UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

Inteligencia Artificial

Teorema de Bayes

- Hugo David Calderón
- Willy Ugarte
- Jorge Valverde Rebaza

Teoría de la probabilidad

Agenda

- Teorema de Bayes
- Ejercicios
- Redes Bayesianas

Teorema de Bayes

Planteada por Thomas Bayes en 1763, expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

Regla de Bayes

Se obtiene a partir de las 2 expresiones de la regla del producto

- $P(A,B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$
- $P(A,B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$,

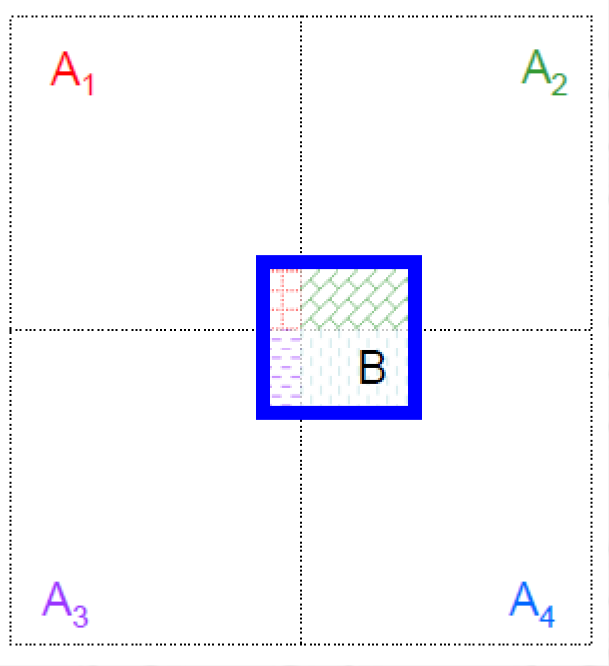
Igualamos los términos derechos

- $P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$,

y despejamos $P(A|B)$ ó $P(B|A)$

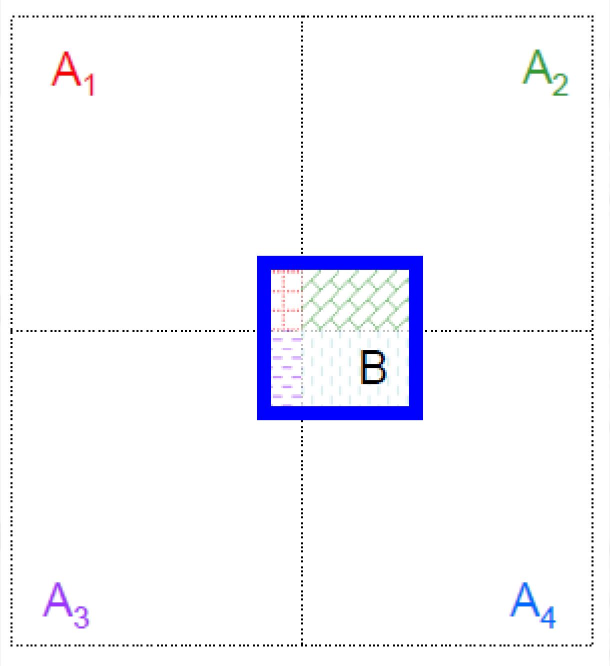
$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot P(A) / P(B)$$

Teorema de Bayes



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de una partición de sucesos, entonces…
…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i.

Teorema de Bayes



$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Sea un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0).

Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales. $P(B|A_i)$

Entonces, la probabilidad viene dada por la expresión: $P(A_i|B)$

$P(A_i)$ son las probabilidades a priori.

$P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i

P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

P(B)=P(B∩A1) + P(B∩A2) + P(B∩A3) + (B∩A4)

VIDEO

https://www.youtube.com/watch?v=hzGZplgtqEc

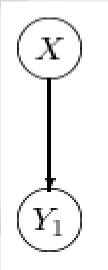
Ejercicios

1) Una empresa peruana que fábrica productos tiene tres sucursales, Lima, Arequipa y Trujillo. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Lima, el 30% en Arequipa, y el 25% en Trujillo. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Lima, el 3% en Arequipa y el 4% en Trujillo. Calcular:

a) Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso
b) Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Trujillo?.
c) Probabilidad de que haya sido producido en Lima dado es defectuoso
d) Implemente en R la solución

Ejercicios

2) La prueba más habitual para determinar enfermedades: X representa Paludismo e Y1 representa Gota-gruesa.



$$\begin{cases} P(+x) = 0'003 \\ P(\neg x) = 0'997 \end{cases}$$

- 3 de cada mil de la población padece paludismo

$$\begin{array}{ll} P(+y_1|+x) = 0'992 & P(+y_1|\neg x) = 0'0006 \\ P(\neg y_1|+x) = 0'008 & P(\neg y_1|\neg x) = 0'9994 \end{array}$$

- Cuando hay paludismo, el test de la Gota da positivo en 99.2%
- Cuando no hay paludismo y el test de Gota da positivo es el falso positivo 0.06%
- La probabilidad de que el test de negativo cuando no está enfermo 99.94%

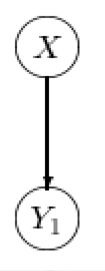
a) Verificar $\sum_{y_1} P(y_1|x) = 1, \quad \forall x$

b) Calcular P(+Y1); de igual manera P(-Y1)
c) Calcular P(+X|+Y1); de igual manera P(-X|+Y1)
d) Calcular P(X|-Y1); de igual manera P(-X|-Y1)
e) Implementar en R la solución

Ejercicios

2) La prueba más habitual para determinar enfermedades: X representa Paludismo e Y1 representa Gota-gruesa.

Solución



a) Verificar $\sum_{y_1} P(y_1|x) = 1, \quad \forall x$

$$\begin{cases} P(+y_1|+x) + P(\neg y_1|+x) = 1 \\ P(+y_1|\neg x) + P(\neg y_1|\neg x) = 1 \end{cases}$$

b) Calcular P(+Y1); de igual manera P(-Y1), aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P(y_1) = \sum P(y_1|x) \cdot P(x)$$

$$P(+y_1) = P(+y_1|+x) \cdot P(+x) + P(+y_1|\neg x) \cdot P(\neg x)$$
$$P(\neg y_1) = P(\neg y_1|+x) \cdot P(+x) + P(\neg y_1|\neg x) \cdot P(\neg x)$$

$$P(+y_1) = 0'00357$$
$$P(\neg y_1) = 0'99643$$

- Si hacemos un test de gota a una persona de quién no tenemos ninguna información, hay un 0.357% de que dé positivo.
- Qué diríamos de P(-y1)?

Ejercicios

2) La prueba más habitual para determinar enfermedades: X representa Paludismo e Y1 representa Gota-gruesa.

Solución

c) Calcular P(+X|+Y1); de igual manera P(-X|+Y1), En este caso supongamos que el test de la gota ha salido positivo, cuál será la probabilidad de que la persona tenga paludismo?. Aquí usamos el Teorema de Bayes.

$$P(+x|+y_1) = \frac{P(+x)\cdot P(+y_1|+x)}{P(+y_1)} = \frac{0'003 \cdot 0'992}{0'00357} = 0'83263$$

$$P(\neg x|+y_1) = \frac{P(\neg x)\cdot P(+y_1|\neg x)}{P(+y_1)} = \frac{0'997 \cdot 0'0006}{0'00357} = 0'16737$$

- De acuerdo al testo si es positivo, hay un 83% de probabilidad de que la persona tenga paludismo.
- Por otro lado puede que sea un falto positivo 16.7%

Ejercicios

2) La prueba más habitual para determinar enfermedades: X representa Paludismo e Y1 representa Gota-gruesa.

Solución

c) Calcular P(+X|+Y1); de igual manera P(-X|+Y1), En este caso supongamos que el test de la gota ha salido positivo, cuál será la probabilidad de que la persona tenga paludismo?. Aquí usamos el Teorema de Bayes.

Otra forma de obtener el resultado:

$$P(\neg x|+y_1) = \frac{P(\neg x) \cdot P(+y_1|\neg x)}{P(+y_1)}$$

Se puede escribir como: $\alpha \cdot P(x) \cdot \lambda_{Y_1}(x)$

$$\lambda_{Y_1}(x) \equiv P(\mathbf{e}|x) = P(y_1|x)$$
$$\alpha \equiv [P(\mathbf{e})]^{-1} = [P(y_1)]^{-1}$$

$$\mathbf{e} = \{+y_1\} \implies \begin{cases} \lambda_{Y_1}(+x) = P(+y_1|+x) = 0'992 \\ \lambda_{Y_1}(\neg x) = P(+y_1|\neg x) = 0'0006 \end{cases}$$

$$P(+x|+y_1) = \alpha \cdot 0'003 \cdot 0'992 = \alpha \cdot 0'00298$$
$$P(\neg x|+y_1) = \alpha \cdot 0'997 \cdot 0'0006 = \alpha \cdot 0'000598$$

$$\alpha = [0'00298 + 0'000598]^{-1}$$

$$P(+x|+y_1) = 0'83263$$
$$P(\neg x|+y_1) = 0'16737$$

Ejercicios

2) La prueba más habitual para determinar enfermedades: X representa Paludismo e Y1 representa Gota-gruesa.

Solución

d) Calcular P(X|-Y1); de igual manera P(-X|-Y1), esto es si el test de gota ha resultado negativo, cuál es la probabilidad de que el paciente tenga paludismo?, luego : cuál es la probabilidad de que no tenga paludismo?.

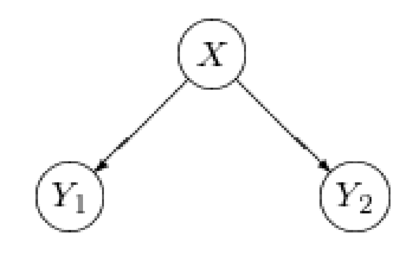
$$\mathbf{e} = \{\neg y_1\} \implies \begin{cases} \lambda_{Y_1}(+x) = P(\neg y_1|+x) = 0'008 \\ \lambda_{Y_1}(\neg x) = P(\neg y_1|\neg x) = 0'9994 \end{cases}$$

P(X|-Y1) = $\alpha \cdot 0'003 \cdot 0'008 = 0'000024$

P(-X|-Y1) = $\alpha \cdot 0'997 \cdot 0'9994 = 0'999976$

Ejercicios

3) Se amplía el modelo anterior añadiendo un nuevo efecto producido por el paludismo que es la fiebre representado por y2



$$\begin{Bmatrix} P(+y_2|+x) = 0'98 & P(+y_2|\neg x) = 0'017 \\ P(\neg y_2|+x) = 0'02 & P(\neg y_2|\neg x) = 0'983 \end{Bmatrix}$$

a) Hallar las probabilidades a priori de Y2
b) Suponga que el paciente tiene fiebre y queremos hallar la probabilidad de que tenga paludismo. Además halle que no tenga paludismo
c) No tiene fiebre, cuál es la probabilidad de que tenga paludismo. Además halle que no tenga paludismo.

Ejercicios

3) Se amplía el modelo anterior añadiendo un nuevo efecto producido por el paludismo que es la fiebre representado por y2

Solución:

a) Hallar las probabilidades a priori de Y2

$$P(+y_2) = \sum P(+y_2|x) \cdot P(x) = 0'01989$$

b) Suponga que el paciente tiene fiebre y queremos hallar la probabilidad de que tenga paludismo.

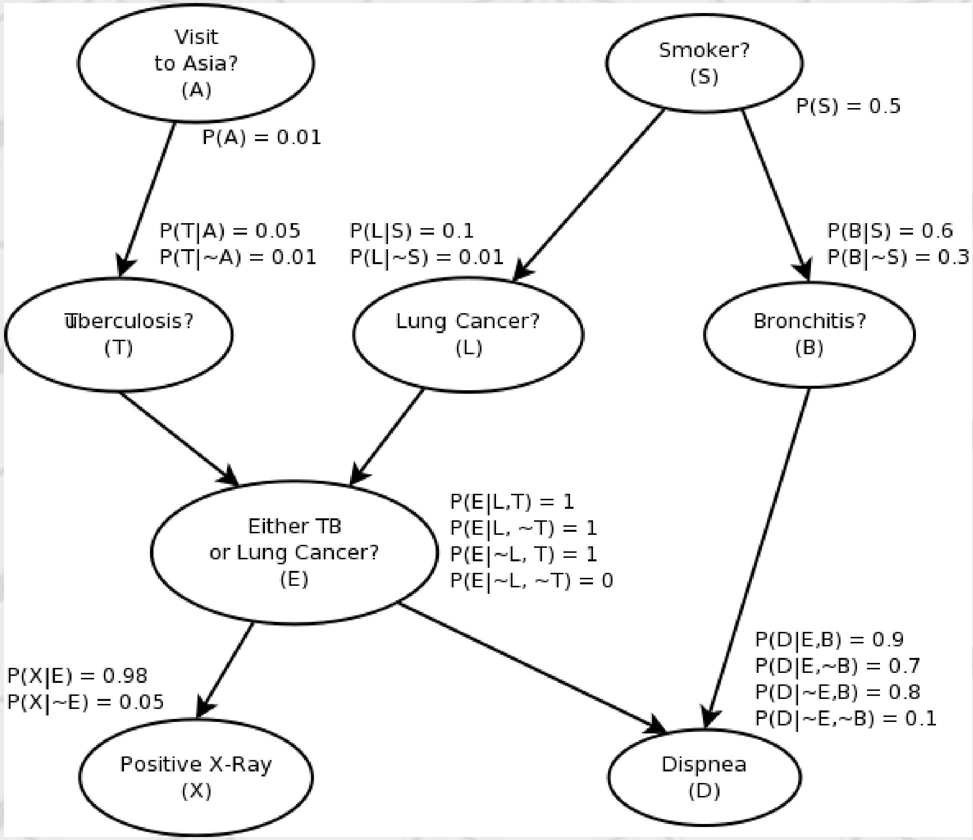
$$P^*(x) = \alpha \cdot P(x) \cdot \lambda_{Y_2}(x)$$

$$\mathbf{e} = \{+y_2\} \implies \begin{cases} \lambda_{Y_2}(+x) = P(+y_2|+x) = 0'98 \\ \lambda_{Y_2}(\neg x) = P(+y_2|\neg x) = 0'017 \end{cases}$$

P(+x|y2) = $\alpha \cdot 0'003 \cdot 0'98 = 0'148$

P(-x|y2) = $\alpha \cdot 0'997 \cdot 0'017 = 0'852$

3) Teniendo los datos, implemente la Red Bayesiana, en R



3) Teniendo los datos, implemente la Red Bayesiana, en R

a) Cuál es probabilidad de que visita Asia dado que tiene tuberculosis
b) Cuál es probabilidad de que sea fumador, si tiene cáncer y bronquitis
c) Cuál es la probabilidad que tenga disnea, si tiene tuberculosis, visitó Asia, no fuma y tiene bronquitis.
d) En la prueba ha salido positivo Rayos x, cuál es la probabilidad de que tenga cáncer.
e) Cuál es la probabilidad que tenga tuberculosis y bronquitis, ya que en la prueba ha salido positivo en rayos x y tiene disnea.

Nota: se recomienda usar alguna librería de R como bnlearn.

3) Teniendo los datos, implemente la Red Bayesiana, en R

Solución:

```
cptA:
      yes   no
[1,] 0.01 0.99
```

```
cptS:
      yes  no
[1,] 0.5 0.5
```

```
cptT:
     A
T      yes   no
  yes 0.05 0.01
  no  0.95 0.99
```

```
cptL:
     S
L      yes   no
  yes 0.1 0.01
  no  0.9 0.99
```

```
cptB:
     S
B      yes  no
  yes 0.6 0.3
  no  0.4 0.7
```

```
cptE:
, , T = yes

     L
E      yes no
  yes   1  1
  no    0  0

, , T = no

     L
E      yes no
  yes   1  0
  no    0  1
```

```
cptX:
     E
X      yes   no
  yes 0.98 0.05
  no  0.02 0.95
```

```
cptD:
, , B = yes

     E
D      yes  no
  yes 0.9 0.7
  no  0.1 0.3

, , B = no

     E
D      yes  no
  yes 0.8 0.1
  no  0.2 0.9
```

Fin