5 SÈRIES DE POTÈNCIES I DE TAYLOR

(Resum teòric)

Índex

5.1. Sèries de potències

Sigui $a \in \mathbb{R}$ i $(a_n)_{n\geq 0}$ és una successió de nombres reals. La funció que fa correspondre a cada nombre real x la sèrie numèrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$$

s'anomena *sèrie de potències centrada en* a (o sèrie de potències en $x-a$).

5.1.1. Convergència d'una sèrie de potències

Considerem la funció:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n.$$

El domini de la funció f és el conjunt de tots els valors de x per als quals s'obté una sèrie numèrica convergent, que s'anomena *domini (o camp) de convergència* de la sèrie de potències, i per a qualsevol d'aquests x, el valor de $f(x)$ és la suma de la sèrie.

És evident que tota sèrie de potències centrada en a és convergent per a $x = a$:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(a-a)^n = a_0.$$

Per tant el domini de convergència d'una sèrie de potències en cap cas és un conjunt buit.

Teorema. Sigui $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ una sèrie de potències. Aleshores es compleix una i només una de les afirmacions següents:

a) La sèrie convergeix només en el punt $x = a$.

b) Existeix un nombre $r > 0$ tal que la sèrie convergeix per a $|x-a| < r$ i no convergeix per a $|x-a| > r$.

c) La sèrie convergeix per a tot x real.

Per tant, una sèrie de potències centrada en a convergeix sempre en un interval de la forma $(a-r, a+r)$, considerant que en el cas a) el valor de r és zero i en el cas c) el valor de r és infinit. Aquest nombre $r \in \mathbb{R} \cup \{0\}$ s'anomena *radi de convergència* i l'interval $(a-r, a+r)$ és l'*interval de convergència* de la sèrie de potències.

Cal observar que el teorema no diu res sobre la convergència en els extrems de l'interval de convergència, podent-se donar el cas que la sèrie convergeixi en ambdós extrems, en un de sol o en cap. Per determinar la convergència en els extrems s'ha d'analitzar la convergència de les sèries numèriques corresponents. A conseqüència del teorema anterior, el camp de convergència és o bé únicament el punt a (si $r = 0$), o bé tota la recta real (si $r = +\infty$) o bé un interval finit centrat en a (si $0 < r < +\infty$) d'una de les formes: $(a-r, a+r)$, $[a-r, a+r)$, $(a-r, a+r]$, o $[a-r, a+r]$.

Proposició Donada una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, si existeix algun dels límits:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{o} \quad r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

llavors el seu valor és el del radi de convergència.

La funció suma és especialment fàcil d'obtenir en els casos en què la sèrie de potències és, per a cada valor de x, una sèrie geomètrica. Per exemple, si considerem la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} x^n$, el seu radi de convergència és $r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, i la seva funció suma és, per a tot $x \in (-1, 1)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

5.1.2. Derivació i integració d'una sèrie de potències

Teorema Sigui $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ una funció donada per una sèrie de potències en el seu interval de convergència $(a-r, a+r)$, amb $r \neq 0$. Aleshores

a) $f(x)$ és contínua en $(a-r, a+r)$.

b) $f(x)$ és derivable en $(a-r, a+r)$ i $\forall x \in (a-r, a+r)$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$.

c) $f(x)$ és integrable en $(a-r, a+r)$ i $\forall x \in (a-r, a+r)$ $\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

Amb l'ajuda d'aquestes propietats poden trobar-se les expressions de les funcions suma de sèries de potències que estiguin relacionades, mitjançant integració o derivació, amb altres sèries de potències les funcions suma de les qual siguin conegudes. Això permet, a més, ampliar el conjunt de sèries numèriques per a les quals, quan són convergents, és possible calcular la suma.

5.2. Sèries de Taylor

Sigui $a \in \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de classe $C^\infty(a)$. La *Sèrie de Taylor de f en a o centrada en a* és la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

I es té el resultat següent:

Teorema Sigui $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de classe $C^\infty(a)$, $s(x)$ la funció suma de la sèrie de Taylor de f centrada en a i I l'interval de convergència d'aquesta sèrie. Aleshores $s(x) = f(x)$ per a tot $x \in I$ si, i només si, es compleixen les dues condicions següents

i) la funció f és de classe $C^\infty(I)$;

ii) per a tot $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} R_n(f, a, x) = 0$.

En aquest cas, tenim

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

expressió que s'anomena el *desenvolupament de $f(x)$ en sèrie de Taylor centrada en a.*

Una condició suficient perquè es compleixi la propietat ii) anterior és que existeixi K tal que $|f^{(n)}(x)| < K$ per a tot n i tot $x \in I$.

5.2.1. Sèries de Taylor d'algunes funcions

Els següents són desenvolupaments en sèries de Taylor centrades en l'origen d'algunes funcions:

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ per a tot $x \in (-1, 1]$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ per a tot $x \in (-1, 1]$

  on α és un nombre real i, per a tot nombre enter $k \geq 0$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$