Col <-> Nul

dilluns, 24 d'octubre de 2022 10:21

3.8 Trobeu, en cada cas, una base i la dimensió dels subespais vectorials U, V, $U+V$ i $U \cap V$. Determineu, en cada cas, si $U = V$, si l'espai total és suma dels subespais U i V i si l'espai total és suma directa dels subespais U i V.

1) En $\mathbb{R}^3$: $U = \langle(1,2,-1),(2,-3,2)\rangle$ i $V = \langle(4,1,3),(-3,1,2)\rangle$.

2) En $\mathbb{R}^4$: $U = \langle(1,-1,1,1),(2,0,1,0),(1,2,1,2)\rangle$ i $V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b+c = 0, b+d = 0\}$.

3) En $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$ i $V = \{(\lambda a + a(2+a)\mu, 0, 0, \lambda+\mu) \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

Nul $\downarrow$ Col

2) $U = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad V = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

$\mathrm{Dim}\, U = \mathrm{rang} = 3 \qquad \mathrm{Dim}\, V = 4 - \mathrm{rang} = 4 - 2 = 2$

Per a trobar una base de V, cal solucionar el sistema, és a dir, trobar els components de tots els vectors que compleixen:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Aïllem: (en funció les variables lliures)} \quad \begin{aligned} x &= -y - z \\ y &= y \\ z &= z \\ t &= -y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -\lambda - \mu \\ y &= \lambda \quad 0 \\ z &= 0 \quad \mu \\ t &= -\lambda \quad 0 \end{aligned}$$

Reescrivim: $(x,y,z,t) = \lambda(-1,1,0,-1) + \mu(-1,0,1,0)$

Tots els vectors que siguin C.L. de $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2$ serà de V.

Per tant, la nostra base serà, per definició, $\langle v_1, v_2 \rangle$, i $V = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Rang} = 2 = \dim(V)$

Ex. 3.1

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = 0 = \mathrm{Nul}(1\,1\,1) \text{ subespai de } F \\ &z = \lambda \\ &y = \mu \qquad (x,y,z) = \lambda(-1,0,1) + \mu(-1,1,0) \Rightarrow F = \langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &x = -\lambda - \mu \end{aligned}\right\} \text{Exemple 2}$$

3.5

Col $\downarrow$ Nul

Tenim un espai col format per dos vectors. Sabem que per a que un vector sigui de l'espai Nul, ha de ser combinació lineal dels vectors que compleixen les equacions (en aquest cas combinació lineal dels vectors de col).

$$V = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_1\ v_2$$

Afegim el vector x, y, z a col, anomenem-lo w.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

Cal que aquest sigui combinació lineal dels altres, i per tant que la matriu tingui rang 2. Fem gauss, i com que volem que el rang sigui dos, cal que la fila de dalt de tot sigui 0. Per tant, x - y - z ha de ser 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x-y-z \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Rang}\ 2 \Leftrightarrow x-y-z = 0$$

Escrit en forma d'equació, x - y - z = 0 = col(V).
És a dir, l'espai columna de V (pensem, tot l'espai que poden "abastar" els vectors de V, tots els punts de l'espai on es pot arribar amb ells, i per tant totes les combinacions lineals de v1,v2) és també tots els vectors que compleixen l'equació x-y-z = 0, ja que no modifiquen el rang de la matriu i per tant és cert que són combinació lineal.

$$V = Nul(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x - y - z = 0\}$$

Per comprovar, ara invertim el procés per a trobar una base d'aquest espai nul, com en els exemples anteriors:

$$x - y - z = 0; \quad \left.\begin{aligned} x &= +y + z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1)$$

Obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que, com podem veure, és combinació lineal de v_1, v_2