

# Lista I: Q6

Alberson Miranda

2022-09-02

**1 Dado o processo**  $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + a_t$ :

**A Simule 1000 observações considerando  $|\phi| < 1$ ,  $\sigma^2 = 5$  e  $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ . Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial.**

Primeiramente, o código para simular um processo AR(1):

```
# reprodutibilidade
set.seed(1)

# função geradora de processo AR(1)
ar1 = function(
  # quantidade de t (incluindo horizonte de previsão)
  t,
  # constante
  phi_0 = 0,
  # coeficiente autoregressivo
  phi_1,
  # variância
  v
) {

  # y_t inicial
  # se a série é estacionária E[y_t-1] = E[y_t])
  y_t = phi_0 / (1 - phi_1)

  # gerando processo a partir de t_2 até t
  for (i in 2:t) {
```

```

# ruído branco
erro = rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(v))
# AR1
y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
}

# retorna processo
return(y_t)
}

```

Obtendo a série simulada:

```

# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5
)

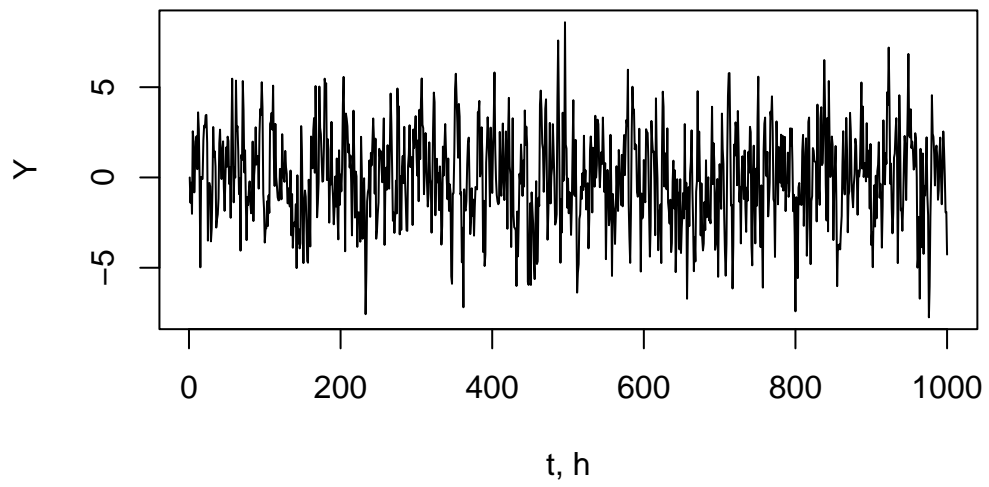
```

Os gráficos:

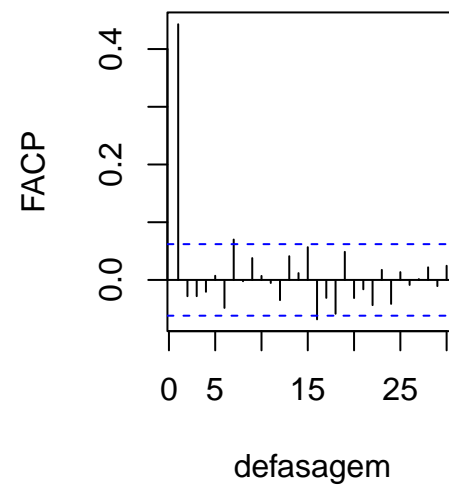
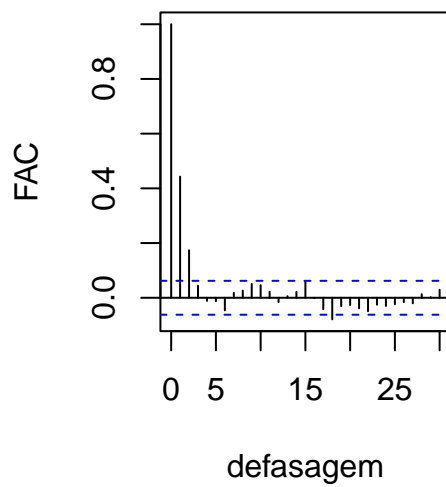
```

# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)

```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



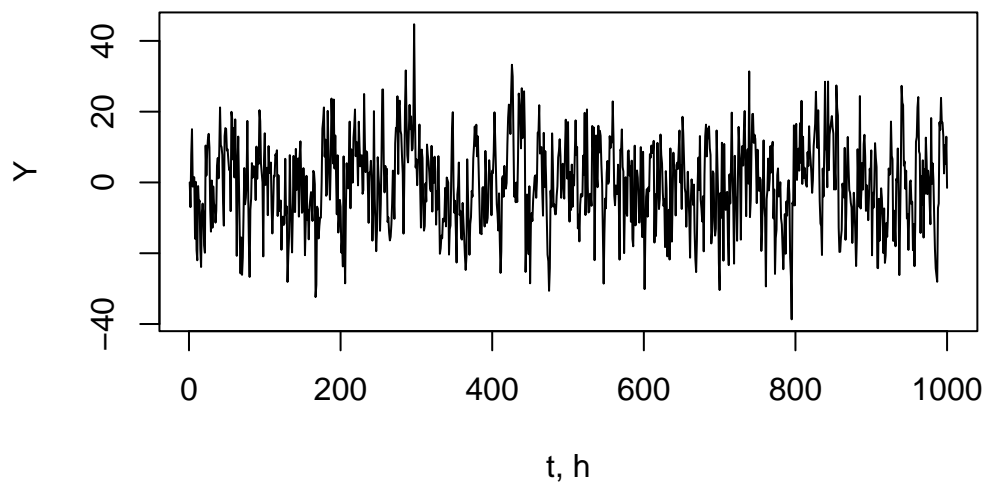
**B** Repita a letra **A**, agora considerando  $\sigma^2 = 100$ .

```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 100
)
head(y_t)
```

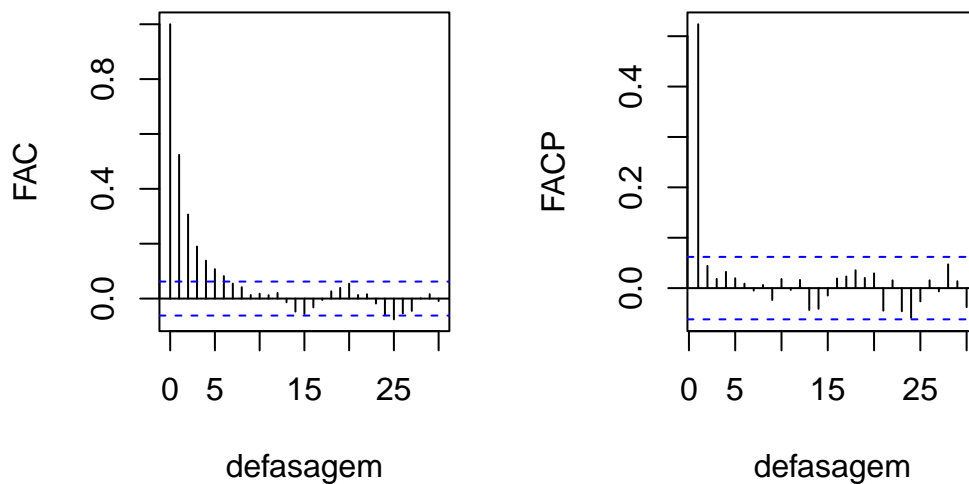
```
[1]  0.000000 -6.973182  7.863060 15.050848 -1.182352  1.516140
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



Ambas séries continuam variando em torno da média, entretanto, como esperado, a amplitude da série de maior variância é maior. As autocorrelações da segunda série também estão maiores, o que não era esperado dado que  $\rho_j = \phi^j$ , ou seja, não depende da variância. Isso provavelmente ocorre porque a função `sample()` é aleatória e a média de  $e_t$  é próxima de zero mas não exatamente. Por exemplo:

```
erro = rnorm(1000, 0, 10)
head(erro)
```

```
[1] 10.042330 -3.119734 -8.861496 -19.222549 16.197007 5.192699
```

```
# média do erro
mean(erro)
```

```
[1] 0.1924374
```

**C Repita a letra A, considerando agora  $y_0 = 500$ . O que você observa de diferente?**

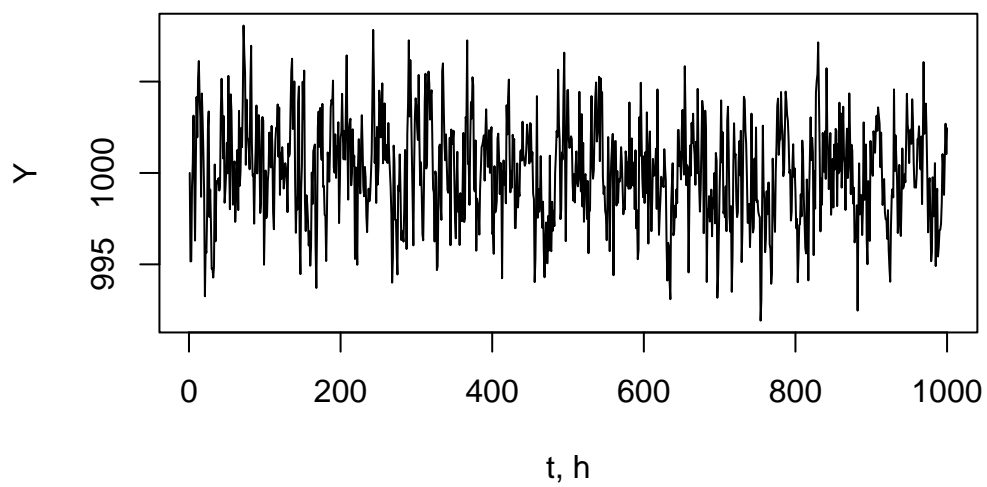
```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_0 = 500,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5
)

head(y_t)
```

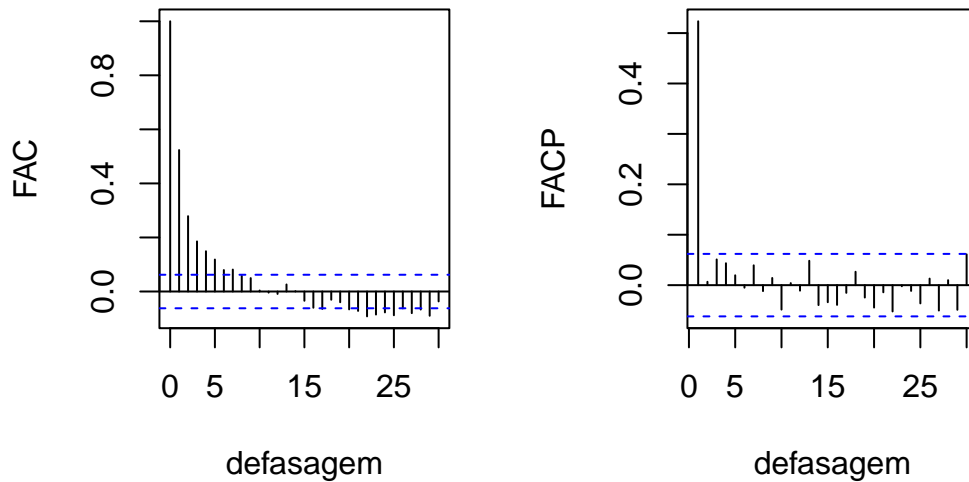
```
[1] 1000.0000 995.1596 995.1698 999.2376 1000.4833 1003.1405
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A diferença agora é que com a constante diferente de zero, a série flutua em torno de sua nova média:

$$\begin{aligned}
 E[Y_t] &= \frac{c}{1 - \phi_1} \\
 &= \frac{500}{1 - 0.5} \\
 &= 1000
 \end{aligned} \tag{1}$$

**D Simule 1000 observações considerando  $|\phi| > 1$ ,  $\sigma^2 = 5$  e  $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ . Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial. Qual a principal diferença entre essa série e a série simulada na letra A?**



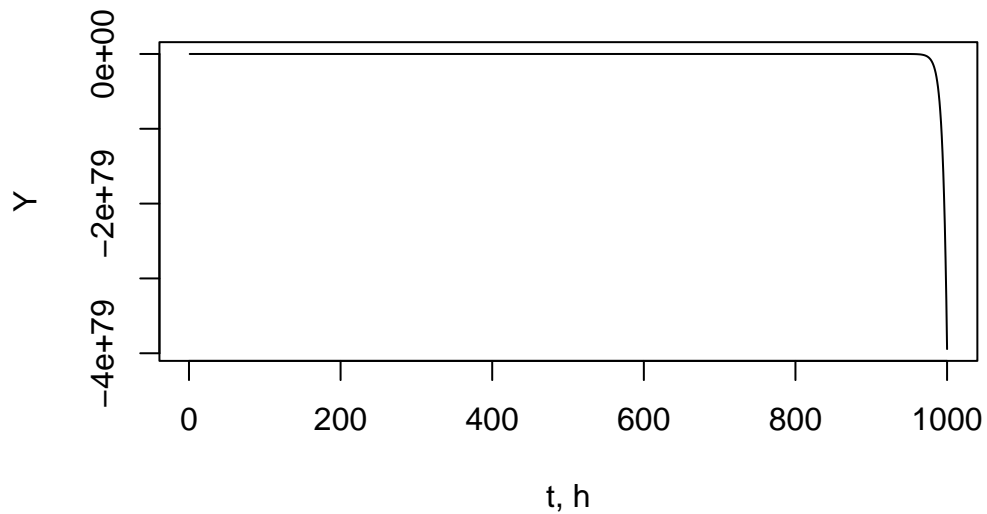
```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5
)

head(y_t, 20)
```

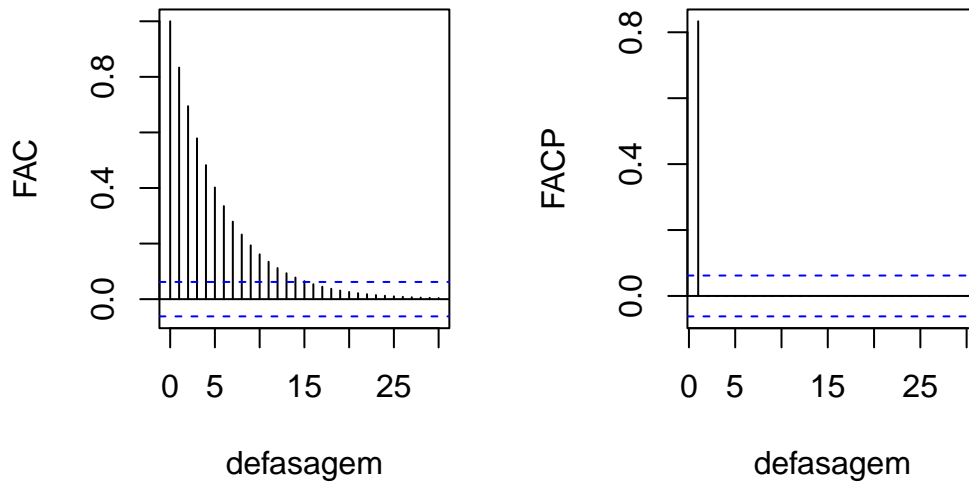
```
[1]  0.00000000 -0.04898016 -0.65073243 -2.82310893 -5.92484094
[6] -5.40020748 -5.20410231 -9.26740228 -15.65984463 -17.47146315
[11] -24.12547627 -25.34973835 -26.30433138 -28.50559052 -37.01425550
[16] -47.51260079 -57.05890245 -68.10713036 -82.02977346 -98.62534367
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A série não é mais convergente, mas explosiva. Posso provar que isso irá acontecer para qualquer  $|\phi| > 1$  reescrevendo  $y_t$  na forma iterativa:

$$y_t = c + \phi_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

$$y_{t-1} = c + \phi_{t-2} + \epsilon_{t-1} \quad (3)$$

$$y_{t-2} = c + \phi_{t-3} + \epsilon_{t-2} \quad (4)$$

$\vdots$

Substituindo (3) e (4) em (2), temos:

$$\begin{aligned}
y_t &= c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&= c + \phi(c + \phi(c + \phi y_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&= c + \phi c + \phi^2 c + \phi^3 y_{t-3} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \phi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=1}^k c \phi^{i-1} + \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^k \phi^j \epsilon_{t-j}
\end{aligned} \tag{5}$$

Com  $k \rightarrow \infty$ , temos que os 3 termos de  $y_t$  são divergentes com  $|\phi| > 1$ . O segundo termo se dá diretamente, enquanto o primeiro e terceiro termos são séries geométricas divergentes.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^k y_{t-k} = \infty \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^k c \phi^{i-1} = \frac{c(1 - \phi^k)}{1 - \phi} \tag{7}$$

Com  $|\phi| > 1$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c(1 - \phi^k)}{1 - \phi} = \infty \tag{8}$$

Somente no caso em que  $|\phi| < 1$  é que a convergência é obtida em (7):

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c(1 - \phi^k)}{1 - \phi} = \frac{c}{1 - \phi} \tag{9}$$

**E Para o modelo estimado na letra A, escreva a equação de previsão e obtenha  $E[y_{T+h}|\Omega_T]$  para  $h = 1, \dots, 200$ . Essa previsão converge para a média incondicional do processo? Apresente graficamente os valores previstos e a média incondicional.**

Primeiro a teoria. Para um processo AR(1)  $y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$ , a previsão para um horizonte  $h$  se dará por:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{T+1} &= E[c + \phi y_t + \epsilon_{T+1}] = c + \phi \mu \\
\hat{y}_{T+2} &= E[c + \phi \hat{y}_{T+1} + \epsilon_{T+2}] = c + \phi(c + \phi \mu) = c + \phi c + \phi^2 \mu \\
\hat{y}_{T+3} &= E[c + \phi \hat{y}_{T+2} + \epsilon_{T+3}] = c + \phi(c + \phi c + \phi^2 \mu) = c + \phi c + \phi^2 \mu + \phi^3 \mu \\
&\vdots \\
\hat{y}_{T+h} &= E[c + \phi \hat{y}_{T+h-1} + \epsilon_{T+h}] = \sum_{i=1}^h c \phi^{i-1} + \phi^h \mu
\end{aligned} \tag{10}$$

Acerca da convergência, tomamos o limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{y}_{T+h} &= \sum_{i=1}^{\infty} c \phi^{i-1} + \phi^{\infty} \mu \\
&= \begin{cases} \frac{c}{1-\phi} + 0, & |\phi| < 1 \\ \infty, & |\phi| > 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

Portanto, sim, a previsão deve convergir para a média incondicional do processo neste caso.

Agora, reescrevo a função `ar1` para adicionar a capacidade de previsão — e também a possibilidade de usar erro médio diferente de zero, para simular o mundo real e verificar como isso afeta a velocidade de convergência:

```
# função geradora de processo AR(1) com previsão
ar1 = function(
  # quantidade de t (incluindo horizonte de previsão)
  t,
  # constante
  phi_0 = 0,
  # coeficiente autoregressivo
  phi_1,
  # variância
  v,
  # horizonte de previsão
  h = NULL,
  # média do erro
  erro_medio = 0
) {

  # y_t inicial
  # se a série é estacionária E[y_t-1] = E[y_t])
  y_t = phi_0 / (1 - phi_1)
```

```

# gerando processo a partir de t_2 até t
for (i in 2:t) {
  # ruído branco (ou apenas próximo o suficiente, para simular o mundo real)
  erro = rnorm(1, mean = erro_medio, sd = sqrt(v))
  # AR1
  y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
}

# previsão
if (!is.null(h)) {
  # média da amostra
  u = mean(y_t)
  # loop representando a eq. 10
  for (i in 1:h) {
    y_t[t + i] = tail(cumsum(phi_0 * phi_1 ^ (1:i - 1)), 1) + u * (phi_1) ^ i
  }
}

# retorna processo
return(y_t)
}

```

```

# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5,
  h = 200,
  phi_0 = 500
)

# evidência da convergência em números
y_t[995:1015]

```

```

[1] 997.0522 998.3136 998.0554 998.0212 998.4940 1000.0192 999.9769
[8] 999.9885 999.9942 999.9971 999.9986 999.9993 999.9996 999.9998
[15] 999.9999 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000 1000.0000

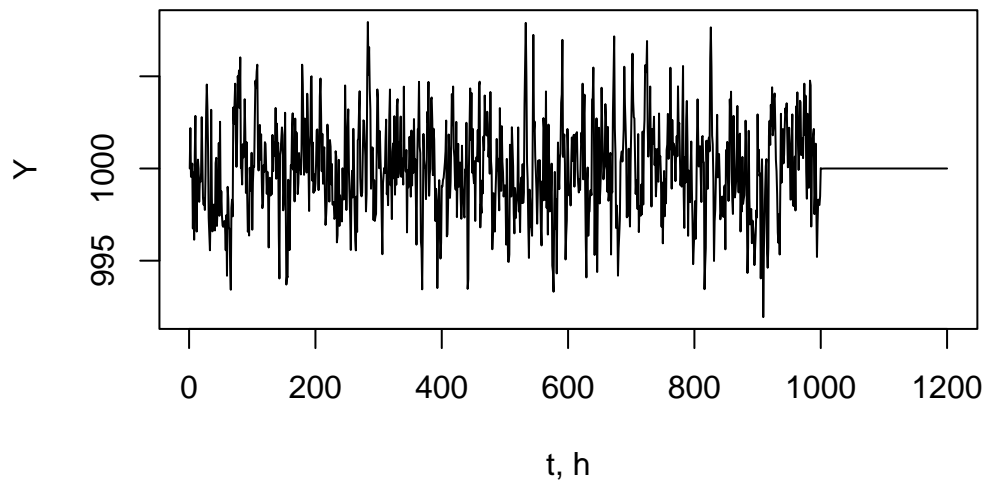
```

```

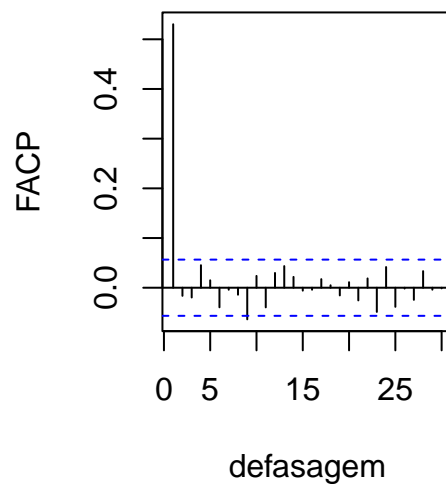
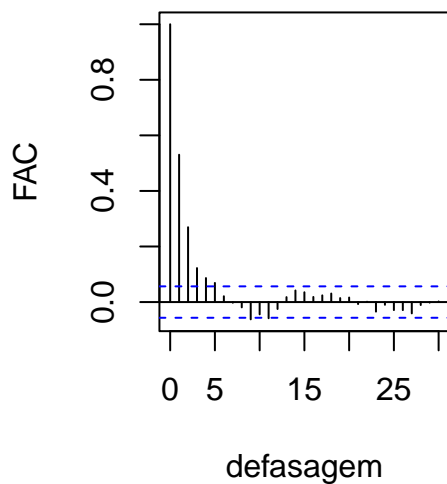
# série
plot(
  y_t, type = "l",

```

```
xlab = "t, h",  
ylab = "Y"  
)
```



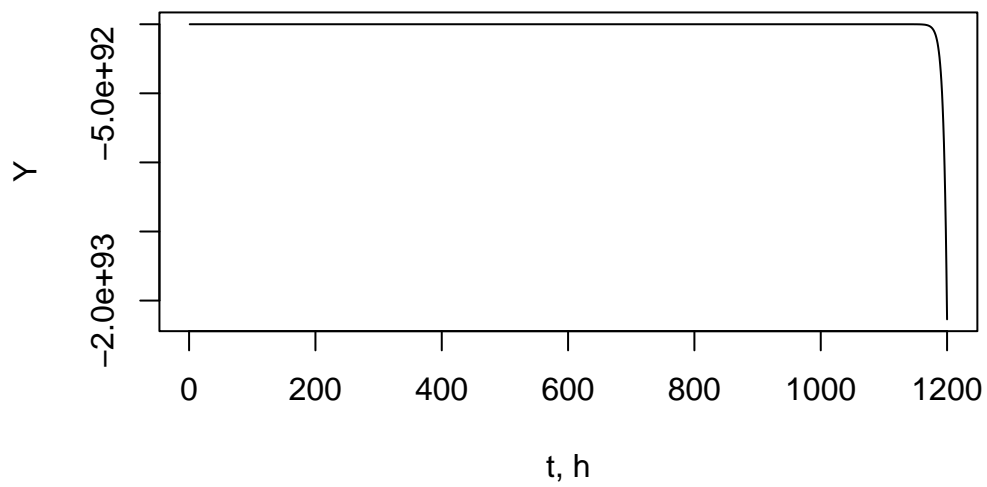
```
# funções de autocorrelação  
par(mfrow = c(1, 2))  
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")  
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



**F** Para o modelo estimado na letra D, escreva a equação de previsão e obtenha, computacionalmente,  $E[y_{T+h}|\Omega_T]$  para  $h = 1, \dots, 200$ . Compare o resultado com a letra D. Apresente os gráficos das previsões.

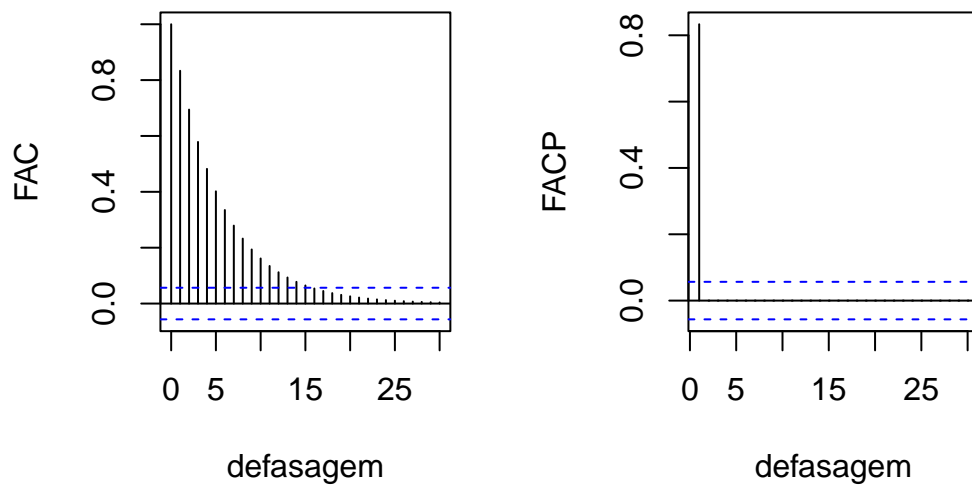
```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5,
  h = 200,
  phi_0 = 500
)
```

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```





O modelo já era divergente, como evidenciado na questão 6.D. Na previsão continuou divergindo, nunca chegando na convergência apresentada quando  $|\phi| < 1$ .