# 10 EXTREMS RELATIUS DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

(Resum teòric)

## Índex



## 10.1. Definicions

Els extrems relatius de funcions reals de diverses variables es defineixen de manera anàloga al cas d'una variable. Considerem un conjunt $U$ de $\mathbb{R}^n$, una funció real $f\colon U \to \mathbb{R}$ i un punt $\mathbf{a} \in U$.

La funció $f$ té un *màxim relatiu o màxim local* a $\mathbf{a}$, si existeix un entorn $V$ de $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ per a tot $\mathbf{x} \in V$.

La funció $f$ té un *mínim relatiu o mínim local* a $\mathbf{a}$, si existeix un entorn $V$ de $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ per a tot $\mathbf{x} \in V$.

Si en aquestes definicions se substitueixen les desigualtats no estrictes per desigualtats estrictes, s'obtenen les definicions de *màxim i mínim relatius estrictes*. Si $f$ té un màxim o mínim relatiu a $\mathbf{a}$, es diu que $f$ té un *extrem relatiu o extrem local* a $\mathbf{a}$.

Si $f$ és una funció real diferenciable en $\mathbf{a}$ i $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, es diu que $\mathbf{a}$ és un punt *crític* o *estacionari* de $f$. Una condició necessària perquè hi hagi un extrem en $\mathbf{a}$ és que un $\mathbf{a}$ sigui un punt crític de $f$:

- Si $f$ és una funció real diferenciable en un punt $\mathbf{a}$ i $f$ té un extrem relatiu a $\mathbf{a}$, aleshores $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Si $f$ té un punt crític a $\mathbf{a}$ però no té un extrem relatiu a $\mathbf{a}$, es diu que $\mathbf{a}$ és un *punt de sella* de $f$.

Per a funcions suficientment regulars, és possible determinar la naturalesa d'un punt crític amb l'ajuda de les segones derivades. Suposem que $f$ admet totes les segones derivades parcials a $\mathbf{a}$. La matriu hessiana de $f$ a $\mathbf{a}$ és la matriu quadrada d'ordre $n$ $\mathcal{H}f(\mathbf{a}) = (D_{ij}f(\mathbf{a}))$. Notem que, si $f$ és de classe $\mathcal{C}^2$ en un entorn de $\mathbf{a}$, aleshores $\mathcal{H}f(\mathbf{a})$

és una matriu simètrica perquè, segons el teorema de Schwarz, $D_{ij}f(\mathbf{a}) = D_{ji}f(\mathbf{a})$. Per a $k = 1, \ldots, n$, sigui $\triangle_k(f, \mathbf{a})$ el determinant de la matriu obtinguda de $\mathcal{H}f(\mathbf{a})$ suprimint les últimes $n - k$ files i columnes, és a dir,

$$\triangle_1(f, \mathbf{a}) = D_{11}f(\mathbf{a}), \quad \triangle_2(f, \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) \end{vmatrix}, \ \ldots, \quad \triangle_n(f, \mathbf{a}) = \det \mathcal{H}f(\mathbf{a}).$$

## 10.2. Condicions suficients

**Condicions suficients d'extrem i punt de sella.**
Siguin $U$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$ i $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funció de la classe $\mathcal{C}^2(U)$, i suposem que $\mathbf{a} \in U$ és un punt crític de $f$.

i) Si $\triangle_k(f, \mathbf{a}) > 0$ per a tot $k \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores $f$ té un mínim relatiu al punt $\mathbf{a}$.

ii) Si $(-1)^k \triangle_k(f, \mathbf{a}) > 0$ per a tot $k \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores $f$ té un màxim relatiu al punt $\mathbf{a}$.

iii) Si existeix $\ell$ tal que $\triangle_\ell(f, \mathbf{a}) > 0$ i $\triangle_k(f, \mathbf{a}) \geq 0$ per a tot $k \neq \ell$, aleshores $f$ té un mínim relatiu o un punt de sella al punt $\mathbf{a}$.

iv) Si existeix $\ell$ tal que $(-1)^\ell \triangle_\ell(f, \mathbf{a}) > 0$ i $(-1)^k (f, \mathbf{a}) \triangle_k \geq 0$ per a tot $k \neq \ell$, aleshores $f$ té un màxim relatiu o un punt de sella al punt $\mathbf{a}$.

v) Si $\triangle_k(f, \mathbf{a}) = 0$ per a tot $k \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores $f$ pot tenir un màxim, un mínim o un punt de sella al punt $\mathbf{a}$.

vi) Si no es dóna cap dels casos anteriors, llavors $f$ té un punt de sella al punt $\mathbf{a}$.

En el cas de dues variables, els resultats precedents admeten més precisió.

**Condicions suficients d'extrem i punt de sella** (per a dues variables).
Siguin $U$ un conjunt de $\mathbb{R}^2$ i $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funció de la classe $\mathcal{C}^2(U)$. Suposem que $(a, b) \in U$ és un punt crític de $f$. Siguin $\mathcal{H}f(a, b) = (h_{ij})$ la matriu hessiana de $f$ en $(a, b)$ i $\triangle$ el seu determinant. Tenim els casos següents.

1. $\triangle < 0$. Aleshores, $f$ té un punt de sella al punt $(a, b)$.

2. $\triangle > 0$.

   i) Si $h_{11} < 0$, aleshores $f$ té un màxim relatiu al punt $(a, b)$.

   ii) Si $h_{11} > 0$, aleshores $f$ té un mínim relatiu al punt $(a, b)$.

3. $\triangle = 0$.

   i) Si $h_{11} < 0$ o $h_{22} < 0$, aleshores $f$ té un màxim o un punt de sella al punt $(a, b)$.

   ii) Si $h_{11} > 0$ o $h_{22} > 0$, aleshores $f$ té un mínim o un punt de sella al punt $(a, b)$.

iii) Si $h_{11} = h_{22} = 0$, aleshores $f$ pot tenir un màxim, un mínim o un punt de sella al punt $(a, b)$.

Per últim, cal notar que per a $n \geq 2$ variables, l'estudi de les segones derivades no sempre permet decidir sobre el caràcter de màxim relatiu, mínim relatiu o punt de sella d'un punt crític. En aquests casos, consideracions sobre les propietats particulars de la funció concreta objecte d'estudi permeten, de vegades, determinar el caràcter del punt crític. A més, cal tenir en compte que una funció pot tenir un extrem relatiu en un punt en què no sigui diferenciable, i en aquest cas la discussió anterior no és aplicable.