TÍTULO DO PROJETO: Reconciliação Ótima de Séries Temporais Hierárquicas Através de Regressão Regularizada

LINHA DE PESQUISA: Métodos e Modelos Matemáticos, Econométricos e Estatísticos Aplicados à Economia

1 INTRODUÇÃO

Séries temporais hierárquicas são aquelas que podem ser agregadas ou desagregadas naturalmente em uma estrutura aninhada (HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2021). Para ilustrar, tome a série do PIB de um país fictício com três estados, cada um com dois municípios. Essa série pode ser desagregada por estado que, por sua vez, pode ser desagregada por município (Figura 1).

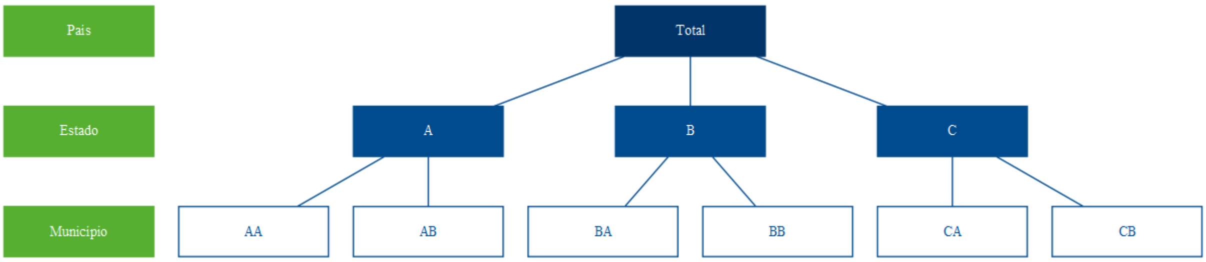

Figura 1 – Séries Hierárquicas

Essa estrutura pode ser representada através de equações para qualquer nível de agregação.

Essa estrutura pode ser representada através de equações para qualquer nível de agregação. Dessa forma, o agregado nacional pode ser descrito pelos agregados dos estados, Equação (1), ou como o agregado dos municípios, Equação (2). Já o agregado para o estado A é representado pela Equação (3).

$$y_t = y_{A,t} + y_{B,t} + y_{C,t} \tag{1}$$

$$y_t = y_{AA,t} + y_{AB,t} + y_{BA,t} + y_{BB,t} + y_{CA,t} + y_{CB,t} \tag{2}$$

$$y_{A,t} = y_{AA,t} + y_{AB,t} \tag{3}$$

Na notação matricial, essas estruturas são representadas pelo vetor $\boldsymbol{y}_t$ n-dimensional com todas as observações no tempo t para todos os níveis da hierarquia, pela matriz de soma $\boldsymbol{S}$ de dimensão $n \times m$ que define as equações para todo nível de agregação, e pelo vetor $\boldsymbol{b}_t$ composto pelas séries no nível mais desagregado.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{S}\boldsymbol{b}_t \tag{4}$$

Talvez as formas mais intuitivas de se pensar em previsões para esses tipos de estrutura sejam as abordagens *top-down* e *bottom-up*. Na primeira, a previsão para os níveis mais desagregados da hierarquia são determinadas por uma proporção[1] p_i do nível agregado. Para isso, temos de definir uma matriz com todos esses pesos, que, seguindo a formulação de Hyndman e Athanasopoulos (2021), chamamos de $\boldsymbol{G}$. Já a abordagem *bottom-up* parte do raciocínio inverso e define as previsões de cada elemento da estrutura a partir das previsões dos elementos mais desagregados. Para tanto, basta modificar a matriz $\boldsymbol{G}$. Então, $\boldsymbol{G}$ define a abordagem — se *top-down* ou *bottom-up* — e $\boldsymbol{S}$ define a maneira da qual as previsões são somadas para formar as equações de previsão para cada elemento da estrutura.

Seja somando as previsões do nível mais desagregado para formar os níveis superiores da hierarquia (*bottom-up*) ou distribuindo proporcionalmente as previsões do nível mais agregado (*top-down*), o vetor $\tilde{\boldsymbol{y}}_t$ representa as previsões *coerentes*. Isso significa que as previsões são totalizadas corretamente — as previsões de cada elemento agregado corresponde ao somatório das previsões dos níveis inferiores da hierarquia. Isso é garantido pela multiplicação das matrizes $\boldsymbol{SG}$.

Os métodos de gerar previsões coerentes ($\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{t}}$) a partir de previsões base ($\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{t}}$) são chamados de métodos de *reconciliação*. Os métodos de reconciliação tradicionais apresentados, *top-down*, *bottom-up* e *middle-out*, utilizam informação limitada. No método *top-down*, utiliza-se apenas informações do nível mais agregado — por isso, apenas a primeira coluna em (**?@eq-matriz_g**) é diferente de zero. Já na abordagem *bottom-up*, utiliza-se apenas as informações dos níveis mais desagregados, o que resulta na submatriz identidade $m \times m$ na **?@eq-matriz_gbu**, enquanto as colunas que representam os níveis mais agregados são nulas. Por fim, a abordagem *middle-out* não utiliza a mesma, mas utiliza a mesma quantidade de informação que a *top-down* (**?@eq-matriz_gmo**).

Alternativamente, podemos pensar numa matriz $\boldsymbol{G}$ qualquer que utilize toda a informação disponível e tenha algumas propriedades que garantam que as previsões coerentes tenham o menor erro o possível. Esse é o problema de pesquisa trabalhado na *reconciliação ótima*.

Previsões pontuais de séries temporais hierárquicas não é um assunto novo. Ao menos desde a década de 70, pesquisas foram publicadas acerca de abordagens *bottom-up* e *top-down*, suas vantagens e desvantagens, e tentativas de se definir qual é o melhor método[2]. Entretanto, é apenas em Hyndman, Ahmed et al. (2011) que é formalizada uma abordagem prática que utiliza toda a informação disponível, (i.e. as previsões de todos elementos de todos os níveis da hierarquia) a partir da estimação de uma matriz de pesos via regressão linear por mínimos quadrados generalizados (MQG).

Spiliotis et al. (2021) propõem a utilização de *machine learning* para a reconciliação ótima de séries temporais, especificamente os algoritmos de árvore de decisão *Random Forest*

[1] Essa proporção pode ser obtida por diversas maneiras (ver Gross e Sohl (1990)).
[2] Uma revisão dessa literatura pode ser encontrada em Athanasopoulos, Ahmed e Hyndman (2009).

e *XGBoost*. Os autores descrevem como vantagens desse método em relação aos anteriores a descrição de relacionamentos não lineares, performance preditiva e a desnecessidade da utilização de todos os elementos da hierarquia na combinação ótima. Para o conjunto de dados utilizados, os autores afirmam que os métodos de *machine learning*, especialmente o XGBoost, alcançaram, em média, melhor performance que as abordagens de nível único e o *MinT*. Além disso, concluíram que quanto maior é a diferença entre as séries, em todos os níveis hierárquicos, maior são os benefícios da abordagem por *machine learning*.

REFERÊNCIAS

ATHANASOPOULOS, G.; AHMED, R. A.; HYNDMAN, R. J. Hierarchical forecasts for Australian domestic tourism. en. **International Journal of Forecasting**, v. 25, n. 1, p. 146–166, jan. 2009. ISSN 0169-2070. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2008.07.004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207008000691>. Acesso em: 11 jan. 2023. Citado na p. 2.

GROSS, C. W.; SOHL, J. E. Disaggregation methods to expedite product line forecasting. en. **Journal of Forecasting**, v. 9, n. 3, p. 233–254, 1990. ISSN 1099-131X. DOI: 10.1002/for.3980090304. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/for.3980090304>. Acesso em: 18 jun. 2023. Citado na p. 2.

HYNDMAN, R.; ATHANASOPOULOS, G. **Forecasting: principles and practice**. 3. ed. Melbourne, Austrália: OTexts, 2021. Disponível em: <https://otexts.com/fpp3/>. Citado nas pp. 1, 2.

HYNDMAN, R. J.; AHMED, R. A. et al. Optimal combination forecasts for hierarchical time series. en. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 55, n. 9, p. 2579–2589, set. 2011. ISSN 0167-9473. DOI: 10.1016/j.csda.2011.03.006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947311000971>. Acesso em: 11 jan. 2023. Citado na p. 2.

SPILIOTIS, E. et al. Hierarchical forecast reconciliation with machine learning. en. **Applied Soft Computing**, v. 112, p. 107756, nov. 2021. ISSN 1568-4946. DOI: 10.1016/j.asoc.2021.107756. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494621006773>. Acesso em: 11 jan. 2023. Citado na p. 2.