

Lista I: Q6

Alberson Miranda

2022-09-14

1 Dado o processo $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + a_t$:

A Simule 1000 observações considerando $|\phi| < 1$, $\sigma^2 = 5$ e $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$. Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial.

Primeiramente, o código para simular um processo AR(1):

```
# reprodutibilidade
set.seed(1)

# função geradora de processo AR(1)
ar1 = function(
  # quantidade de t
  t,
  # constante
  phi_0 = 0,
  # coeficiente autoregressivo
  phi_1,
  # variância do erro
  v,
  # média do erro
  erro_medio = 0,
  # valor inicial (coloquei a média do processo como default)
  y_0 = phi_0 / (1 - phi_1)
) {

  # y_t inicial
  y_t = y_0
```

```

# gerando processo a partir de t_2 até t
for (i in 2:t) {
  # ruído branco
  erro = rnorm(1, mean = erro_medio, sd = sqrt(v))
  # AR1
  y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
}

# retorna processo
return(y_t)
}

```

Obtendo a série simulada:

```

# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5
)

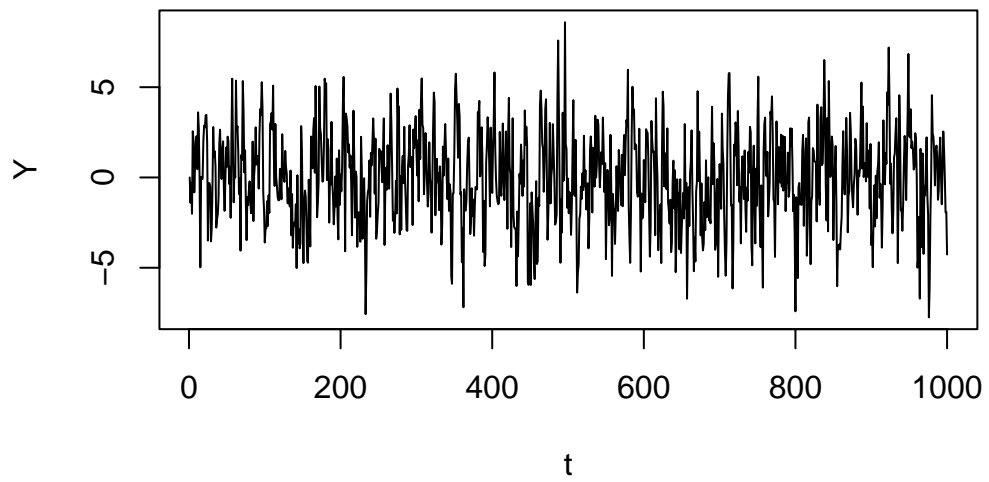
```

Os gráficos:

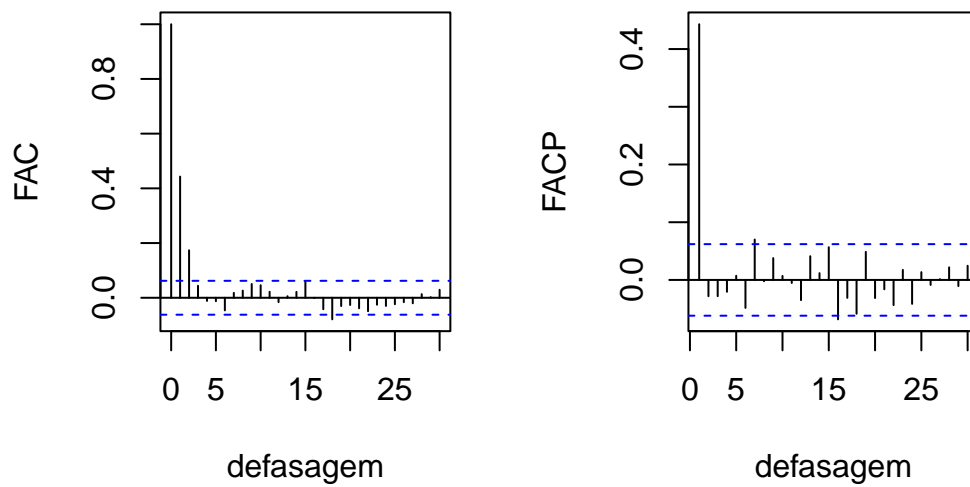
```

# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t",
  ylab = "Y"
)

```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



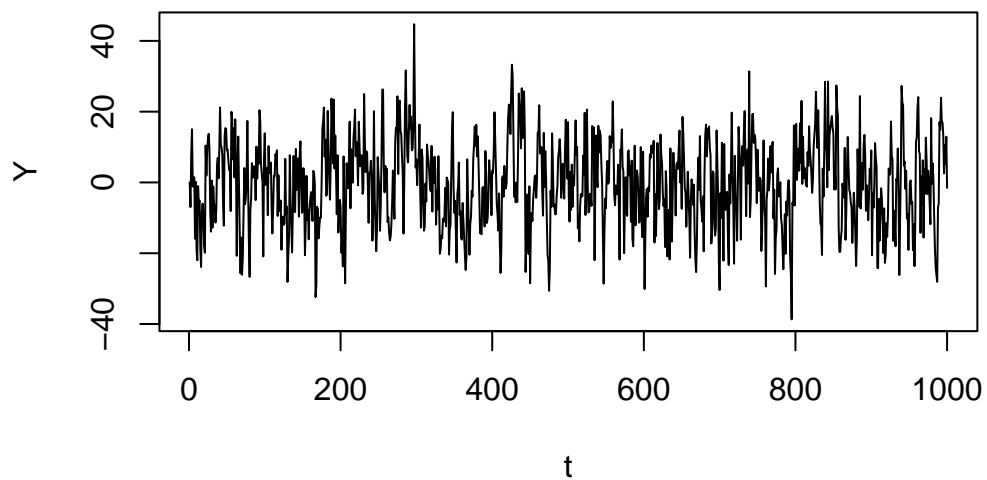
B Repita a letra A, agora considerando $\sigma^2 = 100$.

```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 100
)
head(y_t)
```

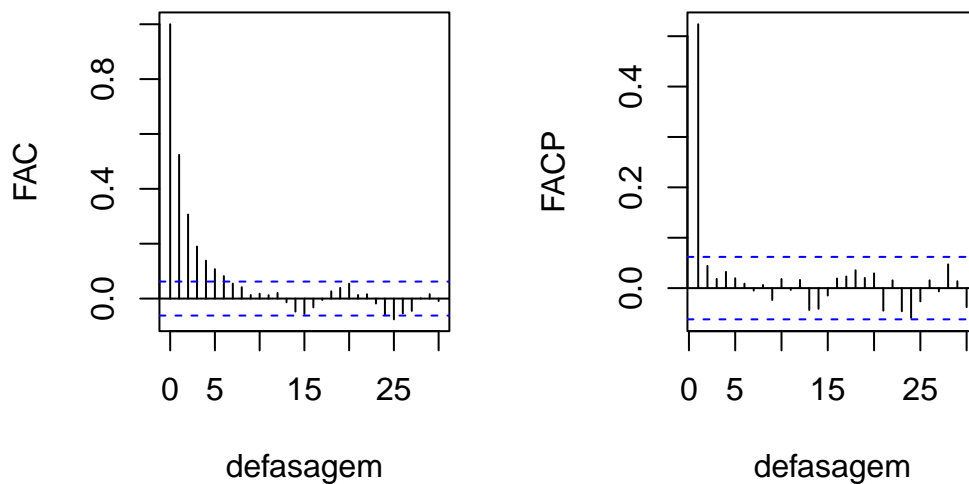
```
[1]  0.000000 -6.973182  7.863060 15.050848 -1.182352  1.516140
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



Ambas séries continuam variando em torno da média, entretanto, como esperado, a amplitude da série de maior variância é maior. As autocorrelações da segunda série também estão maiores, o que não era esperado dado que $\rho_j = \phi^j$, ou seja, não depende da variância. Isso provavelmente ocorre porque a função `sample()` é aleatória e a média de e_t é próxima de zero mas não exatamente. Por exemplo:

```
erro = rnorm(1000, 0, 10)
head(erro)
```

```
[1] 10.042330 -3.119734 -8.861496 -19.222549 16.197007 5.192699
```

```
# média do erro
mean(erro)
```

```
[1] 0.1924374
```

C Repita a letra A, considerando agora $y_0 = 500$. O que você observa de diferente?

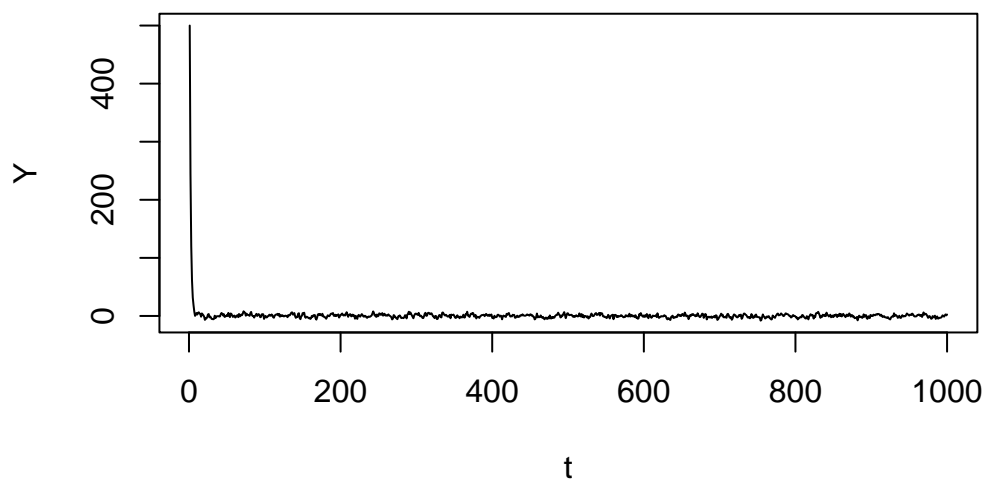
```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5,
  y_0 = 500
)

head(y_t)
```

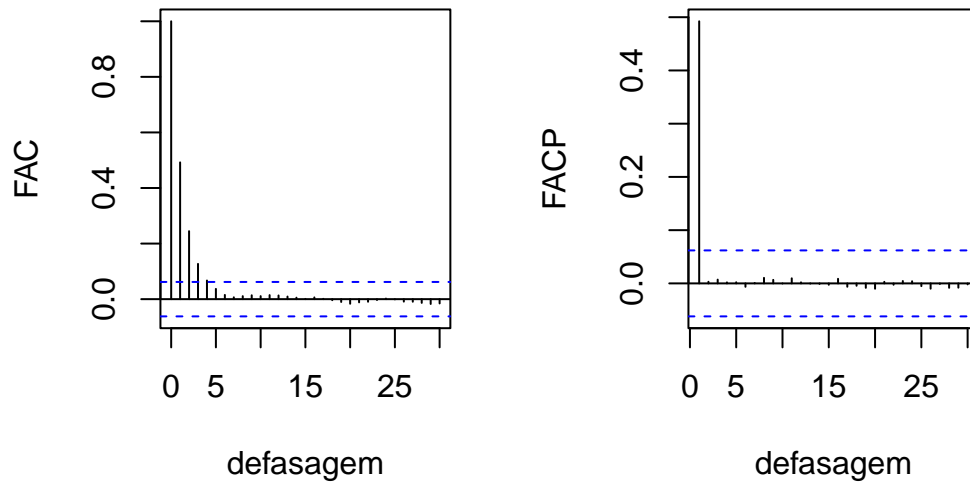
```
[1] 500.00000 245.15965 120.16984 61.73763 31.73330 18.76548
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A série flutua em torno da média incondicional, que não depende de y_0 . Então, a série retorna para 0:

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= \frac{c}{1 - \phi_1} \\ &= \frac{0}{1 - 0.5} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

D Simule 1000 observações considerando $|\phi| > 1$, $\sigma^2 = 5$ e $y_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$. Apresente o gráfico da série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial. Qual a principal diferença entre essa série e a série simulada na letra A?

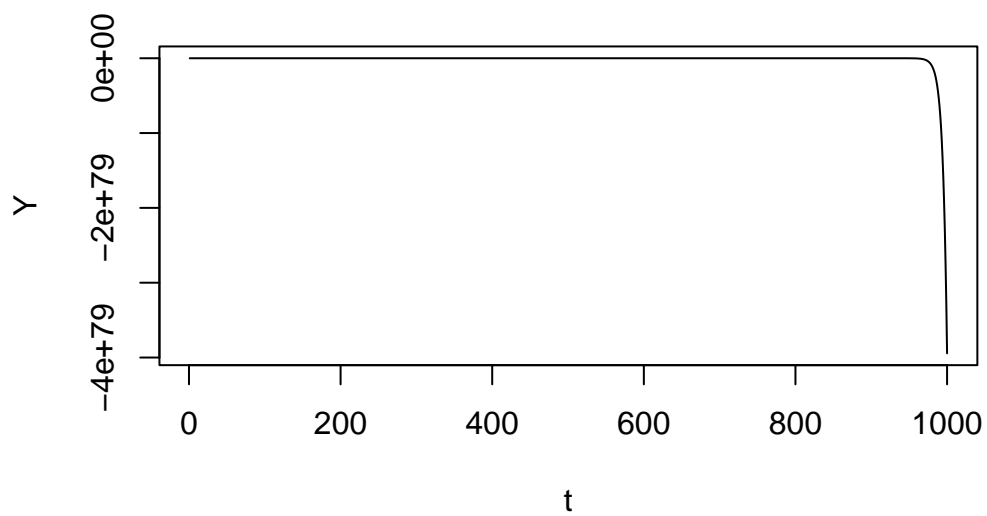
```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5
)

head(y_t, 20)
```

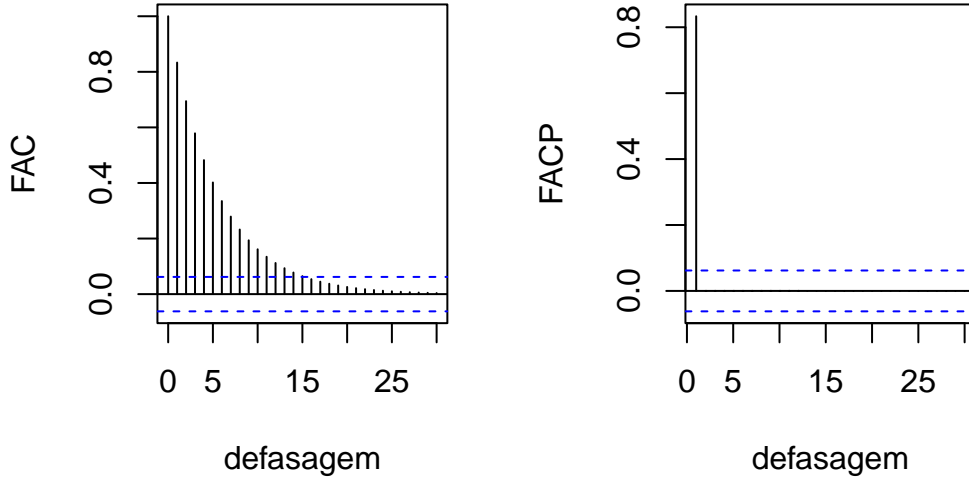
```
[1]  0.00000000 -0.04898016 -0.65073243 -2.82310893 -5.92484094
[6] -5.40020748 -5.20410231 -9.26740228 -15.65984463 -17.47146315
[11] -24.12547627 -25.34973835 -26.30433138 -28.50559052 -37.01425550
[16] -47.51260079 -57.05890245 -68.10713036 -82.02977346 -98.62534367
```

Os gráficos:

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t",
  ylab = "Y"
)
```



```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



A série não é mais convergente, mas explosiva. Posso provar que isso irá acontecer para qualquer $|\phi| > 1$ reescrevendo y_t na forma iterativa:

$$y_t = c + \phi_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

$$y_{t-1} = c + \phi_{t-2} + \epsilon_{t-1} \quad (3)$$

$$y_{t-2} = c + \phi_{t-3} + \epsilon_{t-2} \quad (4)$$

\vdots

Substituindo (3) e (4) em (2), temos:

$$\begin{aligned}
 y_t &= c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
 &= c + \phi(c + \phi(c + \phi y_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
 &= c + \phi c + \phi^2 c + \phi^3 y_{t-3} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \phi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 &\vdots \\
 &= \sum_{i=1}^k c \phi^{i-1} + \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^k \phi^j \epsilon_{t-j}
 \end{aligned} \quad (5)$$

Com $k \rightarrow \infty$, temos que os 3 termos de y_t são divergentes com $|\phi| > 1$. O segundo termo se dá diretamente, enquanto o primeiro e terceiro termos são séries geométricas divergentes.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^k y_{t-k} = \infty \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^k c\phi^{i-1} = \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} \quad (7)$$

Com $|\phi| > 1$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} = \infty \quad (8)$$

Somente no caso em que $|\phi| < 1$ é que a convergência é obtida em (7):

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c(1-\phi^k)}{1-\phi} = \frac{c}{1-\phi} \quad (9)$$

E Para o modelo estimado na letra A, escreva a equação de previsão e obtenha $E[y_{T+h}|\Omega_T]$ para $h = 1, \dots, 200$. Essa previsão converge para a média incondicional do processo? Apresente graficamente os valores previstos e a média incondicional.

Primeiro a teoria. Para um processo AR(1) $y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, a previsão para um horizonte h se dará por:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+1} &= E[\phi_0 + \phi_1 y_t + \epsilon_{T+1}] = \phi_0 + \phi_1 y_t \\ \hat{y}_{T+2} &= E[\phi_0 + \phi_1 \hat{y}_{T+1} + \epsilon_{T+2}] = \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 y_t) = \phi_0 + \phi_0 \phi_1 + \phi_1^2 y_t \\ \hat{y}_{T+3} &= E[\phi_0 + \phi_1 \hat{y}_{T+2} + \epsilon_{T+3}] = \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_0 \phi_1 + \phi_1^2 y_t) = \phi_0 + \phi_0 \phi_1 + \phi_0 \phi_1^2 y_t + \phi_1^3 y_t \\ &\vdots \\ \hat{y}_{T+h} &= E[\phi_0 + \phi_1 \hat{y}_{T+h-1} + \epsilon_{T+h}] = \phi_0 \sum_{i=0}^{h-1} \phi_1^i + \phi_1^h y_t \end{aligned} \quad (10)$$

Acerca da convergência, tomamos o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{y}_{T+h} &= \phi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i + \phi_1^\infty y_t \\ &= \begin{cases} \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + 0, & |\phi_1| < 1 \\ \infty, & |\phi_1| > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Portanto, sim, a previsão deve convergir para a média incondicional do processo neste caso.

Agora, reescrevo a função `ar1` para adicionar a capacidade de previsão — e também a possibilidade de usar erro médio diferente de zero, para simular o mundo real e verificar como isso afeta a velocidade de convergência:

```
# função geradora de processo AR(1) com previsão
ar1 = function(
  # quantidade de t
  t,
  # constante
  phi_0 = 0,
  # coeficiente autoregressivo
  phi_1,
  # variância do erro
  v,
  # média do erro
  erro_medio = 0,
  # valor inicial (coloquei a média do processo como default)
  y_0 = phi_0 / (1 - phi_1),
  # horizonte de previsão
  h = NULL
) {

  # y_t inicial
  y_t = y_0

  # gerando processo a partir de t_2 até t
  for (i in 2:t) {
    # ruído branco (ou apenas próximo o suficiente, para simular o mundo real)
    erro = rnorm(1, mean = erro_medio, sd = sqrt(v))
    # AR1
    y_t[i] = phi_0 + phi_1 * y_t[i - 1] + erro
  }

  # previsão
  if (!is.null(h)) {
    # média condicional
    u = mean(y_t)
    # loop representando a eq. 10
    for (i in 1:h) {
      y_t[t + i] = tail(cumsum(phi_0 * phi_1 ^ (1:i - 1)), 1) + u * (phi_1) ^ i
    }
  }
}
```

```

}

# retorna processo
return(y_t)
}

```

```

# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 0.5,
  v = 5,
  h = 200
)

# evidência da convergência em números
y_t[995:1015]

```

```

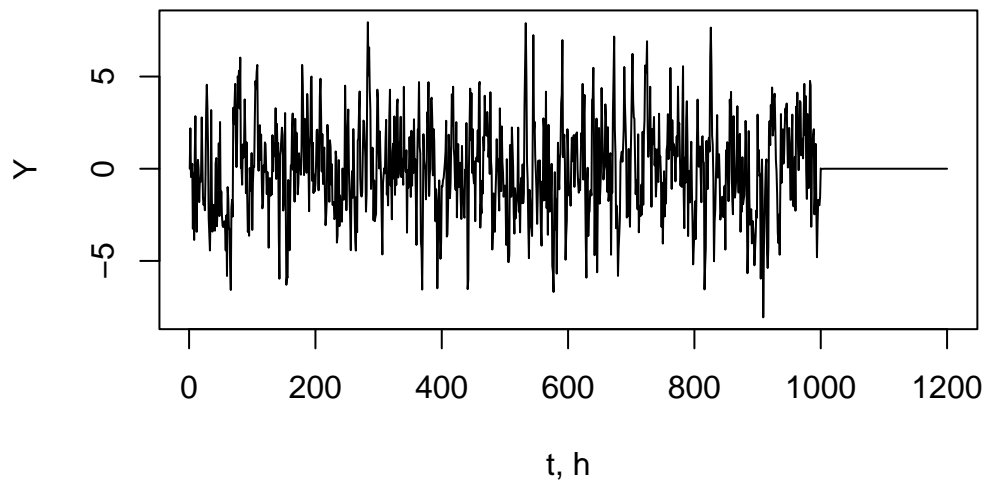
[1] -2.947751e+00 -1.686428e+00 -1.944586e+00 -1.978845e+00 -1.505984e+00
[6]  1.916972e-02 -2.305412e-02 -1.152706e-02 -5.763529e-03 -2.881764e-03
[11] -1.440882e-03 -7.204411e-04 -3.602206e-04 -1.801103e-04 -9.005514e-05
[16] -4.502757e-05 -2.251378e-05 -1.125689e-05 -5.628446e-06 -2.814223e-06
[21] -1.407112e-06

```

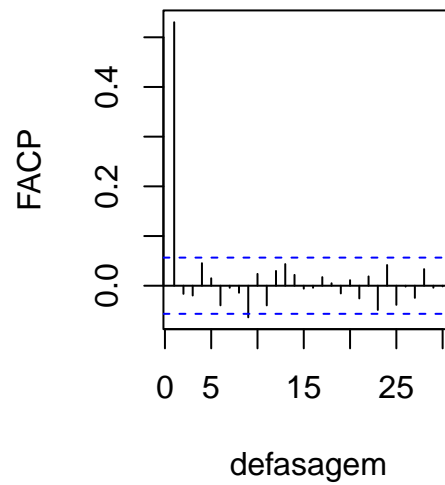
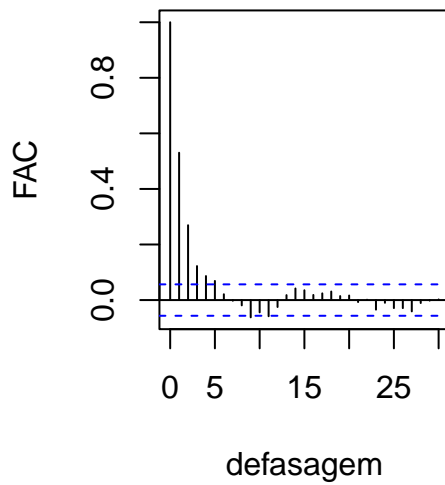
```

# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)

```



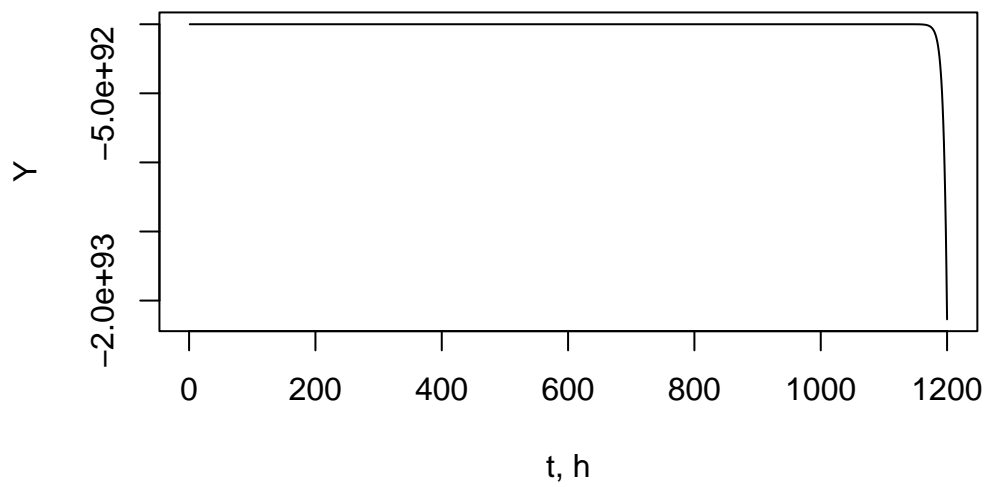
```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



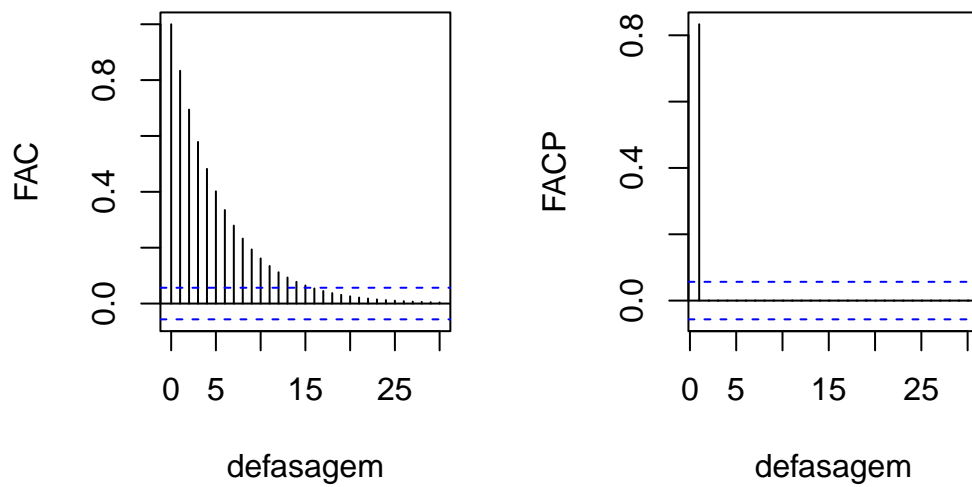
F Para o modelo estimado na letra D, escreva a equação de previsão e obtenha, computacionalmente, $E[y_{T+h}|\Omega_T]$ para $h = 1, \dots, 200$. Compare o resultado com a letra D. Apresente os gráficos das previsões.

```
# série AR(1)
y_t = ar1(
  t = 1000,
  phi_1 = 1.2,
  v = 5,
  h = 200
)
```

```
# série
plot(
  y_t, type = "l",
  xlab = "t, h",
  ylab = "Y"
)
```

```
# funções de autocorrelação
par(mfrow = c(1, 2))
acf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FAC")
pacf(y_t, main = "", xlab = "defasagem", ylab = "FACP")
```



O modelo já era divergente, como evidenciado na questão 6.D. Na previsão continuou divergindo, nunca chegando na convergência apresentada quando $|\phi| < 1$.