我们当中有谁不想解开未来所隐藏的面纱，在未来的几个世纪里，为地球科学的现有进步和发展的信条而奋斗呢？下一代的数学精神将朝着什么样的目标奋斗？在数学思想的广阔而丰富的领域里，新世纪将揭示什么样的新方法和新事实？

历史教导我们科学发展的连续性。我们知道，每个时代都有自己的问题，下一个时代要么解决问题，要么将其视为毫无益处而抛弃，代之以新的问题。如果我们想对数学知识在不久的将来可能的发展有一个概念，我们就必须把那些悬而未决的问题摆在我们的面前，审视当今科学所提出的问题，以及我们未来的解决方案。在今天这个世纪会议上，做这样一个对问题的回顾，在我看来是很合适的。一个伟大时代的结束，不仅让我们回顾过去，也将我们的思想引向未知的未来。

不可否认的是，这些问题在前沿的基础科学领域起到了重要作用，它们在一些研究者的工作中也扮演了重要角色。只要一门学科能提供大量的问题，它就能活得长久；而问题的缺乏预示着灭绝或独立发展的停止。正如人类的每一项事业都在追求某些目标一样，数学研究也需要它的问题。正是通过解决问题，研究人员发现了新方法和新观点，获得了更广阔和更自由的视野。

预先判断一个问题的价值是困难的，且常常是不可能的，因为最终的价值取决于科学从这个问题中所得到的收获。然而，我们想问，是否有一个通用的标准，可用于判定一个数学问题是否是好问题？一位法国老数学家曾说过:“一个数学理论，只有当你能把它向你在街上遇到的第一人阐述得很清楚时，它才算完整。”我认为一个数学理论，尤其是一个数学问题，如果他是完美的话，应该清晰易懂。因为清晰易懂的东西吸引人，复杂的东西使人反感。

此外，一个数学问题应该是困难的，这样才能吸引我们。但又不能是难到无法接近的，以免我们的努力显得可笑。对我们来说，它应该是通向隐藏真相的迷途指南，并最终在成功解决时为我们带来喜悦。

过去几个世纪的数学家致力于解决困难的特殊问题。他们知道这些问题的价值。比如约翰·伯努利提出的“最速下降线问题”。伯努利在关于这个问题的公开声明中解释说，经验告诉我们，崇高的思想只不过是通过把困难且有用的问题摆在他们面前，来争取科学的进步。因此，他希望效仿梅森、帕斯卡、费尔马、维维亚尼和其他人的做法，向他那个时代杰出的分析领域的人士提出一个问题，作为检验他们方法价值的试金石，来赢得数学界的感谢。变分法起源于伯努利问题和与之类似的问题。

众所周知，费马曾断言，丢番图方程：

$$x^n + y^n = z^n$$

是无解的，除了几个特殊的情形。

这是一个惊人的例子，即试图证明这么一个非常特殊且显然不重要的问题，却给数学带来了很大的发展。在费马问题的激励下，库默引入了理想数，并发现了环域的数对理想素数的唯一分解定律。今天，Dedekind 和 Kronecker 将定律推广到任何代数领域。这一定律是现代数论的核心，其意义远远超出了数论的范围，而进入了代数和函数理论的领域。

在其它的研究领域，我想提下三体问题。庞加莱着手这个难题并近乎解决了它，使得他得以把他卓有成效的方法和影响深远的原理引入到天体力学中，并在今天的天文学实践中得到应用。

最后提到的这两个问题，费马问题和三体问题，在我们看来，几乎像相反的两极，前者是纯粹理性的自由发明，属于抽象数论的范畴，后者是天文学强加给我们的，是理解自然界最简单的基本现象所必需的。

同样的特殊问题也经常出现在最不同的数学分支中。例如，最短路径问题在几何学基础中，在曲面理论中，在力学中，在变分学中都起着重要的作用。克莱因在他关于二十面体的著作中，对正多面体问题在初等几何、群论、方程论和线性微分方程中的意义，描述得多么令人信服！

我还想提下威尔斯特拉斯来阐明数学问题的重要性。在他科学生涯的开始，他就发现了一个与雅克比的反演问题同样重要的问题。他说这是他的幸运。

现在我们已经认识到数学问题的普遍重要性，让我们来讨论一下这个问题: 数学问题的来源是什么? 毫无疑问，数学各个分支中最古老的问题都源于经验和自然界的现象。即使是整数的计算规则，在人类文明的较低阶段也必须以这种方式被发现，就像今天的孩子也得通过经验方法学习它们。几何学的最初的问题也是如此。这些问题是古代遗留给我们的，如倍立方问题、化圆为方问题。同样的的还有在解方程，曲线和微积分, 变分法, 傅里叶级数，势理论中那些古老的问题，还有涉及力学、天文学和物理学的大量问题。

但是，随着这部分数学的进一步发展，受这些问题的成功解答的鼓舞，人类开始意识到数学的独立性。它开始不断演化，幸运地得以通过逻辑组合、概括、专门化的方式分离和收集新的思想、价值丰富的问题，然后作为真正的提问者出现。由此产生了素数问题和数论的其他问题，如伽罗瓦的方

程理论、代数不变量理论、阿贝尔函数理论和自守函数论。事实上，现代算术和函数理论中几乎所有的好问题都是这样产生的。

与此同时，当纯粹理性的创造力发挥作用时，外部世界又开始发挥作用，从实际经验中向我们提出新问题，开辟了数学的新分支。当我们试图征服这些新的知识领域，进入纯思维的领域时，我们往往能找到旧的未解决问题的答案，从而同时最成功地推进旧的理论。

我们还得简单地讨论一下，对于一个数学问题的解答，应该提出什么样的一般要求。首先，我要说的是: 它需要通过有限数量的步骤，在有限数量的假设的基础上，建立正确的解决方案。这些假设在问题的表述中是隐含的，而且必须总是精确地表述出来。这种通过有限数量的过程进行逻辑推理的要求，就是推理的严谨性的要求。事实上，这在数学中已成为众所周知的严谨性的要求，是与我们的哲学必然性相一致的; 另一方面，只有满足了这一要求，问题的蕴含的思想和提示性才能充分发挥作用。一个新问题，尤其是来自外部经验世界的问题，就像一根幼嫩的嫩枝，只有按照严格的园艺学规则，仔细地嫁接到我们数学科学的既定成果——老茎上，才能茁壮成长并结出果实。

此外，认为证明的严谨性是简单性的敌人是错误的。大量的例子证明，严谨的方法同时也更简单，更容易理解。对严谨性的努力迫使我们找到更简单的证明方法。这导致严谨性的方法比不那么严谨的旧方法更有能力发展。因此，代数曲线理论经历了相当程度的简化，并通过更严格的函数理论方法和先进的手段的引入而达到更大的统一。进一步地，使幂级数可以应用于四元算术运算以及逐项微分和积分的证明。对幂级数的效用的认识依赖于这个证明，这对简化所有的分析，特别是消元理论和微分方程理论，以及这些理论所要求的存在性证明，作出了重大贡献。但我的演讲中最引人注目的例子是对变量的计算。在某些极为复杂的计算中，需要处理定积分的一阶和二阶变分，而老数学家所采用的方法缺乏严格性。魏尔斯特拉斯给我们指明了一条通向明确建立变分基础的道路。我将在我的演讲结束时简要地展示一下，如何通过简单的二重积分立即使变分法得到惊人的简化。在演示的充分必要条件发生的最大和最小值, 计算第二个变化, 在某种程度上, 实际上, 乏味的推理连接第一个变化可能完全摒弃与说的提前参与限制的去除函数的微分系数的变化但略有不同。

一方面，我坚持证明的严格性是完美解决问题的必要条件，另一方面，我要反对这样一种观点，即只有分析的概念，甚至仅仅是算术的概念，才能

得到完全严格的处理。我认为这种观点是完全错误的，这种观点有时也被一些知名人士所推崇。这种片面的解释的要求严格将很快导致忽略的概念起源于几何、力学和物理, 罢工的新材料与外界的流动, 最后, 的确, 作为最后的结果, 拒绝的想法的连续性和无理数。但是对数学科学至关重要的一根神经，将被几何学和数学物理学的灭绝所切断! 相反我认为无论从侧面的理论知识或在几何, 或从自然或物理的理论科学, 数学思想, 数学科学问题调查潜在的这些想法和原则建立在一个简单而完整的公理系统, 新想法的准确性及其适用性应当扣除不尊重不如那些旧的算术概念。

新概念必然对应新符号。我们选择这些概念的方式，是为了提醒我们那些促成新概念形成的现象。因此几何图形是空间直觉的符号或助记符号，被所有数学家如此使用。谁不总是把三点在一条直线上的图像作为"中间"这个概念的几何图像与二重不等式一起使用呢？当需要严格地证明一个关于函数连续性或凝聚点存在的困难定理时，谁会不使用分割和矩形相互封闭的方法呢？谁能不画出三角形的图形，不画出圆心的圆，不画出三个垂直轴的十字？或者谁会放弃表示的向量场, 或一个家庭的照片曲线或曲面的包络在微分几何中扮演如此重要的一部分, 在微分方程理论, 在变分法的基础和其他纯粹数学科学吗?

算术符号是书写的图形，几何图形是图形的公式; 任何数学家都不可能不使用这些图形公式，就像在计算中不可能不使用括号或其他解析符号一样。

使用几何符号作为一种严格的证明手段，其前提是对这些图形所依据的公理具有确切的知识和完全的掌握; 为了把这些几何图形纳入数学符号的一般宝库，必须对它们的概念内容进行严格的公理研究。就像两个数字相加一样，一个数字必须以正确的顺序放在另一个数字的下面，这样就只需要计算规则，即因此，几何符号的使用是由几何概念及其组合的公理决定的。

几何思想和算术思想之间的一致之处还表现在，我们在算术思想中，并不像在几何讨论中那样，习惯性地将推理链追溯到公理。相反，我们运用一种快速的、无意识的、不确定的组合，尤其是在第一次解决问题时，相信算术符号的行为具有某种算术上的感觉，这种感觉在算术上和在几何上的想象一样，我们可以省掉。作为严格运用几何思想和符号的算术理论的一个例子，我可以提到闵可夫斯基的工作《数的几何学》。

关于数学问题可能带来的困难，以及克服这些困难的方法，可以在这里加以说明。

如果我们不能成功地解决一道数学题，其原因往往在于我们没有认识到一个更普遍的观点，即我们面前的问题只是一系列相关问题中的一个环节。在找到这个环节后，不仅这个问题更容易处理，而且我们还掌握了一种适用于其它相关问题的方法。柯西的积分的复路径和库默的数论中的理想数可以作为例子。这种寻找一般方法的方法当然是最切实可行和最确定的;因为那些在心里没有明确问题的情况下寻求方法的人，多半会是徒劳的。

在处理数学问题时，我认为特殊化比一般化更重要。也许在大多数我们寻求问题的答案却徒劳无功时，失败的原因在于，比现在的问题更简单、更容易的问题根本没有解决，或者还没有完全解决。那么，一切都取决于找出这些更容易的问题，并通过尽可能完美的手段和能够概括的概念来解决这些问题。这个规则是克服数学困难的最重要的规则之一，在我看来它几乎总是被使用，尽管可能是无意识的。

有时，我们在不充分的假设下或在不正确的意义上寻求解决办法，但由于这个原因，我们没有成功。于是就出现了一个新问题: 在给定的假设下，或在设想的意义上，证明解决问题是不可能的。这种不可能的证明是由古人提出的，例如，他们指出等腰直角三角形的斜边与边长之比是无理数。在以后的数学, 证明某些解不存在的问题, 扮演了杰出的角色。以这种方式，那些老的和困难的问题 (如平行公理的证明, 化圆为方, 以及五次方程根式解的问题) 终于找到了完全令人满意和严格的解决办法，尽管在这原先的设想的结果并不同。可能正是这个重要的事实以及其他哲学上的原因导致了这种信念 (这是每个数学家都认同的，但至今还没有人能证明的) 每一个明确的数学问题都必须能够得到精确的解答，或者是得到问题的实际答案，或者是证明它的解是不可能的，从而导致所有尝试的必然失败。以任何尚未解决的问题为例，如欧拉-马歇罗尼常数 C 的是否是有理数问题，以及形式的素数是否有限个的问题。无论这些问题在我们看来多么不可接近，无论我们在它们面前多么无能为力，我们仍然坚信，它们的解决是一个有限数目的纯逻辑过程。

每一个问题都是可以解决的，这是数学思维独有的特性吗? 还是说，这可能是思维本质所固有的普遍规律，即所有问题都必须是可以回答的? 因为在其他科学领域，人们也会遇到一些古老的问题，这些问题通过证明它们不可能解决，从而以一种对科学最令人满意和最有用的方式得到了解决。我以永动机的问题为例。在发现建造永动机的工作徒劳无功以后，人们开始研究，如果永动机是不可能建造的，则自然力之间必须存在的关系。这个反问

题导致了能量守恒定律的发现，它再次解释了永动机的不可能性。

每个数学问题都是可以解决的，这种信念对工作者是一种强大的激励。我们听到了内心永恒的召唤: 问题就在这里。寻求其解决方案。你可以用纯粹的理性找到它，因为在数学中没有不学无术的人。

数学上的问题是无穷无尽的，一旦一个问题解决了，无数其他问题就会取而代之。请允许我在下面试探性地提一些具体而明确的问题，这些问题来自于数学的各个分支，讨论这些问题可以促进科学的发展。

让我们看看分析和几何学的原理。在我看来，上个世纪在这一领域最具启发性和引人注目的成就是柯西、博尔扎诺和坎托著作中连续体概念的算术公式，以及高斯、波利埃和洛巴切夫斯基对非欧几何的发现。因此，我首先请你注意属于这些领域的一些问题。

(以下略去 23 个问题的阐述)

提到的问题仅仅是一些例子, 然而, 他们将足以显示数学科学今天如何丰富，如何多样，如何广泛。人们急切地想知道，数学是否注定要像其他科学那样，被分裂成一个个独立的分支，这些分支的代表人物彼此几乎不能相互理解，它们之间的联系也越来越松散。我不相信，也不希望这样。在我看来，数学科学是一个不可分割的整体，是一个有机体，它的活力取决于各部分的联系。因为尽管有各种各样的数学知识，我们仍然清楚地意识到逻辑的相似性，整个数学思想之间的关系，以及数学各部分之间的无数相似之处。我们还注意到，一个数学理论发展得越好，它的建构就越和谐一致，而且迄今为止这门科学的各个独立分支之间的关系也就揭示得越清楚。因此，随着数学的扩展，它的有机性并没有丧失，而只是更加明显地表现出来。

但是，我们要问的是，随着数学知识的扩展，最终研究者会不会不可能接受所有部分的知识? 作为回答，请允许我指出，在数学科学中，每一个真正的进步都伴随着更锐利的工具和更简单的方法的发明，这些工具和方法同时有助于理解更早的理论，并把更早的、更复杂的发展抛在一边。因此，对于个体研究者来说，当他自己制造这些更锋利的工具和更简单的方法时，他可能比在任何其他科学中更容易地在数学的各个分支中找到自己的路。

数学的有机统一是这门科学的本质所固有的，因为数学是关于自然现象的一切精确知识的基础。为了使它完全完成这一崇高的使命，愿新世纪为它带来有天赋的主人和许多热心和热情的门徒。