CÀLCUL GIA
Exercicis

S. Molina, M. Sánchez,

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

6 de febrer de 2023

Pròleg

L'assignatura de CÀLCUL consta de dues parts, una primera part en què s'amplia l'estudi de funcions reals d'una variable real i successions que els estudiants han realitzat abans d'entrar a la Universitat; i la segona part en què s'introdueixen les funcions reals de diverses variables.
Aquest document inclou material de treball i enunciats d'exercicis de l'assignatura de CÀLCUL. Els enunciats d'exercicis s'han organitzat per capítols, cada capítol correspon aproximadament a un tema de l'assignatura. Cada capítol conté quatre tipus de seccions: Problemes, Taller, A més hauríeu de fer i Solucions.
Els professors de l'assignatura exposaran els conceptes clàssics d'aquests temes; resoldran, a les classes expositives, gran part dels exercicis de la secció Problemes, i conjuntament amb els estudiants a les classes de taller, trobaran les solucions de gran part dels exercicis de les seccions Taller. Els exercicis de la part A més hauríeu de fer, junt amb els exercicis de les primeres seccions no resolts a classe, són perquè els resolguin els estudiants sense ajut d'un professor, com part del desenvolupament del seu aprenentatge autònom.

Índex

Part I

Ampliació de funcions reals de variable real

Capítol 1

Equacions i inequacions amb nombres reals.

1.1 Taller de problemes

1 Resoleu les desigualtats següents:

a) $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$; b) $\dfrac{1}{x+3} > \dfrac{1}{4}$; c) $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$; d) $x^2 + x \leq 0$; e) $1 < x^2 < 4$.

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

2 Trobeu tots els nombres reals x que satisfan les desigualtats següents:

a) $|2x+7| \geq 3$; b) $|x^2 - 1| \leq 3$; c) $|x-1| > |x+1|$; d) $|x| + |x+1| < 2$.

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

3 Per a cadascun dels conjunts següents:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x < 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 2^{-n}\}$; c) $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ y = 1 + x^2\}$,

determineu si el conjunt és fitat superiorment, fitat inferiorment, és fitat o no. Trobeu el suprem i l'ínfim, si s'escau.

◇◇◇◇◇

1.2 A més hauríeu de fer

4 Trobeu tots els nombres reals x que satisfan cadascuna de les desigualtats següents:

$$\text{a) } x^2 > 3x + 4; \qquad \text{b) } \frac{1}{x} < x.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

5 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } x^3 - 1 \geq 0; \qquad \text{b) } (x-1)\left|x^2 - 2\right| > 0; \qquad \text{c) } |4x - 5| \leq 13;$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

6 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } |x-3| = 2; \quad \text{b) } |x+1| < 4; \quad \text{c) } |x-1| + |x+3| = 4; \quad \text{d) } |x+1| + |x+2| < 2.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt té màxim o mínim.

7 Proveu que si $|x| \leq 1$, llavors es té $\left|x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right| < 2$.

8 Siguin a i b nombres reals amb $a < b$, demostreu que $a < \frac{(a+b)}{2} < b$.

9 Siguin $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nombres reals.

i) Demostreu que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

ii) Demostreu que la desigualtat és una igualtat si i només si, $a = b$.

10 Escriviu les expressions següents prescindint dels valors absoluts:

$$\text{a) } |x-1| - |x|; \qquad \text{b) } \big||x| - 1\big|; \qquad \text{c) } |x| - |x^2|; \qquad \text{d) } x - \big|x + |x|\big|.$$

11 Demostreu que per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix $|x-1| + |x-2| \geq 1$. En quin cas aquesta desigualtat és una igualtat?

12 Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\text{a) } |x-1||x+2| = 3 \qquad \text{b) } \frac{1}{4} \leq \left|x^2 - 5x + 6\right| \leq 3.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt té màxim o mínim.

13 Resoleu les inequacions següents:

$$\text{a) } \left|\frac{2x-2}{x+4}\right| < 1; \qquad \text{b) } \left|\frac{x}{x-2}\right| > 10; \qquad \text{c) } |3x-5| - |2x+3| > 0;$$

$$\text{d) } |2-x^2| < 1; \qquad \text{e) } x^2 < |2x+8|; \qquad \text{f) } \left|x^2 - 5x\right| > \left|x^2\right| - |5x|.$$

En cada apartat representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si el conjunt de solucions, en cadascun dels casos, té màxim o mínim.

14 Siguin

$$A = (-3, 9], \qquad B = \mathbb{N}, \qquad C = (4, +\infty), \qquad D = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$$

Trobeu, en cas que existeixin, el suprem i l'ínfim dels conjunts A, B, C, D, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap (C \cup A)$. Digueu si aquests són o no màxim i mínim.

◇◇◇◇◇

1.3 Solucions

1 a) $A = (-1, 1)$; és un conjunt fitat, $\inf(A) = -1$ i $\sup(A) = 1$.
b) $B = (-3, 1)$; és un conjunt fitat, $\sup(B) = 1$ i $\inf(B) = -3$.
c) $C = (-1, 0] \cup (1, \infty)$; és un conjunt fitat inferiorment amb $\inf(C) = -1$.
d) $D = [-1, 0]$; és un conjunt fitat, $\sup(D) = 0$ i $\inf(D) = -1$.
e) $E = (-2, -1) \cup (1, 2)$; fitat superiorment, $\sup(B) = 2$ i fitat inferiorment, $\inf(B) = -2$.

2 a) $A = (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$; no és un conjunt fitat i no hi ha màxim ni mínim.
b) $B = [-2, 2]$; fitat $\sup(B) = 2$ i $\inf(B) = -2$.
c) $C = (-\infty, 0)$; fitat superiorment amb $\sup(C) = 0$.
d) $D = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; fitat $\sup(D) = 1/2$ i $\inf(D) = -3/2$.

3 a) $A = (-\infty, -2) \cup (0, 2)$; fitat superiorment, $\sup(A) = 2$; no fitat inferiorment.
b) B és fitat, $\sup(B) = 1/2$ i $\inf(B) = 0$.
c) $C = [1, +\infty,)$ fitat inferiorment amb $\inf(C) = 1$, no és fitat superiorment.

4 a) $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$; no fitat.
b) $C = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$; fitat inferiorment amb $\inf(C) = -1$.

5 a) $A = [1, +\infty)$; és un conjunt fitat inferiorment, $\inf(A) = 1$.
b) $B = (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; és un conjunt fitat inferiorment, $\inf(B) = 1$.
c) $C = [-2, \frac{9}{2}]$; fitat, $\inf(A) = -2$ i $\sup(A) = \frac{9}{2}$.

6 a) $A = \{1,\ 5\}$; és un conjunt fitat, $min(A) = 1$ i $max(A) = 5$.
b) $B = (-5, 3)$; és un conjunt fitat, $\sup(B) = -5$ i $\inf(B) = 3$ i no hi ha màxim ni mínim.
c) $C = [-3, 1]$; és un conjunt fitat, $min(C) = -3$ i $max(C) = 1$.
d) $D = (-5/2, -1/2)$; és un conjunt fitat, $\sup(D) = -1/2$ i $\inf(D) = -5/2$ i no hi ha màxim ni mínim.

10 a) $|x-1| - |x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ -2x+1 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ -1 & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$

c) $|x| - |x^2| = \begin{cases} -x - x^2 & \text{si } x < 0, \\ x - x^2 & \text{si } x \ge 0; \end{cases}$

b) $\big||x| - 1\big| = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1, \\ 1 + x & \text{si } -1 \le x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x < 1, \\ -1 + x & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$

d) $x - \big|x + |x|\big| = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ -x & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$

11 S'obté la igualtat en $1 \le x \le 2$.

12 a) $A = \left\{ \frac{-1-\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\}$; és un conjunt fitat, $max(F) = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ i $min(F) = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.
b) $B = \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right] \cup \frac{5}{2}$; $\sup(F) = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$, $\inf(F) = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ és un conjunt fitat.

13 a) $A = (-2/3, 6)$; és un conjunt fitat, $\inf(A) = -2/3$ i $\sup(A) = 6$ i no hi ha màxim ni mínim.
b) $B = (20/11, 2) \cup (2, 20/9)$; és un conjunt fitat $\inf(B) = 20/11$ i $\sup(B) = 20/9$ i no hi ha màxim ni mínim.
c) $C = (-\infty, 2/5) \cup (8, +\infty)$; no és un conjunt fitat i no hi ha màxim ni mínim.
d) $D = (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$; és un conjunt fitat, $\inf(D) = -\sqrt{3}$ i $\sup(D) = \sqrt{3}$ i no hi ha màxim ni mínim.
e) $E = (-2, 4)$; és un conjunt fitat, $\inf(E) = -2$, $\sup(E) = 4$ i no hi ha màxim ni mínim.
f) $F = (-\infty, 0) \cup (0, 5)$; és un conjunt fitat superiorment, $\sup(F) = 5$ i no hi ha màxim ni mínim.

14 $\inf(A) = -3, \sup(A) = \max(A) = 9$.
$\inf(B) = \min(B) = 1$.
$\inf(C) = 4$.
$\inf(D) = \min(D) = 0, \sup(D) = \sqrt{2}$,
$\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 1, \sup(A \cap B) = \max(A \cap B) = 9$.
$\inf(A \cap C) = 4, \sup(A \cap C) = \max(A \cap C) = 9$.
$\inf(B \cap (C \cup A)) = \min(B \cap (C \cup A)) = 1$.

◇◇◇◇◇

Capítol 2

Successions i sèries de nombres reals.

2.1 Problemes

1 Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{b) } n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{c) } \sqrt[n]{n}.$$

2 Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad |a|>1\,; \quad \text{b) } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}, \quad |a|>1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,; \quad \text{c) } \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\,;$$

$$\text{d) } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right); \quad \text{e) } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n-1}{5}}.$$

3 Demostreu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n e^n}$ és convergent i calculeu la seva suma.

4 Estudieu el caràcter de les sèries següents:

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}; \qquad \text{b) } \sum_{n} e^{-n^2}; \qquad \text{c) } \sum_{n} \frac{n^3+2n-1}{n^5};$$

$$\text{d) } \sum_{n} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad \text{e) } \sum_{n} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n; \qquad \text{f) } \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}.$$

◇◇◇◇◇

2.2 Taller de problemes

5 Calculeu els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right); \qquad \text{b) } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin(1/n)};$$

$$\text{c) } \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}; \qquad d) \lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{7^n}; \qquad \text{d) } \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}.$$

6 Calculeu els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}; \quad \text{b) } \lim_{n\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot 3^n+5^{n+1}}{(2^n+1)(3^{n-1}-1)};$$

$$\text{c) } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\dfrac{n^2+2}{n+1}}; \qquad \text{d) } \lim_{n\to+\infty}\frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}};$$

7 Discutiu, en funció del paràmetre $a\in\mathbb{R}$, el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(a+1)^{n+1}}{(a+5)^n}$ i, quan sigui convergent, trobeu la seva suma.

8 Estudieu el caràcter de les sèries següents:

$$\text{a) } \sum_n \frac{\ln n}{2n^3-1}; \qquad \text{b) } \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2^n+1}; \qquad \text{c) } \sum_n \frac{(-1)^n 2^n}{n^2}.$$

◇◇◇◇◇

2.3 A més hauríeu de fer

9 Calculeu a i b a cadascuna de les igualtats següents:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-an^2}{3n^2-2}\right)^{1-bn^2}=\sqrt{e};$$

$$\text{b) } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{2n+a}.$$

10 Calculeu $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}$, on a, b, c i d són nombres reals, amb $c \neq d$.

11 Demostreu que la successió de terme general

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad \text{per a tot } \ n \geq 1,$$

és convergent i doneu un interval de longitud menor o igual que $1/2$ dins el qual es trobi el valor del límit.

12 Estudieu el caràcter de les sèries següents:

a) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$; b) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2^n-n}$; c) $\displaystyle\sum_n \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

◇◇◇◇◇

2.4 Solucions

1 a) $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } -1 < \alpha < 1, \\ \nexists & \text{si } a \leq -1; \end{cases}$ b) $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

2 a) 0; b) 0; c) -1; d) 1 e) e^2.

3 Geomètrica, la suma és $\dfrac{2}{3e-2}$

4 a) Sèrie de Riemann amb $\alpha = \dfrac{5}{3}$, convergent; b) Comparació amb $\sum e^{-n}$, convergent; c) Comparació en el límit amb $\sum 1/n^2$, convergent; d) Criteri del quocient, convergent; e) Criteri de l'arrel, convergent; Leibniz, convergent.

5 a) $\dfrac{1}{2}$, b) 1, c) 0, d) 0, e) $\dfrac{4}{e}$.

6 a) 1, b) $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$, c) 3, d) $\dfrac{5}{3}e$, e) e^2, f) $\sqrt[5e]{\dfrac{2}{3}}$.

7 Convergent si i només si $a > -3$, la suma és $\dfrac{(a+1)^2}{4}$.

8 a) S'utilitza $\ln n < n$ i comparació amb $\sum 1/n^2$, convergent; b) Criteri del quocient, divergent; c) Leibniz, no convergent.

9 a) $a = -3$ i $b = -1/2$; o $b = 0$ i $a = -3\sqrt{e}$;
b) S'ha de complir la condició $2b - 4 = a(a-2)$.

10 $\dfrac{a-b}{c-d}$.

11 $1/2 \leq l \leq 1$.

12 a) Es multiplica i es divideix pel conjugat i comparació amb $\sum 1/n$, divergent; b) Comparació en el límit amb $\sum 1/2^n$, convergent; c) Criteri del quocient, divergent;

◇◇◇◇◇

Capítol 3

Funcions elementals.

3.1 Problemes

1 Dibuixeu les funcions següents, calculeu les seves derivades, les seves primitives i els límits en els punts frontera del seu domini:

a) $f_k(x) = x^2 + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2;$

b) $g_k(x) = \dfrac{1}{x+k},\ k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2;$

c) $h_k(x) = \sin x + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2.$

2 Dibuixeu les funcions següents, calculeu les seves derivades, les seves primitives i els límits en els punts frontera del seu domini:

a) $f_k(x) = e^x + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2;$

b) $g_k(x) = \ln x + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2;$

3 Utilitzeu les propietats dels logaritmes per avaluar sense utilitzar calculadora:
$\log_7 1;\quad \log_{1/2} 2;\quad \log 10^{14};\quad \ln e^7;\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right);\quad e^{\ln 23};\quad e^{\ln x^2};\quad e^{\ln e^x};\quad 6\log_8(2) + \dfrac{\log_8(64)}{3\log_8(4)}.$

◇◇◇◇◇

3.2 Taller de problemes

4 Doneu expressions alternatives a les següents fórmules

$$\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta};\qquad (\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2;\qquad \frac{\tan\theta}{1-\operatorname{cotan}\theta} + \frac{\operatorname{cotan}\theta}{1-\tan\theta} - 1.$$

5 Escriu les següents expressions en funció de $\ln x$, $\ln y$ and $\ln z$:

$$\ln\left(e^4x^3y^{-2}\right); \qquad \ln\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{y^3\sqrt[3]{z}}}\right); \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[5]{z}}\right) - 2\ln\left(\frac{\sqrt[5]{xz}}{y\sqrt{z}}\right).$$

6 Escriu les següents expressions com un únic logaritme:

a) $4 - 2\ln x + \ln y$;

b) $2 - \frac{5\ln x}{6} + \frac{\ln y}{3}$;

c) $\frac{\ln x}{2} + \frac{3\ln y}{5} - \frac{2\ln z}{3} - 1$.

7 Resol les següents equacions:

a) $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = 1$;

b) $\log_5(x+2) + \log_5(x-2) = 1$;

c) $\log_2(x+1) + \log_2(3x+1) - \log_2(x) = 3$.

3.3 A més hauríeu de fer

8 Dibuixeu les funcions següents, calculeu les seves derivades, les seves primitives i els límits en els punts frontera del seu domini:

a) $f_k(x) = x + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

b) $g_k(x) = x^3 + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

c) $h_k(x) = |x| + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

d) $j_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)^2},\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

e) $\phi_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)^3},\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

f) $\psi_k(x) = \sin(x+k),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$.

g) $\alpha_k(x) = \tan x + k,\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$;

h) $\beta_k(x) = \tan(x+k),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$.

9 Dibuixeu les funcions següents, calculeu les seves derivades, les seves primitives i els límits en els punts frontera del seu domini:

a) $f_k(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2;$

b) $g_k(x) = e^{x+k},\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2;$

c) $h_k(x) = \ln(kx),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2;$

d) $j_k(x) = \ln(x+k),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2.$

10 Calculeu les següents expressions amb funcions hiperbòliques:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x; \qquad \tanh^2 x + \mathrm{sech}^2 x; \qquad \mathrm{cotanh}^2 x - \mathrm{cosech}^2 x; \qquad \ln(\sinh x + \cosh x).$$

11 Resol les següents equacions:

a) $\log_2(x-1) - \log_2(2x+1) = -2;$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3;$

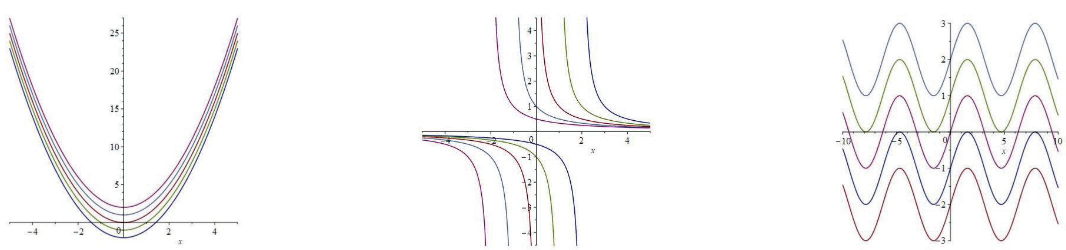
c) $\log_2(x+1) + \log_2(3x-2) = 1.$

12 Calculeu sense calculadora:
$e^{\sin(35)} \cdot \log_{38} 1; \qquad \log_{1/3} 3 + \ln \frac{1}{e} + \log 100; \qquad \sqrt{e^{2\ln x}}; \qquad \sinh(\ln 3).$

◇◇◇◇◇

3.4 Solucions

1 En la figura, a l'esquerra $y = f_k(x),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2;$, al centre $y = g_k(x),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2;$, i a la dreta $y = h_k(x),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2.$



a) $f_k'(x) = 2x; \quad \displaystyle\int f_k(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + kx + C;$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty;$
b) $g_k'(x) = -\dfrac{1}{(x+k)^2}; \quad \displaystyle\int g_k(x)\,dx = \ln|x+k| + C;$
$\displaystyle\lim_{x\to-k^-} g_k(x) = -\infty, \ \lim_{x\to-k^+} g_k(x) = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty} g_k(x) = 0;$
c) $h_k'(x) = \cos x; \quad \displaystyle\int h_k(x)\,dx = -\cos x + kx + C;$

$\nexists \lim\limits_{x\to-\infty} h_k(x),\ \nexists \lim\limits_{x\to+\infty} h_k(x).$

2

En la figura, a l'esquerra $y = f_k(x),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$; i a la dreta $y = g_k(x),\ k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2$.

a) $f_k'(x) = e^x$; $\quad \displaystyle\int f_k(x)\,dx = e^x + C$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$;
b) $g_k'(x) = -\dfrac{1}{x}$; $\quad \displaystyle\int g_k(x)\,dx = x\ln x - x + C$;
$\lim\limits_{x\to 0^+} g_k(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = +\infty.$

3 $0; \quad -1; \quad 14; \quad 7; \quad -1; \quad 23; \quad x^2; \quad e^x; \quad 3.$

4 $\sin\theta\cos\theta, \quad 7 + \tan^2\theta + \mathrm{cotan}^2\theta; \qquad \sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta.$

5 $4 + 3\ln x - 2\ln y; \quad \frac{\ln x}{5} - \frac{3\ln y}{2} - \frac{\ln z}{6}; \quad \frac{5\ln y}{2} + \frac{2\ln z}{5} - \frac{2\ln x}{5}.$

6 $a)\ln\left(\frac{e^4 y}{x^2}\right); \qquad b)\ln\left(\frac{e^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt[6]{x^5}}\right); \qquad c)\ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[5]{y^3}}{e\sqrt[3]{z^2}}\right).$

7 $x = \emptyset; \quad x = 3; \quad x = 1, \frac{1}{3}.$

10 $1.$

11 $x = \frac{5}{2}; \quad x = 3; \quad x = 1.$

12 $0; \qquad 0; \qquad x; \qquad \frac{4}{3}$

◇◇◇◇◇

Capítol 4

Fórmula de Taylor.

4.1 Problemes

1 Empreu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1728 + x}$ per tal d'avaluar $\sqrt[3]{1731}$. Fiteu l'error comès.

2 Considereu la funció $f(x) = \ln(1 - x)$.

a) Determineu els cinc primers termes no nuls del polinomi de Taylor centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange de la funció $f(x)$.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor de $\ln 0.75$ amb error més petit que 10^{-3}.

3 Doneu una cota superior de l'error en la fórmula $e \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$ mitjançant la fórmula de Taylor de e^x.

◇◇◇◇◇

4.2 Taller de problemes

4 Sigui $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau dos de la funció $f(x)$ en $x_0 = 1$.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat **a)** calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1.02}$.

c) Doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat **b)**.

5 Avalueu amb tres decimals correctes ($error \leq \frac{1}{2}10^{-3}$) les quantitats següents:

a) $e^{0.25}$; b) $\sin(-0.2)$; c) $\cos(0.9)$; d) $\ln(1.1)$; e) $\ln(0.9)$; f) $\sqrt{1.05}$; g) $\sqrt{0.97}$; h) $1/\sqrt{e}$.

◇◇◇◇◇

4.3 A més hauríeu de fer

6 Determineu els cinc primers termes no nuls del polinomi de Taylor centrat a l'origen i l'expressió del residu en la forma de Lagrange de les funcions següents:

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin(x)$; c) $f(x) = \cos(x)$;

d) $f(x) = \ln(1+x)$; e) $f(x) = \sqrt{1+x}$; f) $f(x) = \sinh x$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; i) $f(x) = (1+x)^\alpha$;

7 Trobeu el desenvolupament de Taylor

a) d'ordre 3 a l'origen de la funció $f(x) = e^x \tan x$.

b) d'ordre 4 a l'origen de la funció $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) d'ordre 3 a l'origen de la funció $f(x) = e^{\cos x}$.

d) de grau 2 en $x = \dfrac{\pi}{2}$ per a la funció $f(x) = \ln(\sin x)$.

8 Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

a) Construïu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$.

b) Escriviu el terme complementari de l'error que es comet en considerar el polinomi de Taylor de grau 1 obtingut enlloc de la funció irracional $f(x)$.

c) Trobeu una cota superior de l'error si $|x| < \dfrac{1}{16}$ en l'aproximació $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$.

d) En la teoria de la relativitat especial la massa m d'una partícula que es mou amb velocitat v ve donada per $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$, on m_0 és la massa en repòs de la partícula i c la velocitat de la llum. Fent ús dels apartats **(a)** i **(c)** justifiqueu que per a velocitats petites en comparació amb la velocitat de la llum $m \approx m_0 \left(1 + \dfrac{v^2}{2c^2}\right)$.

◇◇◇◇◇

4.4 Solucions

1 $P_2(x) = 12 + \dfrac{x}{432} - \dfrac{x^2}{2239488}$, $\varepsilon \leq 0.4 \cdot 10^{-8}$.

2 a) $P_5(x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5$, b) $n \geq 4$.

4 a) $P_2(x) = 1 + \dfrac{(x-1)}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8}$; b) $\sqrt{1.02} \approx P_2(1.02) = 1.00995$; c) $\varepsilon \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$.

5 a) 1.2840 , b) −0.1987 , c) 0.6216 , d) 0.0950 , e) −0.1050 , f) 1.0247 , g) 0.9849 , h) 0.6065 .

6 a) $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$, $\quad R_4(x) = \frac{x^5}{120}e^c$;

b) $P_9(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$, $\quad R_{10}(x) = -\frac{x^{11}}{39916800}\cos(c)$;

c) $P_8(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8$, $\quad R_9(x) = -\frac{x^{10}}{3628800}\cos(c)$;

d) $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{5}x^5$, $\quad R_5(x) = -\frac{x^6}{6(c+1)^6}$;

e) $P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$, $\quad R_4(x) = \frac{7\,x^5}{256(c+1)^{9/2}}$;

f) $P_9(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$, $\quad R_{10}(x) = \frac{x^{11}}{39916800}\cosh(c)$;

g) $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $\quad R_4(x) = \frac{x^5}{(1-c)^6}$;

h) $P_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$, $\quad R_4(x) = \frac{6x^5}{(1-c)^7}$;

i) $P_4(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$,

$R_4(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(1+c)^{\alpha-5}x^5}{5!}$.

7 a) $x + x^2 + \frac{5}{6}x^3$, b) $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$, c) $e - \frac{e}{2}x^2$, d) $-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

8 *Examen final de M2 del GEI de la FIB, 17/01/2012.*

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Capítol 5

Sèries de potències i sèries de Taylor.

5.1 Problemes

1 Calculeu el radi de convergència i estudieu la convergència en els extrems de l'interval de convergència de les series de potències:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}; \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^k}, \quad k \in \mathbb{Z}; \qquad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2n}{4^n + 5} x^n.$$

2 Calculeu l'interval de convergència de les següents series de potències (no cal estudiar la convergència en els extrems de l'interval)

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n}; \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n; \qquad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

3 Calculeu la funció suma de les sèries de potències:

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}; \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; \qquad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4 Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències de x de les funcions següents i determineu l'interval de la recta real en el qual és vàlid:

$$a) \frac{1}{1+x}; \qquad b) \ln(1+x); \qquad c) \frac{1}{1+x^2}; \qquad d) \arctan x.$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

5.2 Taller de problemes

5 Calculeu l'interval de convergència de les següents series de potències (no cal estudiar la convergència en els extrems de l'interval)

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}x^n;\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(x-10)^n;\qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}-1\right)^n.$$

6 Calculeu la funció suma de les sèries de potències:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n+1)(n+2)};\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1};\qquad c)\sum_{k=0}^{+\infty}x^{5k+1}.$$

7 Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències de x de les funcions següents i determineu l'interval de la recta real en el qual és vàlid:

$$a)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad b)\ \arcsin x;\qquad c)\ \frac{\sin x^3}{x};$$

$$e)\ 1-\cos\frac{x^2}{4};\qquad f)\ a^x,\quad a>0;\qquad h)\ \cos x+i\sin x,\quad i:=\sqrt{-1}.$$

8 Trobeu una expressió en sèrie de potències de x per a les funcions definides per les integrals següents:

$$a)\ f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt;\qquad b)\ g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt;\qquad c)\ h(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt.$$

◇◇◇◇◇

5.3 A més hauríeu de fer

9 Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències de x de les funcions següents i determineu l'interval de la recta real en el qual és vàlid:

$$a)\ \ln\sqrt{4+x^2};\qquad b)\ e^{-x^2}.$$

10 Calculeu el radi de convergència i estudieu la convergència en els extrems de l'interval de convergència de les series de potències:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n(n-2)(n+3)};\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^n+n+1}{4^n+2^n+3}x^n.$$

◇◇◇◇◇

5.4 Solucions

1 *a*) $R = 1$; abs. conv. en $x = \pm 1$, *b*) $R = 1$, $\forall k$. Per $k > 1$ abs. conv. en $x = \pm 1$; per $0 < k \leq 1$ div. en $x = 1$, condic. conv. en $x = -1$; i per $k \leq 0$ div. en $x = \pm 1$ *c*) $R = \frac{4}{3}$; div. en $x = \pm\frac{4}{3}$.

2 a) $(-1/2, 1/2)$; b) $\forall x \in \mathbb{R}$; c) $(-1/4, 1/4)$.

3

a) $f(x) = (1 - x)\ln(1 - x) + x$, per a $|x| < 1$;

b) $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1 - x) - \ln(1 - x) + 1$, per a $0 < |x| < 1$;

c) $f(x) = -\ln(1 - x)$, per a $|x| < 1$;

4

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \qquad (-1, 1).$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad (-1, 1).$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}, \qquad (-1, 1).$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}, \qquad (-1, 1).$

5 a) $(-2, 2)$; b) $(10 - e, 10 + e)$; c) $(0, 4)$.

6

a) $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1 - x) - \frac{2}{x^2}\ln(1 - x) - \frac{2}{x}$, per a $0 < |x| < 1$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, per a $|x| < 1$;

c) $f(x) = \frac{x}{1 - x^5}$, per a $|x| < 1$;

7

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \qquad (-1,1).$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \qquad (-1,1).$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+2}, \qquad \mathbb{R}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n}, \qquad \mathbb{R}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln a)^n}{n!}, \qquad \mathbb{R}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \equiv e^{ix}, \qquad \mathbb{R}.$

8 a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n$.

9

a) $\displaystyle \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} n} x^{2n}, \qquad (-2,2)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \qquad \mathbb{R}.$

10 *a*) $R = 3$; abs. conv. en $x = -2$ i $x = 4$, *c*) $R = \frac{4}{3}$; div. en $x = \pm\frac{2}{3}$.

◇◇◇◇◇

Capítol 6

Integració aproximada.

6.1 Problemes

1 Calculeu la integral entre 0 i 5 de la funció $y = E[x]$ (part entera de x): $\displaystyle\int_0^5 E[x]\, dx$.

2 Calculeu la integral següent $I = \displaystyle\int_0^4 (1 - e^{\,x/4})\; dx$.

(a) Fent ús de la regla de Barrow.

(b) Fent ús de la fórmula dels trapezis amb una partició de 4 subintervals.

(c) Fent ús de la fórmula de Simpson amb una partició de 4 subintervals.

(d) Avalueu l'error absolut en cas que fem ús dels resultats dels apartats **(b)** i **(c)** per aproximar el valor de la integral I.

(e) Calculeu les cotes superiors de l'error que es comet en els càlculs dels apartats **(b)** i **(c)** utilitzant les fórmules de l'error dels mètodes.

3 Siguin $f(x) = \big(\sin(x)\cos(x)\big)^{4/3}$ i $I = \displaystyle\int_{0.6}^{1.0} f(x)\; dx$.

(a) Sabent que $0 < f^{(4)}(x) < 20$, $\forall x \in [0.6, 1.0]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral fent ús de la fórmula de Simpson amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes $(0.5 \cdot 10^{-4})$.

(b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat **a)**.

◇◇◇◇◇

6.2 Taller de problemes

4 Utilitzeu el mètode dels trapezis i la regla de Simpson amb 4 subintervals per avaluar les integrals

$$a)\int_0^1 e^{x^2}\, dx\ ; \qquad\qquad b)\int_0^1 \cos(x^2)\, dx\ ,$$

i calculeu la cota superior de l'error comès.

5 Feu ús de les fórmules dels trapezis i de Simpson per avaluar les integrals següents amb un error més petit que $0.5 \cdot 10^{-2}$

$$a) \int_0^1 e^{x^2}\,dx \; ; \qquad b) \int_0^1 \cos(x^2)\,dx \; .$$

6 Siguin $f(x) = \cos^3(x)$ i $I = \displaystyle\int_0^1 \cos^3(x)dx.$

a) Comproveu que $f''(x) = 6\cos(x) - 9\cos^3(x)$ y $f^{(4)}(x) = -60\cos(x) + 81\cos^3(x)$.

b) Justifiqueu que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| \le 3$ y $\max\limits_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \le 21$.

c) Calculeu a I amb un error menor que 10^{-4}.

7 Sigui $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+2} \frac{e^t}{t} dt.$

a) Comproveu que $x = 0$ és un punt crític de F.

b) Calculeu el valor aproximat de $F(0)$ utilitzant el mètode de Simpson amb 4 subintervals.

c) Sabent que per $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ es té $|f^{(4)}(x)| < 25$, $\forall x \in [1,2]$, calculeu la cota superior de l'error comès.

◇◇◇◇◇

6.3 Repàs de Batxillerat i a més hauríeu de fer

8 Calculeu les integrals següents fent servir canvis de variable:

$$a) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x^{1/3}}\,dx; \qquad b) \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}}\,dx; \qquad c) \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx.$$

9 Calculeu, les integrals següents:

$$a) \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \; ; \qquad b) \int_2^4 x \ln x \, dx \; ; \qquad c) \int_0^\pi \cos x \cosh x \, dx \quad .$$

$$d) \int_0^1 \sinh x \cosh x \, dx \; ; \qquad e) \int_1^3 x\, e^x \, dx \; .$$

10 Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^3/2$, $y = x^2 - 2x + 4$ i l'eix d'ordenades.

11 Calculeu l'àrea limitada per la corba $y = |x^2 - 4x + 3|$ i les rectes $x = 0$, $x = 4$ i $y = 0$.

12 Calculeu l'àrea de la regió limitada per les gràfiques de:

a) $y = 1/x^2,\ y = 0,\ 1 \leq x \leq 4;$

b) $y = e^{-x},\ y = 0,\ 0 \leq x \leq 1;$

c) $y = (x-1)(x-2)(x-3),\ y = 0,\ x = 1$ i $x = 3$.

13 Trobeu l'àrea de la regió determinada per les corbes $y = 2/(1 + x^2)$ i $y = x^2$.

14 Calculeu l'àrea d'una de les regions determinades per les corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$.

15 Calculeu, amb un error més petit que 10^{-3}, les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sin^3 x\, dx$; b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(1 + x^4)\, dx$; c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{2 + x^6}\, dx$;

d) $\displaystyle\int_2^3 x \tanh x\, dx$; e) $\displaystyle\int_3^7 \ln x \sin x\, dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x)\, dx$.

◇◇◇◇◇

6.4 Solucions

1 10.

2 (a) $I = 8 - 4e \approx -2.87312731...$, (b) $I \approx -2.9088876...$, (c) $I \approx -2.8732752...$, (d) $|I - T_4| \approx 0.03576... < 0.05, |I - S_4| \approx 0.0001484... < 0.0005.$

3 (a) $n = 4$, (b) $I \approx S_4 = 0.15310.$

4 a) $T(4) = 1.49068\,,\quad \varepsilon_T \le 0.085\,,\qquad S(4) = 1.46371\,,\quad \varepsilon_S \le 0.0045\,;$
b) $T(4) = 0.89576\,,\quad \varepsilon_T \le 0.020\,,\qquad S(4) = 0.90450\,,\quad \varepsilon_S \le 0.0009\,.$

5 a) $T(18) = 1.463\,,\quad S(4) = 1.464\,;$
b) $T(10) = 0.903\,,\quad S(4) = 0.905\,.$

6 0.6429 (*Examen Parcial-2 de M2 del GEI de la FIB, 17/12/2018*)

7 $F(0) \simeq 3.05924...,\quad \varepsilon < 0.00055\,.$ (*Examen Parcial-2 de M2 del GEI de la FIB, 07/06/2018*)

8 a) $6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + x + 6\ln(\sqrt[6]{x} - 1) + k\,;$

b) $\arcsin\left(\dfrac{e^x}{2}\right) + k\,;\qquad$ c) $\arctan(\sin x) + k\,.$

9 a) $\dfrac{1}{3} + \arctan 1\,;\qquad$ b) $14\ln 2 - 3\,;\qquad$ c) $-\dfrac{1}{2}\sinh \pi\;;\qquad$ d) $-\dfrac{1}{2}\left(1 - \cosh(1)^2\right);\qquad$ e) $2e^3\,.$

10 $\dfrac{14}{3}\,.$

12 a) $\dfrac{3}{4}\,,\quad$ b) $1 - \dfrac{1}{e}\,,\quad$ c) $\dfrac{1}{2}\,.$

15 a) $T(13) = 0.180\,,\ S(4) = 0.179\,;\qquad$ b) $T(18) = 0.323\,,\ S(6) = 0.322\,;$
c) $T(12) = 0.015\,,\ S(6) = 0.014\,;\qquad$ d) $T(4) = 2.463\,,\ S(2) = 2.463\,;$
e) $T(96) = -2.597\,,\ S(12) = -2.598\,;\quad$ f) $T(18) = 0.743\,,\ S(12) = 0.743\,.$

◇◇◇◇◇

Part II

Funcions de diverses variables reals

Capítol 7

L'espai $\mathbb{R}^n$.

7.1 Problemes

1 Considereu els conjunts:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq x^2, \ y \neq 0, \ x \in [-2,2]\right\}.$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.

c) Són conjunts oberts? Són conjunts tancats?

d) Són conjunts compactes?

2 Dibuixa els conjunts

$$C((3,-1),r) = \{x \in \mathbb{R}^2, \ ||x - (3,-1)||_* = r\},$$

per a $r = 1,2,3$ i $* = 1,2,\infty$.

3 Considereu els punts $A = (5,3,6,9,5), B = (5,5,5,5,5)$ i $C = (6,6,6,6,6)$ de $\mathbb{R}^5$

a) Quin és el punt més proper al punt A d'entre B i C considerant la distància euclidiana?

b) Quin és el punt més proper al punt A d'entre B i C considerant la distància de Manhattan?

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

7.2 Taller de problemes

4 Dibuixeu els subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-3| < 2, \ |1-y| \leq 5\}$;

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x^2+4x+1| = -x^2-4x-1, \ |y-2| < 10\}$;

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x < y\}$.

5 Considereu els conjunts:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2-y^2 < 1\};$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \, y > 0, \, xy \leq 1\};$$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z = 1, \, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.

c) Quins d'aquests conjunts són oberts? I quins tancats? I quins compactes?

6 Dibuixa els conjunts

$$B((1,0),r) = \{x \in \mathbb{R}^2, \ ||x-(1,0)||_* \leq r\},$$

per a $r = 1,2,3$ i $* = 1,2,\infty$.

◇◇◇◇◇

7.3 A més hauríeu de fer

7 Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1, y \geq x, y \geq -x\}$ i justifiqueu que és compacte.

8 Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-3)^2 \leq 1, y \leq x+3\}$ i justifiqueu que és compacte.

9 Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{2}\}$ i justifiqueu que és compacte.

10 Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|, x^2+y^2 \leq 2\}$ i justifiqueu que és compacte.

11 Dibuixeu el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4, x - y \geq -4, y \geq x‘2 - 16\}$ i justifiqueu que és compacte.

⋄⋄⋄⋄⋄

7.4 Solucions

1 a) En la representació gràfica, en negre i gris els punts del conjunt, en vermell punts que no són del conjunt.

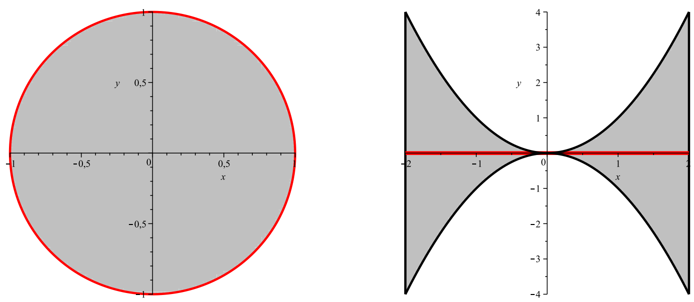


Figura 7.1: Conjunt A (esquerra) i conjunt B (dreta).

b) $\operatorname{int}(A) = A$, $\operatorname{adh}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $\operatorname{Fr}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.
$\operatorname{int}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2, y \neq 0, x \in (-2, 2)\right\}$,
$\operatorname{adh}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2, x \in [-2, 2]\right\}$,
$\operatorname{Fr}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^2 \wedge x \in [-2, 2]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \{-2, 2\} \wedge -4 \leq y \leq 4)\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2)\right\}$.

c) El conjunt A és obert, no és tancat. El conjunt B no és obert ni tancat.

d) Ni el conjunt A ni el conjunt B són compactes.

3 a) C; b) B.

4 En gris i negre punts dels conjunts, en vermell no són del conjunt.

5 a) Conjunt A (esquerra), conjunt B (mig) i conjunt C (dreta).
b) $\operatorname{Fr}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}$; $\operatorname{int}(A) = A$, $\operatorname{adh}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1\right\}$.
$\operatorname{Fr}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy = 1 \text{ o } x = 0, y \geq 0 \text{ o } y = 0, x \geq 0\right\}$;
$\operatorname{int}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy < 1\right\}$, $\operatorname{adh}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\right\}$.
$\operatorname{Fr}(C) = \operatorname{adh}(C) = C$ i $\operatorname{int}(C) = \emptyset$.
c) El conjunt A és obert, el conjunt B ni obert ni tancat i el conjunt C és tancat i compacte.

⋄⋄⋄⋄⋄

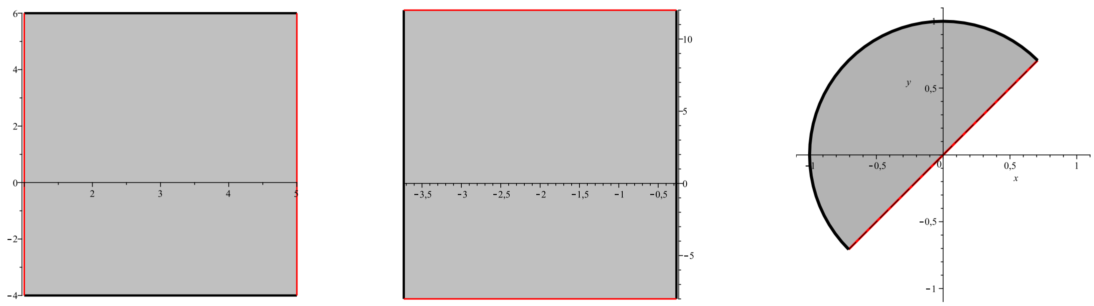
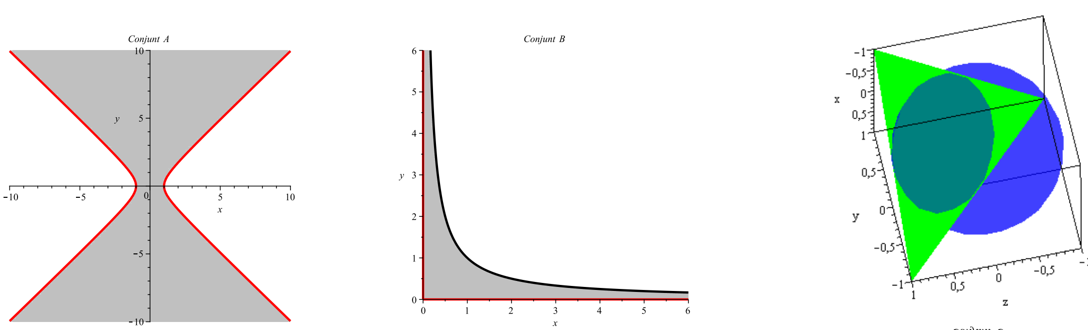


Figura 7.2: Conjunt A (esquerra), conjunt B (mig) i conjunt C (dreta).



Capítol 8

Introducció a les funcions de diverses variables.

8.1 Problemes

1 Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x,y) = \ln(1+xy)\,; \qquad \text{b) } g(x,y) = \sqrt{y \sin x}\,.$$

2 Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

$$\text{a) } z(x,y) = x^2 - y^2\,; \qquad \text{b) } z(x,y) = 1 - |x| - |y|\,,$$

corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

8.2 Taller de problemes

3 Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x,y) = x^2 - y^2\,; \quad \text{b) } g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,; \qquad \text{c) } h(x,y) = \ln(x+y)\,.$$

4 Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

$$\text{a) } z(x,y) = x^2 y\,; \qquad \text{b) } z(x,y) = x^2 + y^2 - 1\,; \qquad \text{c) } z(x,y) = |x+y| + |x-y|\,;$$

corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

5 Comproveu que les paràboles $y = ax^2$ són corbes de nivell de la funció

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}.$$

◇◇◇◇◇

8.3 A més hauríeu de fer

6 Considereu la funció

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{5}-\sqrt{9-x^2-y^2})$$

a) Trobeu i representeu gràficament el domini de f.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència del domini de f.

c) És el domini de f tancat? És obert? És acotat?

7 Feu un esboç de les corbes de nivell de la superfície $z=e^{y-x^2}$ corresponents als nivells $z=-1,\dfrac{1}{e},1,e,e^2$.

8 Feu un esboç de les corbes de nivell de la superfície $z=x^2+(y-1)^2-1$ corresponents als nivells $z=-2,-1,0,3$.

◇◇◇◇◇

8.4 Solucions

1 En la representació gròfica, en negre i gris els punts del conjunt, en vermell punts que no són del conjunt.

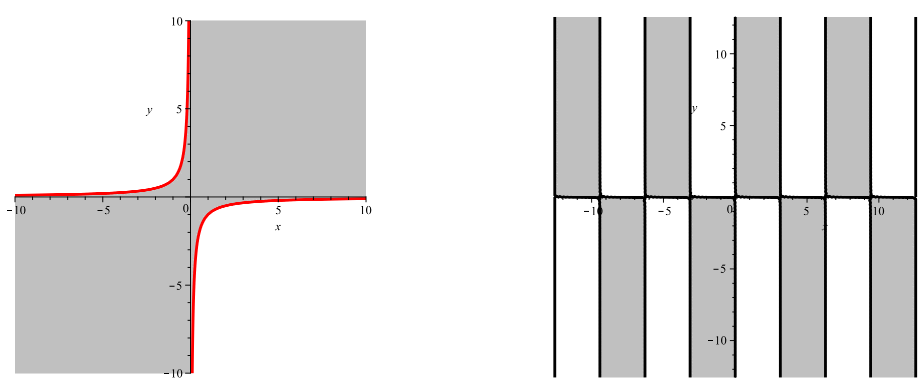


Figura 8.1: $Dom(f)$ (esquerra) i $Dom(g)$ (dreta).

a) $Dom(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0\wedge y>-1/x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0\wedge y<-1/x\}\cup$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0\}$.

b) $Dom(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2n\pi\le x\le(2n+1)\pi\,,\ y\ge 0\,,\ n\in\mathbb{N}\}\cup$
$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (2n-1)\pi\le x\le(2n)\pi\,,\ y\le 0\,,\ n\in\mathbb{N}\}$.

2 En la representació gràfica, cada corba de nivell en color diferent.

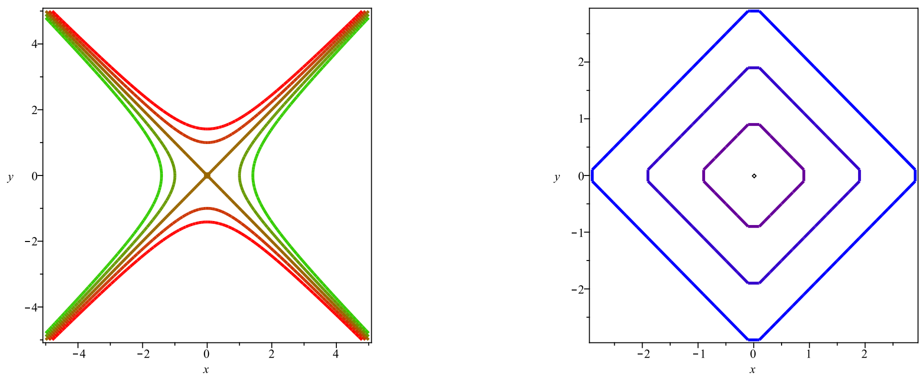


Figura 8.2: Conjunts $z = x^2 - y^2$ (esquerra) i conjunts $z = 1 - |x| - |y|$ (dreta).

3 a) Tots els punts de $\mathbb{R}^2$.
b) $\text{Dom}(g) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.
c) $\text{Dom}(h) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y > 0\right\}$.

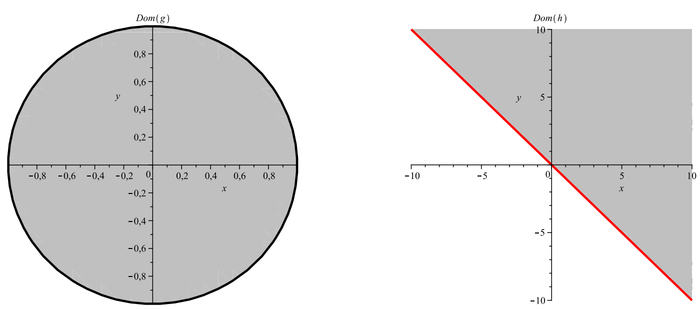


Figura 8.3: Conjunt $\text{Dom}(g)$ (esquerra) i conjunt $\text{Dom}(h)$ (dreta).

4 En la representació gràfica, cada corba de nivell en color diferent.

6 a) $Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 > 4\}$; b) $Fr(Domf) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$; $int(Domf) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$; $adh(Domf) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$; c) No és tancat ni obert, sí es acotat.

◇◇◇◇◇

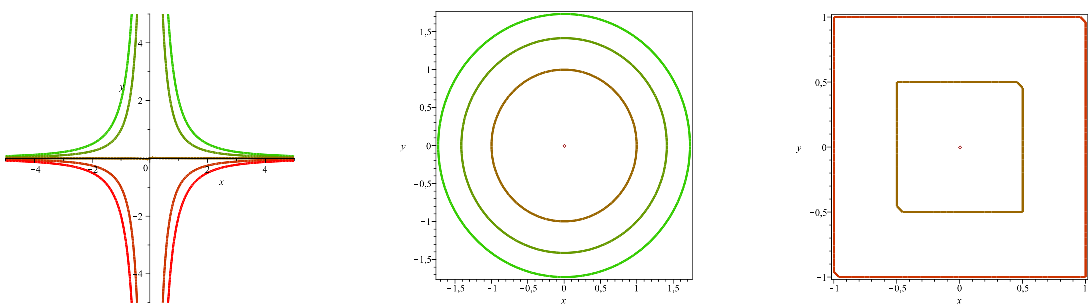


Figura 8.4: Conjunts $z = x^2y$ (esquerra), conjunts $z = x^2+y^2-1$ (mig) i conjunts $z = |x+y|+|x-y|$ (dreta).

Capítol 9

Derivació de funcions de diverses variables

9.1 Problemes

1 Calculeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

2 Donada $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P = (2,3)$ segons la direcció del vector $\vec{v} = (3/5, 4/5)$.

3 Trobar la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ en el punt $M(1,1)$ en la direcció que forma un angle de $\pi/3$ amb la direcció positiva de l'eix OX.

4 Determineu els valors de a, b, c tals que la derivada direccional de la funció

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punt $(1,2,-1)$ tingui un valor màxim de 64 en una direcció paral.lela a l'eix OZ.

5 Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, en el punt $M = (1,2,5)$;

b) la superfície $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, en el punt $M = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6 Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ tals que el seu pla tangent sigui paral·lel al pla XY.

7 Considereu les següents funcions

$$F(x,y) = (x^3y + x, y + x, x^2 + yx); \qquad f(x,y,z) = x + y + z.$$

a) Calculeu la matriu Jacobiana de F en el punt $(1,0)$.

b) Calculeu el vector gradient de f en el punt $(1,1,1)$.

c) Mitjançant la regla de la cadena, calculeu el vector gradient de $f \circ F$ en el punt $(1,0)$.

$\diamond \diamond \diamond \diamond \diamond$

9.2 Taller de problemes

8 Trobeu el gradient i la matriu Jacobiana de les funcions següents:

a) $f(x,y,z) = \ln(z + \sin(y^2 - x))$ en el punt $(1,-1,1)$;

b) $F(x,y,z) = \left(e^{3x+y}\sin(5z), \int_{y+\pi}^{x^2+z} \frac{\sin t}{t}\, dt \right)$ en el punt $(0,0,\pi/6)$;

9 Trobar la derivada de la funció $z = x^2 - xy + y^2$ en el punt $M(1,1)$ en la direcció que forma un angle α amb la direcció positiva de l'eix OX. En quina direcció aquesta derivada:

a) assoleix el seu valor màxim?

b) assoleix el seu valor mínim?

c) és igual a 0?

10 Considereu la la funció $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$.

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 3$.

b) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

c) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ decreix més ràpidament en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

d) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ és constant en el punt $P = (-1,3)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

11 Calculeu la recta normal i el pla tangent a:

a) la superfície $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y}$ en el punt $(2,-2,-4)$.

b) la superfície $z = \sin x + 2\cos y$ en el punt $(\pi/2, 0, 3)$.

12 Considereu les següents funcions

$$F(x,y) = (x^2 \sin y, \cos x, y^2); \qquad f(x,y,z) = x\ln(x+y) + z.$$

a) Calculeu la matriu Jacobiana de F en el punt $(\pi/3, 0)$.

b) Calculeu el vector gradient de f en el punt $(0, \sqrt{3}/2, 0)$.

c) Mitjançant la regla de la cadena, calculeu el vector gradient de $f \circ F$ en el punt $(\pi/3, 0)$.

13 Calculeu el vector gradient de la funció $f \circ F$, on

$$F(x, y) = (xy, x + y, x^2); \qquad f(x, y, z) = \sin(x + y + z),$$

en el punt $(0, 0)$ de dues formes:

a) Derivant $f \circ F$ directament.

b) Mitjançant la regla de la cadena, calculant la Jacobiana de F i el vector gradient de f.

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄

9.3 A més hauríeu de fer

14 Determineu l'equació del pla tangent a la superfície d'equació $z = e^{x \cos y}$ en el punt $(-1, \pi/4, e^{-\sqrt{2}/2})$.

15 Una distribució de temperatures al pla ve donada per la funció

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos x \cos y + 3 \cos 2x + 4 \cos 3y\,.$$

Trobeu la direcció de l'increment més gran de temperatura i la del decreixement més gran en el punt $(\pi/3, \pi/3)$.

16 Quina és la diferència entre el valor del gradient de la funció

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

en el punt $M(1, 2, 2)$ i el valor del valor del gradient de la funció

$$g(x, y, z) = x + y + z + 0.001 \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

en el mateix punt?

17 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció amb derivades parcials contínues, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ i tal que $f(x, x) = 3$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Demostreu que la derivada de f en el punt $(0, 0)$ en la direcció de la bisectriu del primer quadrant és zero.

b) Fent ús del resultat de l'apartat anterior, determineu la direcció per a la qual la derivada direccional de f en l'origen és màxima i el valor d'aquesta derivada.

18 Quina és la direcció en la qual $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ creix més ràpidament en el punt $(-1,1)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

19 Proveu que tots els plans tangents a la superfície $z = x\sin(x/y)$ passen per l'origen de coordenades.

◇◇◇◇◇

9.4 Solucions

1 $f'_x(x,y) = \cos x\ \sin y\ (\sin x)^{\sin y - 1}\,, \quad f'_y(x,y) = \cos y\ \ln(\sin x)\ (\sin x)^{\sin y}$

2 $\dfrac{36}{5}\,.$

3 $1-\sqrt{3}\,.$

4 $(a,b,c) = (6,24,-8)$ o $(a,b,c) = (-6,-24,8)\,.$

5 a) $2x+4y-z-5=0\,,\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}\,.$
b) $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0\,,\quad 2(x-1) = 2(1-y) = z-\dfrac{\pi}{4}\,.$

6 $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{28}{3}\right).$

7

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ (1,1,1)\,, \qquad c)\ (4,3)$$

8 a) $(-1,-2,1)\,,$ b) $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{\pi} \end{pmatrix}.$

9 a) $(1,1)$; b) $(-1,-1)$; c) $(1,-1)$ i $(-1,1)$.

10 (*Examen final 14/06/2011.*)

11 a) L'equació de la recta normal és $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+4}{-1}$ i l'equació del pla tangent és $z = 6x+4y-8\,.$

b) L'equació de la recta normal és $x = \pi/2$, $y = 0$ i l'equació del pla tangent és $z = 3$.

12

$$a) \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b) \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 0, 1\right), \qquad c) \left(0, \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

13

$$(1, 1)$$

14 $z = e^{-\sqrt{2}/2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}/2}(x+1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}/2}\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right).$

15 La direcció de l'increment més gran de temperatura és $(-3, -1)$ i la del decreixement més gran és $(3, 1)$.

18 La direcció és $(-1, 1)$ i la derivada val $\sqrt{2}$.

◇◇◇◇◇

Capítol 10

Extrems relatius.

10.1 Problemes

1 Trobeu els extrems relatius de les funcions següents. En algun dels punts crítics, el determinant de la matriu hessiana és zero, i, per tant, cal determinar el caràcter del punt fent ús directament de les definicions de màxim, mínim o punt de sella.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27\,;$

b) $f(x,y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2\,;$

c) $f(x,y) = y^2 - x^3\,;$

d) $f(x,y) = x^2y^2\ (1 - x - y)\,.$

2 Trobeu els valors de a i b per tal que la funció $f(x,y) = ax^3 + 3bxy^2 - 15a^2x - 12y + 5$ tingui un mínim local al punt $(2,1)$.

10.2 Taller de problemes

3 Trobeu les derivades parcials de primer i segon ordre de les funcions següents:

a) $x^4 + y^4 - 4x^2y^2$;	b) $\ln(x^2 + y^2)$;	c) $x\,y + \dfrac{x}{y}$;	d) $\arctan \frac{x}{y}$;
e) $x \sin(x + y)$;	f) $(x^2 + y^2)e^{x+y}$;	g) $x^{\frac{y}{z}}$;	h) $x\,y\,z\,e^{x+y+z}$.

4 Comproveu que $(0,0)$ és un punt de sella de la funció $f(x,y) = \left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 2y\right)$.

5 Trobeu i classifiqueu els punts crítics de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + xy\,;$

b) $f(x,y) = \sin x\ \sin y\,;$

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$;

d) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$;

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$;

f) $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2$;

g) $f(x,y) = xy^2\ (3-x-y)$.

6 Donada la funció $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$,

a) Trobeu els extrems relatius de f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$.

b) Analitzant l'expressió de f, esbrineu si $(0,0)$ és el punt d'extrem relatiu.

◇◇◇◇◇

10.3 A més hauríeu de fer

7 Trobeu els extrems relatius de les funcions següents. En algun dels punts crítics, el determinant de la matriu hessiana és zero, i, per tant, cal determinar el caràcter del punt fent ús directament de les definicions de màxim, mínim o punt de sella.

a) $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$;

b) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$;

c) $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$;

d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)$, amb $a \neq 0$;

e) $f(x,y) = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a\sin x + b\sin y)^2$;

f) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

h) $f(x,y) = 9x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 4y$;

i) $f(x,y) = (x+y-1)(x^4+y^4)$;

j) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$.

8 Trobeu les derivades parcials següents:

a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, si $u = x\ln(xy)$;

b) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, si $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$;

c) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, si $u = e^{xyz}$;

d) $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, si $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$.

◇◇◇◇◇

10.4 Solucions

1 a) Mínim relatiu a $(3,3)$, i $(0,0)$ és punt sella.
b) Màxim relatiu a $(1,1)$ i mínims relatius en tots els punts de la corba $x^2-2x+4y^2-8y=0$.
c) $(0,0)$ és punt sella.
d) Màxims relatius a $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ i als punts de les semirectes $x=0,\ y>1$ i $y=0,\ x>1$.
Mínims relatius als punts de les semirectes $x=0,\ y<1$ i $y=0,\ x<1$.
Els punts de sella són $(1,0)$ i $(0,1)$.

2 $a=1$, $b=1$.

5 a) Mínim relatiu a $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.
b) Màxims relatius a $\left(\dfrac{\pi}{2}(2n+1),\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\right)$ si $n+k$ és parell.
Mínims relatius a $\left(\dfrac{\pi}{2}(2n+1),\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\right)$ si $n+k$ és senar.
Els punts de sella són $(n\pi,k\pi)$.
c) Màxim relatiu a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i mínim relatiu a $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
d) Mínin relatiu a $(1,1)$.
e) Mínims relatius $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ i punt sella a $(0,0)$.
f) Els punts de sella són $(0,0)$ i $\left(9,\dfrac{27}{2}\right)$.
g) Màxims relatius a $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right)$, i als punts de les semirectes $y=0,\ x<0$ i $y=0,\ x>3$.
Mínims relatius als punts del segment $y=0,\ 0<x<3$.
Els punts de sella són $(0,0)$, $(0,3)$ i $(3,0)$.

6 a) No hi ha cap extrem relatiu, els punts $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ són punts de sella.
b) $(0,0)$ és mínim relatiu.

◇◇◇◇◇

Capítol 11

Optimització

11.1 Problemes

1 Considereu la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$. Mitjançant el mètode del descens, aproximeu en 5 passos el mínim, començant amb el punt inicial $(1,1)$ i utilitçant un pas de longitud 0.25

2 Considereu la funció $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$. Completeu la taula amb els diferents passos del mètode del descens del gradient

	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\tilde{t}_i$
inicial	$(-1,-1)$	0.6667		0.5
$i=1$		-0.7043		0.1
$i=2$		-0.7071	-	$-$

3 Considereu la funció $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$. Apliqueu el mètode del descens del gradient per trobar un mínim relatiu començant pel punt inicial $(2,2)$ i adaptant les longituds del pas.

◇◇◇◇◇

11.2 Taller de problemes

4 Considereu la funció $f(x,y) = e^{x^2+y^4}$. Mitjançant el mètode del descens, aproximeu en 3 passos el mínim, començant amb el punt inicial $(1,1)$ i utilitçant un pas de longitud 0.25. On ens estem apropant?

5 Considereu la funció $f(x,y) = \sin(x^2+y)$. Completeu la taula amb els diferents passos del mètode del descens del gradient

	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\tilde{t}_i$
inicial	$(1,1)$			0.5
$i=1$				0.5
$i=2$				0.1
$i=3$		-0.9996	-	-

6 Considereu la funció $f(x,y) = xy^2(3-x-y)$. Apliqueu el mètode del ascens del gradient per trobar un màxim relatiu començant pel punt inicial $(1,1)$ i adaptant les longituds del pas.

7 Considereu la funció $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$. Apliqueu el mètode del descens del gradient per trobar un mínim relatiu començant pel punt inicial $(0,0)$ i adaptant les longituds del pas.

◇◇◇◇◇

◇◇◇◇◇

11.3 Solucions

1 $(0.116, 0.116)$.

2

	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\tilde{t}_i$
inicial	$(-1,-1)$	0.6667	(-1,-1)	0.5
$i=1$	(-0.6465,-0.6465)	-0.7043	(0.1642,0.1641)	0.1
$i=2$	(-0.7172,-0.7171)	-0.7071	-	$-$

3 Mínim relatiu a $(3, 3)$.

4 $(1, 1) \to (0.8882, 0.9168) \to (0.7634, 0.7002) \to (0.5775, 0.5330)$

5

	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\tilde{t}_i$
inicial	$(1,1)$	0.9093	(-0,8323,-0.4161)	0.5
$i=1$	(1.4472,1.2236)	-0.1755	(-0.7772,-0.2685)	0.5
$i=2$	(1.9198,1.3869)	-0.9358	(1.3531,0.3524)	0.1
$i=3$	(1.8230,1.3617)	-0.9996	-	-

6 Màxim relatiu a $(3/4, 3/2)$.

7 Mínim relatiu a $(1, 1)$.

◇◇◇◇◇