Inteligencia Artificial

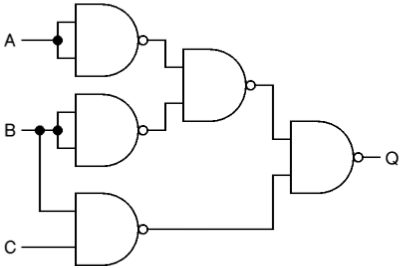
Unidad 3
Lógica Difusa

- Hugo David Calderón
- Willy Ugarte Rojas
- Jorge Valverde Rebaza

Logro

- Al finalizar la unidad, el estudiante conoce las técnicas de razonamiento probabilístico usando técnicas de lógica difusa.

INTRODUCCIÓN



Introducción

1. Incertidumbre.
   - Se relaciona a la información (falta de información).
   - Cuando no se sabe cuando puede ocurrir cierto evento.
   - No se conoce una teoría que explique el fenómeno.

2. Probabilidad.
   - Es una propiedad física de los objetos, determina la posibilidad de que cierto evento puede ocurrir.
   - Se calcula y verifica por experimentación.

3. Imprecisión (ambigüedad).
   - Es una característica del lenguaje de comunicación humano.
   - Esta relacionada con el grado en que el evento ocurre.

1. Incertidumbre

- ¿Cuando va a suceder un terremoto?
- ¿Aprobaré el curso?
- Si tiro la moneda, ¿sale cara o sello?
- ¿La respuesta a la pregunta es V o F?
- A masinformación, la incertidumbre se puede reducir.
- La ausencia de incertidumbre es tener información total.

- Se trabaja con niveles de creencias.
- Rango de valores [0,1]

1. Incertidumbre

- ¿Cuando va a suceder un terremoto?
  => Silencio sísmico
- ¿Aprobaré el curso?
  => ¿Estudiaste?, ¿le dedicaste tiempo?, ¿hiciste tus trabajos?
- Si tiro la moneda, ¿sale cara o sello?
  => ¿la moneda esta sesgada?
- ¿La respuesta a la pregunta es V o F?
  => Si sabes, responde.

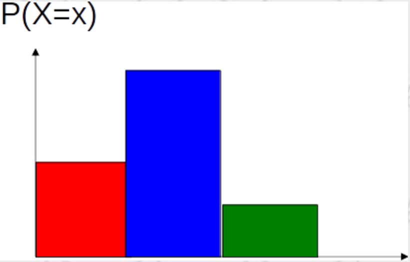
- A mas información, la incertidumbre se puede reducir.
- La <u>ausencia de incertidumbre</u> es <u>tener información total</u>.

- Se trabaja con niveles de creencias.
- Rango de valores [0,1]

2. Probabilidad

- Rango de valores [0,1]

- Ejemplos:
  - P (X = cara) = 0.5
  - P (X = hombre) = 0.5
  - P (X = ROJO) = 2/7



3. Ambigüedad

- La ambigüedad es incertidumbre determinista

- **Ambigüedad** estarelacionada con el grado con el cual los eventos ocurren sin importar la probabilidad de su ocurrencia.

- Por ejemplo, el grado de juventud de una persona es un evento difuso sin importar que sea un elemento aleatorio.

3. Ambigüedad

Es una característica del lenguaje humano.

Ejemplos:

- Si estudias bastante entonces obtendrás buenas notas.
- El proyecto del KDD avanza fuertemente.
- Los alumnos le ponen fuerza a sus proyectos.
- Profesor buena gente
- Profesor mala gente
- Si el profesor es buena gente entonces el examen sera fácil
- Si el profesor es mala gente entonces el examen sera difícil

Ambigüedad contra Probabilidad

- **Ambigüedad** es una incertidumbre determinista, la probabilidad es no determinista.

- La incertidumbre probabilística se disipa con el incremento del número de ocurrencias y la difusifisidad no.

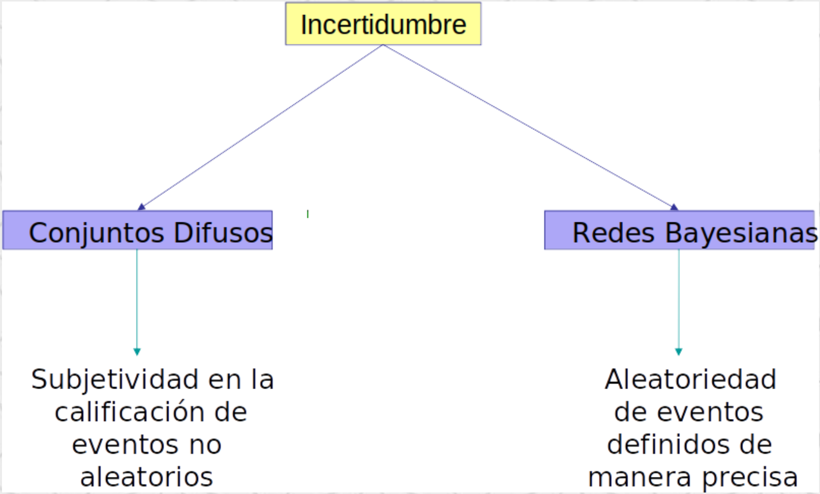
- La ambigüedad describe eventos ambiguos, la probabilidad describe los eventos que ocurren.

- Si un evento ocurre es aleatorio. El grado con el cual ocurre es difuso.

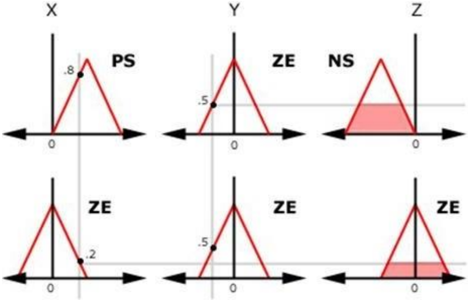
Ejercicio 1

¿Es probablemente una elipse,
o es ambiguamente una elipse?

Ambigüedad contra Probabilidad



LÓGICA DIFUSA



Lógica Difusa

- La lógica difusa es una extensión de la lógica convencional (Booleana) para manejar el concepto de verdad parcial.

- La verdad parcial se presenta cuando los valores de verdad se encuentran entre "absolutamente cierto" y "absolutamente falso"

Conjuntos Difusos y Lógica Difusa

- La palabra fuzzy viene del ingles fuzz (tamo, pelusa, vello) y se traduce por difuso o borroso.

- **Lotfi A. Zadeh**: Es el padre de toda esta teoría (Zadeh, 1965).

- En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones practicas.

Conjuntos Difusos y Lógica Difusa

Problemas Básicos subyacentes

- **Conceptos SIN definición clara:** Muchos conceptos que manejamos los humanos a menudo, no tienen una definición clara:

=> ¿Qué es una persona alta?

=> ¿A partir de qué edad una persona deja de ser joven?

- **La lógica clásica es demasiado restrictiva:** Una afirmación puede no ser ni VERDAD (true) ni FALSA (false).

  => "Yo leeré El Quijote": ¿En qué medida es cierto?

  => "El es bueno en Física": ¿Es bueno, muy bueno o mejor que regular?

Ejercicio 2

Describa los siguientes conceptos:

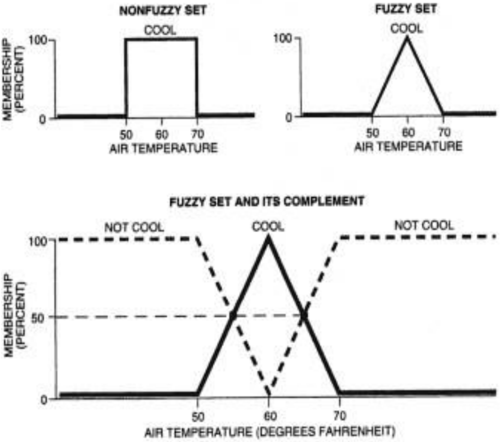
- Algunas mujeres jóvenes son inteligentes.

- Algunos hombres maduros son responsables.

- **Sígueme** de cerca.

- El carro está limpio.

CONJUNTOS DIFUSOS



Conjuntos Clásicos (crisp)

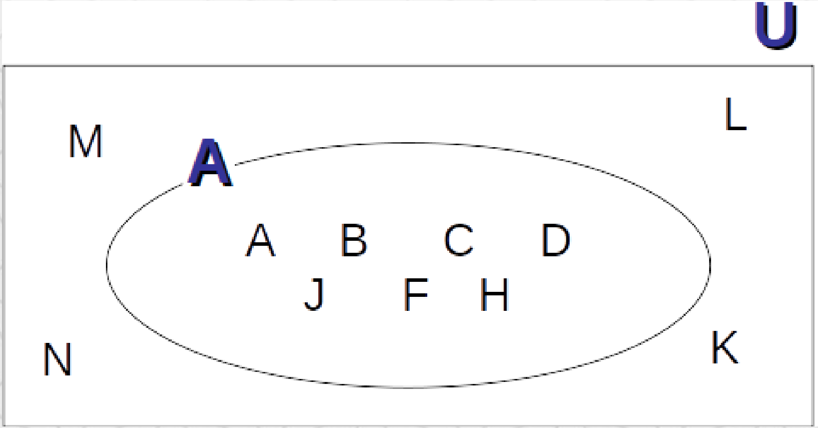
- El conjunto universal U (Universo de discurso) contiene todos los elementos de cada contexto o aplicación en particular.

- Los conjuntos clásicos se pueden definir de las siguientes maneras:
  - => **Método** de Lista (extensión)
  - => **Método** de Regla $A=\{x \in U | x$ cumple ciertas condiciones$\}$ (comprensión)
  - => **Método** de membresía (comprensión)

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ejercicio 3

Defina el conjunto A mediante los tres métodos de representación de conjuntos:



Ejercicio 3

Extensión:

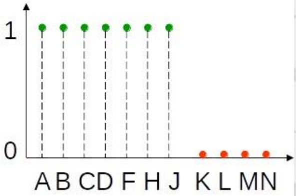
A = {A, B, C, D, F, J, H}

Comprensión:

A = {x / A ≤ x ≤ H & x≠E & x≠G}

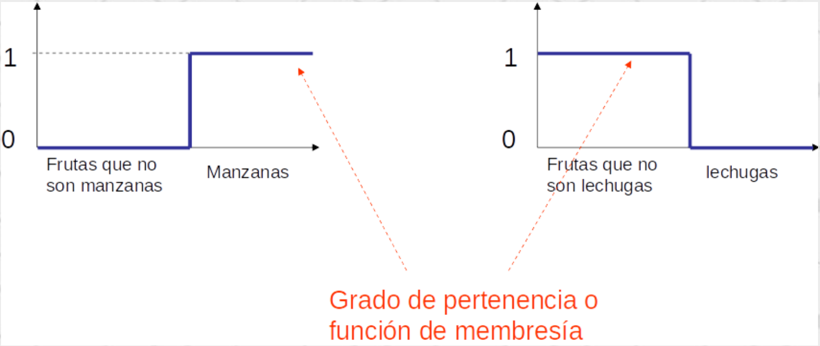
Membresía:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{A, B, C, D, F, J, H\} \\ 0 & \text{si } x \in \{K, L, M, N\} \end{cases}$$



Conjuntos Clásicos

Conjunto de Frutas: Manzana|Frutas, Lechuga|Frutas...



Conceptos sobre Conjuntos Difusos

- Surgieron como una nueva forma de representar la imprecisión y la incertidumbre.

- Herramientas que usa: Matemáticas, Estadística, Filosofa, Psicología.. Probabilidad,

Conjuntos Difusos (fuzzy)

- Flexibilizan la restricción, A: X→[0,1]

- Un conjunto difuso en el universo U se caracteriza por la función de membresia A(x) que toma el intervalo [0,1], a diferencia de los conjuntos clásicos que toman el valor de cero o uno 0, 1

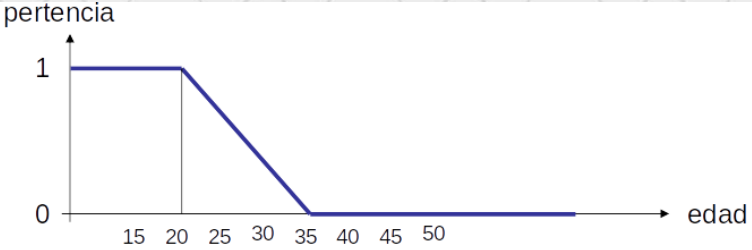
- El conjunto difuso A se puede representar por:

  => $A = (\mu_A(x), x) \mid x \in U$
  => $A = (\mu_A(x)/x) \mid x \in U$

- Donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia.

Ejercicio 4

Sea el conjunto difuso joven.

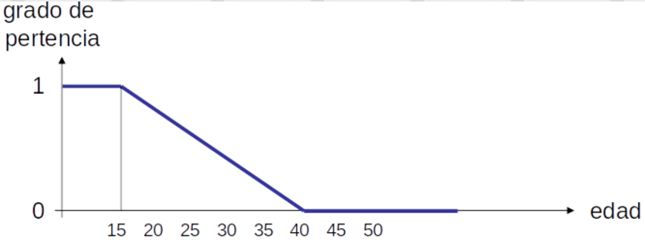


A = {1/10, 1/15, 1/20, 0.75/25, 0.25/30, 0/35 }

A = {(1,10), (1,15), (1,20), (0.75,25), (0.25,30), (0.35,0) }

Ejercicio 4

Sea el conjunto difuso joven.



A = {1/10, 1/15, 0.80/20, 0.60/25, 0.40/30, 0.20/35, 0.0/40 }

A = {(10,1), (15,1), (20,0.8), (25,0.60), (30,0.40), (35,0.20), (40,0.0) }

FUNCIONES DE MEMBRESIA

Función de membresía

Se pueden definir como:

- Una función con parámetros $p_k(x)$ del elemento x.

$$\mu_A(x) = \mu_A(p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x))$$

- Una enumeración de pares definidos sobre elementos discretos del conjunto

$$A = \sum (x)/x$$

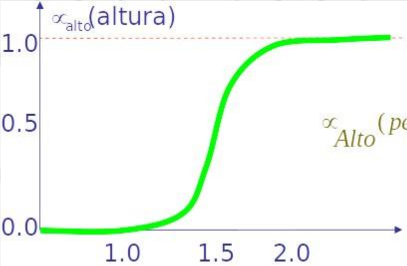
donde:

Σ no representa una suma, sino una agregación de pares.
$\mu(x)/x$ no representa ningún cociente, sino un par (posibilidad/elemento).

Ejercicio 5

- Sea el conjunto de las personas “altas” definido sobre el conjunto de la población y considerando un elemento del mismo denominado “pepe”.
  ¿ pepe pertenece o no al conjunto de las personas “altas”?

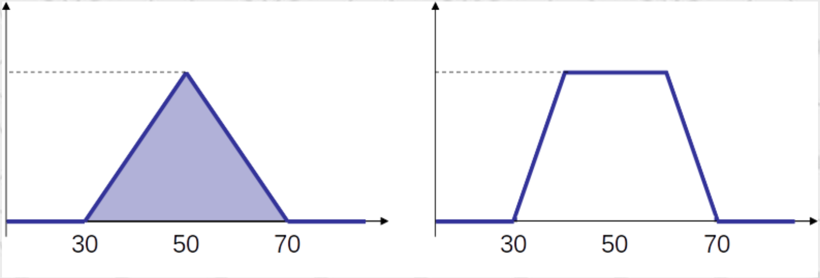
- Esto se puede resolver atendiendo a la medida altura (pepe) y una función que mide la posibilidad de ser considerado alto en base a la altura.



$$\propto_{Alto}(pepe) = \propto_{Alto}(altura(pepe$$

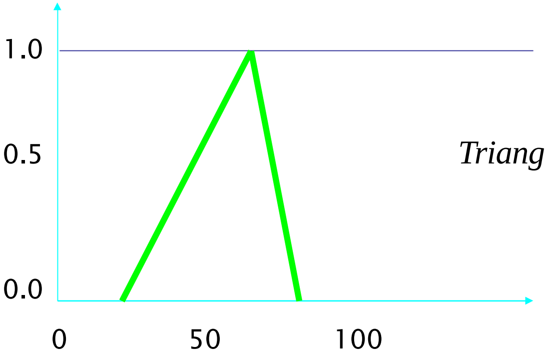
Ejercicio 6

Grafique que el conjunto difuso cerca de 50 años:



EJEMPLOS DE FUNCIONES DE MEMBRESIA

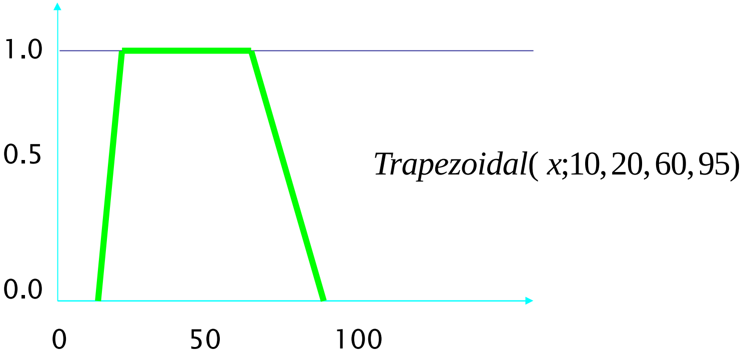
Triangular



$Triangular(x;20,60,80)$

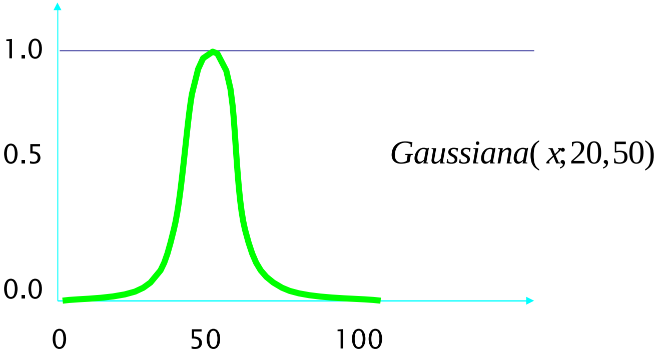
$$Triangular(x;a,b,c) = max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right)$$

Trapezoidal



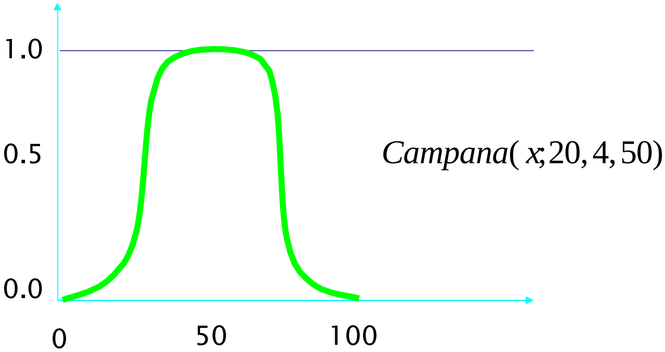
$$Trapezoidal(x;a,b,c,d) = max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right)$$

Gaussiana



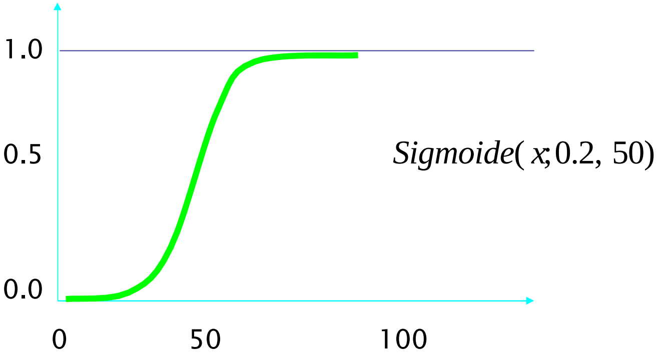
$$Gaussiana(x;\sigma,c) = e^{-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Campana



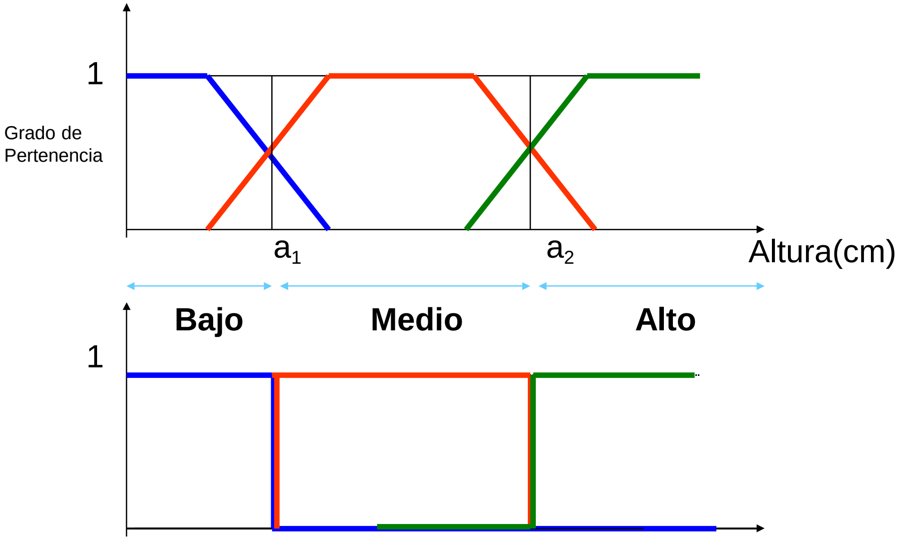
$$Campana(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{a}\right)^{2b}}$$

Sigmoide



$$Sigmoide(x;a,c) = \frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

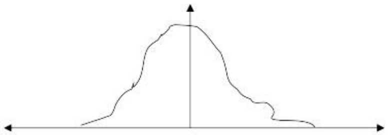
Ejemplo de función de membresía



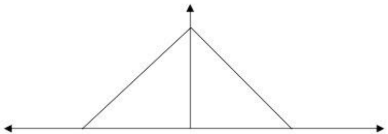
Ejercicio 7

Defina el conjunto difuso "cercano a cero":

$$\mu_Z(x) = e^{-x^2} \quad , x \in R$$



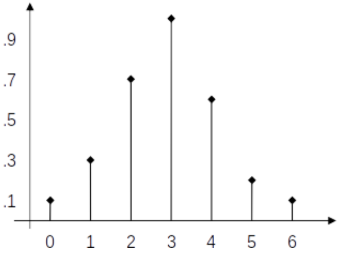
$$\mu_Z(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < -1 \\ x+1 \; si \; -1 \leq x < 0 \\ 1-x \; si \; 0 \leq x < 1 \\ 0 \; si \; 1 \leq x \end{cases}$$



Ejercicio 8

Definir el conjunto difuso: A = “numero sensible de niños” Dado el universo discreto: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)\}$$



Reglas difusas: if-then

- Declaraciones condicionales que comprenden lógica difusa.

=> Ejemplo: si x es A, entonces y es B donde:
A, B : Valores lingüísticos
x: elemento del conjunto difuso X

y: elemento del conjunto difuso Y

Antecedente (o premisa): si es parte de la regla (es decir, x es A)
Consecuente (o Conclusión) - entonces parte de la regla (es decir, y es B)

Reglas difusas: if-then

- Antecedente es una combinación de propuestas de operadores AND, OR, NOT

- Consecuente es la combinación de propuestas vinculadas por operadores AND. Los operadores OR y NOT no se usan en los consecuentes ya que estos son casos de incertidumbre.

=> Ejemplo: Si es temprano, entonces Juan puede estudiar.
Universo: $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$; hora del día
Conjunto difuso de entrada:
$$Temprano = \{(4, 0), (8, 1), (12, 0.9), (16, 0.7), (20, 0.5), (24, 0.2)\}$$

Reglas difusas: if-then

Interpretar si la regla entonces es un proceso de tres partes

1. **Fuzzificar la entrada:** resuelve todas las declaraciones difusas en el antecedente hasta un grado de membresía entre 0 y 1.

1. **Aplicar el operador difuso** a múltiples antecedentes de partes: Si hay varias partes del antecedente, aplique operadores de lógica difusa y resuelva el antecedente a un numero único entre 0 y 1.

1. **Aplicar el método de implicación:** los conjuntos difusos de salida para cada regla se agregan en un solo conjunto difuso de salida. Luego, el conjunto difuso de salida resultante se defuzzifica o se resuelve en un solo numero.

Reglas difusas: if-then

Interpretar si la regla entonces es un proceso de tres partes

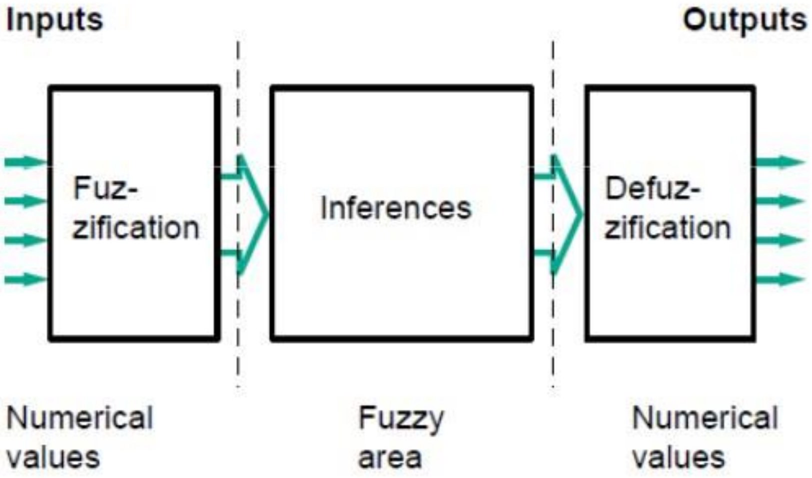


Fig. : *fuzzy processing*.

Operaciones lógicas difusas

- Los operadores de lógica difusa se usan para escribir combinaciones lógicas entre nociones difusas (es decir, para realizar cálculos sobre el grado de membresía)
- Operadores de Zadeh:
  1. **Intersección:** el operador lógico correspondiente a la intersección de conjuntos es AND.

$$\mu_{(A \text{ AND } B)} = MIN(\mu_{(A)}, \mu_{(B)})$$

  2. **Unión:** el operador lógico correspondiente a la unión de conjuntos es OR.

$$\mu_{(A \text{ OR } B)} = MAX\,(\mu_{(A)}, \mu_{(B)})$$

  3. **Negación:** el operador lógico correspondiente al complemento de un conjunto es la negación.

$$\mu_{(NOT\ A)} = 1 - \mu_{(A)}$$

Operaciones lógicas difusas

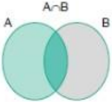
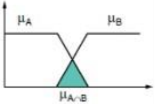
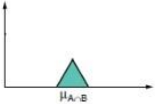
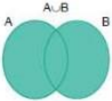
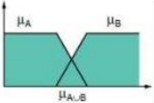
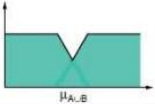
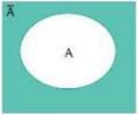
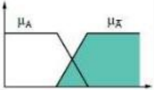
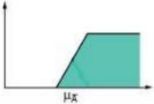
		ZADEH operator	Logic operation		
Intersection		$\mu_{A \cap B} = \mathrm{MIN}(\mu_A, \mu_B)$	**AND**		
Union		$\mu_{A \cup B} = \mathrm{MAX}(\mu_A, \mu_B)$	**OR**		
Negation		$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$	**NOT**		

Fig. : operators between fuzzy sets.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)

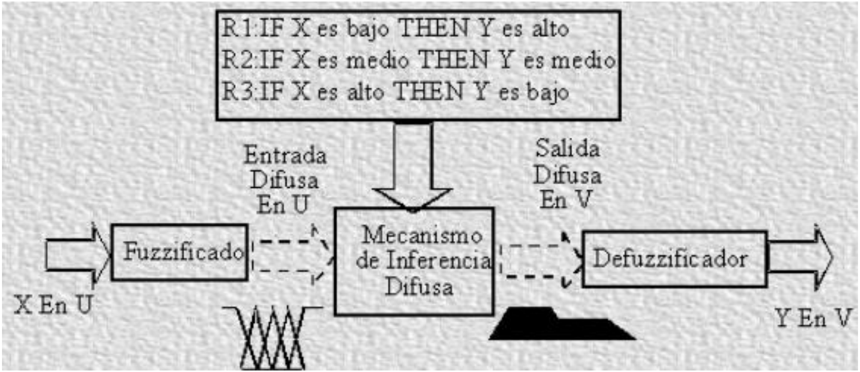
- La inferencia difusa es el proceso de formulación del mapeo desde una entrada dada a una salida usando lógica difusa.

- El proceso de inferencia difusa implica funciones de membresía (FM), operaciones lógicas y reglas de if-then.

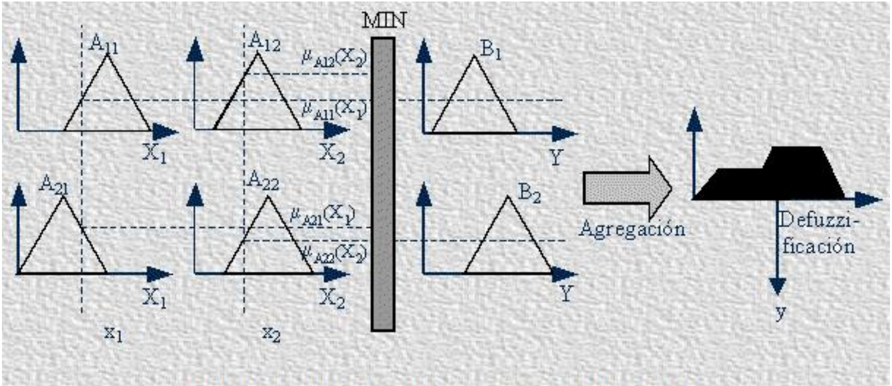
- FIS tiene naturaleza multidisciplinaria, también llamado sistemas basados en reglas difusas, sistemas expertos difusos, modelado difuso, memoria asociativa difusa, controladores de lógica difusa y simplemente (y ambiguamente) sistemas difusos.

- Tipos de FIS:
  1. **Mamdani:** mas comúnmente utilizado. Espera que los FM de salida sean conjuntos difusos.
  2. **Sugeno:** Los MF de salida son lineales o constantes.

Sistemas de tipo Mamdani

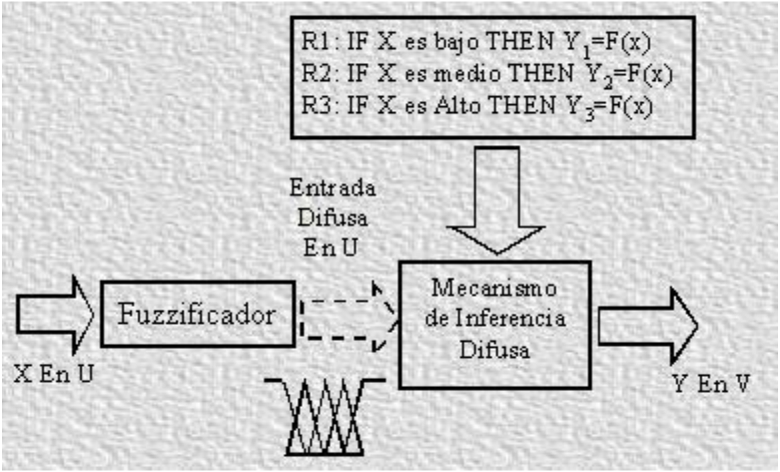


Sistemas de tipo Mamdani

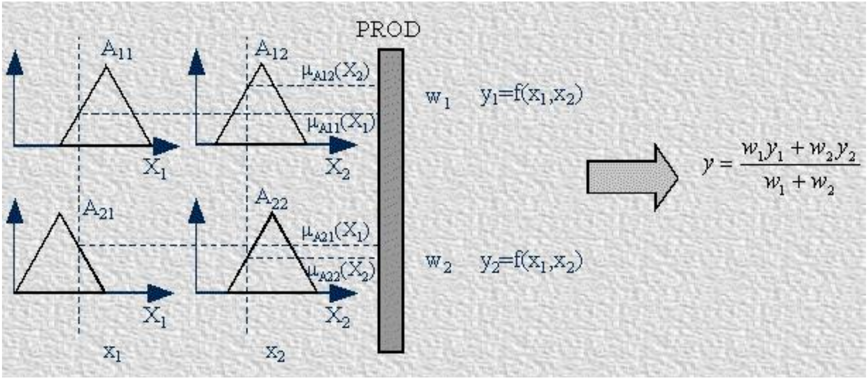


Sistema Difuso Mamdani, Procesamiento Detallado

Sistemas de tipo Sugeno



Sistemas de tipo Sugeno



Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 1: Fuzzificar la entrada (Fuzzificacion)

- Tome las entradas y determine el grado al cual pertenecen a cada uno de los conjuntos difusos apropiados a través de las funciones de membresía.

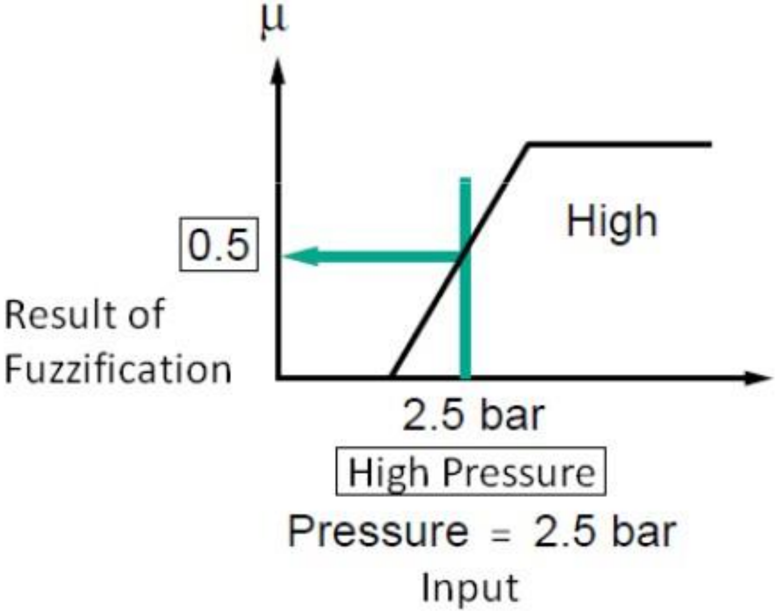
- La entrada es siempre un valor numérico duro limitado al universo del discurso de la variable de entrada.

- La salida es un grado difuso de membresía en el conjunto lingüístico calificado.

- Cada entrada se difumina sobre todas las funciones de membresía que califican requeridas por las reglas.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 1: Fuzzificar la entrada (Fuzzificacion)



Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 2: Aplicar el operador difuso

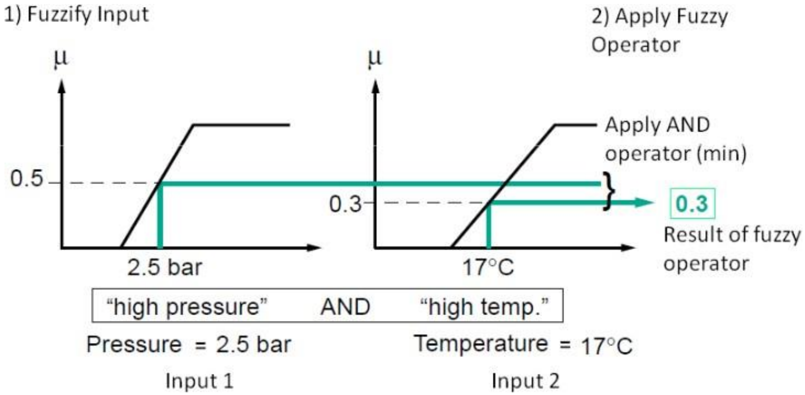
- Si el antecedente de una regla dada tiene mas de una parte, se aplica el operador difuso para obtener un numero que represente el resultado del antecedente para esa regla.

- La entrada al operador difuso es dos o mas valores de membresía de variables de entrada difusas.

- El resultado es un solo valor de verdad.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 2: Aplicar el operador difuso

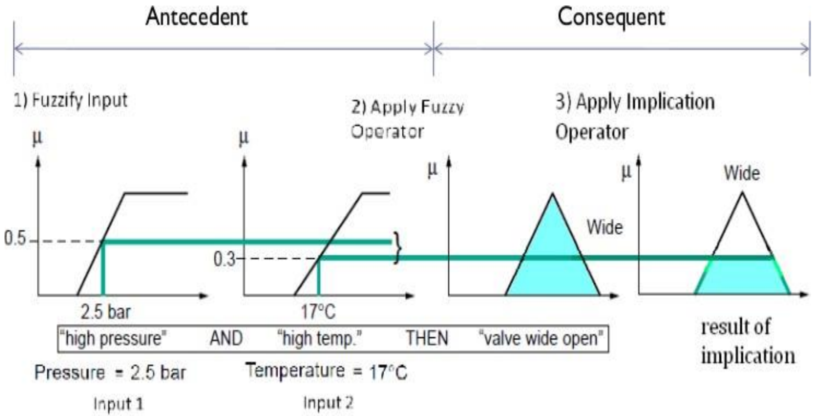


Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 3: Aplicar el método de implicación

- Primero debe determinar el peso de la regla.
- La operación en la que se usa el resultado del operador difuso para determinar la conclusión de la regla se denomina como implicación.
- La entrada para el proceso de implicación es un numero único dado por el antecedente.
- El resultado del proceso de implicación es un conjunto difuso.
- La implicación se implementa para cada regla.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)



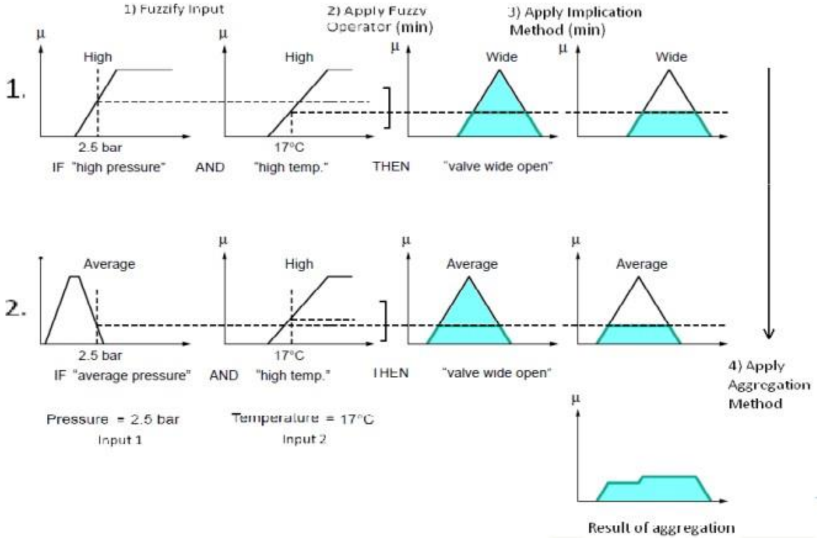
Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 4: Agregar todas las salidas

- La agregación es el proceso mediante el cual los conjuntos difusos que representan las salidas de cada regla se combinan en un único conjunto difuso.
- La agregación solo ocurre una vez para cada variable de salida.
- La entrada del proceso de agregación es la lista de funciones de salida truncadas devueltas por el proceso de implicación para cada regla.
- El resultado del proceso de agregación es un conjunto difuso para cada variable de salida.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 4: Agregar todas las salidas



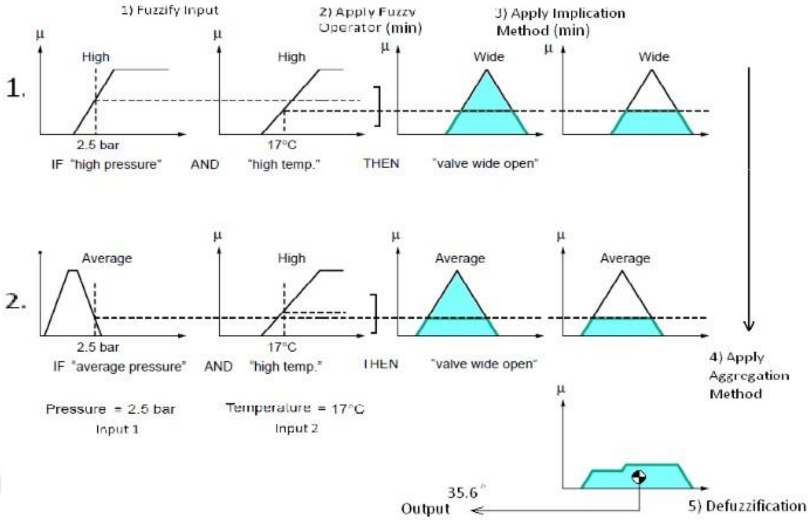
Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 5: Desfuzzificar

- Pasar del ”mundo difuso” al ”mundo real” se conoce como defuzzification.
- La entrada para el proceso de defuzzification es un conjunto difuso.
- La salida es un solo numero.
- El método de defuzzificacion mas popular es el calculo del centroide, que devuelve el centro del área debajo de la curva
- Otros métodos son bisector, medio del máximo (el promedio del valor máximo del conjunto de salida), el mas grande del máximo y el mas pequeño del máximo.

Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 5: Desfuzzificar



Sistemas de inferencias difusos (FIS)

Paso 5: Desfuzzificar

Cálculo de la Salida de un Sistema Difuso Mamdani

$$y = \frac{\sum_i b_i \int \mu(i)}{\sum_i \int \mu(i)}$$

Centro de Gravedad

$$y = \frac{\sum_i b_i \mu_{premisa}(i)}{\sum_i \mu_{premisa}(i)}$$

Centros Promediados

Cálculo de la Salida de un Sistema Difuso Sugeno

Los valores que arrojan los consecuentes ya son valores numéricos por lo que no se necesita una etapa de deffuzificación.
Para calcular la salida del sistema difuso se ponderan los diferentes consecuentes teniendo en cuenta el valor que se activó el antecedente de cada una de las reglas

$$y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2}$$

$$y_1 = f_1(x)$$
$$y_2 = f_2(x)$$

Ejercicio

Asumiendo el problema del restaurante implemente el sistema difuso para determinar el porcentaje de la propina que el comensal debe bonificar, sabiendo que:

Calidad del Servicio, que se evalúa de 0 a 10)

Comida (Calidad de la Comida, que se evalúa 0 a 10).

El porcentaje de propina definida entre 5 % y 25 % del precio.

R1 : Si servicio es pobre $\vee$ comida es rancia $\rightarrow$ propina es tacaña
R2 : Si servicio es bueno $\rightarrow$ propina es promedio
R3 : Si serv. es excelente $\vee$ comida es deliciosa $\rightarrow$ propina es generosa

Dada una calificación de Servicio=3 y Comida=8, calcule el porcentaje de la propina para el camarero:

Solución

Calidad de Servicio

$$\mathit{Pobre} = m = 0, \sigma = 1{,}5$$
$$\mathit{Bueno} = m = 5, \sigma = 1{,}5$$
$$\mathit{Excelente} = m = 10, \sigma = 1{,}5$$

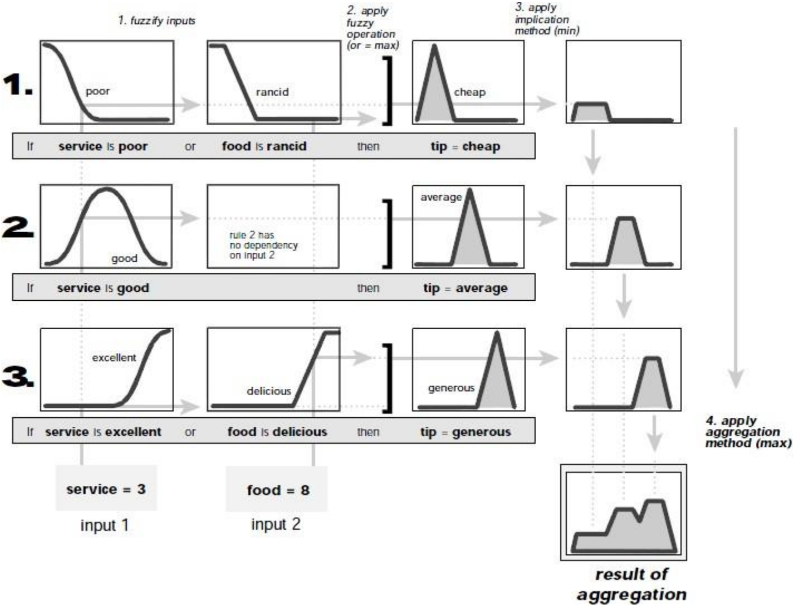
La calidad de comida

$$\mathit{Rancia} = (1/0, 1/1, 0/3)$$
$$\mathit{Deliciosa} = (0/7, 1/9, 1/10)$$

Propina

$$\mathit{Tacaña} = (0/0, 1/5, 0/10)$$
$$\mathit{Promedio} = (0/5, 1/15, 0/25)$$
$$\mathit{Generosa} = (0/20, 1/25, 0/30)$$

Solución


1. fuzzify inputs
2. apply fuzzy operation (or = max)
3. apply implication method (min)
1.
poor
rancid
cheap
If service is poor or food is rancid then tip = cheap
2.
good
rule 2 has no dependency on input 2
average
If service is good then tip = average
3.
excellent
delicious
generous
If service is excellent or food is delicious then tip = generous
service = 3
input 1
food = 8
input 2
4. apply aggregation method (max)
result of aggregation

Fin