Àlgebra

Examens resolts

Jaume Martí-Farré
José Luis Ruiz

Grau en Intel·ligència Artifical

Departament de Matemàtiques
Facultat d'Informàtica de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 2023

Aquest document conté els problemes que han aparegut en diferents actes d'avaluació de l'assignatura d'*Àlgebra* del *Grau en Intel·ligència Artificial* de la Facultat d'Informàtica de Barcelona, U.P.C., des de setembre de 2021.

ÍNDEX

CAPÍTOL 1

CURS 2021–2022

1.1 Problemes avaluables

Prova 1

1 Determineu els nombres complexos que coincideixen amb la cinquena potència del seu conjugat.

Solució: Hem de resoldre l'equació $z = \overline{z}^5$. Si calculem el mòdul, obtenim: $r = |z| = |\overline{z}^5| = |z|^5 = r^5$. Una solució és $r = 0$, d'on $z = 0$. Si $r = |z| \neq 0$, dividim els dos membres per $|z|$ i obtenim $r^4 = |z|^4 = 1$, d'on $r = |z| = 1$. Ara, expressem $z = 1_\alpha$ i imposem la condició del problema:

$$1_\alpha = (\overline{1_\alpha})^5 \Rightarrow 1_\alpha = 1_{-5\alpha} \Rightarrow \alpha = -5\alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solucions són, per tant: $z = 0$, $z = 1_{k\pi/3}$, amb $k = 0,1,2,3,4,5$. És a dir, les solucions són 0 i les arrels sisenes de la unitat.

Prova 2

2 Sigui $J = (a_{ij})_{ij}$ la matriu $n \times n$, $n \geq 1$, tal que $a_{ij} = 1$, per a tot $i, j = 1, \dots, n$.

1) Calculeu les potències J^2, J^3 i conjectureu una fórmula per la potència J^k, per a $k \geq 1$.

2) Proveu per inducció sobre $k \geq 1$ que la fórmula que heu trobat a l'apartat anterior és correcta.

3) Calculeu el rang de les matrius J^k, amb $k \geq 1$.

4) Considerem els vectors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Quina condició ha de complir el vector $\mathbf{b}$ per tal que el sistema d'equacions lineals $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ sigui compatible?

5) Trobeu la solució general del sistema homogeni $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, on $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

6) Trobeu la solució general del sistema $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, on $\mathbf{b} = (n, \dots, n)$ i expresseu-la com a suma d'una solució particular i la solució general del sistema homogeni associat.

Solució:

1) Com que totes les entrades de J són iguals, hi ha prou amb calcular el producte d'una fila per una columna, que és clarament igual a n. Per tant, J^2 té totes les entrades iguals a n; és a dir, $J^2 = n \cdot J$. Ara, $J^3 = J^2 \cdot J$ i, igual que abans, hi ha prou amb calcular el producte d'una fila de J^2 per una columna de J, que és clarament igual a n^2. Per tant, $J^3 = n^2 \cdot J$. Conjecturem doncs que si $k \geq 1$, aleshores $J^k = n^{k-1} \cdot J$.

2) Provem per inducció (simple) sobre $k \geq 1$ que $J^k = n^{k-1} \cdot J$.

   Pas base: $k = 1$. Si $k = 1$, tenim d'una banda que $J^1 = J$ i de l'altra que $n^{1-1} \cdot J = n^0 \cdot J = J$. Per tant, la propietat es compleix per a $k = 1$.

   Pas inductiu: Fixem un enter $k \geq 1$ i suposem que $J^k = n^{k-1} \cdot J$ (hipòtesi d'inducció). Hem de provar que $J^{k+1} = n^k \cdot J$ (tesi d'inducció). Procedim:

$$J^{k+1} = J^k \cdot J \overset{\text{HI}}{=} n^{k-1} J \cdot J = n^{k-1} J^2 = n^{k-1} \cdot n \cdot J = n^k \cdot J,$$

   on a la segona igualtat hem aplicat la hipòtesi d'inducció i a la penúltima la propietat que hem vist a l'apartat a): $J^2 = J$.

3) Com que $J^k = n^{k-1} \cdot J$ i $n^{k-1} \neq 0$, el rang de J^k és igual al rang de J. Ara bé, totes les files de J són iguals; per tant, J és equivalent a la matriu esglaonada que té la primera fila formada per uns i la resta per zeros. Per tant, el rang de J, i per tant el de J^k, és 1.

4) Si apliquem el mètode de Gauss a la matriu ampliada $(J^k|\mathbf{b})$, obtenim la matriu:

$$(J^k|\mathbf{b}) \overset{G}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} n^{k-1} & \cdots & n^{k-1} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2 - b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n - b_1 \end{array}\right)$$

   Per tal que el sistema sigui compatible, el rang de la matriu del sistema, que és 1 com hem vist abans, ha de ser igual al rang de la matriu ampliada. Per tant, $b_i - b_1 = 0$, per a $i = 2, \ldots, n$. És a dir, el sistema és compatible si i només si totes les b_i són iguals.

5) El sistema homogeni $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ és equivalent al sistema homogeni $J \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ (dividint totes les equacions per n^{k-1}). Però en aquest sistema totes les equacions són iguals a:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

   Per tant, la solució ve donada per:

$$x_1 = -x_2 - \cdots - x_n, \quad x_2 = x_2, \quad \ldots \quad x_n = x_n.$$

   És a dir, les incògnites $x_2, \ldots, x_n$ són paràmetres (hi ha $n-1$ graus de llibertat) i x_1 queda expressada en funcions dels paràmetres. Observem que si $n = 1$, el sistema és compatible determinat i la solució és $x_1 = 0$.

6) Per l'apartat 4, el sistema és compatible (determinat si i només si $n = 1$; i indeterminat si $n > 1$, perquè el rang és 1). Com que el nombre de graus de llibertat és $n-1$, podem expressar les solucions com (dividint per n^{k-1}):

$$x_1 = n^{2-k} - x_2 - \ldots - x_n, \quad x_2 = x_2, \quad \ldots \quad x_n = x_n.$$

És a dir, la solució s'expressa com a suma d'una solució particular més la solució general del sistema homogeni associat:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n^{2-k}, 0, \ldots, 0) + (-x_2 - \ldots - x_n, x_2, \ldots, x_n).$$

Prova 3

3 L'objectiu d'aquest problema és comprovar la propietat següent en un cas concret:

Si $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ són subespais vectorials, aleshores: $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Considerem els següents subespais de $\mathbb{R}^6$:

$$F = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculeu una base ortonormal de $F \cap G$ i completeu-la a una base ortonormal B de $\mathbb{R}^6$.

2) Calculeu les coordenades del vector $w = (2, 3, -1, 6, 5, 2)$ en la base B.

3) Calculeu el subespai $(F \cap G)^\perp$.

4) Calculeu el subespai $F^\perp$.

5) Calculeu el subespai $G^\perp$.

6) Calculeu el subespai $F^\perp + G^\perp$. És una suma directa?

7) Comproveu que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solució: Notem per B_F i A_G les matrius de l'enunciat de manera que $F = \mathrm{Col}(B_F)$ i $G = \mathrm{Nul}(A_G)$.

1) Per a trobar una base de $F \cap G$, podem procedir de dues maneres: si expressem F com a $F = \mathrm{Nul}(A_F)$, llavors tenim que $F \cap G = \mathrm{Nul}(\frac{A_F}{A_G})$ i resolem el sistema homogeni associat; o bé escrivim una combinació lineal de les columnes de la matriu B_F i substituïm al sistema homogeni donat per la matriu A_G i trobem les condicions que han de satisfer els coeficients de la combinació lineal.

1a) Sigui $v = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6$ un vector arbitrari. Que $v \in F$ és equivalent a que el rang de la matriu $(B_F | v^T)$ sigui 3. Fent transformacions elementals per files, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les equacions de F són: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$. És a dir, $F = \mathrm{Nul}(A_F)$, on:

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment:

$$F \cap G = \mathrm{Nul}\left(\frac{A_F}{A_G}\right) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i aquest sistema té per solucions: $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, $x_2 = -x_3 - x_4$, $x_4 = x_4$. Per tant, $F \cap G$ té dimensió 2 i una base és: $(0, -1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0, 0)$. És a dir:

$$F \cap G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1b) Els vectors de F són les combinacions lineals de les columnes de B_F:

$$\alpha(1,1,0,0,0,0) + \beta(1,0,1,0,0,0) + \gamma(1,0,0,1,0,0) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma, 0, 0).$$

Aquest vector pertany a G si i només satisfà el sistema homogeni donat per la matriu A_G; és a dir: $\alpha + \beta + \gamma = 0$. D'aquí obtenim que $\gamma = -\alpha - \beta$. Subtituïnt aquesta condició a la combinació lineal, obtenim que un vector de $F \cap G$ és de la forma:

$$\alpha(0,1,0,-1,0,0) + \beta(0,0,1,-1,0,0).$$

És a dir:

$$F \cap G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a obtenir una base ortonormal de $F \cap G$, apliquem el mètode de Gram-Schmidt a la base $v_1 = (0,-1,1,0,0,0)$, $v_2 = (0,-1,0,1,0,0)$ (usem el resultat de l'apartat 1a).

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = (0,-1,1,0,0,0)\\
w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0,-1/2,-1/2,1,0,0)
\end{aligned}$$

Finalment:

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = (0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,0), \quad u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = (0,-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0,0)$$

és una base ortonormal de $F \cap G$.

Ara hem de completar la base u_1, u_2 a una base ortonormal de $\mathbb{R}^6$. Per a facilitar els càlculs, treballarem amb la base $u_1' = \sqrt{2}u_1 = (0,-1,1,0,0,0)$, $u_2' = \sqrt{6}u_2 = (0,-1,-1,2,0,0)$, que es ortogonal. En primer lloc, completarem aquesta base a una base ortogonal de $\mathbb{R}^6$ i per últim normalitzarem els vectors obtinguts. Considerem la matriu $\mathrm{Col}(u_1', u_2', e_1, \ldots, e_6)$ que té per columnes els vectors u_1', u_2' i els vectors de la base canònica. Esglaonant aquesta matriu obtenim:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Observem que a les columnes corresponents als vectors de la base canònica els pivots estan a les columnes que de e_1, e_2, e_5, e_6. Per tant, $u_1', u_2', e_1, e_2, e_5, e_6$ és una base de $\mathbb{R}^6$. Ara apliquem el mètode de Gram-Schmidt a aquesta base, però mantenint u_1', u_2', que ja són ortogonals, i començant per e_1:

$$\begin{aligned}
w_1 &= u_1' = (0,-1,1,0,0,0)\\
w_2 &= u_2' = (0,-1,-1,2,0,0)\\
w_3 &= e_1 - \frac{e_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_1 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = e_1 = (1,0,0,0,0,0)\\
w_4 &= e_2 - \frac{e_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_2 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_2 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 = (0,1/3,1/3,1/3,0,0)
\end{aligned}$$

pels càlculs agafem $w_4' = (0,1,1,1,0,0)$:

$$\begin{aligned}
w_5 &= e_5 - \frac{e_5 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_5 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_5 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 - \frac{e_5 \cdot w_4'}{w_4' \cdot w_4'} w_4' = e_5 = (0,0,0,0,1,0)\\
w_6 &= e_5 - \frac{e_6 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_6 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_6 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 - \frac{e_6 \cdot w_4'}{w_4' \cdot w_4'} w_4' - \frac{e_6 \cdot w_5}{w_5 \cdot w_5} w_5\\
&= e_6 = (0,0,0,0,0,1).
\end{aligned}$$

Així doncs, una base ortogonal de $\mathbb{R}^6$ que esten la base u_1', u_2' de $F \cap G$ és $u_1', u_2', e_1, w_4', e_5, e_6$ y una base ortonormal B és:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0)\\
u_2 &= (0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0)\\
u_3 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0)\\
u_4 &= (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0)\\
u_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0)\\
u_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

2) Les coordenades del vector $w = (2, 3, -1, 6, 5, 2)$ en aquesta base B es poden calcular utilitzant els coeficients de Fourier, donat que la base B és ortonormal:

$$w = \sum_{i=1}^{6} (w \cdot u_i) u_i.$$

Però: $w \cdot u_1 = -4/\sqrt{2}$, $w \cdot u_2 = 2/\sqrt{6}$, $w \cdot u_3 = 2$, $w \cdot u_4 = 5/\sqrt{3}$, $w \cdot u_5 = 5$ i $w \cdot u_6 = 2$. És a dir:

$$w_B = (-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 2, \frac{5}{\sqrt{3}}, 5, 2).$$

Una altra manera de calcular aquestes coordenades és utilitzant la fórmula de canvi de base, tenint en compte que en aquest cas $M(B \to C)^{-1} = M(B \to C)^T$, ja que les bases B i C són ortonormals.

3) Calculem ara $(F \cap G)^{\perp}$. A l'apartat 1 hem calculat equacions de $F \cap G$:

$$F \cap G = \mathrm{Nul}(A_{A\cap G}), \quad A_{F\cap G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i també una base de $F \cap G$:

$$F \cap G = \mathrm{Col}(B_{F\cap G}), \quad B_{F\cap G} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$(F\cap G)^{\perp} = \mathrm{Nul}(B_{F\cap G}^{T}) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Col}(A_{A\cap G}^{\perp}) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una altra manera de calcular $(F\cap G)^{\perp}$ seria: $u_1,\dots,u_6$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^6$ tal que $F\cap G = \langle u_1, u_2\rangle$. Per tant: $(F\cap G)^{\perp} = \langle u_3, u_4, u_5, u_6\rangle$.

4) Sabem que $F = \mathrm{Col}(B_F) = \mathrm{Nul}(A_F)$. Per tant, $F^{\perp} = \mathrm{Col}(A_F^T) = \mathrm{Nul}(B_F^T)$. És a dir:

$$F^{\perp} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Sabem que $G = \mathrm{Nul}(A_G)$. Per tant:

$$G^{\perp} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a expressar $G^{\perp}$ de la forma $\mathrm{Nul}(M)$, afegim una columna genèrica $(x_1,\dots,x_6)^T$ a la matriu A_G^T i imposem que la matriu resultant tingui rang 3. Obtenim les equacions $x_3 = x_2$, $x_4 = x_2$, $x_6 = 0$. És a dir:

$$G^{\perp} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Tenim $F^{\perp} + G^{\perp} = \mathrm{Col}(N|M)$, on $F^{\perp} = \mathrm{Col}(N)$ i $G^{\perp} = \mathrm{Col}(M)$, on N i M s'han obtingut en apartats anteriors. Per tant:

$$F^{\perp} + G^{\perp} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i comprovem directament que el resultat és igual a $F^{\cap}G^{\perp}$.

És $F^{\perp}+G^{\perp}$ suma directa? Tenim: $\dim(F^{\perp}+G^{\perp})=4$ i $\dim(F^{\perp})=\dim(G^{\perp})=3$. Per la fórmula de Grassmann:

$$\dim(F^{\perp}\cap G^{\perp})=-\dim(F^{\perp}+G^{\perp})+\dim(F^{\perp})+\dim(G^{\perp})=-4+3+3=2.$$

En particular, $F^{\perp}\cap G^{\perp}\neq\{0\}$ i, per tant, $F^{\perp}+G^{\perp}$ no és suma directa.

Prova 4

4 Considerem la matriu real següent:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1) Calculeu la descomposició en valors singulars de la matriu A.

2) Digueu quins són els valors singulars, els vectors singulars per la dreta i els vectors singulars per l'esquerra de A.

3) Doneu bases ortonormals dels subespais $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Col}(A^T)$ i $\mathrm{Nul}(A^T)$.

4) Descomposeu la matriu A com a suma de dues matrius de rang 1.

Solució: Com que el número de files és inferior al número de columnes, treballem amb la matriu $A\cdot A^T$:

$$AA^T=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu ja és diagonal. Per tant, els valors singulars són $\sigma_1=\sqrt{3}$ i $\sigma_2=\sqrt{2}$ i la matriu Σ és:

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Els vectors singulars per l'esquerra són directament els vectors de la base canònica: $u_1=(1,0)$ i $u_2=(0,1)$; és a dir:

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculem ara els vectors singulars per la dreta i la matriu V. Tenim:

$$v_1=\frac{1}{\sigma_1}A^T\cdot u_1^T=(1/\sqrt{3},0,-1/\sqrt{3},0,-1/\sqrt{3})^T$$
$$v_2=\frac{1}{\sigma_2}A^T\cdot u_2^T=(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{3})^T.$$

Ara hem de completar els vectors v_1, v_2 a una base ortonormal de $\mathbb{R}^5$. En aquest cas, a simple vista, veiem que afegint els vectors $v_3 = (1,0,1,0,0)$, $v_4 = (0,1,0,1,0)$ i $v_5 = (1,0,0,0,1)$, tenim una base ortogonal de $\mathbb{R}^5$ i normalitzant-la obtenim les columnes de la matriu V:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Finalment, la descomposició en valors singulars de la matriu A és: $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$.

A partir de les matrius U i V, i tenint en compte que el rang de A és 2, obtenim bases ortonormals dels subespais següents:

- Una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)$ està formada per les columnes de la matriu U.
- Una base ortonormal de $\mathrm{Nul}(A)$ està formada per les tres últimes columnes de V.
- Una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A^T)$ està formada per les 2 primeres columnes de V.
- $\mathrm{Nul}(A^T)$ és el subespai $\{(0,0)\}$.

1.2 Examen parcial

5 Determineu els nombres complexos no nuls tals que el seu invers és la quarta potència del seu conjugat.

Solució: Sigui $z = r_\alpha$ un nombre complex no nul, amb $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Llavors tenim:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}, \qquad \overline{z} = r_{-\alpha}.$$

Per tant, la condició $z^{-1} = (\overline{z})^4$ és equivalent a $(1/r)_{-\alpha} = (r_{-\alpha})^4 = r^4_{-4\alpha}$ que és equivalent a les dues condicions següents:

$$\frac{1}{r} = r^4, \qquad -\alpha = -4\alpha + 2k\pi,$$

on $k \in \mathbb{Z}$. La equació $\frac{1}{r} = r^4$ és equivalent a $r^5 = 1$ i com que $r \neq 0$, la única solució real i positiva és $r = 1$. És a dir, els nombres complexos que busquem tenen tots mòdul 1. La condició sobre l'argument és equivalent a $3\alpha = 2k\pi$. Per tant, les solucions són els nombres complexos de la forma:

$$1_{\frac{2k\pi}{3}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Però és fàcil veure que només obtenim tres valors diferents que es corresponen amb els valors de $k = 0, 1, 2$. És a dir, les solucions són:

$$1, \quad 1_{2\pi/3}, \quad 1_{4\pi/3},$$

que són les arrels cúbiques de la unitat.

6 Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerem la matriu $M_\lambda = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ definida com:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1) Calculeu el determinant de M_λ.

2) Calculeu la matriu inversa de M_2.

3) Determineu les solucions, segons els valors de $\mu \in \mathbb{R}$, del sistema d'equacions $M_{-1} \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, on $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $\mathbf{b} = (1, 1, \mu, \mu)$.

Solució:

1) Desenvolupant per la primera fila, per exemple, obtenim:

$$\det(M_\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2,$$

on els dos determinants 3×3 els hem desenvolpulat per la última fila.

2) Aplicant el mètode de Gauss-Jordan, per exemple, obtenim:

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

3) Aplicant el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el sistema és compatible si i només si $\mu = -1$. En el cas que $\mu = -1$, el sistema és equivalent a $x_1 - x_4 = -1$, $x_2 - x_3 = -1$. Per tant, si $\mu = -1$, el sistema és compatible i indeterminat amb rang 2 i dos graus de llibertat i les solucions es poden expressar com:

$$x_1 = -1 + x_4, \quad x_2 = -1 + x_3, \quad x_3 = x_3, \quad x_4 = x_4.$$

7 Considerem els vectors $v_1 = (1,0,1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1,1)$, $v_3 = (0,1,1,0,1)$, $v_4 = (0,0,0,1,1)$, $v_5 = (0,0,0,0,1)$ i $w = (1,1,1,1,a)$ de $\mathbb{R}^5$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real.

1) Demostreu que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ és una base de $\mathbb{R}^5$ i determineu les coordenades del vector w en aquesta base.

2) Calculeu ls dimensió del subespai $\langle v_1, v_2, w\rangle$. Determineu els valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ per als quals existeix una matriu $M \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Nul}(M) = \langle v_1, v_2, w\rangle$.

3) En el cas $a = 2$, determineu una matriu A tal que $\mathrm{Nul}(A) = \langle v_1, v_2, w\rangle$.

Solució:

1) Com que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 són cinc vectors de $\mathbb{R}^5$, per demostrar que són base únicament hem de veure que són linelament independents i per a això hem de veure que la matriu que aquests cinc vectors determinen té rang màxim. La matriu P que té aquests vectors per columnes:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

té determinant $\det(P) = 1 \neq 0$ i, per tant, el conjunt B és una base de $\mathbb{R}^5$. Les coordenades del vector w en aquesta base seran $w = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, on $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ són les solucions del sistema:

$$P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

És fàcil veure que la solució d'aquest sistema és $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ i $\lambda_5 = a - 2$. Per tant, les coordenades de w en la base B són $(1,1,0,0,a-2)$.

2) Com que $w = v_1 + v_2 + (a-2)v_5$, aleshores $\langle v_1, v_2, w\rangle = \langle v_1, v_2,\rangle$ si $a = 2$ i $\langle v_1, v_2, w\rangle = \langle v_1, v_2, v_5\rangle$ si $a \neq 2$. Per tant, com que els vectors v_1, v_2, v_5 són linealment independents, podem concloure que el subespai $\langle v_1, v_2, w\rangle$ té dimensió 2 si $a = 2$ i té dimensió 3 si $a \neq 2$. Així, si $M \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$ és una matriu tal que $\mathrm{Nul}(M) = \langle v_1, v_2, w\rangle$, aleshores tindrem que $\dim\langle v_1, v_2, w\rangle = 5 - \mathrm{rang}(M) \geq 5 - 2 = 3$. D'on $\dim\langle v_1, v_2, w\rangle = 3$ i, per tant $a \neq 2$.

3) Si $a = 2$, aleshores $\langle v_1, v_2, w\rangle = \langle v_1, v_2,\rangle$ té dimensió 2. Per tant, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \langle v_1, v_2, w\rangle$ si i només si la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$$

té rang 2. Aplicant el mètode de Gauss, la matriu anterior es transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

i, per tant, el seu rang val 2 si i només si $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = x_5 - x_1 - x_2 = 0$. Així, $\langle v_1, v_2, w\rangle = \mathrm{Nul}(A)$, on:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Examen final

Qüestions

8 Siguin F i G dos subespais de $\mathbb{R}^n$ diferents tals que $\dim(F) = \dim(G) = n-1$. Sigui A una matriu tal que $\mathrm{Nul}(A) = F \cap G$. Determineu el rang de la matriu A i justifiqueu quantes files, com a mínim, i quantes columnes pot tenir la matriu A.

Solució: Un subespai F de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-1$ ve donat per una equació:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

on algun dels a_i és no nul. En efecte, un subespai de dimensió $n-1$ ve donat per un sistema homogeni amb $n-1$ graus de llibertat i, per tant, de rang 1. És a dir:

$$F = \mathrm{Nul}(a_1 \dots a_n), \quad \mathrm{rang}(a_1 \dots a_n) = 1, \quad \dim(F) = n-1.$$

Anàlogament, $G = \mathrm{Nul}(b_1 \dots b_n)$, amb algun dels b_j no nul. Per tant, el subespai intersecció $F \cap G$ ve donat per:

$$F \cap G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 2, perquè les files no són proporcionals (ja que els subespais F i G són diferents). És a dir, $F \cap G = \mathrm{Nul}(A)$, amb A una matriu de rang 2 amb n columnes i un mínim de dues files.

9 Estudieu la diagonalització de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$. En cas que diagonalitzi, calculeu una matriu invertible P i una matriu diagonal D tals que $D = P^{-1}AP$.

Solució: Calculem primer el polinomi característic:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(x^2-2x+2).$$

Aquest polinomi té una única solució real: $x = 0$. Per tant, la matriu A *no* diagonalitza sobre $\mathbb{R}$. Sobre $\mathbb{C}$ podem descompondre el polinomi com:

$$p_A(x) = -x(x^2-2x+2) = -x(x-(1+i))(x-(1-i)).$$

Com que té solucions complexes diferents (és a dir, totes tenen multiplicitat algebraica igual a 1), la matriu *sí* diagonalitza sobre $\mathbb{C}$. Els valors propis són $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1+i$ i $\lambda_3 = 1-i$. Per tant, una possible matriu diagonal és:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Calculem ara els subespais propis $E_0 = \mathrm{Nul}(A)$, $E_{1+i} = \mathrm{Nul}(A-(1+i)I)$ i $E_{1-i} = \mathrm{Nul}(A-(1-i)I)$. Tenim, resolent els sistemes:

$$E_0 = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1+i} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$E_{1-i} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de canvi de base és:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}.$$

10 Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Determineu una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ en la qual el vector e_1 té coordenades $(1,1,0)$, el vector e_2 té coordenades $(1,2,1)$ i el vector e_3 té coordenades $(1,2,2)$. Quin vector $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ té coordenades $(3,6,5)$ en aquesta base?

Solució: De les dades del problema podem deduir la matriu de la base B_e en la base B_v:

$$M(B_e \to B_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim:

$$M(B_v \to B_e) = M(B_e \to B_v)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir, la base que demana el problema és:

$$v_1 = (2,-2,1), \quad v_2 = (-1,2,-1), \quad v_3 = (0,-1,1).$$

Finalment, les coordenades de w en la base canònica són:

$$M(B_v \to B_e) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11 Demostreu que si la matriu A següent és una matriu diagonalitzable i té polinomi característic $(x-5)(x-1)^3$, aleshores $a = b = 1$ i $c = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Solució: La matriu A té dos valors propis diferents: $\lambda_1 = 5$, amb multiplicitat algebraica $m_5 = 1$, i $\lambda_2 = 1$, amb multiplicitat algebraica $m_1 = 3$. Com que A és diagonalitzable, les multiplicitats algebraiques han de coincidir amb les corresponents multiplicitats geomètriques. Això passa automàticament si la multiplicitat algebraica és 1, perquè tenim la desigualtat $1 \le m_\lambda \le \dim(E_\lambda)$. Per tant, només hem d'imposar que la multiplicitat geomètrica del valor propi $\lambda_2 = 1$ sigui 3; és a dir, $\dim(E_1) = 3$. Però això és equivalent a dir que el rang de la matriu $A - 1I$ és $4 - 3 = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c-1 \end{pmatrix}$$

i aquesta matriu té rang 1 si i només si la última columna és $(1,1,1,1)^T$. És a dir, si i només si $a = b = 1$ i $c = 2$.

Problema

12 Siguin $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ les aplicacions lineals definides per les matrius:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculeu les dimensions dels nuclis i les imatges d'aquestes aplicacions lineals.

2) Comproveu que $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(g)$ són complementaris ortogonals.

3) Demostreu que $a = b = 0$ i $c = -1$ són els únics valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que els vectors $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ i $v_2 = (a, b, 1, c)$ són una base ortogonal de $\mathrm{Ker}(f)$. Comproveu que els vectors $v_3 = (1, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 1, 1)$ determinen una base ortogonal de $\mathrm{Im}(g)$.

4) Doneu les coordenades de $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ en la base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (amb els valors de a, b i c de l'apartat anterior).

5) Determineu la projecció ortogonal de $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ sobre $\mathrm{Ker}(f)$ i sobre $\mathrm{Im}(g)$.

6) El vector $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ està més proper a $\mathrm{Ker}(f)$ o a $\mathrm{Im}(g)$?

Solució:

1) Es veu fàcilment que el rang de A_f és 2 (la primera i tercera columnes són independents) i que el rang de A_g és també 2 (la segona columna és 1/3 de la suma de les altres dues columnes). Per tant, tenim:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(A_f) = 2, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, tenim que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$. Anàlogament, tenim:

$$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rang}(A_g) = 2, \quad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

i com que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$, tenim que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 3 - 2 = 1$.

2) Recordem que si $F = \mathrm{Nul}(A)$, llavors $F^\perp = \mathrm{Col}(A^T)$; i si $F = \mathrm{Col}(B)$, llavors $F^\perp = \mathrm{Nul}(B^T)$. Per tant:

$$(\mathrm{Im}(g))^\perp = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(f).$$

Alternativament, podem expressar $\mathrm{Ker}(f)$ com a $\mathrm{Col}(B)$ resolent el sistema homogeni donat per la matriu A_f i obtenim: $x = y, y = y, z = -t, t = t$. És a dir:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$(\mathrm{Ker}(f))^{\perp} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}(g).$$

3) Tenim:

$$(1,-1,0,0)\cdot(a,b,1,c) = a-b = 0 \iff a = b.$$

A més, el vector $(a,a,1,c)$ pertany a $\mathrm{Ker}(f)$ si i només si $A_f \cdot (a,a,1,c)^T = (0,0,0)^T$. És a dir, si i només si $a+a=0$ i $1+c=0$ si i només si $a=0$ i $c=-1$.

Els vectors v_3 i v_4 són ortogonals:

$$v_3 \cdot v_4 = (1,1,0,0)\cdot(0,0,1,1) = 0;$$

per tant, són linealment independents. Si veiem que també generen el subespai $\mathrm{Im}(g)$, determinaran una base ortogonal d'aquest subespai. Hem de veure que el rang de la matriu següent és 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu té rang 2. Això implica que el subespai generat per les dues primeres columnes, que és $\mathrm{Im}(g)$ segons hem vist a l'apartat (a), coincideix amb el subespai generat per les dues últimes columnes.

4) Per calcular les coordenades del vector w en la base v_1, v_2, v_3, v_4, que és ortogonal, utilitzarem els coeficientes de Fourier. Si posem $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, aleshores:

$$\alpha_1 = \frac{w\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} = \frac{-2}{2} = -1, \qquad \alpha_2 = \frac{w\cdot v_2}{v_2\cdot v_2} = \frac{-2}{2} = -1,$$
$$\alpha_3 = \frac{w\cdot v_3}{v_3\cdot v_3} = \frac{4}{2} = 2, \qquad \alpha_4 = \frac{w\cdot v_4}{v_4\cdot v_4} = \frac{6}{2} = 3.$$

És a dir, les coordenades de $w = (1,3,2,4)$ en la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ són $(-1,-1,2,3)$:

$$(1,3,2,4) = (-1)\cdot(1,-1,0,0) + (-1)\cdot(0,0,1,-1) + 2\cdot(1,1,0,0) + 3\cdot(0,0,1,1).$$

5) Observem que v_1, v_2 és una base de $\mathrm{Ker}(f)$, que v_3, v_4 és una base de $\mathrm{Im}(g)$ i que aquests dos subespais són complementaris ortogonals. Per tant, tenim:

$$P_{\mathrm{Ker}(f)}(w) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (-1)\cdot(1,-1,0,0) + (-1)\cdot(0,0,1,-1) = (-1,1,-1,1),$$
$$P_{\mathrm{Im}(g)}(w) = \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 2\cdot(1,1,0,0) + 3\cdot(0,0,1,1) = (2,2,3,3).$$

6) Recordem que la distància d'un vector a un subespai és la norma de la component ortogonal del vector respecte del subespai. Per tant, per calcular la distància de w a cada subespai, calculem els vectors components ortogonals $C_{\text{Ker}(f)}(w)$ i $C_{\text{Im}(g)}(w)$:

$$C_{\text{Ker}(f)}(w) = w - P_{\text{Ker}(f)}(w) = (2,2,3,3),$$
$$C_{\text{Im}(g)}(w) = w - P_{\text{Im}(g)}(w) = (-1,1,-1,1),$$

i les seves normes:

$$||C_{\text{Ker}(f)}(w)|| = \sqrt{26}, \quad ||C_{\text{Im}(g)}(w)|| = 2.$$

Per tant, el vector w està més a prop del subespai $\text{Im}(g)$ que del subespai $\text{Ker}(f)$.

1.4 Examen de recuperació

Qüestions

13 Determineu la solució general del sistema homogeni:

$$\begin{cases} ix + (1-2i)y + (1-i)z = 0 \\ -x + (2+i)y - (1+i)z = 0 \end{cases}$$

i la solució general del sistema:

$$\begin{cases} ix + (1-2i)y + (1-i)z = 1-2i \\ -x + (2+i)y - (1+i)z = 2+i \end{cases}$$

Solució: Aplicant el mètode de Gauss a la matriu del sistema homogeni donat, obtenim:

$$\begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ -1 & 2+i & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ 0 & 1-2i & -1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix}$$

on la primera transformació consisteix en multiplicar la segona fila per $-i$ i sumar-li la primera fila i a la segona transformació hem restat la primera fila a la segona fila. Per tant, tenim que $z = 0$ i $x = \big((-1+2i)/i\big)y$. És a dir, la solució general del sistema homogeni és:

$$x = (2+i)\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

El segon sistema té per sistema homogeni associat el primer sistema. Per tant, la seva solució general s'obté sumant a una solució particular la solució general del sistema homogeni. Ara bé, està clar que $x = 0, y = 1, z = 0$ és una solució del segon sistema. Per tant, la solució general d'aquest és:

$$x = (2+i)\lambda, \quad y = 1+\lambda, \quad z = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

14 Sabem que el vector $w = (a,1,b)$ de $\mathbb{R}^3$ té coordenades $(-1,c,-2)$ en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, on $v_1 = (1,-2,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$. Determineu els valors dels paràmetres a,b,c.

Solució: Que les coordenades de w en la base B siguin $(-1,c,-2)$ vol dir que:

$$w = (-1)v_1 + cv_2 + (-2)v_3 = -(1,-2,0) + c(1,1,0) - 2(1,1,1) = (c-3,c,-2).$$

Igualant a $w = (a,1,b)$, obtenim: $c = 1$, $b = -2$, $a = -2$.

15 Sigui $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y) = (x+2y, -5x+7y)$. Doneu la matriu associada a f en la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, on $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,5)$.

Solució: Siguin C la base canònica i $B = \{v_1, v_2\}$ la base donada. La matriu de f en la base canònica i la matriu de la base B en la base canònica són, respectivament:

$$M(f;C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad M(B \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f en la base B és:

$$M(f;B) = M(B\to C)^{-1} \cdot M(f;C) \cdot M(B \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

ja que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

16 Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

on $a \in \mathbb{R}$. Demostreu que hi ha un únic valor del paràmetre a per al qual la matriu A és diagonalitzable. Per aquest valor doneu una matriu diagonal D i una matriu invertible P de manera que $A = PDP^{-1}$.

Solució: El polinomi característic de la matriu és:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^3(a-x),$$

desenvolupant per la quarta columna i després la matriu que resulta és triangular superior.

Si $a=-1$, llavors A té un únic valor propi de multiplicitat algebraica 4 i sabem que una matriu $n \times n$ amb un únic valor propi de multiplicitat algebraica n diagonalitza si i només si la matriu ja és diagonal, que no és el cas. Per tant, si A diagonalitza, llavors $a \neq -1$.

Si $a \neq -1$, llavors A té dos valors propis: -1, amb multiplicitat 3, i a, simple. La matriu A diagonalitza si i només si $\dim(E_{-1}) = 3$. Però $\dim(E_{-1}) = 4 - \operatorname{rang}(A+I) = 3$ si i només si $a = 3$, ja que:

$$A+I = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusió: A diagonalitza si i només si $a=3$. Amb aquest valor de a calculem bases dels subespais propis E_{-1} i E_3. Obtenim:

$$E_{-1} = \operatorname{Nul}(A+I) = \operatorname{Nul}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \operatorname{Nul}(A-3I) = \operatorname{Nul}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17 Sigui $F \subseteq \mathbb{R}^4$ un subespai de dimensió 2. Sabem que la projecció ortogonal dels vectors $w_1 = (2,3,0,1)$ i $w_2 = (3,0,1,2)$ sobre F són $P_F(w_1) = (1,2,1,2)$ i $P_F(w_2) = (2,1,2,1)$, respectivament. Determineu una base del complementari ortogonal de F i unes equacions que defineixin F.

Solució: En primer lloc, sabem que $4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$; és a dir, $\dim(F^\perp) = 2$. Per tant, per a determinar el subespai ortgonal, és suficient calcular dos vectors linealment independents de $F^\perp$. Per exemple:

$$v_1 = w_1 - P_F(w_1) = (2,3,0,1) - (1,2,1,2) = (1,1,-1,-1),$$
$$v_2 = w_2 - P_F(w_2) = (3,0,1,2) - (2,1,2,1) = (1,-1,-1,1).$$

Així doncs:

$$F^\perp = \operatorname{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \operatorname{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ja que si $F^\perp = \operatorname{Col}(B)$, llavors $F = \operatorname{Nul}(B^T)$.

Problema

18 Siguin A, B, C, M les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $C^T C = M$.

a) Determineu, en funció dels paràmetres a i b, els rangs de les matrius A i B. Per a quins valors dels paràmetres a i b es té que $C = AB$? Quan $C = BA$? És C una matriu invertible?

b) Doneu bases i dimensions dels subespais $F = \mathrm{Nul}(A)$ i $G = \mathrm{Col}(B)$. Quan $F + G = \mathrm{Col}(C)$? Quan $F \cap G = \mathrm{Nul}(C)$?

c) Siguin f, g, h les aplicacions lineals definides per les matrius A, B i C, respectivament. Doneu bases i dimensions dels nuclis i les imatges d'aquestes aplicacions lineals. Quan $h = g \circ f$?

d) Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 els vectors de $\mathbb{R}^4$ definits per les columnes de la matriu C. Justifiqueu que v_1, v_2, v_3, v_4 determinen una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ i doneu les coordenades d'un vector genèric $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ en aquesta base.

Solució:

a)
- Es comprova directament que $\mathrm{rang}(A) = 3$ si $a = 0$ i $\mathrm{rang}(A) = 4$ si $a \neq 0$.
- Esglaonant la matriu B, comprovem fàcilment que $\mathrm{rang}(B) = 3$ si $b = 2$, i que $\mathrm{rang}(B) = 4$ si $b \neq 2$.
- La igualtat $C = AB$ no és certa mai, ja que la matriu AB és 5×5 i C és 4×4.
- Pel que fa a la igualtat $C = BA$: és certa si i només si $a = 1$ i $b = -3$.
- Finalment, tenim que $\det(C^T C) = \det(C^T)\det(C) = \det(C)^2 = \det(M) = 40^2 \neq 0$, donat que $C^T C = M$ i $\det(C^T) = \det(C)$. Per tant, la matriu C sempre és invertible perquè el seu determinant és no nul.

b)
- $F = \mathrm{Nul}(A)$: les equacions de F són: $x + t = 0$, $x + y = 0$, $y = 0$, $az = 0$, $t = 0$. És a dir, $x = y = t = 0$ i $az = 0$. Per tant, si $a \neq 0$, llavors $F = \{(0,0,0,0)\}$ i $\dim(F) = 0$; i si $a = 0$, llavors F está generat pel vector $(0,0,1,0)$ i $\dim(F) = 1$.
- $G = \mathrm{Col}(B)$: si esglaonem la matriu B, veiem que si $b = 2$, llavors $\dim(G) = \mathrm{rang}(B) = 3$ i G està generat per les tres primeres columnes de B; i si $b \neq 2$, llavors $\dim(G) = \mathrm{rang}(B) = 4$ i com que G és un subespai de $\mathbb{R}^4$, tenim que $G = \mathbb{R}^4$. Resumint, si $b \neq 2$, $G = \mathbb{R}^4$; i si $b = 2$, llavors:

$$G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $F+G = \mathrm{Col}(C)$?: hem vist al primer apartat que la matriu C és invertible. Per tant, té rang 4 i en conseqüència $\mathrm{Col}(C) = \mathbb{R}^4$. És a dir, hem d'estudiar quan és $F+G = \mathbb{R}^4$. Si $b \neq 2$, llavors $G = \mathbb{R}^4$ i, per tant, $F+G = F+\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$. Estudiem què passa si $b = 2$. Si, a més, $a = 0$, llavors $F = \{(0,0,0,0)\}$ i, per tant, $F+G = G$, que té dimensió 3. Si $a \neq 0$, llavors $F = \mathrm{Col}(0,0,1,0)^T$ i, per tant:

$$F+G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ja que si $F = \mathrm{Col}(A_1)$ i $G = \mathrm{Col}(A_2)$, llavors $F+G = \mathrm{Col}(A_1|A_2)$. Aquesta matriu té rang 4 i per tant $F+G = \mathbb{R}^4$. Resumint:
  - si $b \neq 2$: $F+G = \mathbb{R}^4 = \mathrm{Col}(C)$.
  - si $b = 2$ i $a = 0$: $F+G = G \neq \mathrm{Col}(C)$.
  - si $b = 2$ i $a \neq 0$: $F+G = \mathbb{R}^4 = \mathrm{Col}(C)$.
- $F \cap G = \mathrm{Nul}(C)$?: el rang de C és 4 i, per tant, $\mathrm{Nul}(C) = \{(0,0,0,0)\}$. Per tant, hem de veure quan $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$. Si $a = 0$, llavors $F = \{(0,0,0,0)\}$ i, per tant, $F \cap G = F = \{(0,0,0,0)\}$. Si $a \neq 0$, llavors $F \neq \{(0,0,0,0)\}$ i si $b \neq 2$, llavors $G = \mathbb{R}^4$ i $F \cap G = F \cap \mathbb{R}^4 = F \neq \{(0,0,0,0)\}$. Només ens falta estudiar el cas en què $a \neq 0$ i $b = 2$. En aquest cas, F està generat pel vector $(0,0,1,0)$ i cap múltiple d'aquest vector pertany a G ja que $\dim(G) = \mathrm{rang}(B) = 3$ i:

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

En conseqüència, $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$. Resumint:
  - si $a = 0$: $F \cap G = F = \mathrm{Nul}(C)$.
  - si $a \neq 0$ i $b \neq 2$: $F \cap G = F \neq \mathrm{Nul}(C)$.
  - si $a \neq 0$ i $b = 2$: $F \cap G = \mathrm{Nul}(C)$.

c)

- $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, $M(f) = A$. Llavors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Nul}(A)$ i $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}(A)$. Si $a \neq 0$, llavors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Nul}(A) = \{(0,0,0,0)\}$, com hem vist a l'apartat b), i una base de $\mathrm{Im}(f)$ està formada per les 4 columnes de A, que té rang 4.
- $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $M(g) = B$. Llavors $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Nul}(B)$ i $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Col}(B)$. Si $b \neq 2$, llavors $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Col}(B) = \mathbb{R}^4$, segons hem vist a l'apartat b). En aquest cas, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim(\mathrm{Im}(g)) = 5 - 4 = 1$. Resolent el sistema homogeni de matriu associada B, quan $b \neq 2$, obtenim:

$$\mathrm{Ker}(g) = \langle (0,-1,1,-1,0) \rangle.$$

Si $b = 2$, llavors B té rang 3, una base de $\mathrm{Im}(g)$ està formada per les tres primeres columnes de B i $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim(\mathrm{Im}(g)) = 5 - 3 = 2$. Resolent el sistema homogeni de matriu associada B, quan $b = 2$, obtenim:

$$\mathrm{Ker}(g) = \langle (0,-1,1,-1,0), (-2,2-0,0,1) \rangle.$$

- $h:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $M(h) = C$. Llavors $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Nul}(C)$ i $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Col}(C)$. Com que el rang de C és 4, tenim que h és injectiva i exhaustiva; és a dir: $\mathrm{Ker}(h) = \{(0,0,0,0)\}$ i $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^4$.
- Tenim: $h = g \circ f \iff M(h) = M(g \circ f) = M(g)M(f) \iff C = BA \iff a = 1, b = -3$, la última equivalència per l'apartat a).

d) Sabem que el rang de C és 4; per tant, les columnes de C formen una base de $\mathbb{R}^4$. Que v_1, v_2, v_3, v_4 sigui una base ortogonal vol dir que, a més, $v_i \cdot v_j = 0$, per a tot $i, j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. Però aquesta condició és equivalent a que el producte $C^T C$ sigui una matriu diagonal, que és el cas com es diu a l'enunciat: $C^T C = M$. A més, sabem que $v_1 \cdot v_1 = v_4 \cdot v_4 = 10$ i $v_2 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_3 = 4$. Les coordenades d'un vector $w = (x, y, z, t)$ en aquesta base són els seus coeficients de Fourier i es poden calcular així:

$$w = \sum_{i=1}^{4} \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i = \frac{1}{10}(2x + y - 2z - t)v_1 + \frac{1}{4}(x - y + z - t)v_2 + \frac{1}{10}(x + y + z + t)v_3 + \frac{1}{10}(x - 2y - z + 2t)v_4.$$

CAPÍTOL 2

CURS 2022–2023

2.1 Problemes avaluables

Prova 1

19 Trobeu tots els valors que pren l'expressió $(1+\sqrt{3}i)^n+(1-\sqrt{3}i)^n$, si n és un nombre natural.

Solució: Notem $z=1+\sqrt{3}i$. Aquest nombre complex té mòdul 2 i argument $\pi/3$ i, per tant, $z=2_{\pi/3}$. Aleshores:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^n+(1-\sqrt{3}i)^n &= z^n+\bar{z}^n = z^n+\overline{z^n}\\ &= 2\mathrm{Re}(z^n) = 2\mathrm{Re}((2_{\pi/3})^n) = 2\mathrm{Re}(2^n_{n\pi/3})\\ &= 2^{n+1}\cos(n\pi/3).\end{aligned}$$

Per tant:

$$(1+\sqrt{3}i)^n+(1-\sqrt{3}i)^n = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{si } n=6k;\\ 2^n, & \text{si } n=6k+1 \text{ o si } n=6k+5;\\ -2^n, & \text{si } n=6k+2 \text{ o si } n=6k+4;\\ -2^{n+1}, & \text{si } n=6k+3;\end{cases}$$

on $k\in\mathbb{N}$.

20 Calculeu el producte de les arrels n-èsimes de la unitat, on $n\geq 2$ és un nombre natural. *Pista*: podeu usar la fórmula $\sum_{k=1}^m k = m(m+1)/2$ si la necessiteu.

Solució: Les arrels n-èsimes de la unitat són $w_0,\ldots,w_{n-1}$, on $w_k=1_{2k\pi/n}$. Per tant:

$$\prod_{k=0}^{n-1} w_k = \prod_{k=0}^{n-1} 1_{2k\pi/n} = 1_{\sum_{k=0}^{n-1} 2k\pi/n} = 1_{\pi(n-1)}$$

ja que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = \pi(n-1).$$

Per tant:

$$\prod_{k=0}^{n-1} w_k = \begin{cases} \cos((n-1)\pi) = 1, & \text{si } n \text{ és senar;} \\ \cos((n-1)\pi) = -1, & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

Prova 2

21 Sigui $a \in \mathbb{R}$ i considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu el rang de la matriu A. Quan és A invertible?

b) Calculeu A^{-1} si $a = 0$.

c) Determineu els valors del paràmetre a pels quals:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

22 Considerem el sistema homogeni:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 0 \\ 2x + az &= 0 \end{aligned}$$

a) Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat?

b) Calculeu les solucions del sistema segons els diferents valors del paràmetre a.

c) Determineu a i b de manera que $(x, y, z) = (2, b, 4)$ sigui una solució del sistema.

23 Considerem el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 3 \\ 2x + az &= c \end{aligned}$$

a) Per a quins valors dels paràmetres a i c el sistema és compatible? Quan és compatible determinat? Quan és compatible indeterminat?

b) Determineu els valors de a i c de manera que $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ sigui una solució del sistema. Quan és l'única solució del sistema?

c) Demostreu que no existeixen a i c de manera que $(x,y,z) = (0,0,1)$ sigui una solució del sistema.

d) Determineu la solució general del sistema en el cas $a = 0$ i c arbitrari.

e) Determineu la solució general del sistema en el cas a arbitrari i $c = -2$.

Prova 3

24 Siguin $u, v \in \mathbb{R}^n$. Demostreu que els vectors $u+v$ i $u-v$ són ortogonals si i només si els vectors u i v tenen la mateixa norma.

Solució: Tenim:

$$(u+v)\cdot(u-v) = u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u - v\cdot v = u\cdot u - v\cdot v = ||u||^2 - ||v||^2,$$

ja que $u\cdot v = v\cdot u$. Per tant, $u+v$ és ortogonal a $u-v$ si i només si $(u+v)\cdot(u-v) = 0$ que per la igualtat anterior és equivalent a $||u||^2 = ||v||^2$.

Geomètricament, hem demostrat que les diagonals d'un paral·lelogram situat en un pla són perpendiculars si i només es tracta d'un romb.

25 Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + ay + z = 0\}, \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = y - bz = 0\},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Doneu bases de $F^\perp$ i de $G^\perp$.

b) Per a quins valors dels paràmetres a i b formen F i G suma directa?

c) Per a quins valors dels paràmetres a i b són F i G ortogonals?

Solució:

a) Tenim:

$$F = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Observem que F té dimensió 2, per a tot $a \in \mathbb{R}$ i que G té dimensió 1, per a tot $b \in \mathbb{R}$. D'aqui obtenim que:

$$F^\perp = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G^\perp = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

b) Per definició, els subespais F i G formen suma directa si i només si $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Com que tant F com G estan definits per sistemes d'equacions, la intersecció es pot definir pel sistema d'equacions que s'obté considerant les equacions de F i les de G a la vegada:

$$F \cap G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

El determinant d'aquesta matriu és $ab + b + 1$. Per tant, el rang de la matriu és 3 si i només si $ab + b + 1 \neq 0$. En aquest cas, el sistema és compatible i determinat; i, per tant, la única solució és $(0,0,0)$. Conclusió: F i G formen suma directa si i només si $ab + b + 1 \neq 0$.

c) Els subespais F i G són orotgonals si i només si:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir: $F \perp G \iff a = b = 1$.

26 Considerem els vectors de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,-2)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)$ i $w = (-1,2,2,-3)$.

a) Determineu $u_4 \in \mathbb{R}^4$ de manera que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ sigui una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ i la quarta coordenada de w en aquesta base sigui $\sqrt{3}$.

b) Determineu si el vector w està més a prop del subespai $\langle u_1, u_2 \rangle$ o del subespai $\langle u_3, u_4 \rangle$.

Solució:

a) Posem $u_4 = (x, y, z, t)$. Com que $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ha de ser una base ortonormal, tenim que $u_i \cdot u_4 = 0$, per a $i = 1,2,3$, i $u_4 \cdot u_4 = 1$. Dels productes escalars nuls deduïm el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0, \\ y - z - 2t &= 0, \\ y - z + t &= 0. \end{aligned}$$

D'aqui obtenim que: $x = y = z$, $t = 0$. A més, les coordenades del vector w en la base B són els coeficients de Fourier en aquesta base; és a dir:

$$(w)_B = (w \cdot u_1, w \cdot u_2, w \cdot u_3, w \cdot u_4) = (w \cdot u_1, w \cdot u_2, w \cdot u_3, \sqrt{3}).$$

Per tant, $w \cdot u_4 = -x + 2y + 2z - 3t = \sqrt{3}$. Substituint les condicions anteriors en aquesta igualtat, obtenim: $x = y = z = \sqrt{3}/3$ i $t = 0$. Per tant:

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0).$$

b) Trobem les coordenades del vector w en la base B (coeficients de Fourier):

$$w\cdot u_1=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6},\quad w\cdot u_2=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6},\quad w\cdot u_3=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3},\quad w\cdot u_4=\sqrt{3}.$$

És a dir: $(w)_B=(\sqrt{6},\sqrt{6},-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Com que la base B és ortonormal, tenim:

$$P_{\langle u_1,u_2\rangle}(w)=\sqrt{6}(u_1+u_2),\qquad C_{\langle u_1,u_2\rangle}(w)=\sqrt{3}(u_3-u_4)$$
$$P_{\langle u_3,u_4\rangle}(w)=\sqrt{3}(u_1-u_2),\qquad C_{\langle u_3,u_4\rangle}(w)=\sqrt{6}(u_1+u_2).$$

La distància de w al subespai $\langle u_1,u_2\rangle$ és:

$$||C_{\langle u_1,u_2\rangle}(w)||=\sqrt{3}\cdot||u_3-u_4||=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6},$$

i la distància de w al subespai $\langle u_3,u_4\rangle$ és:

$$||C_{\langle u_3,u_4\rangle}(w)||=\sqrt{6}\cdot||u_1+u_2||=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{12}.$$

Com que $\sqrt{6}<\sqrt{12}$, resulta que el vector w està més a prop del subespai $\langle u_1,u_2\rangle$ que del subespai $\langle u_3,u_4\rangle$.

Prova 4

27 Sigui $(x_n)_{n\geq 1}$ una successió de nombres reals. Diem que la successió està definida per una *recurrència lineal d'ordre* k si, excepte els k primers termes, cada terme ve donat per una relació del tipus:

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k},\quad \text{si } n\geq k+1,$$

on $a_1,a_2,\ldots,a_k$ són nombres reals constants (coeficients de la recurrència). La successió queda completament determinada si donem els k primers termes. Per exemple, la successió de Fibonacci es pot definir per una recurrència lineal d'ordre $k=2$:

$$F_1=1,\quad F_2=1,\qquad F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\quad \text{si } n\geq 3.$$

Aquí els coeficients de la recurrència són $a_1=a_2=1$.

Una fórmula *tancada* o fórmula *general* per a una successió és una expressió del tipus $x_n=F(n)$ que permet calcular directament el terme n-èssim sense usar la recurrència.

L'objectiu d'aquest problema és donar un mètode basat en la diagonalització d'endomorfismes per a calcular una fórmula tancada per a certes successions definides per recurrències lineals com l'anterior.

Concretament, donada una successió $(x_n)_{n\geq 1}$ definida per una recurrència lineal d'ordre k:

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k},\quad n\geq k+1,$$

on $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$, definim el seu endomorfisme associat com:

$$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k,\quad f(y_1,\ldots,y_k)=(y_2,\ldots,y_k,a_1y_k+a_2y_{k-1}+\cdots+a_ky_1)$$

Suposarem que $(x_n)_{n\geq 0}$ és una successió tal que el seu endomorfisme associat és diagonalitzable.

Considerem la successió de Fibonacci: $F_1=1$, $F_2=1$, i $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, si $n\geq 3$.

a) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el seu endomorfisme associat: $f(x,y) = (y, x+y)$. Demostreu, per inducció sobre $n \geq 1$, que es verifica:

$$f^n(1,1) = (F_{n+1}, F_{n+2}), \quad \text{per a tot } n \geq 1;$$

on $f^1 = f$ i $f^n = f \circ f^{n-1}$ si $n \geq 2$.

b) Demostreu que f és diagonalitzable. Trobeu una matriu diagonal D i una matriu invertible P tal que $M(f) = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

c) Apliqueu els apartats anteriors per a trobar la fórmula general de la successió de Fibonacci.

Pista: la fórmula general és una expressió de la forma $F_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$, on c_1, c_2 són constants i α_1, α_2 són constants relacionades amb l'endomorfisme f.

Solució:

a) Pas base: $n = 1$. Tenim:

$$f^1(1,1) = f(1,1) = (1,2) = (F_2, F_3).$$

Pas d'inducció: suposem que $n \geq 1$ i que $f^n(1,1) = (F_{n+1}, F_{n+2})$ (hipòtesi d'inducció). Hem de veure que la propietat és certa per a $n+1$; és a dir, que es verifica:

$$f^{n+1}(1,1) = (F_{n+2}, F_{n+3}).$$

Procedim:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(1,1) &= f(f^n(1,1)) = f(F_{n+1}, F_{n+2}) && \text{per hip. d'inducció} \\ &= (F_{n+2}, F_{n+1} + F_{n+2}) \\ &= (F_{n+2}, F_{n+3}) && \text{per def. de la successió.} \end{aligned}$$

b) El polinomi característic és $X^2 - X - 1$ i els valors propis són $\alpha_1 = (1+\sqrt{5})/2$ i $\alpha_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Com que f té dos valors propis diferents de multiplicitat algebràica 1, f és diagonalitzable. Els vectors propis es troben resolent els sistemes homogenis amb matrius associades $A - \alpha_1 I$ i $A - \alpha_2 I$. Tenim:

$$E_{\alpha_1} = \mathrm{Nul}(A - \alpha_1 I) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \mathrm{Nul}(A - \alpha_2 I) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu diagonal, la matriu de canvi de base i la inversa d'aquesta són, respectivament:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Segons hem demostrat a l'apartat a), tenim que $f^{n-1}(1,1) = (F_n, F_{n+1})$. Per tant, la fórmua general de la successió de Fibonacci és la primera coordenada del vector $f^{n-1}(1,1)$. Per a calcular la potència f^{n-1} usem la matriu diagonal obtinguda a l'apartat b). Com que $A = PDP^{-1}$, obtenim que

$$\begin{aligned} A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} &= \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^{n-1} & 0\\ 0 & \alpha_2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ -\alpha_1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_2\alpha_1^{n-1}-\alpha_1\alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1}-\alpha_1^{n-1}\\ \alpha_2\alpha_1^{n}-\alpha_1\alpha_2^{n} & \alpha_2^{n}-\alpha_1^{n}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant, el terme general F_n, que és la primera coordenada del vector:

$$\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n+1}\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

és igual a:

$$F_n = \frac{\alpha_2-1}{(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_1}\cdot\alpha_1^n + \frac{1-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2}\cdot\alpha_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

28 Apliqueu el mètode anterior per a trobar la fórmula general de la recurrència lineal d'ordre 3 següent:

$$x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=1,\qquad x_n = 2x_{n-1}+x_{n-2}-2x_{n-3},\quad \text{si } n\ge 4.$$

Solució: L'endomorfisme associat és $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(y_1,y_2,y_3) = (y_2,y_3,-2y_1+y_2+2y_3),\qquad A = M(f) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

- La relació que es compleix ara és $f^n(-1,0,1) = (x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3})$.
- El polinomi característic de f és: $-X^3+2X^2-X-2 = -(X-2)(X-1)(X+1)$. Com que f té tres valors propis simples, f és diagonalitzable.
- Els vectors propis són:

$$E_2 = \mathrm{Col}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad E_1 = \mathrm{Col}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad E_{-1} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

- Per tant:

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 6 & 3 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

- Finalment, el terme general de la successió és la primera coordenada del vector $f^{n-1}(-1,0,1)$:

$$x_n = -\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot(-1)^{n+1}+\frac{2^n}{3}.$$

2.2 Examen parcial

29 Determineu el mòdul i l'argument dels nombres complexos z no nuls per als quals la matriu:

$$\begin{pmatrix} z & z^{-1} \\ \overline{z} & z^3 \end{pmatrix}$$

no és invertible. Quantes solucions diferents hi ha i quines són?

Solució: La matriu donada no és invertible si i només si el seu determinant és 0. És a dir, si i només si:

$$\begin{vmatrix} z & z^{-1} \\ \overline{z} & z^3 \end{vmatrix} = z^4 - \overline{z}z^{-1} = 0,$$

que equival a que $z^5 = \overline{z}$. Si expressem z en forma polar: $z = r_\alpha$ i tenint en compte que $z \neq 0$, tenim:

$$\begin{aligned} z^5 = \overline{z}, \quad z \neq 0 &\Leftrightarrow (r^5)_{5\alpha} = r_{-\alpha}, \quad r > 0 \\ &\Leftrightarrow r^5 = r \quad \text{i} \quad 5\alpha = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow r = 1 \quad \text{i} \quad 6\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

És a dir, les solucions són $1_{k\pi/3}$, on $k \in \mathbb{Z}$. Els diferents valors d'aquesta expressió són:

$$\begin{aligned} &k = 0: \quad z = 1_0 = 1, && k = 3: \quad z = 1_\pi = -1, \\ &k = 1: \quad z = 1_{\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, && k = 4: \quad z = 1_{4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ &k = 2: \quad z = 1_{2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, && k = 5: \quad z = 1_{5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Observem que les solucions del problema són les arrels sisenes de la unitat.

30 En $\mathbb{R}^4$ considerem els subespais F i G següents:

$$F = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

a) Determineu matrius M i N tals que $F = \mathrm{Nul}(M)$ i $G = \mathrm{Col}(N)$.

b) Calculeu les dimensions dels subespais $F + G$ i $F \cap G$.

Solució: Notem:

$$B_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Per a expressar F com a $\mathrm{Nul}(M)$, considerem un vector $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ i imposem que la matriu que té per columnes les columnes de B_F i $(x,y,z,t)^T$ tingui el mateix rang que la matriu B_F:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & t-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & t-x-z \end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $\mathrm{rang}(B_F) = 2$ i, per tant, $\dim(F) = 2$ (és a dir, F és un pla de $\mathbb{R}^4$); a més: $(x,y,z,t) \in F$ si i només si $y-x=0$, $t-x-z=0$. Per tant:

$$F = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a expressar G com a $\mathrm{Col}(N)$, resolem el sistema homogeni que té per matriu associada la matriu A_G:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tenim: el rang del sistema és 2 si i només si $a=-1$; i és 3 si i només si $a \neq -1$.

- $a \neq -1$: $\dim(G) = 4 - \mathrm{rang}(A_G) = 4-3 = 1$ (és a dir, G és una recta de $\mathbb{R}^4$). Resolent el sistema, obtenim: $x = y = -z$, $t = 0$; és a dir:

$$G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $a = -1$: $\dim(G) = 4 - \mathrm{rang}(A_G) = 4-2 = 2$ (és a dir, G és un pla de $\mathbb{R}^4$). Resolent el sistema, obtenim: $x = -z-t$, $y = -z+t$, $z = z$, $t = t$; és a dir:

$$G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Per a calcular $\dim(F+G)$ i $\dim(F \cap G)$, hem de distingir els casos $a=-1$ o $a \neq -1$.

- $a \neq -1$: $\dim(G) = 1$, $\dim(F) = 2$. El subespai $F+G$ es pot expressar com $\mathrm{Col}(B_F|N)$:

$$F+G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'observa que les columnes 1 i 3 són linealment independents i que la seva suma és el doble de la segona; per tant, el rang d'aquesta matriu és 2 i $\dim(F+G)=2$. Aplicant la fórmula de Grassmann, obtenim:

$$\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)=2+1-2=1.$$

Això implica, en particular, que $F\cap G=G$ i que $G\subseteq F$.

- $a=-1$: $\dim(G)=2$ i $\dim(F)=2$. El subespai $F+G$ es pot expressar com $\mathrm{Col}(B_F|N)$:

$$F+G=\mathrm{Col}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\1&0&-1&1\\1&1&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}.$$

S'observa que la suma de les columnes 1 i 3 és el doble de la segona i que les columnes 1, 3 i 4 són linealment independents; per tant, el rang d'aquesta matriu és 3 i $\dim(F+G)=3$. Aplicant la fórmula de Grassmann, obtenim:

$$\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)=2+2-3=1.$$

És a dir, els dos plans F i G es tallen en una recta.

31

a) En $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors:

$$u_1=(1,1,1,2), u_2=(1,2,1,1), u_1'=(1,4,1,-1), u_2'=(1,-3,1,6).$$

Demostreu que els conjunts de vectors $\{u_1,u_2\}$ i $\{u_1',u_2'\}$ generen el mateix subespai F de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$.

b) Siguin $w_1,w_2\in\mathbb{R}^4$ dos vectors tals que $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$ i siguin v_1,v_2,v_1',v_2' els vectors de $\mathbb{R}^4$ definits per:

$$v_1=u_1+u_2+w_1+w_2, \qquad v_1'=u_1+2u_2+w_1+2w_2,$$
$$v_2=u_1+3u_2-w_1-2w_2, \qquad v_2'=2u_1+4u_2+3w_1+5w_2.$$

Justifiqueu que $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ i $\{u_1,u_2,v_1',v_2'\}$ són dues bases de $\mathbb{R}^4$ i calculeu la matriu de canvi de base de la primera base a la segona.

c) Calculeu en F la matriu de canvi de base de la base $\{u_1,u_2\}$ a la base $\{u_1',u_2'\}$.

Solució:

a) Hem de veure que $\dim\langle u_1,u_2\rangle=\dim\langle u_1',u_2'\rangle=\dim\langle u_1,u_2,u_1',u_2'\rangle=2$. Considerem les matrius:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\\2&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1\\4&-3\\1&1\\-1&6\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&-3\\1&1&1&1\\2&1&-1&6\end{pmatrix}.$$

Com que $\langle u_1, u_2\rangle = \mathrm{Col}(A_1)$, aleshores $\dim\langle u_1, u_2\rangle = \mathrm{rang}(A_1) = 2$, ja que el menor que determinen les dues primeres files de la matriu A_1 és no nul (val 1). Com que $\langle u_1', u_2'\rangle = \mathrm{Col}(A_2)$, aleshores $\dim\langle u_1', u_2'\rangle = \mathrm{rang}(A_1) = 2$, ja que el menor que determinen les dues primeres files de la matriu A_2 és no nul (val -7). Finalment, aplicant el mètode de Gauss a la matriu A, obtenim la matriu:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que té rang 2. Per tant, $\dim\langle u_1, u_2, u_1', u_2'\rangle = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A') = 2$.

b) Sigui $B = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$, que és una base de $\mathbb{R}^4$. Prenent coordenades en aquesta base, tenim que $(u_1)_B = (1,0,0,0)$, $(u_2)_B = (0,1,0,0)$, $(w_1)_B = (0,0,1,0)$, $(w_2)_B = (0,0,0,1)$, $(v_1)_B = (1,1,1,1)$, $(v_2)_B = (1,3,-1,-2)$, $(v_1')_B = (1,2,1,2)$ i $(v_2)_B' = (2,4,3,5)$. Per veure que els conjunts $B_1 = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ i $B_2 = \{u_1, u_2, v_1', v_2'\}$ són dues bases de $\mathbb{R}^4$, considerem les matrius M_1 i M_2 que tenen per columnes les coordenades d'aquests vectors en la base B, respectivament; és a dir:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Únicament hem de veure que aquestes matrius tenen determinant no nul. En aquest cas, $\det(M_1) = \det(M_2) = -1 \neq 0$. Per tant, $M_1 = M(B_1 \to B)$ i $M_2 = M(B_2 \to B)$.

La matriu de canvi de base $M(B_1 \to B_2)$ és:

$$M(B_1 \to B_2) = M(B \to B_2)M(B_1 \to B) = M_2^{-1}M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La matriu $M(\{u_1', u_2'\} \to \{u_1, u_2\})$ és la matriu 2×2 que té per primera columna les coordenades del vector u_1' en la base $\{u_1, u_2\}$ i que té per segona columna les coordenades del vector u_2' en la base $\{u_1, u_2\}$; és a dir,

$$M(\{u_1', u_2'\} \to \{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

on $(u_1')_{\{u_1,u_2\}} = (a, b)$ i $(u_2')_{\{u_1,u_2\}} = (c, d)$. Per tant, hem de resoldre els sistemes d'equacions lineals:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre els dos sistemes a la vegada, perquè tenen la mateixa matriu associada. La matriu ampliada associada a aquests sistemes és la matriu:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

que és la matriu A de l'apartat (a). De la matriu A' calculada en (a), obtenim que les solucions del sistemes són $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = -4$. Així doncs:

$$M(\{u_1', u_2'\} \to \{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.3 Examen final

Problema

32 Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Justifiqueu que la matriu A és diagonalitzable. Sabent que A té exactament dos valors propis diferents, -1 i 3, calculeu la multiplicitat geomètrica d'aquests valors propis i utilitzeu aquest resultat per deduir el polinomi característic de la matriu A. Calculeu una matriu diagonal D i una matriu invertible P tals que $A = PDP^{-1}$.

b) Siguin E_{-1} el subespai propi associat al valor propi -1 i E_3 el subespai propi associat al valor propi 3 de la matriu A. Comproveu que E_{-1} i E_3 són complementaris ortogonals de $\mathbb{R}^4$.

c) Sigui $w = (1, 3, 3, 5)$ i sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ de matriu associada A. Doneu la projecció ortogonal de w i de $f(w)$ sobre els subespais E_{-1} i E_3.

d) Determineu a quin dels dos subespais propis està més a prop el vector w. Proveu que w i $f(w)$ estan a la mateixa distància del subespai E_3 però que si la distància de w al subespai E_{-1} és d, aleshores la distància de $f(w)$ al subespai E_{-1} és $3d$.

Solució:

a) La matriu A és simètrica. Per tant, A és diagonalitzable (tota matriu simètrica és diagonalitzable). El seu polinomi característic és de la forma $(x+1)^{m_{-1}}(x-3)^{m_3}$, on m_{-1} i m_3 són les multiplicitats algebràiques de -1 i de 3, respectivament. Com que A és diagonalitzable, es compleix que $m_{-1} = \dim(E_{-1}) = 4 - \operatorname{rang}(A + I)$ i $m_3 = \dim(E_3) = 4 - \operatorname{rang}(A - 3I)$. Però la matriu $A+I$ és la matriu que té tots els seus coeficients iguals a 1; per tant, $\text{rang}(A+I) = 1$ i $m_{-1} = 4-1 = 3$ (és a dir, $\text{rang}(A-3I) = 3$). Deduïm que $m_3 = 1$. És a dir, el polinomi característic és $P_A(x) = (x+1)^3(x-3)$.

Calculem bases dels subespais propis E_{-1} i E_3:

$$E_{-1} = \text{Nul}(A+I) = \text{Col}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \text{Nul}(A-3I) = \text{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$D = \text{Diag}(-1,-1,-1,3), \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) A l'apartat anterior hem vist que $E_{-1} = \text{Col}(M)$ i que $E_3 = \text{Col}(N)$, on:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $E_{-1} \perp E_3$ si i només si $N^T M = 0$. Però aquesta relació es compleix trivialment. Per tant, els subespais propis E_{-1} i E_3 són ortogonals. En particular, tenim que $\mathbb{R}^4 = E_{-1} \oplus E_3$.

c) Tenim que $f(w) = f(1,3,3,5) = (11,9,9,7)$.

En primer lloc, observem que com que $\mathbb{R}^4$ és la suma directa de E_{-1} i de E_3 i aquests dos subespais són ortogonals, si $u \in \mathbb{R}^4$, llavors $u = P_{E_{-1}}(u) + P_{E_3}(u)$ i, en conseqüència, $C_{E_3}(u) = P_{E_{-1}}(u)$ i $C_{E_{-1}}(u) = P_{E_3}(u)$.

Com que $E_3 = \langle(1,1,1,1)\rangle$ (dimensió 1), és més fàcil calcular la projecció ortogonal d'un vector sobre E_3 que sobre E_{-1}:

$$P_{E_3}(w) = \frac{w \cdot (1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)} \cdot (1,1,1,1) = (3,3,3,3) = C_{E_{-1}}(w),$$
$$P_{E_3}(f(w)) = \frac{f(w) \cdot (1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)} \cdot (1,1,1,1) = (9,9,9,9) = C_{E_{-1}}(f(w)).$$

Per tant:

$$P_{E_{-1}}(w) = w - C_{E_{-1}}(w) = (1,3,3,5) - (3,3,3,3) = (-2,0,0,2),$$
$$P_{E_{-1}}(f(w)) = f(w) - C_{E_{-1}}(f(w)) = (11,9,9,7) - (9,9,9,9) = (2,0,0,-2).$$

d) La distància $d(u,F)$ d'un vector u a un subespai F és la norma de la component ortogonal $C_F(u)$. Per tant:

$$d(w,E_{-1}) = ||C_{E_{-1}}(w)|| = ||(3,3,3,3)|| = 6,$$
$$d(w,E_3) = ||C_{E_3}(w)|| = ||(-2,0,0,2)|| = 2\sqrt{2},$$
$$d(f(w),E_{-1}) = ||C_{E_{-1}}(f(w))|| = ||(9,9,9,9)|| = 18,$$
$$d(f(w),E_3) = ||C_{E_3}(f(w))|| = ||(2,0,0,-2)|| = 2\sqrt{2}.$$

Per tant, observem que:

$$d(f(w),E_3) = d(w,E_3) = 2\sqrt{2}, \qquad d(f(w),E_{-1}) = 3\cdot d(w,E_{-1}) = 18.$$

Qüestions

33 Calculeu l'únic nombre complex no nul z que verifica $z^{-1} = z\cdot 1_{-2\pi/3}$ i que no és una arrel cúbica de -1.

Solució: Si $z^{-1} = z\cdot 1_{-2\pi/3}$, aleshores $1 = z^2\cdot 1_{-2\pi/3}$ i per tant $z^2 = 1_{2\pi/3}$. Així z és una arrel quadrada de $1_{2\pi/3}$; és a dir, $z = 1_{\frac{\pi}{3}}$ o $z = 1_{\frac{\pi}{3}+\pi} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$. Observem que $(1_{\frac{\pi}{3}})^3 = 1_{3\frac{\pi}{3}} = 1_\pi = -1$ i que $(1_{\frac{4\pi}{3}})^3 = 1_{3\frac{4\pi}{3}} = 1_{4\pi} = 1$. Per tant, $1_{\frac{\pi}{3}}$ és una arrel cúbica de -1 però $1_{\frac{4\pi}{3}}$ no ho és. D'on podem concloure que la solució és $z = 1_{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. En particular, la solució és única.

34 Siguin F, G, H tres subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$ de dimensions $\dim(F) = 3$, $\dim(G) = 4$, $\dim(H) = 7$. Sabem que $\dim(F\cap G) = 2$ i que $\mathbb{R}^n = G\oplus H$. Calculeu la dimensió dels complementaris de $F+G$.

Solució: Els complementaris de $F+G$ tenen dimensió $n-\dim(F+G)$. Com que $\mathbb{R}^n = G\oplus H$, tenim que $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(G)+\dim(H) = 4+7 = 11$. A més, $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 3+4-2 = 5$. Per tant, els complementaris de $F+G$ tenen dimensió $11-5 = 6$.

35 Considerem el subespai $F = \langle(1,2,2),(2,\lambda^2,2\lambda)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Per als diferents valors de $\lambda\in\mathbb{R}$ determineu una matriu M de manera que $\mathrm{Nul}(M) = F$. Calculeu els valors de λ tals que:

$$\mathrm{Nul}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} \subseteq F.$$

Solució: Tenim que:

$$(x,y,z)\in F \Leftrightarrow \mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 2 & \lambda^2 & y\\ 2 & 2\lambda & z\end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & \lambda^2\\ 2 & 2\lambda\end{pmatrix}.$$

Aplicant el mètode de Gauss a la primera matriu, obtenim:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 2 & \lambda^2 & y\\ 2 & 2\lambda & z\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & \lambda^2-4 & y-2x\\ 0 & 2\lambda-4 & z-2x\end{pmatrix}.$$

Observem que:

$$\lambda^2-4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2, \qquad 2\lambda-4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Per tant, si $\lambda = 2$, aleshores tenim que $\dim(F) = 1$ i que:

$$(x,y,z)\in F \Leftrightarrow y-2x = z-2x = 0;$$

i si $\lambda \neq 2$, tenim que $\dim(F) = 2$ i que:

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\Leftrightarrow (\lambda^2-4)(z-2x)-(y-2x)(2\lambda-4)=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda+2)(z-2x)-2(y-2x)=0\\ &\Leftrightarrow -2\lambda x-2y+(\lambda+2)z=0.\end{aligned}$$

En conclusió:

- si $\lambda = 2$, aleshores $F = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$;
- si $\lambda \neq 2$, aleshores $F = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}2\lambda & 2 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}$.

A més, tenim:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nul}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} \subseteq F &\Leftrightarrow \lambda \neq 2 \text{ i } \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} \subseteq \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}2\lambda & 2 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix}2\lambda & 2 & -(\lambda+2)\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \lambda = 0.\end{aligned}$$

36 Considerem els vectors $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determineu $u_3 \in \mathbb{R}^3$ de manera que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ sigui una base de $\mathbb{R}^3$ i el vector $(2,1,2)$ tingui coordenades $(1,0,1)$ en aquesta base.

Solució: Posem $u_3 = (a,b,c)$ i sigui:

$$M = \begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}.$$

Aleshores $M = M(B_u \to B_c)$ és la matriu que transforma les coordenades d'un vector de la base B_u a la base canònica B_c de $\mathbb{R}^3$. Per tant:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Així doncs: $\begin{pmatrix}1+a\\ b\\ 1+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ i, per tant $a = b = c = 1$. En conclusió $u_3 = (1,1,1)$.

37 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(3,1) = (0,1,2)$ i $f(2,1) = (3,4,5)$. Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i de $\mathbb{R}^3$. Doneu un vector de $\mathbb{R}^3$ que no tingui antiimatges per f i calculeu totes les antiimatges del vector $(9,10,11)$.

Solució: Posem $v_1 = (3,1)$, $v_2 = (2,1)$ i sigui:

$$P = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Observem que $\det(P) = 1 \neq 0$ i, per tant, $B_v = \{v_1, v_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$. Així doncs, l'aplicació f està ben definida (existeix i és única). Ara tenim que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = M(f, B_v, B_{c_3}), \qquad P = M(B_v \to B_{c_2}),$$

on B_{c_2} és la base canònica de $\mathbb{R}^2$ i B_{c_3} és la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Per tant:

$$\begin{aligned} C &= M(f, B_{c_2}, B_{c_3}) = M(f, B_v, B_{c_3}) M(B_{c_2} \to B_v) \\ &= AP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -3 & 10 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per determinar un vector w que no tingui antiimatges per f hem de buscar un vector $w \notin \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}(C)$. Per exemple, $w = (0, 0, 1)$. Finalment, per determinar les antiimatges $u = (x, y)$ del vector $(9, 10, 11)$ per f hem de resoldre el sistema:

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Clarament, $x = 0$, $y = 1$ és una solució i, com que la matriu C té rang 2 el sistema és determinat. Per tant, $x = 0$, $y = 1$ és la única solució. En conclusió, $(0, 1)$ és la única antiimatge del vector $(9, 10, 11)$ per f.

38 Sabem que $-x^3 - 2x^2 - x$ és el polinomi característic de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a & -a \\ -1 & -1 & 1 \\ a-1 & a & -a \end{pmatrix}.$$

Determineu els valors del paràmetre a per als quals la matriu A és diagonalitzable.

Solució: Tenim $-x^3 - 2x^2 - x = -x(x+1)^2$. Per tant, la matriu A té valors propis 0 simple i -1 amb multiplicitat algebraica dos. Així doncs:

$$\begin{aligned} A \text{ és diagonalitzable} &\Leftrightarrow \dim E_{-1} = 2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Nul} \begin{pmatrix} a & a & -a \\ -1 & 0 & 1 \\ a-1 & a & -a+1 \end{pmatrix} = 2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rang} \begin{pmatrix} a & a & -a \\ -1 & 0 & 1 \\ a-1 & a & -a+1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0. \end{aligned}$$

2.4 Examen de recuperació

Problema

39 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu la dimensió del subespai $\mathrm{Im}(f)$ i expresseu aquest subespai de la forma $\mathrm{Nul}(N)$, per a una certa matriu N.

b) Siguin $v_1 = (3,0,-1,0)$ i $v_2 = (0,2,0,-1)$. Comproveu que $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Completeu v_1, v_2 a una base ortogonal de $\mathrm{Ker}(f)$. Doneu una base de $\mathrm{Ker}(f)^\perp$.

c) Comproveu que $(1,1,1,1)$ és un vector propi de f de valor propi 10. Demostreu que f és un endomorfisme diagonalitzable. Existeix una base ortonormal de vectors propis?

d) Calculeu la distància del vector $u = (10,0,0,0)$ a $\mathrm{Ker}(f)$ i a $\mathrm{Im}(f)$.

Solució:

1) El subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat per les columnes de la matriu A. Per tant, la seva dimensió és el rang de A, que òbviament és 1. És a dir, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. A més:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sigui (x,y,z,t) un vector arbitrari. Tenim:

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \\ 1 & t \end{pmatrix} = 1 \iff x = y = z = t.$$

Per tant, podem expressar:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Es comprova fàcilment que:

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

per tant, els vectors $v_1 = (3,0,-1,0)$ i $v_2 = (0,2,0,-1)$ pertanyen al nucli de f. D'altra banda, tenim $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Nul}(A)$ i, com hem vist abans, el rang de A és 1. Per tant, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$. Els vectors v_1, v_2 són ortogonals: $v_1 \cdot v_2 = 0$; per tant, són linealment independents. Només cal trobar un altre vector del nucli, per exemple: $v_3 = (-2,1,0,0)$, i aplicar el mètode de Gram-Schmidt per a trobar una base ortogonal del nucli a partir de v_1, v_2, v_3, però només apliquem el mètode per a trobar el tercer vector:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1,\\
w_2 &= v_2,\\
w_3 &= v_3 + \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2\\
&= (-2,1-0,0) - \frac{3}{5}(3,0,-1,0) + \frac{2}{5}(0,2,0,-1) = \frac{1}{5}(-19,9,3,2).
\end{aligned}$$

Podem pendre doncs $w_3' = (-19,9,3,2)$ com a tercer vector de la base del nucli.

Finalment, com que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, tenim:

$$\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}.$$

3) Es comprova fàcilment que:

$$A\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\\ 10\\ 10\\ 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el vector $(1,1,1,1)$ és un vector propi amb valor propi 10.

D'altra banda, sabem que els vectors del nucli són vectors propis amb valor propi 0. Ara tenim que la multiplicitat algebraica del valor propi 0 és més petita o igual que la seva multiplicitat geomètrica, que és $\dim(E_0) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, i també que la multiplicitat algebraica del valor propi 10 és almenys 1. D'aquí deduïm que els valors propis són 0 (triple) i 10 (simple) i que les multiplitats geomètriques coincideixen amb les corresponents multiplicitats algebraiques. Per tant, l'endomorfisme f diagonalitza. Però no hi ha cap base ortonormal de vectors propis perquè el vector propi $(1,1,1,1)$ no és ortogonal als vectors del nucli, com es comprova fàcilment.

4) Recordem que la distància d'un vector a un subespai és la norma de la component ortogonal del vector respecte del subespai (que coincideix amb la norma de la projecció ortogonal del vector sobre el corresponent subespai ortgonal).

En el cas de la distància de u a $\mathrm{Ker}(f)$, tenim:

$$d(u, \mathrm{Ker}(f)) = \|C_{\mathrm{Ker}(f)}(u)\| = \|P_{\mathrm{Ker}(f)^{\perp}}(u)\|,$$

i com que la dimensió de $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ és 1, és millor calcular la norma de la projecció ortogonal de u sobre $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \langle(1,2,3,4)\rangle$ (comporta menys càlculs). Per tant:

$$d(u, \mathrm{Ker}(f)) = \|P_{\mathrm{Ker}(f)^{\perp}}(u)\| = \|\frac{u\cdot(1,2,3,4)}{(1,2,3,4)\cdot(1,2,3,4)}(1,2,3,4)\| = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Pel que fa a la distància de u a $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,1,1,1)\rangle$, tenim:

$$d(u, \mathrm{Im}(f)) = \|C_{\mathrm{Im}(f)}(u)\| = \|u - P_{\mathrm{Im}(f)}(u)\| = \| -\frac{3}{2}(1,1,1,1)\| = 3,$$

donat que:

$$P_{\mathrm{Im}(f)}(u) = \frac{u\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}\cdot(1,1,1,1) = \frac{5}{2}(1,1,1,1).$$

Qüestions

40 Expresseu el nombre complex:

$$w = \frac{2\sqrt{3}+4i}{5+\sqrt{3}i}.$$

en forma binòmica i en forma polar. Per a quins nombres naturals n és el nombre complex w^n imaginari pur?

Solució: Tenim:

$$w = \frac{2\sqrt{3}+4i}{5+\sqrt{3}i} = \frac{(2\sqrt{3}+4i)(5-\sqrt{3}i)}{(5+\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)} = \frac{14\sqrt{3}-14i}{28} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1_{5\pi/6} = 1_{-\pi/6}.$$

Per tant, $w^n = (1_{-\pi/6})^n = 1_{-n\pi/6}$. Però un nombre complex és imaginari pur si i només si el seu argument és $\pi/2$ o $3\pi/2$ (llevat de múltiples enters de 2π). Per tant, w^n és imaginari pur si i només si:

$$\frac{-n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{o bé} \quad \frac{-n\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

amb $k \in \mathbb{Z}$. És fàcil veure que aquestes condicions són equivalents a que n sigui múltiple de 3.

41 En $\mathbb{R}^3$ considerem el subespais $F = \langle(1,1,1),(1,2,-2)\rangle$ i $G = \langle(2,3,-1),(0,-1,a)\rangle$. Calculeu la dimensió i una base de $F \cap G$ segons els diferents valors de a.

Solució: Podem expressar els subespais F i G com:

$$F = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 3a-1 & -2a & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$F \cap G = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3a-1 & -2a & -2 \end{pmatrix}$$

Aquest matriu té rang 2 si i només si $\neq 3$. Per tant, $\dim(F \cap G) = 1$ si i només si $a \neq 3$; $\dim(F \cap G) = 2$ si i només si $a = 3$. Per tant, $F \cap G = F = G$ si $a \neq 3$. Una base de la intersecció en el cas $a = 3$ és $F \cap G = \langle(2,3,1)\rangle$.

42 En $\mathbb{R}^2$ considerem $u_1 = (2,1)$, $u_2 = (3,2)$, $v_1 = (4,5)$, $v_2 = (7,9)$. Sigui $w \in \mathbb{R}^2$ el vector que té coordenades $(1,1)$ en la base $B_1 = \{u_1, u_2\}$. Quines són les coordenades de w en la base $B_2 = \{v_1, v_2\}$?

Solució: Sigui $(w)_{B_2} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Sabem que $(w)_{B_1} = (1,1)$. Per tant:

$$w = u_1 + u_2 = (5,3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(4,5) + \alpha_2(7,9).$$

És a dir, α_1, α_2 són les solucions del sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

que són $\alpha_1 = 24$ i $\alpha_2 = -13$. Per tant, $(w)_{B_1} = (24, -13)$.

43 Siguin $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les aplicacions lineals definides per $f(x,y) = (x+y, x-y, x)$ i per $g(1,0,0) = (1,1)$, $g(0,1,0) = (1,0)$, $g(0,0,1) = (0,1)$. Calculeu la matriu associada a $g \circ f$ en la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ on $v_1 = (1,1)$ i $v_2 = (1,2)$.

Solució: Calculem primer les matrius de f, g i $g \circ f$ en les bases canòniques:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de la base $B = \{v_1, v_2\}$ en la base canònica C_2 de $\mathbb{R}^2$ és:

$$M(B \to C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de $g \circ f$ en base B és:

$$M(g \circ f; B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

44 Sigui la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 3 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on $a, b \in \mathbb{R}$. Determineu per a quins valors dels paràmetres a, b la matriu A és $\mathbb{R}$-diagonalitzable. Quan és $\mathbb{C}$-diagonalitzable?

Solució: Calculem el polinomi característic de la matriu A:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & a & 3 \\ 1 & -x & b \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-a).$$

Els valors propis (complexos) són 1, $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$. Observem que si A diagonalitza sobre $\mathbb{R}$, també ho fa sobre $\mathbb{C}$.

- Si $a < 0$, A no diagonalitza sobre $\mathbb{R}$ (perquè només té un valor propi real), però si que ho fa sobre $\mathbb{C}$ (perquè té tres valors propis complexos simples).
- Si $a = 0$, aleshores A té valors propis 1 (simple) i 0 (doble). Per tant, en aquest cas A diagonalitza si i només si $\dim(E_0) = \dim \mathrm{Nul}(A) = 2$. Però si $a = 0$, tenim $\mathrm{Nul}(A) = \langle(0,1,0)\rangle$ i, per tant, A no diagonalitza.
- Si $a \neq 0, 1$, aleshores A té tres valors propis reals (simples). Per tant, A diagonalitza sobre $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, aleshores A té els valors propis 1 (doble) i -1 (simple). Per tant, A diagonalitza si i només si $\dim(E_1) = 2$ si i només si $\mathrm{rang}(A - I) = 1$. I això passa si i només si $b = -3$.