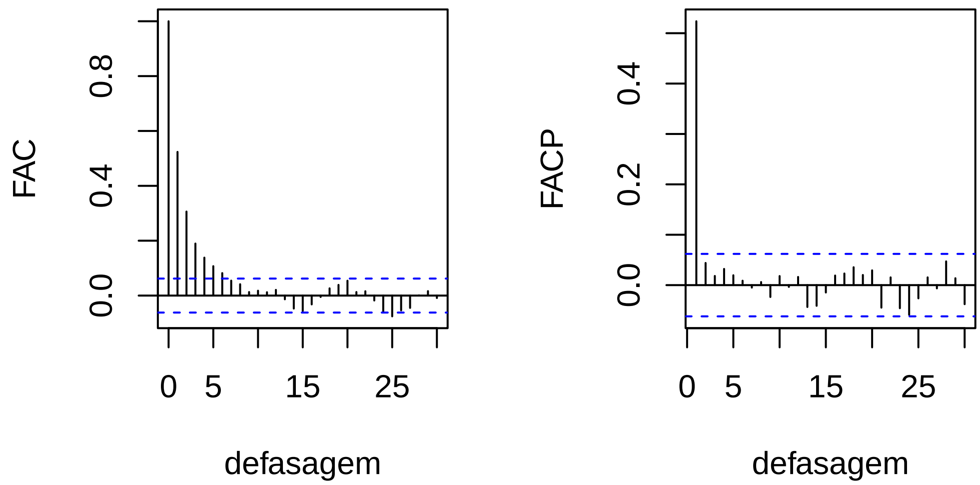
```
[1]  0.000000 -6.973182  7.863060 15.050848 -1.182352  1.516140
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```




```r
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



Ambas séries continuam variando em torno da média, entretanto, como esperado, a amplitude da série de maior variância é maior. As autocorrelações da segunda série também estão maiores, o que não era esperado dado que $\rho_j = \phi^j$, ou seja, não depende da variância. Isso provavelmente ocorre porque a função `sample()` é aleatória e a média de e_t é próxima de zero mas não exatamente. Por exemplo:

```
erro = rnorm(1000, 0, 10)
head(erro)
```

```
[1]  10.042330  -3.119734  -8.861496 -19.222549  16.197007   5.192699
```

```
# média do erro
mean(erro)
```

```
[1] 0.1924374
```

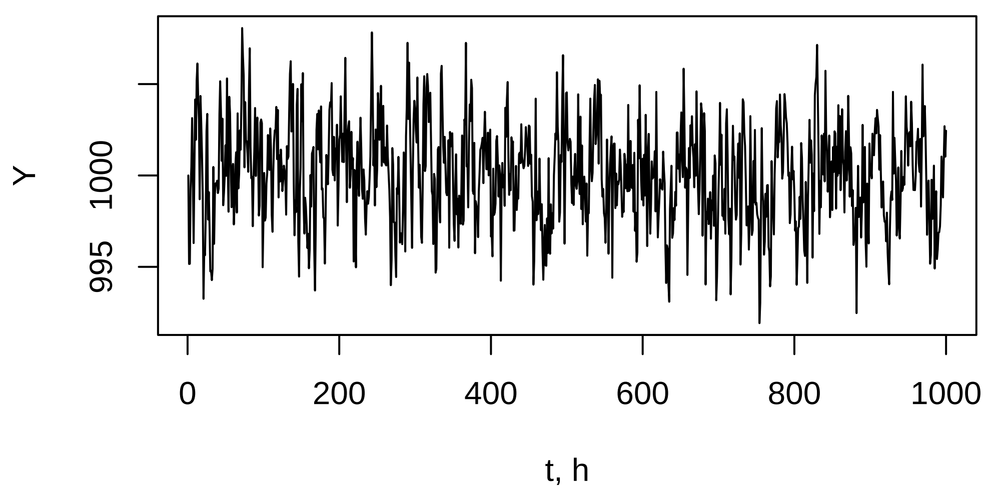
C Repita a letra A, considerando agora $y_0 = 500$. O que você observa de diferente?

```r
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_0 = 500,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5
)

head(y_t)
```

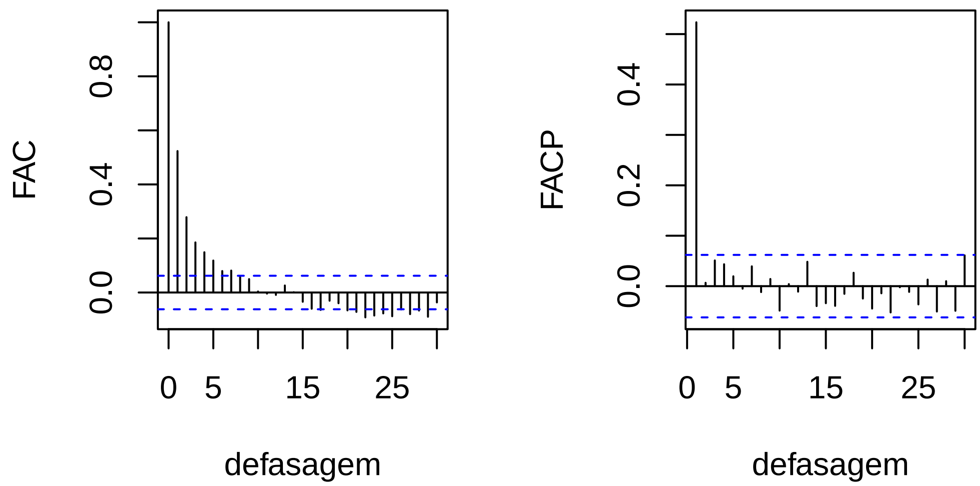
```
[1] 1000.0000  995.1596  995.1698  999.2376 1000.4833 1003.1405
```

Os gráficos:

```r
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```r
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A diferença agora é que com a constante diferente de zero, a série flutua em torno de sua nova média:

$$
\begin{aligned}
E[Y_t] &= \frac{c}{1-\phi_1} \\
&= \frac{500}{1-0.5} \\
&= 1000
\end{aligned}
\tag{1}
$$

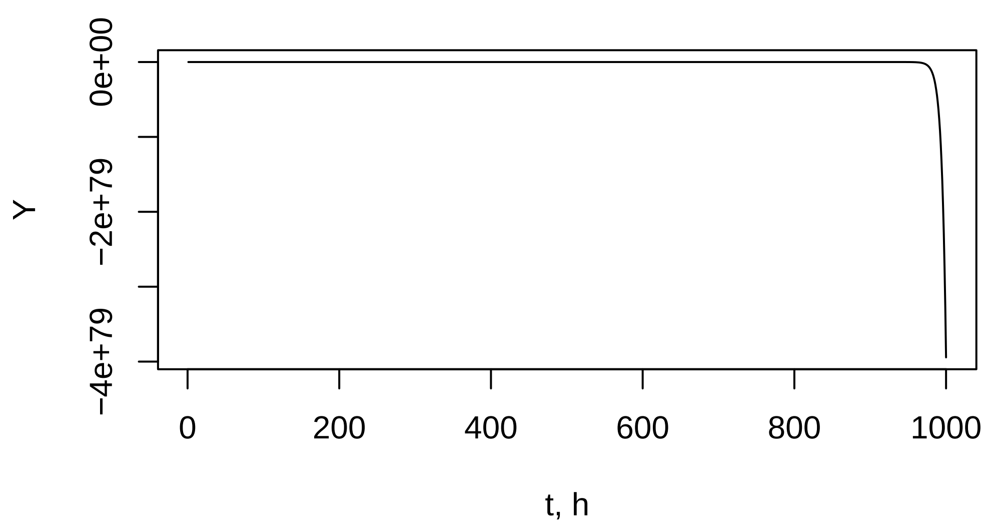
D Simule 1000 observações considerando $|\phi| > 1$, $\sigma^2 = 5$ e $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$. Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial. Qual a principal diferença entre essa série e a série simulada na letra A?

```r
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5
)

head(y_t, 20)
```

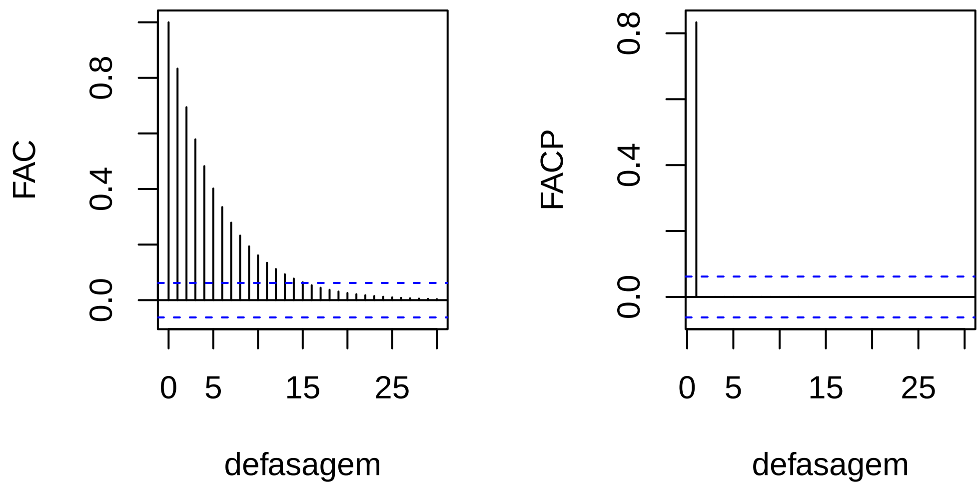
```
 [1]   0.00000000  -0.04898016  -0.65073243  -2.82310893  -5.92484094
 [6]  -5.40020748  -5.20410231  -9.26740228 -15.65984463 -17.47146315
[11] -24.12547627 -25.34973835 -26.30433138 -28.50559052 -37.01425550
[16] -47.51260079 -57.05890245 -68.10713036 -82.02977346 -98.62534367
```

Os gráficos:

```r
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A série não é mais convergente, mas explosiva. Posso provar que isso irá acontecer para qualquer $|\phi| > 1$ reescrevendo y_t na forma iterativa:

$$\begin{aligned} y_t &= c + \phi_{t-1} + \epsilon_t & (2) \\ y_{t-1} &= c + \phi_{t-2} + \epsilon_{t-1} & (3) \\ y_{t-2} &= c + \phi_{t-3} + \epsilon_{t-2} & (4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), temos:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&= c + \phi(c + \phi(c + \phi y_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&= c + \phi c + \phi^2 c + \phi^3 y_{t-3} + \phi^2 \epsilon_{t-2}) + \phi \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=1}^{k} c\phi^{i-1} + \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k} \phi^j \epsilon_{t-j}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Com $k \to \infty$, temos que os 3 termos de y_t são divergentes com $|\phi| > 1$. O segundo termo se dá diretamente, enquanto o primeiro e terceiro termos são séries geométricas divergentes.

$$\lim_{k \to +\infty} \phi^k y_{t-k} = +\infty \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} c\phi^{i-1} = \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} \tag{7}$$

Com $|\phi| > 1$,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} = +\infty \tag{8}$$

Somente no caso em que $|\phi| < 1$ é que a convergência é obtida em (7):

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} = \frac{c}{1-\phi} \tag{9}$$

E Para o modelo estimado na letra A, escreva a equação de previsão e obtenha $E[y_{T+h|\Omega_T}]$ para $h = 1, ..., 200$. Essa previsão converge para a média incondicional do processo? Apresente graficamente os valores previstos e a média incondicional.

Primeiro a teoria. Para um processo AR(1) $y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, a previsão para um horizonte h se dará por:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{T+1} &= E[c + \phi y_t + \epsilon_{T+1}] = c + \phi\mu \\
\hat{y}_{T+2} &= E[c + \phi\hat{y}_{T+1} + \epsilon_{T+2}] = c + \phi(c + \phi\mu) = c + \phi c + \phi^2\mu \\
\hat{y}_{T+3} &= E[c + \phi\hat{y}_{T+2} + \epsilon_{T+3}] = c + \phi(c + \phi c + \phi^2\mu) = c + \phi c + \phi^2\mu + \phi^3\mu \\
&\vdots \\
\hat{y}_{T+h} &= E[c + \phi\hat{y}_{T+h-1} + \epsilon_{T+h}] = \sum_{i=1}^{h} c\phi^{i-1} + \phi^h\mu
\end{aligned} \tag{10}
$$

Acerca da convergência, tomamos o limite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to+\infty} \hat{y}_{T+h} &= \sum_{i=1}^{\infty} c\phi^{i-1} + \phi^{\infty}\mu \\
&= \begin{cases} \frac{c}{1-\phi} + 0, & |\phi| < 1 \\ \infty, & |\phi| > 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Portanto, sim, a previsão deve convergir para a média incondicional do processo neste caso.

Agora, reescrevo a função `ar1` para adicionar a capacidade de previsão — e também a possibilidade de usar erro médio diferente de zero, para simular o mundo real e verificar como isso afeta a velocidade de convergência:

```r
# função geradora de processo AR(1) com previsão
ar1 = function(
    # quantidade de t (incluindo horizonte de previsão)
    t,
    # constante
    phi_0 = 0,
    # coeficiente autoregressivo
    phi_1,
    # variância
    v,
    # horizonte de previsão
    h = NULL,
    # média do erro
    erro_medio = 0
) {

  # y_t inicial
  # se a série é estacionária E[y_t-1] = E[y_t])
  y_t = phi_0 / (1 - phi_1)
```

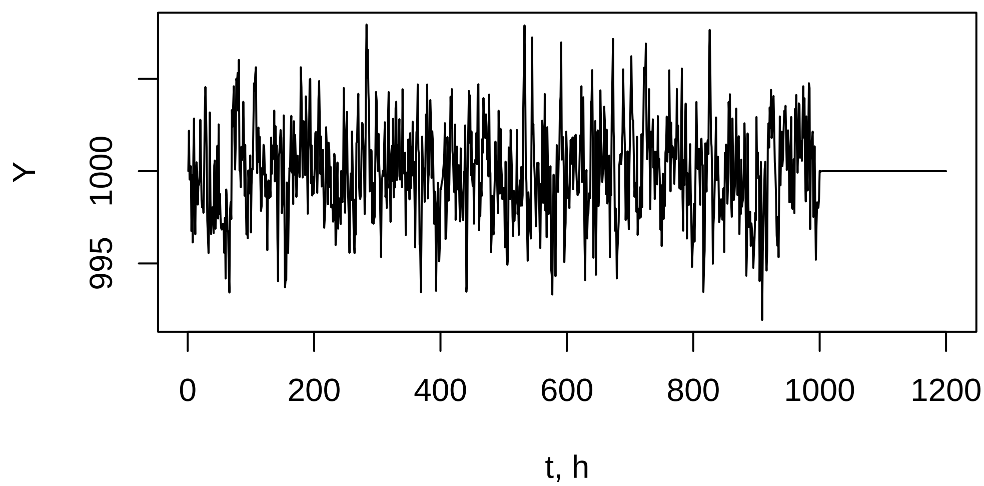
```r
  # gerando processo a partir de t_2 até t
  for (i in 2:t) {
    # ruído branco (ou apenas próximo o suficiente, para simular o mundo real)
    erro = rnorm(1, mean = erro_medio, sd = sqrt(v))
    # AR1
    y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
  }

  # previsão
  if (!is.null(h)) {
    # média da amostra
    u = mean(y_t)
    # loop representando a eq. 10
    for (i in 1:h) {
      y_t[t + i] = tail(cumsum(phi_0 * phi_1 ^ (1:i - 1)), 1) + u * (phi_1) ^ i
    }
  }

  # retorna processo
  return(y_t)
}
```

```r
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5,
  h = 200,
  phi_0 = 500
)

# evidência da convergência em números
y_t[995:1015]
```

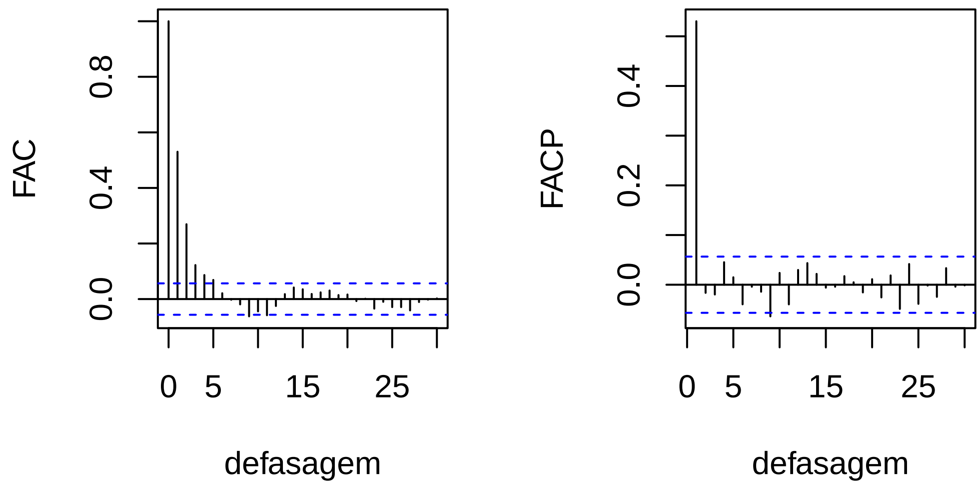
```
 [1]  997.0522  998.3136  998.0554  998.0212  998.4940 1000.0192  999.9769
 [8]  999.9885  999.9942  999.9971  999.9986  999.9993  999.9996  999.9998
[15]  999.9999 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000
```

```r
# série
plot(
  y_t, type = "l",
```

```
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



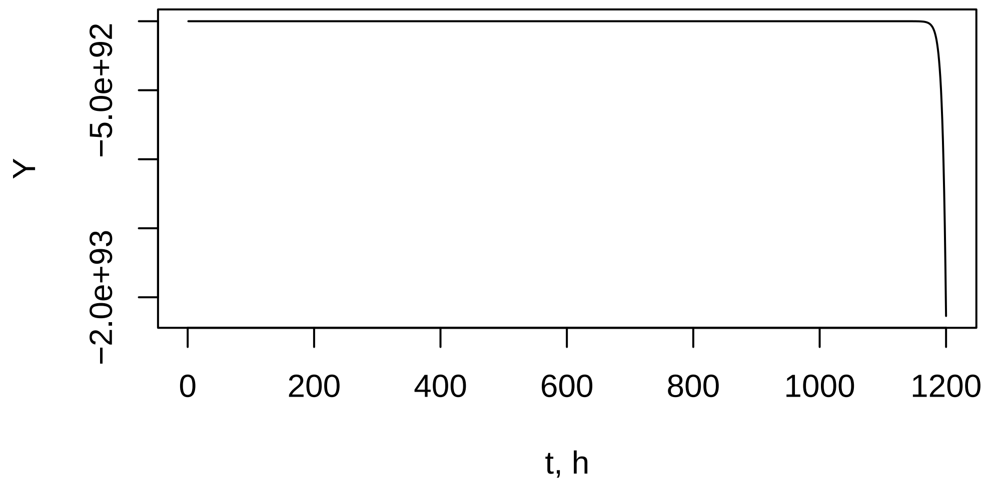

```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



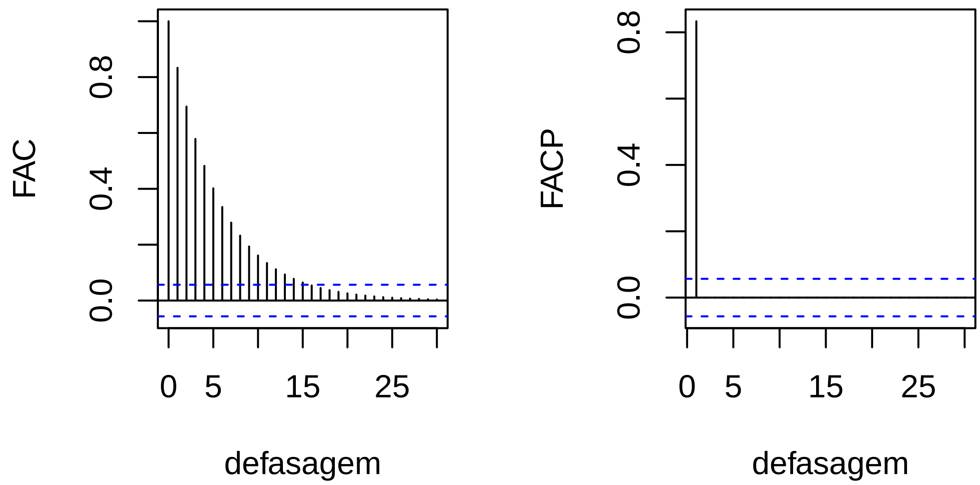
F Para o modelo estimado na letra D, escreva a equação de previsão e obtenha, computacionalmente, $E[y_{T+h|\Omega_T}]$ para $h = 1, ..., 200$. Compare o resultado com a letra D. Apresente os gráficos das previsões.

```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5,
  h = 200,
  phi_0 = 500
)
```

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```




```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



O modelo já era divergente, como evidenciado na questão 6.D. Na previsão continuou divergindo, nunca chegando na convergência apresentada quando $|\phi| < 1$.