

# TRANSICIÓ DE FASE DE DIFERENTS PROPIETATS EN MODELS ALEATORIS PARAMETRITZATS

## INTRODUCCIÓ

Aquest estudi experimental té com a objectiu estudiar i determinar les transicions de fase de determinades propietats i mesuraments sobre grafs. En concret ens centrarem en estudiar les propietats i mesuraments sobre grafs generats de manera aleatòria per diferents models parametritzats.

Estudiarem la transició de fase basant-nos en la variabilitat d'una propietat o mesurament en relació amb els paràmetres que defineixen el graf.

*Transició de fase d'una propietat o mesurament: cert valor dels paràmetres ( $p$ ) a partir dels quals (per tot  $p' > p$ ) canvia dràsticament i notòriament la relació entre aquests i la propietat o mesurament, en comparació en com era la relació abans (per tot  $p'' < p$ ).*

D'aquesta manera, si es veu que existeix una transició de fase, es pot estimar l'existència o no de les propietats i els diferents mesuraments únicament amb els paràmetres que defineixen el graf.

En concret estudiem l'existència o no de transició de fase de la probabilitat de ser connex i de la mida de la component connexa més gran. I com a propietat extra també estudiarem el diàmetre de la component connexa més gran.

Farem aquests estudis sobre el model Binomial **RBG** i el model Geomètric **RGG** de generació de grafs aleatoris.

### **Models:**

#### **> Binomial (RBG)**

El model binomial  $G(n, p)$  és caracteritzat pel nombre de nodes del graf  $n$  i per una probabilitat  $p \in [0, 1]$ .

Sigui  $G = (V, E)$  un graf amb un conjunt de vèrtexs  $V$  i un conjunt d'arestes  $E \subseteq V \times V$ . Generem  $|V| = n$  vèrtexs. Per cada parell de vèrtexs  $p, q \in V$  hi haurà una aresta, és a dir, existirà  $(p, q) \in E$ , si un nombre generat aleatòriament  $n \in [0, 1]$  és estrictament inferior al paràmetre probabilitat  $p$ ,  $n < p$ .

---

### > Geomètric (RGG)

El model geomètric  $G(n, r)$  és caracteritzat pel nombre de nodes del graf  $n$  i per un radi arbitrari  $r$ .

Sigui  $G = (V, E)$  un graf amb un conjunt de vèrtexs  $V$  i un conjunt d'arestes  $E \subseteq V \times V$ . Genereu  $|V| = n$  vèrtexs uniformement distribuïts en l'espai unitari  $[0,1]^d$ , en el nostre cas  $[0,1]^2$  perquè treballem en dues dimensions.

Aleshores per cada parell de vèrtexs  $p, q \in V$  hi haurà una aresta, és a dir, existirà  $(p, q) \in E$ , si la distància euclidiana entre els dos punts és estrictament inferior al paràmetre radi  $r$ ,  $d(p,q) < r$ .

## **PREPARACIÓ**

Per tal de realitzar l'estudi, hem codificat els algorismes corresponents als dos models de generació aleatòria i també els diferents algorismes per determinar l'existència o no de diferents propietats i calcular els diferents mesuraments sobre els grafs.

Hem extret tota la informació dels diferents models i algorismes necessaris a través dels recursos proporcionats en l'enunciat, webgrafia i bibliografia.

La part de codi encarregada de la generació de dades està escrita en C++ i la part encarregada de realitzar el processament de les dades, estadístiques i gràfics, està escrita en R.

### Ara procedim a descriure les diferents parts:

El codi en C++ utilitzat per a la generació de dades està dividit en tres arxius: `main.cpp`, `generators.hpp` i `utilities.hpp`.

L'arxiu `main.cpp` conté el programa principal. S'encarrega de cridar totes les funcions necessàries per generar les dades per a l'estudi. Totes aquestes dades s'escriuen en fitxers de text per tal de poder processar-les posteriorment.

En el nostre programa representem els grafs com una llista d'adjacències, que a la pràctica es tradueix en un vector de vectors. També hem definit el tipus `Coord`, que representa una coordenada, que ens serveix per representar els punts en el model geomètric.

En la part superior del *main.cpp* hem definit una sèrie de constants, que són les que defineixen els valors que s'utilitzaran per a la generació de les dades, de manera que es puguin anar modificant fàcilment per anar fent les diferents proves sense haver d'anar canviant totes les parts del programa cada cop.

També hem aplicat una sèrie d'optimitzacions en el nostre programa per tal de reduir el seu temps d'execució. Una important és la de limitar el còmput del diàmetre del graf, que té un cost elevat, quan ja portem varies execucions amb el diàmetre mínim.

L'arxiu *generators.hpp* conté les funcions d'ambdós generadors de grafs aleatoris.

- Funció *generate\_RGG(Graph& graph, unsigned int n, double r)*  
Genera un graf aleatori a partir del model binomial i el guarda a la variable *graph*. Els paràmetres són el nombre de nodes *n* del graf i la probabilitat *p* de crear una aresta entre dos nodes qualssevol.
- Funció *distance(const Coord& c1, const Coord& c2)*  
Calcula la distància euclidiana al quadrat entre les dues coordenades donades i retorna el resultat.
- Funció *generate\_RGG(Graph& graph, unsigned int n, double r)*  
Genera un graf aleatori a partir del model geomètric i el guarda a la variable *graph*. Els paràmetres són el nombre de nodes *n* del graf i el radi *r*, que determina quan dos nodes qualssevol estan connectats.

L'arxiu *utilities.hpp* conté la resta de funcions i mètodes necessaris.

- Funció *getRandomDouble()*  
Proporciona un nombre real aleatori en l'interval [0,1). Aquests nombres aleatoris són necessaris en les funcions de generació.
- Funció *property\_connectedComponents(const Graph& graph, unsigned int &cc, unsigned int &lcc)*  
S'encarrega d'obtenir les dades de les propietats, nombre de components connexes i mida de la component connexa més gran, del graf que es passa com a paràmetre *graph*. Utilitza un algorisme DFS però ha estat modificat per obtenir les altres dades d'interès. Suposant que *graph* és  $G = (V, E)$ , el cost del còmput és  $O(|V|+|E|)$ .

- 
- Funció `property_diameter(const Graph& graph, unsigned int& d)`  
S'encarrega d'obtenir les dades de les propietats, diàmetre de la component connexa més gran, del graf que es passa com a paràmetre `graph`. Utilitza l'algorisme DFS per cada un dels vèrtexs. Suposant que `graph` és  $G = (V, E)$ , el cost del còmput és  $O(|V|*(|V|+|E|))$ .
  - Funció `BFS(const Graph& graph, unsigned int node_i, unsigned int& d)`  
Implementa l'algorisme Breadth First Search modificat adequadament per obtenir la informació requerida per a l'estudi de la propietat del diàmetre de la component connexa més gran del graf. Suposant que `graph` és  $G = (V, E)$ , el cost del còmput és  $O(|V|+|E|)$ .
  - Funció `printGraph(const Graph& graph)`  
Mostra pel canal estàndard de sortida el graf que es passi com a paràmetre `graph`. Encara que aquesta funció no està implicada directament amb l'obtenció de dades, sí que ha estat útil a les primeres etapes de l'estudi per a depurar.

Fem una especial menció al mètode utilitzat per aconseguir nombres aleatoris, necessaris en els algorismes de generació. Primer de tot dir que en un ordinador no es poden generar números totalment aleatoris, sinó que en realitat són pseudoaleatoris. Nosaltres utilitzem el generador pseudoaleatori Mersenne Twister, un dels millors motors de generació disponibles, de la llibreria estàndard de C++ "random". Aquest motor s'inicialitza amb una *seed*, en el nostre cas el temps de l'ordinador `time(NULL)`, i genera un real aleatori cada cop que es crida. Perquè aquest nombre estigui en l'interval  $[0,1)$  apliquem una distribució uniforme, també proveïda per la mateixa llibreria.

El codi en R utilitzat per al processament de les dades consta de dos fitxers: *script.R* i *params.R*

El primer script llegeix els diferents fitxers que contenen les dades i a continuació genera les estadístiques i gràfics necessaris per a l'estudi.

Aquest script s'encarrega de llegir també el segon script *params.R*. Aquest segon és un script de configuració generat pel mateix programa principal que conté tots els paràmetres usats per la generació de les dades. Aquest sistema evita que haguem d'anar modificant l'script "script.R" sempre que es canvia algun paràmetre en el programa principal. D'aquesta manera la generació de gràfics és dinàmica i evita molt errors.

---

## **RECUILL DE DADES**

Necessitem generar totes les dades necessàries per a poder realitzar l'estudi, a partir dels codis i algorismes descrits a l'apartat anterior.

El procediment és anar generant mostres de cadascun dels dos models mentre anem variant els paràmetres d'entrada i calculant les propietats i mesuraments que ens interessin sobre cada una d'aquestes mostres.

Hem fixat 6 valors diferents de  $n$ : 5, 10, 50, 100, 500, 1000. No són valors molt alts perquè sinó el temps de còmput és molt elevat i la escala que hauriem d'aplicar a les gràfiques ens impediria veure els resultats amb claredat.

Siguin els models a estudiar el Binomial  $G(n, p)$  i Geomètric  $G(n, r)$ . Hem definit com a funció de  $n$  el segon paràmetre de cada model,  $p$  i  $r$ , que són els que defineixen la generació d'arestes entre els diferents vèrtexs. Això és degut al fet que, en ambdós models, les propietats que volem analitzar canvien dràsticament d'una  $n$  concreta a una altra per a un mateix valor del segon paràmetre,  $p$  o  $r$ , a causa de la diferència del nombre de vèrtexs en el primer model i la concentració de vèrtexs en l'espai unitari en el segon model. Per aquest motiu hem definit que el segon paràmetre,  $p$  i  $r$ , siguin funció del primer,  $n$ , i així lligar-los amb l'augment o disminució del nombre de vèrtexs.

En concret definim que  $p = a/n$  i  $r = b/n$  on  $a$  i  $b$  són dues constants arbitràries. Per tant,  $p$  i  $r$  són inversament proporcionals al número de vèrtex  $n$ , cosa que provoca que s'equilibrin les propietats per un mateix segon paràmetre,  $p$  o  $r$ , i  $n$  diferents. Degut a aquest canvi els dos models passen a ser **Binomial  $G(n, p = a/n)$**  i **Geomètric  $G(n, r = b/n)$** .

Centrarem l'estudi de les propietats en funció de les constants  $a$  i  $b$ , en comptes de  $p$  i  $r$ .

Per cada  $n$  hem generat mostres pel model Binomial  $G(n, p = a/n)$  començant per  $a = 0$  fins a 20, incrementant 0.2 a cada iteració. Així doncs farem mostres de 100 valors del paràmetre  $p$  diferents.

Per cada  $n$  hem generat mostres pel model Geomètric  $G(n, r = b/n)$  començant per  $b = 0$  fins a 80, incrementant 0.8 a cada iteració. Així doncs farem mostres de 100 valors del paràmetre  $r$  diferents.

La tria de rang de les constants  $a$  i  $b$  s'ha definit amb un procediment a base prova i error començant per un rang alt i anant acotant fins a trobar l'òptim.

Per a un model i uns paràmetres  $(n, r$  o  $p)$  concrets hem generat 500 mostres de graf aleatori, amb les quals es calcula l'estimació de probabilitat de ser connex, basant-se amb el nombre de mostres connexes respecte del total; es calcula la mida de la component connexa més gran, fent la mitjana de les mostres, i finalment es calcula el diàmetre de la component connexa més gran, també fent la mitjana de les mostres.

El càlcul del diàmetre no és tan precís com el de les altres propietats perquè només fem el còmput en una desena part de les mostres, ja que és el còmput amb cost més elevat i si no augmenta considerablement el temps d'obtenció de dades.

#### Hardware utilitzat

Windows 10 Home 64 bits  
i7-7700HQ @ 2.80GHz  
16GB RAM  
SSD 128GB

### **ANÀLISI DE DADES**

Com ja hem dit a la introducció, un cop obtingudes totes les dades necessàries, es tracta de veure experimentalment si existeixen o no transicions de fase per les propietats ja enunciades. En altres paraules, si es veu clarament que la variabilitat de la propietat o mesurament en relació amb els paràmetres d'entrada arriba a un punt d'inflexió  $p$ , el qual per tot valor dels paràmetres  $p' < p$  és totalment diferent de tot valor  $p'' > p$ .

També farem una comparació amb les transicions de fase teòriques que hem trobat per tal de determinar si coincideixen amb les dades que hem obtingut en el nostre estudi. Estan marcades en els diferents gràfics amb un punt de color negre.

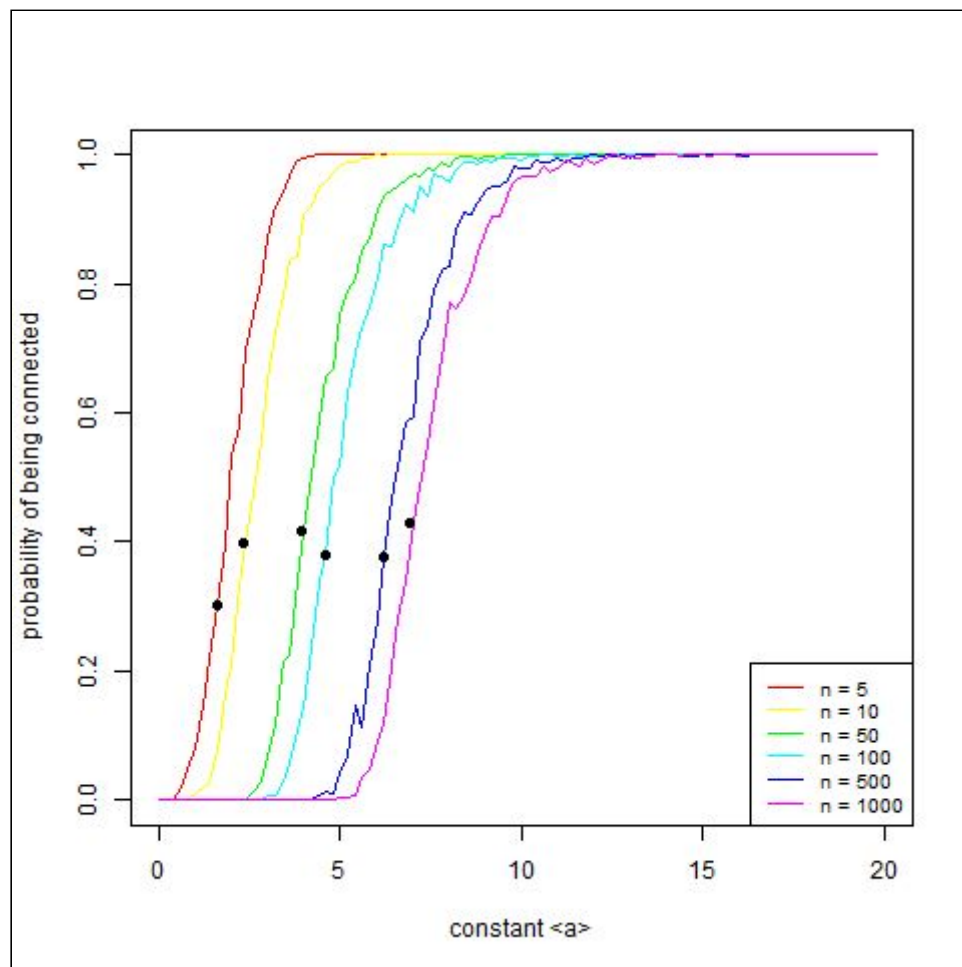
Alguns gràfics també els disseccionarem en gràfics auxiliars més petits per tal d'analitzar millor certes parts que no es veuen bé en el gràfic general o tenen algun interès concret.

## Model Binomial

### Probabilitat de ser connex

Sigui el model Binomial  $G(n, p)$  on  $p = a/n$ . En aquest gràfic podem veure la probabilitat de què el graf sigui connex  $p \in [0, 1]$  respecte del valor de la constant  $a \in [0, 20]$ .

El valor teòric de la transició de fase de la propietat de connectivitat és  $p = \log(n)/n$ . [Ref.:10, 11]



Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per a la propietat de connectivitat en el model de generació Binomial. A mesura que anem augmentant el paràmetre  $p$ , o sigui anem augmentant la constant  $a$ , arriba un punt en què la probabilitat de ser connex passa de quasi nul·la a quasi total, és a dir, la transició de fase. També podem veure que coincideix amb molta exactitud amb el punt de transició teòric.

### Mida de la component connexa més gran

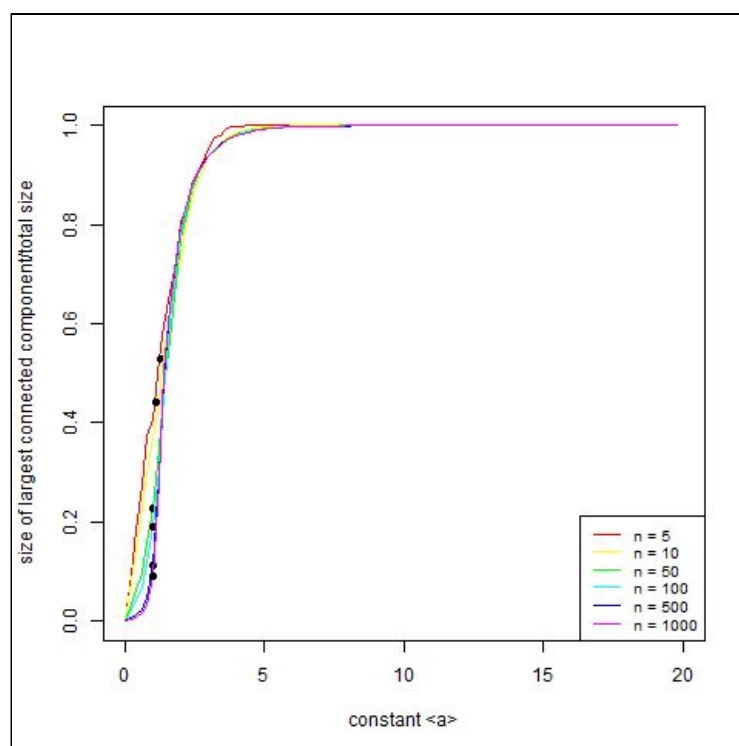
Sigui el model Binomial  $G(n, p)$  on  $p = a/n$ . En aquest gràfic podem observar la mida de la component connexa més gran, en proporció al nombre total de vèrtexs  $n$ , respecte del valor de la constant  $a \in [0, 20]$ . La proporció està normalitzada de 0 a 1 per veure-ho millor.

Un valor 0 a l'eix de les  $y$  representa que tots els vèrtexs del graf estan aïllats i per tant no té cap component connexa gegant i un valor d'1 representa que la component connexa més gran està formada per quasi tot el graf o el graf mateix.

La transició de fase en aquest graf es produeix quan apareix la component connexa gegant en el graf, que provoca que la mida de la component connexa més gran passi a ser extensiva, que significa proporcional al nombre de nodes  $n$ .

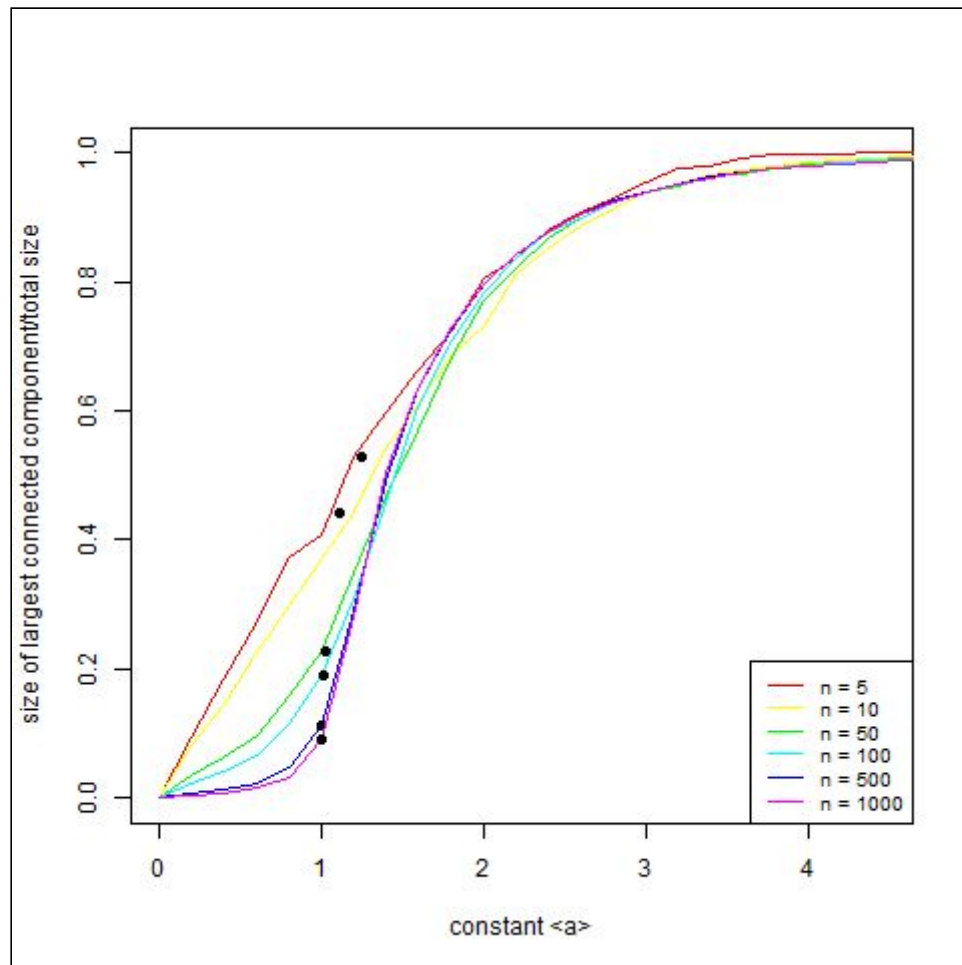
A partir de la fórmula  $c = (n-1)p$ , que es dedueix del procediment de generació del graf aleatori del model Binomial [Ref.:2], sabem que si  $c > 1$  el graf pot tenir component connexa gegant, en canvi si  $c \leq 1$  llavors no en té. D'aquí es dedueix que la transició de fase es produeix quan  $c = 1$ .

El valor teòric de la transició de fase del mesurament de la mida de la component connexa més gran és  $p = 1/(n-1)$ .





Hem escurçat el rang de la constant  $a$  de 0 a 5, per tal de veure millor la transició:

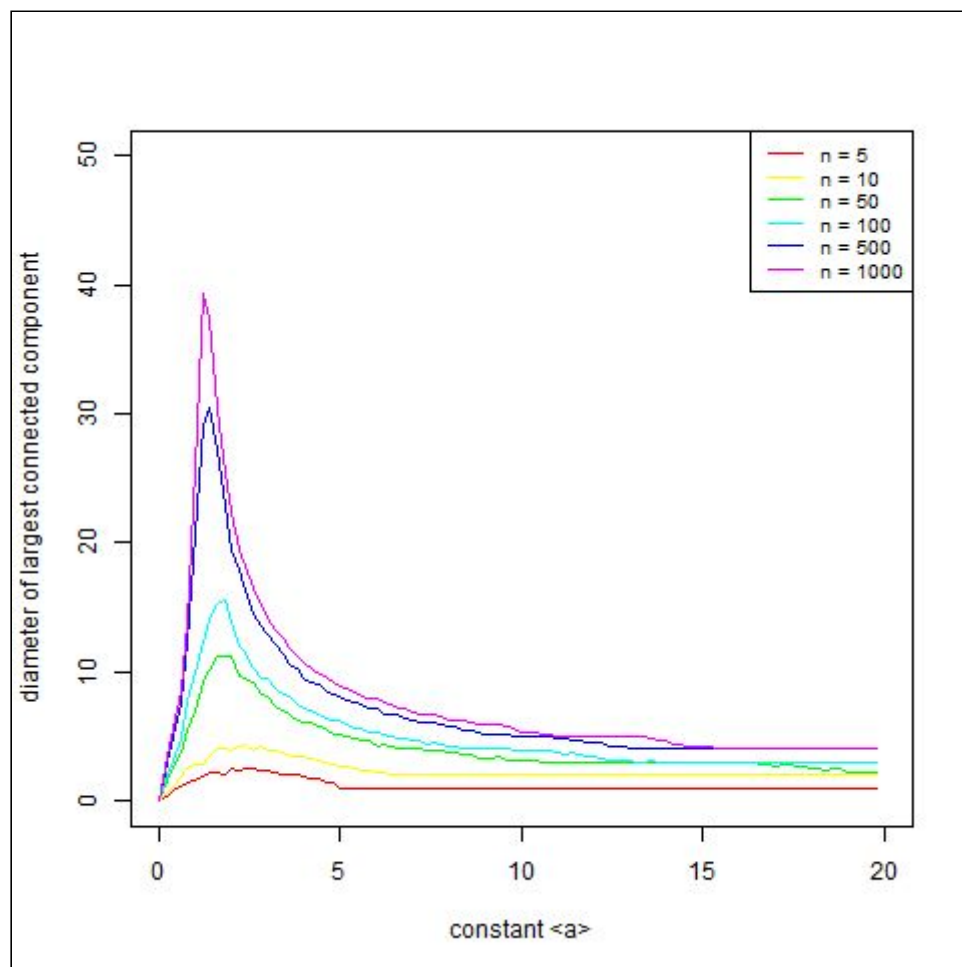


Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per al mesurament de la mida de la component connexa més gran en el model de generació Binomial. A mesura que anem augmentant el paràmetre  $p$ , o sigui anem augmentant la constant  $a$ , arriba un punt en què la mida de la component connexa més gran passa de ser constant a ser extensiva en relació amb la mida del graf, és a dir, la transició de fase. En aquest cas veiem també que la transició succeeix per a valors baixos de la constant  $a$  i que, per tant, apareix una component connexa gegant en el graf de seguida. Veiem també que per a qualsevol  $n$  la transició de fase succeeix per un valor semblant de la constant  $a$ , al voltant de 1. També podem veure que coincideix amb molta exactitud amb el punt de transició teòric.

### Diàmetre de la component connexa més gran

Sigui el model Binomial  $G(n, p)$  on  $p = a/n$ . En aquest gràfic podem veure el diàmetre de la component connexa més gran respecte el valor de la constant  $a \in [0, 20]$ .

No hem trobat el valor teòric de la transició de fase del mesurament del diàmetre de la component connexa més gran.



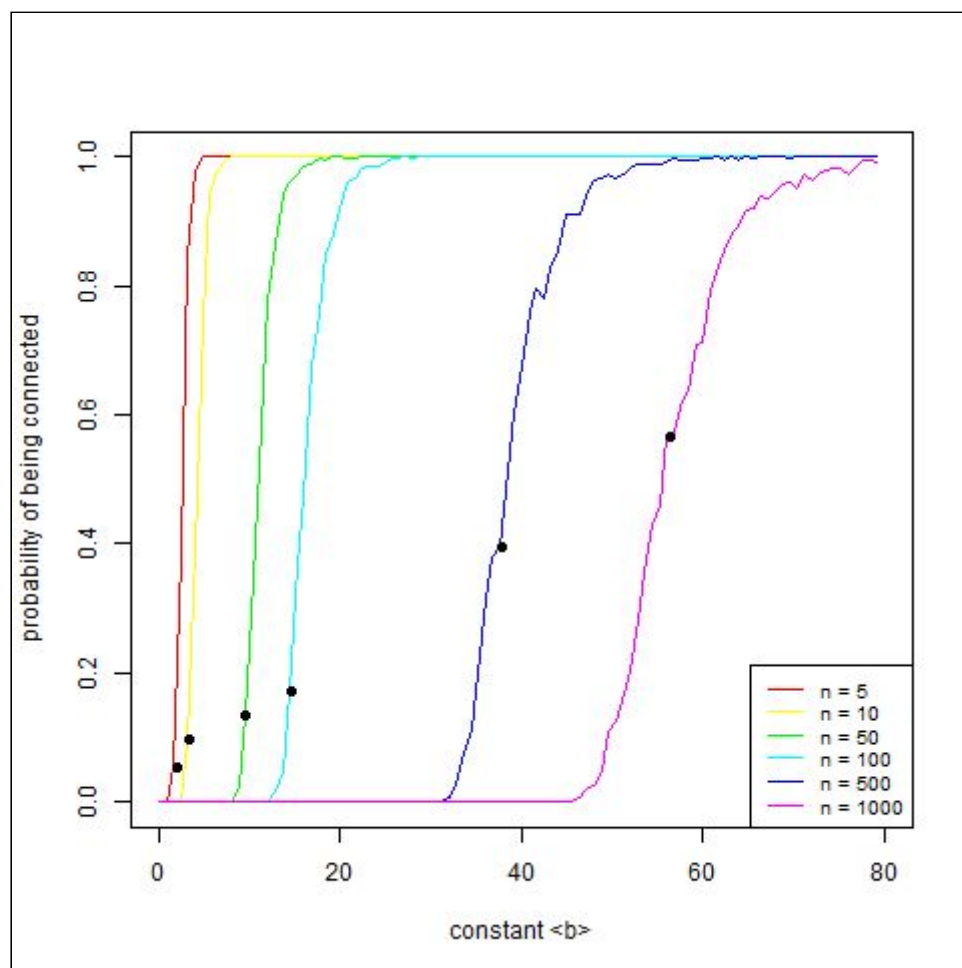
Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per al mesurament del diàmetre de la component connexa més gran en el model de generació Binomial. Es pot observar que pels valors inicials de la constant  $a$  es produeix un augment considerable del diàmetre, que ràpidament arriba a un pic on es produeix la transició de fase. A partir d'aquest punt, el diàmetre comença a disminuir a mesura que augmenta  $a$ , fins que finalment s'estabilitza a un valor constant. Encara que no es vegi en el gràfic aquest valor és 2 per a qualsevol  $n$ , que és el diàmetre mínim. Veiem també que per a qualsevol  $n$  la transició de fase succeeix per un valor semblant de la constant  $a$ .

## Model Geomètric

### Probabilitat de ser connex

Sigui el model Geomètric  $G(n, r)$  on  $r = b/n$ . En aquest gràfic podem veure la probabilitat de què el graf sigui connex  $p \in [0, 1]$  respecte del valor de la constant  $b \in [0, 80]$ .

El valor teòric de la transició de fase de la propietat de connectivitat és  $r = \sqrt{\ln(n)/(\pi \cdot n)}$  [Ref.: 3]



Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per a la propietat de connectivitat en el model de generació Geomètric. A mesura que anem augmentant el paràmetre  $r$ , o sigui anem augmentant la constant  $b$ , arriba un punt en què la probabilitat de ser connex passa de quasi nul·la a quasi total, és a dir, la transició de fase. També podem veure que coincideix amb força exactitud, no tant els primers valors, amb el punt de transició teòric.

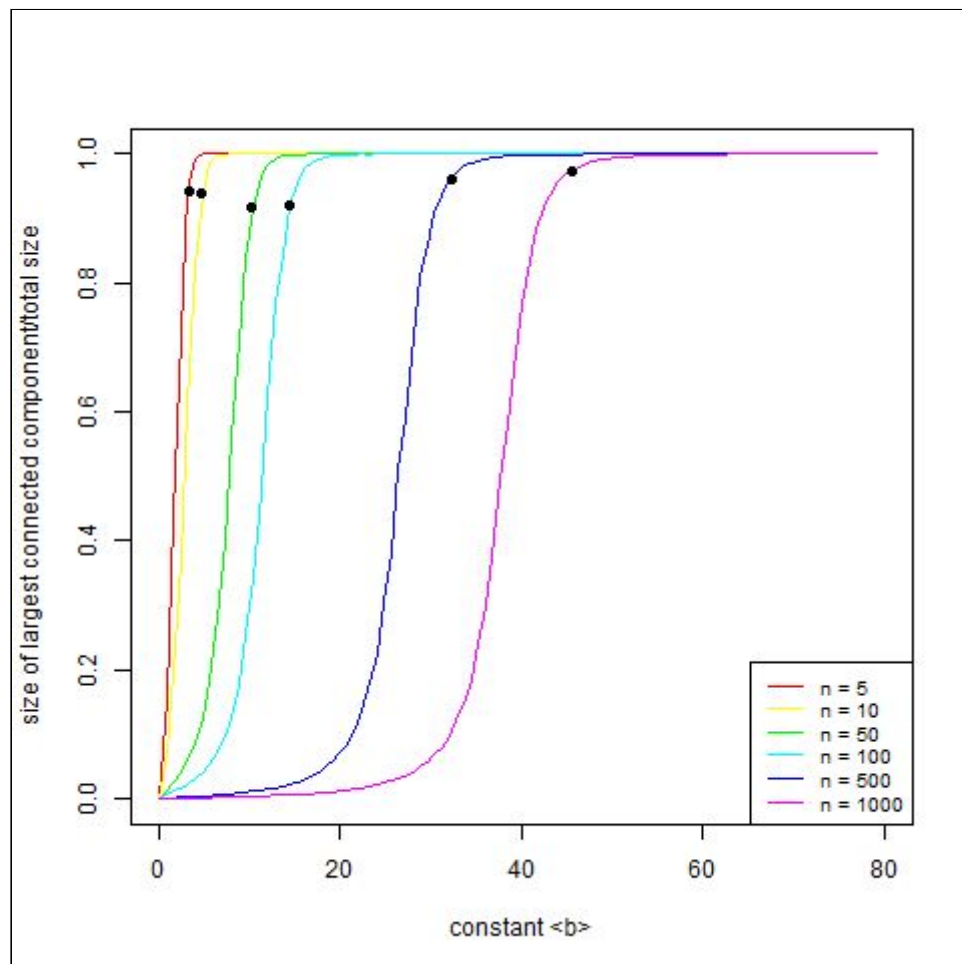
### Mida de la component connexa més gran

Sigui el model Geomètric  $G(n, r)$  on  $r = b/n$ . En aquest gràfic podem observar la mida de la component connexa més gran, en proporció al nombre total de vèrtexs  $n$ , respecte del valor de la constant  $b \in [0, 80]$ . La proporció està normalitzada de 0 a 1 per veure-ho millor.

Igual que amb el model anterior, un valor 0 a l'eix de les  $y$  representa que tots els vèrtexs del graf estan aïllats i per tant no té cap component connexa gegant i un valor d'1 representa que la component connexa més gran està formada per quasi tot el graf o el graf mateix.

La transició de fase en aquest graf es produeix quan apareix la component connexa gegant en el graf, que provoca que la mida de la component connexa més gran passi a ser extensiva, que significa proporcional al nombre de nodes  $n$ .

El valor teòric de la transició de fase del mesurament de la mida de la component connexa més gran és  $r = w/\sqrt{n}$ , on  $w$  no se sap el valor exacte però es pot aproximar com a 1.44 per a dues dimensions, que és amb el que treballem. [Ref.: 7]

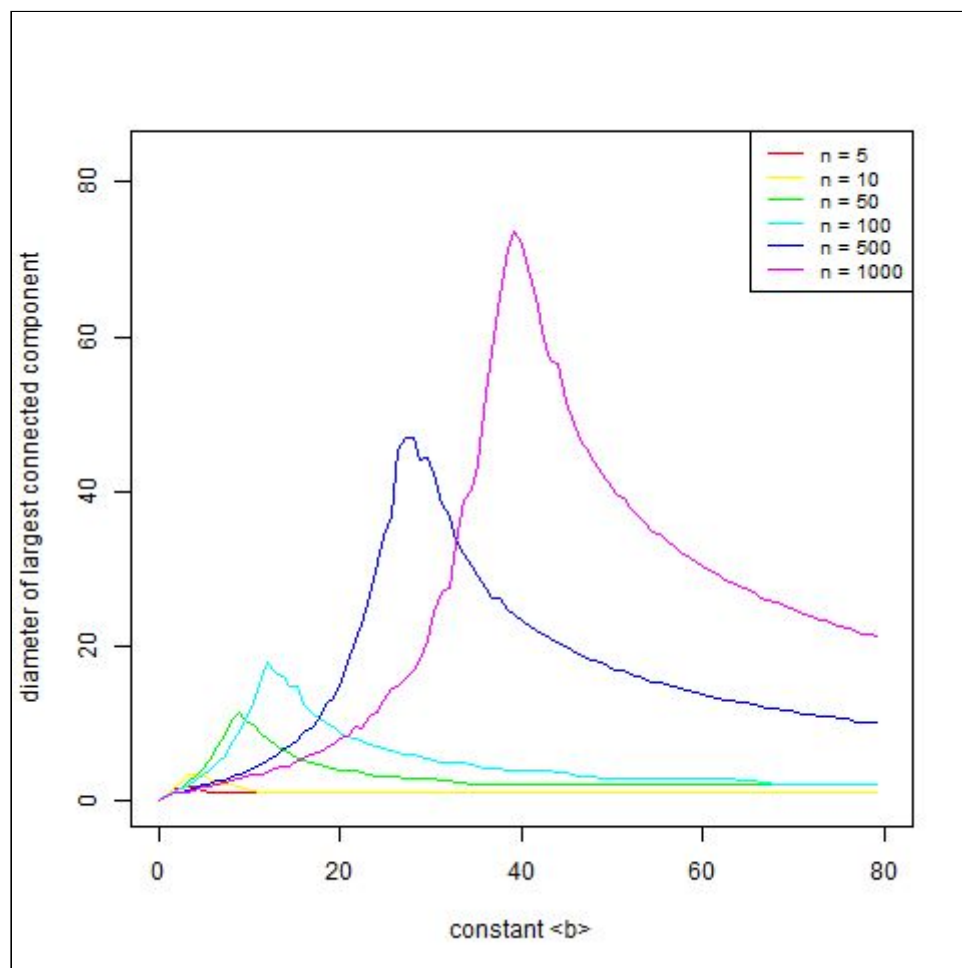


Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per al mesurament de la mida de la component connexa més gran en el model de generació Geomètric. A mesura que anem augmentant el paràmetre  $r$ , o sigui anem augmentant la constant  $b$ , arriba un punt en què la mida de la component connexa més gran passa de ser constant a ser extensiva en relació amb la mida del graf, és a dir, la transició de fase. Cal comentar però, que els punts on teòricament hauria de produir-se la transició de fase difereixen força dels obtinguts experimentalment. No sabem amb certesa si això es produeix pels resultats o per la fórmula emprada.

### Diàmetre de la component connexa més gran

Segui el model Geomètric  $G(n, r)$  on  $r = b/n$ . En aquest gràfic podem veure el diàmetre de la component connexa més gran respecte el valor de la constant  $b \in [0, 80]$ .

No hem trobat valor teòric de la transició de fase del mesurament del diàmetre de la component connexa més gran.



Podem veure en el gràfic que efectivament existeix una transició de fase per al mesurament del diàmetre de la component connexa més gran en el model de generació Geomètric. A mesura que augmenta el valor de la constant  $b$ , per tant també augmenta el paràmetre  $r$ , la mida del diàmetre també s'incrementa. Això succeeix fins que s'arriba al pic on es produeix la transició de fase. A partir d'aquest punt, el diàmetre decreix amb l'augment de la constant  $b$ , fins a establitzar-se. Encara que no es vegi en el gràfic aquest valor és 2 per a qualsevol  $n$ , que és el diàmetre mínim. Veiem també que per a qualsevol  $n$  la transició de fase no succeeix per a un valor semblant de la constant  $b$ , sinó que com més elevat és  $n$  la transició succeeix en un valor de  $b$  més gran.

## **CONCLUSIONS**

### Síntesi i objectius

Amb els resultats obtinguts durant aquest estudi hem pogut observar que, per a totes les propietats i mesuraments estudiats en ambdós models, es produeix clarament una transició de fase.

Per a la probabilitat de ser connex, es pot observar que la transició de fase del model Binomial succeeix per a valors del paràmetre  $p$  inferiors als del paràmetre  $r$  en la transició del model Geomètric, ja que la transició ocorre per a valors de la constant  $a$  inferiors a valors de la constant  $b$ , i  $p = a/n$  i  $r = b/n$ . En general però, la transició té un estil similar.

Per a la mida de la component connexa més gran, la transició de fase al model Binomial succeeix en etapes inicials, indicant que apareix una component connexa gegant per a valors baixos de la constant  $a$ . A més, la transició es produeix per a valors similars de  $a$  per les diferents  $n$ . En canvi al model Geomètric la transició no succeeix en les etapes inicials, sinó que ho fa per a valors de la constant  $b$  diferents per cada  $n$ , sent més gran  $b$  per a valors més grans de  $n$ .

*Al no coincidir els punts de transició obtinguts experimentalment amb els teòrics, no podem assegurar que la nostra conclusió i comparació respecte la mida de la component connexa més gran sigui acurada.*

Pel que fa al diàmetre, es poden observar diferències entre els dos models. Al model Binomial s'arriba al pic de transició de fase molt més ràpid que al model Geomètric, fent que la gràfica resultant presenti el pic a l'esquerra, per a valors de la constant  $a$  baixos, i que llavors tingui un decreixement gradual fins arribar a ser constant. També dir que la transició succeeix per a valors de  $a$  semblants per a les diferents  $n$ , el que ens ve a dir que la transició de fase no depèn de  $n$ .

En canvi al model Geomètric la gràfica té certa simetria envers el pic perquè el creixement i decreixement són més graduals. A més, podem veure que el valor de  $b$  per al qual es produeix la transició de fase augmenta conforme ho fa  $n$ .

### Dificultats trobades

En algunes etapes d'aquest treball se'ns han presentat algunes dificultats. Inicialment els valor de  $r$  era independent del nombre de vèrtexs  $n$ , cosa que provocava problemes a l'hora de estudiar les diferents propietats del model Geometric, ja que per a un mateix valor de  $r$  i diferent valor de  $n$  canviaven dràsticament les propietats que volíem analitzar. Així que vam decidir fer l'estudi de  $r$  com a  $c/n$ , per a una constant  $c$ . A causa de aquesta decisió vam haver de fer certs canvis en el codi i trobar un rang adequat per  $c$ . Més tard també vam canviar-ho al model Binomial per motius semblants.

### Funcionalitats descartades

En un cert moment del treball, vam trobar interessant el fet que, a les gràfiques, es pogués observar l'interval de confiança de les diferents mostres generades de cada model i propietat. Després d'implementar-ho, vam observar que no aportava informació útil i és per això que vam decidir treure-ho.

### Possibles millores i extensió de l'estudi

Respecte a l'estudi que s'ha dut a terme, una de les coses que es podria millorar és el gràfic de la propietat de la component connexa més gran del model Geomètric. Es podria cercar quin és el motiu pel qual els valors teòrics surten tan diferents als experimentals i corregir-ho si és necessari.

Aquest estudi es podria estendre a més models de grafs aleatoris, com per exemple el model de Barabási-Albert o el de Watts-Strogatz en els quals seria més interessant però mirar altres propietats com el coeficient d'agrupament, o mirar més propietats en els models analitzats en el treball, com per exemple ser  $k$ -connex, tenir un camí hamiltonià o la mida del  $k$ -core.

## **REFERÈNCIES**

### Llibres

- [1] R. Sedgewick and K. Wayne. Algorithms. Addison-Wesley, 4th edition, 2011.
- [2] M.E.J. Newman. Networks. An Introduction. Oxford University Press, 2010.

---

## Web

[3] Random geometric graph. A: Wikipedia [en línia]. Wikimedia Foundation, 2019. Disponible a: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Random\\_geometric\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_geometric_graph)>

[4] Random. A: Cppreference [en línia]. Mediawiki, 2019. Disponible a: <<https://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/random>>

[5] Generate random double uniformly between 0 and 1. A: StackOverflow [en línia]. Stack Exchange Inc, 2019. Disponible a: <<https://stackoverflow.com/questions/1340729/how-do-you-generate-a-random-double-uniformly-distributed-between-0-and-1-from-c>>

[6] Random geometric graph. A: NetworkX [en línia]. NetworkX Developers, 2019. Disponible a: <[https://networkx.github.io/documentation/networkx-1.10/\\_modules/networkx/generators/geometric.html#random\\_geometric\\_graph](https://networkx.github.io/documentation/networkx-1.10/_modules/networkx/generators/geometric.html#random_geometric_graph)>

## Articles / Presentacions / PDF

[7] Bradonjić, M., Perkins, W. On sharp thresholds in random geometric graphs. Cornell University [en línia]. Disponible a: <<https://arxiv.org/pdf/1308.1084.pdf>>

[8] Friedrich, T., Sauerwald, T., Stauffer, A. Diameter and Broadcast Time of Random Geometric Graphs in Arbitrary Dimensions. Hasso Plattner Institut [en línia]. Disponible a: <<https://hpi.de/friedrich/docs/paper/ALGO1.pdf>>

[9] Ghurumuruhan, G. Size of the giant component in a random geometric graph. Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques [en línia] 2013, vol. 49. Disponible a: <[http://www.numdam.org/article/AIHPB\\_2013\\_49\\_4\\_1130\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/AIHPB_2013_49_4_1130_0.pdf)>

[10] Acemoglu, D., Ozdaglar, A. Networks Lecture 4: Erdős-Rényi Graphs and Phase Transitions. MIT [en línia] Setembre 2009. Disponible a: <[https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=2ahUKEwih6o\\_7gKblAhWAAWMBHchaAgEQFjACegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fecomomics.mit.edu%2Ffiles%2F4622&usq=AOvVaw1uNcPVYSEoFgLauSrpAt7T](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=2ahUKEwih6o_7gKblAhWAAWMBHchaAgEQFjACegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fecomomics.mit.edu%2Ffiles%2F4622&usq=AOvVaw1uNcPVYSEoFgLauSrpAt7T)>

[11] Novozhilov, A. Chapter 3 Erdős-Rényi random graphs. North Dakota State University [en línia]. Disponible a: <[https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/767%20Data/chapter\\_3.pdf](https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/767%20Data/chapter_3.pdf)>