Exercici: Xupaxups de 4 tipus (maduixa, llimona, cola, maduixa-nata)

a) # maneres de comprar-ne 37, si a la botiga en tenen més de 37 de cada tipus.

(dues maneres de comprar-los són diferents si almenys d'un tipus en comprem una quantitat diferent)

b) # maneres de comprar-ne 37, si a la botiga en tenen 24 de maduixa, 10 de llimona, 10 de cola i 10 de maduixa-nata.

c) n'hem comprat 12 de maduixa, 10 de llimona, 8 de cola i 7 de maduixa-nata. Maneres de repartir-los entre 37 persones?

Solució.

a) Equival a comptar el nombre de solucions enteres ≥ 0 de l'equació:

$$m + l + c + n = 37$$

on m representa el nombre de xupaxups de maduixa,
l representa el nombre de xupaxups de llimona,
c representa el nombre de xupaxups de cola,
n representa el nombre de xupaxups de maduixa-nata.

Per tant, el nombre de maneres de comprar-los és:

$$\binom{37+4-1}{37} = \binom{40}{37} = \binom{40}{3} = \underline{\underline{9880}}$$

b) Amb la notació utilitzada a l'apartat anterior, equival a comptar el nombre de solucions enteres ≥ 0 de l'equació:

$$m + l + c + n = 37$$

amb les restriccions addicionals $m \leq 24$, $l \leq 10$, $c \leq 10$ i $n \leq 10$.

Tenim una fórmula per calcular el nº de solucions si les variables són almenys un valor donat. Calcularem, doncs, el nombre de solucions que no interessen i el restarem del nombre total de solucions.

Per tant, si definim els conjunts X, M, L, C, N:

$$X = \{\text{solucions enteres} \geq 0 \text{ de } m+l+c+n=37\}$$
$$M = \{\text{solucions enteres} \geq 0 \text{ de } m+l+c+n=37 \text{ tq. } m \geq 25\}$$
$$L = \{\text{solucions enteres} \geq 0 \text{ de } m+l+c+n=37 \text{ tq. } l \geq 11\}$$
$$C = \{\text{solucions enteres} \geq 0 \text{ de } m+l+c+n=37 \text{ tq. } c \geq 11\}$$
$$N = \{\text{solucions enteres} \geq 0 \text{ de } m+l+c+n=37 \text{ tq. } n \geq 11\}$$

aleshores hem de calcular $\boxed{|X| - |M \cup L \cup C \cup N|}$ ja que de totes les solucions enteres ≥ 0, hem de treure les que no satisfan alguna de les quatre restriccions $m \leq 24$, $l \leq 10$, $c \leq 10$, $n \leq 10$.

El cardinal de X l'hem calculat a l'apatat anterior: $|X| = 9880$

Els conjunts M, L, C, N no són disjunts. Per tant, apliquem P.I.E per calcular $|M \cup L \cup C \cup N|$:

$$\begin{aligned} |M \cup L \cup C \cup N| = {} & |M| + |L| + |C| + |N| \\ & -(|M\cap L| + |M \cap C| + |M \cap N| + |L \cap C| + |L \cap N| + |C \cap N|) \\ & +(|M \cap L \cap C| + |M \cap L \cap N| + |M \cap C \cap N| + |L \cap C \cap N|) \\ & - |M \cap L \cap C \cap N| \end{aligned}$$

Per calcular el cardinal de les K-interseccions, $K \in \{1,2,3,4\}$, hem de restar al 40 i 37 del nombre binomial $\binom{40}{37}$, que compta el nombre de solucions sense restriccions, la suma de totes les restriccions.

- $|M| = \binom{40-25}{37-25} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = 455$
- $|L| = |C| = |N| = \binom{40-11}{37-11} = \binom{29}{26} = \binom{29}{3} = 3654$
- $|M \cap L| = |M \cap C| = |M \cap N| = \binom{40-(25+11)}{37-(25+11)} = \binom{4}{1} = 4$
- $|L \cap C| = |L \cap N| = |C \cap N| = \binom{40-22}{37-22} = \binom{18}{15} = \binom{18}{3} = 816$
- $|L \cap C \cap N| = \binom{40-33}{37-33} = \binom{7}{4} = 35$
- $|M \cap L \cap C| = |M \cap L \cap N| = |M \cap C \cap N| = |M \cap L \cap C \cap N| = 0$,

  ja que les restriccions sumen 47 o més, que és més gran que 37

Per tant, $|M \cup L \cup C \cup N| = \underbrace{|M|}_{455} + \underbrace{|L| + |C| + |N|}_{3 \times 3654}$

$$- \left(\underbrace{|M \cap L| + |M \cap C| + |M \cap N|}_{3 \times 4} + \underbrace{|L \cap C| + |L \cap N| + |C \cap N|}_{3 \times 816} \right)$$

$$+ \left(\underbrace{|M \cap L \cap C| + |M \cap L \cap N| + |M \cap C \cap N|}_{0} + \underbrace{|L \cap C \cap N|}_{35} \right)$$

$$- \underbrace{|M \cap L \cap C \cap N|}_{0}$$

$$= 455 + 3 \times 3654 - 3 \times 820 + 35 = 8992$$

i aleshores $|X| - |M \cup L \cup C \cup N| = 9880 - 8992 = 888$

Per tant, el nombre de maneres de comprar-los és en aquest cas: $\underline{\underline{888}}$

c) Equival al nombre de permutacions del multiconjunt $\{m^{12}, \ell^{10}, c^{8}, n^{7}\}$

N'hi ha $\binom{37}{12, 10, 8, 7} = \dfrac{37!}{12!\,10!\,8!\,7!} = \underline{\underline{38965999116361917600}} \approx 3{,}89 \times 10^{19}$