Estructura euclídea de Rn

dilluns, 24 d'octubre de 2022 8:07

Producte escalar

El producte escalar de u = (x1, ..., xn) i de v = (y1, ..., yn) és (en la base canònica) : u · v = <u, v> = x1y1 + ... + xnyn $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

En altre cas, cal o bé passar els vectors primer a la base canònica o bé fer càlculs addicionals:

$$\left.\begin{matrix} f_1 = (1,2) \\ f_2 = (-1,3) \end{matrix}\right\} \text{Base de } B \qquad \begin{matrix} (u)_B = (1,1) \\ (v)_B = (5,2) \end{matrix}$$

$$(u)_B \cdot (v)_B = (f_1 \cdot f_2) \cdot (5 f_1 + 2 f_2) = 5(f_2) + \dots + 2(f_2 \cdot f_1)$$
$$= 5(f_1 \cdot f_1) + 7(f_1 \cdot f_2) + 2(f_2 \cdot f_2)$$

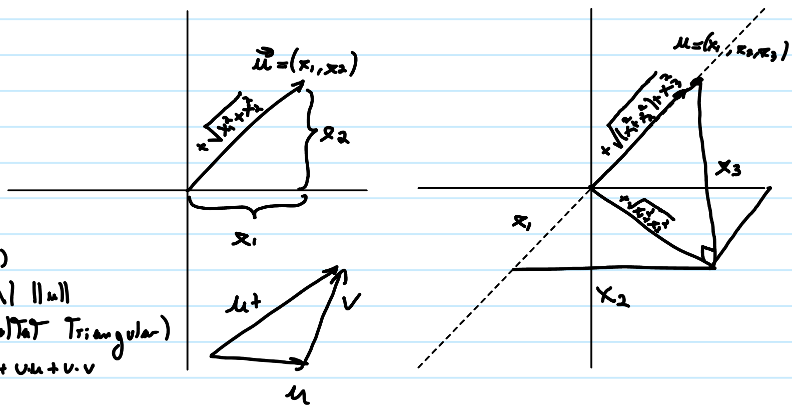
Excepte si la nova base també són dos vectors de longitud 1, distanciats 90º entre ells, on llavors la fórmula es manté com la inicial.

Propietats:

1. És lineal en cada variable:
$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot v = \alpha_1 (u_1 \cdot v) + \alpha_2 (u_2 \cdot v)$$
$$u \cdot (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 (u \cdot v_1) + \beta_2 (u \cdot v_2)$$
2. És simètric:
$$u \cdot v = v \cdot u$$
3. És positiu i no degenerat:
$$u \cdot u \geq 0; \ (x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2; \ u \cdot u = 0 \iff u = \vec{0}$$
$$u \cdot v = 0 \ \forall v \in \mathbb{R} \Rightarrow u = \vec{0}; \ \underbrace{(x_1, \dots, x_n) \cdot (1, 0, \dots, 0)}_{x_1} \underset{\text{hip}}{=} 0; \ \underbrace{(x_1, \dots, x_n) \cdot (0, 1, 0, \dots, 0)}_{x_2} \overset{\text{hip}}{=} 0$$

Norma (mòdul, longitud)

$$u = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\|u\| = +\sqrt{u \cdot u} = +\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$



Propietats:

1. $\|u\| = 0 \iff u = \vec{0}$
2. $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = +\sqrt{(\lambda u)(\lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 (u \cdot u)}$
   $\lambda \in \mathbb{R} \qquad = +\sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{(u \cdot u)} = |\lambda| \ \|u\|$
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualtat Triangular)
   $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v$
   $= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$

Distància:

Per distància, entenem l'espai que hi ha entre els dos punts que representen dos vectors.

$$d(u, v) = \|u - v\| = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$
$$u = (x_1, \dots, x_n)$$
$$v = (y_1, \dots, y_n)$$
$$u - v = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

1) $d(u,v) \geq 0; \ d(u,v) = 0 \iff u = v$
2) $d(u,v) = d(v,u)$
3) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (u \neq 0, v \neq 0)$$

$$0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

El quocient del producte escalar entre el producte dels seus mòduls sempre es trobarà entre 0 i 1, que implica que el seu producte escalar entre el producte dels mòduls es trobarà entre -1 i 1.

$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

La funció cosinus entre 0 i pi no repeteix cap valor, però els agafa tots. Per tant, sabem que existeix un únic angle entre 0 i pi tal que el cosinus de l'angle és el quocient d'abans:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

d'u ⊥ v: $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{u, v})$