Fonaments Matemàtics
Resums de teoria i problemes

Grau en Intel·ligència Artificial
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Mercè Mora
Montserrat Maureso

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, setembre 2023

ÍNDEX

CAPÍTOL 1

FORMALISME I DEMOSTRACIONS

1.1 Resum de teoria

1.1.1 Sumatoris i productoris

Notació

- $\sum_{i\in I} f(i)$ denota la suma de totes les expressions $f(i)$, amb $i \in I$.
- $\prod_{i\in I} f(i)$ denota el producte de totes les expressions $f(i)$, amb $i \in I$.
- $\sum_{i=n}^{m} f(i)$, on m, n són enters tals que $n \leq m$, denota la suma de les expressions $f(n), f(n+1), \dots, f(m)$, és a dir,
$$\sum_{i=n}^{m} f(i) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(m).$$
- $\prod_{i=n}^{m} f(i)$, on m, n són enters tals que $n \leq m$, denota el producte de les expressions $f(n), f(n+1), \dots, f(m)$, és a dir,
$$\prod_{i=n}^{m} f(i) = f(n)f(n+1) \cdot \ldots \cdot f(m).$$

Exemples

- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$ $\qquad$ $\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$
- $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n)} = n$ $\qquad$ $\prod_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n)} = 1$
- $\sum_{i=1}^{n} 3 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n)} = 3n$ $\qquad$ $\prod_{i=1}^{n} 3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n)} = 3^n$

- $\displaystyle\sum_{i=5}^{9} i^2 = 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 255$
- $\displaystyle\prod_{\substack{p \text{ primer} \\ 2 \leq p \leq 10}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}$
- $\displaystyle\prod_{a \in \{2,3,5,7\}} (a^2/\sqrt{a}) = \left(4/\sqrt{2}\right)\left(9/\sqrt{3}\right)\left(25/\sqrt{5}\right)\left(49/\sqrt{7}\right) \approx 3043.189$

Propietats

- $\displaystyle\sum_{i \in I} (f(i) + g(i)) = \sum_{i \in I} f(i) + \sum_{i \in I} g(i)$
- Si c no depen de i, aleshores $\displaystyle\sum_{i \in I} c\, f(i) = c \sum_{i \in I} f(i)$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + i + 2i^2) = \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} i + 2 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Sumatoris i productoris dobles

Es poden considerar expressions que depenen de 2 o més índexs:

- $\displaystyle\sum_{(i,j) \in X} f(i,j)$ denota la suma de les expressions $f(i,j)$, on $(i,j) \in X$.
- $\displaystyle\prod_{(i,j) \in X} f(i,j)$ denota el producte de les expressions $f(i,j)$, on $(i,j) \in X$.
- $\displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(i,j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} f(i,j)$
- $\displaystyle\prod_{i \in I} \prod_{j \in J} f(i,j) = \prod_{(i,j) \in I \times J} f(i,j)$

1.1.2 Progressions aritmètiques i geomètriques

Successions numèriques

- *Succesió numèrica*: llista ordenada de nombres.
- Notació: $(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$. Direm que a_n és el *terme enèsim* de la succesió.

- Exemple: $(\sqrt{n})_{n\geq 1} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots)$ és una succesió de nombres reals.
  $(\sqrt{n-5})_{n\geq 5} = (0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$ és una succesió de nombres reals.
  $(n^2)_{n\geq 0} = (0, 1, 4, 9, \dots)$ és una succesió de nombres enters.

- *Sucessió recurrent*: succesió tal que, a partir d'un determinat terme, tots s'obtenen en funció dels termes anteriors.

- Exemple: La successió $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ es recurrent, ja que a partir del tercer terme, tots s'obtenen com a suma dels dos anteriors.

Progressió aritmètica

- Una *progressió aritmética* és una successió $(a_n)_{n\geq n_0}$ que satisfà $a_n = a_{n-1} + d$, si $n > n_0$, on d és un valor constant que anomenem *diferència*.

- Expressió del terme general:

  $a_n = a_0 + n\, d$, si $n \geq 0$;

  $a_n = a_k + (n-k)\, d$, si $n \geq k$.

- Suma de termes consecutius: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n;$ $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{a_m + a_n}{2}(n-m+1).$

- Sumes i productes de termes consecutius d'algunes progressions aritmètiques:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i\, a = a\,\frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}, \text{ si } n \geq m$$

$$\prod_{i=1}^{n} i = n! \qquad \prod_{i=1}^{n} i\, a = a^n\, n! \qquad \prod_{i=m}^{n} i = \frac{n!}{(m-1)!}, \text{ si } n \geq m$$

Progressió geomètrica

- Una progressió *geomètrica* és una successió $(a_n)_{n\geq n_0}$ que satisfà $a_n = r\, a_{n-1}$, si $n > n_0$, on r és un valor constant que anomenem *raó*.

- Expressió del terme general:

  $a_n = a_0\, r^n$, si $n \geq 0$;

  $a_n = a_k\, r^{n-k}$, si $n \geq k$.

- Suma de termes consecutius:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_n\, r - a_1}{r-1}, \text{ si } r \neq 1 \qquad \sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{a_n\, r - a_m}{r-1}, \text{ si } r \neq 1$$

Algunes expressions conegudes

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} i\,j = \frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} i\,j = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

1.1.3 Formes proposicionals

Proposicions

- Una *proposició* és una afirmació que és certa o falsa, però no les dues coses alhora.
- Exemples. Són proposicions: "Avui plou", "El quadrat de 2 és 5". En canvi no són proposicions: "$x > 2$", "Has llegit aquest llibre?", "Mira!".
- Valors de veritat. Una proposició pren el *valor de veritat* 1 si és certa, i pren el valor de veritat 0 si és falsa. Una *variable proposicional* representa una proposició arbitrària, amb un valor de veritat no determinat. Normalment utilizarem les lletres p, q, r, ... per a representar-les.

Connectius lògics. Formes proposicionals

Els connectius lògics s'utilizen per a formar noves proposicions a partir d'altres proposicions. Ens referirem a una proposició genèrica amb una *variable proposicional*, que denotarem normalment amb les lletres p, q, r, ... Les *formes proposicionals* estan formades per variables proposicionals i connectius.

- *Connectiu* $\neg$. Equival a *no* en llenguatge natural. La proposició $\neg p$ és certa si p és falsa, i és falsa, si p és certa.
- *Connectiu* $\wedge$. Equival a *i* en llenguatge natural. $p \wedge q$ és una proposició certa si p i q són certes, i és falsa si alguna de les dues és falsa.
- *Connectiu* $\vee$. Equival a *o* (inclussiu) en llenguatge natural. $p \vee q$ és una proposició certa si p és certa o si q és certa, i és falsa si les dues proposicions p i q són falses.
- *Connectiu* $\rightarrow$. Equival a *Si... aleshores...* en llenguatge natural. $p \rightarrow q$ és una proposició certa si p és falsa o bé q és certa, i és falsa si p és certa i q és falsa.
- *Connectiu* $\leftrightarrow$. Equival a ...si, i només si,... en llenguatge natural. $p \leftrightarrow q$ és una proposició certa si les dues són certes o bé si les dues són falses, i és falsa si una és certa i l'altra és falsa.
- *Connectiu* $\oplus$. Equival a *O bé ... o bé ...* (*o* exclussiva) en llenguatge natural. $p \oplus q$ és una proposició certa si una d'elles és falsa i l'altra és certa, i és falsa si les dues són certes o bé les dues són falses.

Taules de veritat

Proporcionen el valor de veritat de formes proposicionals obtingudes amb connectius lògics en funció dels valors de veritat de les variables proposicionals que hi intervenen.

Taules de veritat dels connectius $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Tautologíes i contradiccions. Equivalència lògica

- Una *tautologia* és una forma proposicional que pren sempre el valor de veritat 1. Per exemple, $p \vee \neg p$ és una tautologia.
- Una *contradicció* és una forma proposicional que pren sempre el valor de veritat 0. Per exemple, $p \wedge \neg p$ és una contradicció. La negació d'una contradicció és una tautologia.
- Dues formes proposicionals p i q són *equivalents* si prenen sempre el mateix valor de veritat, és a dir, si tenen la mateixa taula de veritat. Ho éscriurem $p \equiv q$ i equival a dir que $p \leftrightarrow q$ és una tautologia.

Algunes tautologies i equivalències lògiques.

- Tautologies.
  (a) $p \vee \neg p$
  (b) $p \rightarrow p \vee q$
  (c) $p \wedge q \rightarrow p$
  (d) $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
  (e) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
  (f) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
  (g) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- Equivalències lògiques.
  (a) $\neg(\neg p) \equiv p$ *(doble negació)*
  (b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q\ ,\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ *(lleis de de Morgan)*
  (c) $p \wedge q \equiv q \wedge p\ ,\ \ p \vee q \equiv q \vee p$ *(commutativitat)*
  (d) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r\ ,\ \ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *(associativitat)*
  (e) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\ ,\ \ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *(distributivitat)*
  (f) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q\ ,\ \ \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
  (g) $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ *(contrarecíproc)*
  (h) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
  (i) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
  (j) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r \equiv (p \wedge \neg r) \rightarrow q$
- Si $\mathcal{T}$ representa una tautologia i $\mathcal{C}$ una contradicció (és a dir, $\mathcal{T}$ pren sempre el valor de veritat 1 i $\mathcal{C}$ pren sempre el valor de veritat 0), aleshores es compleix:

(a) $p \wedge \mathcal{T} \equiv p, \qquad p \wedge \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}$

(b) $p \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}, \qquad p \vee \mathcal{C} \equiv p$

(c) $\mathcal{T} \to p \equiv p, \qquad p \to \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$

(d) $\mathcal{C} \to p \equiv \mathcal{T}, \qquad p \to \mathcal{C} \equiv \neg p$

Recíproc i contrarecíproc

- La proposició *recíproca* de $p \to q$ és $q \to p$. Una proposició i la seva recíproca no són equivalents.

- La proposició *contrarecíproca* de $p \to q$ és $\neg q \to \neg p$. Una proposició i la seva contrarecíproca són equivalents.

Altres connectius lógics

Els connectius $|$ i $\downarrow$ están definits per les taules de veritat:

p	q	$p\|q$	$p \downarrow q$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

- Es compleix: $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$, $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

- Tota proposició és equivalent a una proposició que conté només connectius d'un dels conjunts següents: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{|\}$, $\{\downarrow\}$.

Àlgebra de Boole

- Un conjunt B amb una operació unària, que denotarem $^{-}$; dues operacions binàries internes en B, que denotarem $\vee$ i $\wedge$; i dos elements de B que denotarem 0 i 1, és una *àlgebra de Boole*, que denotarem $(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$, si es compleix:

  (a) $x \vee 0 = x$, per a tot element $x \in B$; *(0 és l'element neutre de $\vee$)*
  $x \wedge 1 = x$, per a tot element $x \in B$; *(1 és l'element neutre de $\wedge$)*

  (b) $x \vee \overline{x} = 1$, per a tot element $x \in B$; *(complementari)*
  $x \wedge \overline{x} = 0$, per a tot element $x \in B$; *(complementari)*

  (c) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$; *(commutativitat)*
  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; *(associativitat)*

  (d) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. *(distributivitat)*

- Si $\mathcal{P}$ representa el conjunt de totes les proposicions, aleshores $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, \neg, \mathcal{C}, \mathcal{T})$ és una àlgebra de Boole.

1.1.4 Predicats i quantificadors

Predicats

- Un *predicat* és una afirmació que depèn d'una o més variables. El denotarem $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on $x_1, \dots, x_n$ són les variables.
- L'*univers de discurs* és el conjunt no buit de valors que poden prendre les variables del predicat.
- Exemple. Si l'univers de discurs és el conjunt dels nombres enters, "x és un quadrat perfecte" és un predicat que depèn de una variable; "$x \leq y + z$ " és un predicat que depèn de tres variables.

Quantificadors

Si $P(x)$ és un predicat amb univers de discurs U.

- $\forall x P(x)$ equival a "per a tot element x de U es compleix $P(x)$"
- $\exists x P(x)$ equival a "existeix un element x de U tal que $P(x)$"
- $\exists! x P(x)$ equival a "existeix un únic element x de U tal que $P(x)$"

Per exemple, si $U = \{a, b, c\}$, aleshores:

- $\forall x P(x)$ equival a $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$
- $\exists x P(x)$ equival a $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$
- $\exists! x P(x)$ equival a:
  $(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (\neg P(a) \wedge P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge P(c))$

Quantificadors i pertinença a conjunts

- $(\forall x \in X)\, P(x)$ denota $\forall x(x \in X \rightarrow P(x))$.
- $(\exists x \in X)\, P(x)$ denota $\exists x(x \in X \wedge P(x))$.
- $(\forall x, y \in X)\, P(x, y)$ denota $\forall x \forall y((x \in X \wedge y \in X) \rightarrow P(x, y))$.
- $(\exists x, y \in X)\, P(x, y)$ denota $\exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge P(x, y))$.

Exemples de formalizació de predicats

Representem els conjunts dels nombres reals, enters i naturals per $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$, respectivament. Si l'univers de discurs és $U = \mathbb{R}$, aleshores podem expressar:

- El quadrat d'un nombre real qualsevol és no negatiu: $\forall x(x^2 \geq 0)$.
- La suma de dos enters qualssevol és enter: $\forall x \forall y((x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}) \rightarrow x + y \in \mathbb{Z})$.
- Existeix un nombre enter tal que el seu quadrat és 2: $\exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 2)$.
- Existeix un únic nombre natural tal que el seu quadrat és 4: $\exists! x(x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 4)$.

Proposicions i predicats

Un predicat amb totes les variables quantificades o bé substituïdes per valors concrets de l'univers de discurs és una proposició. En aquest cas,

- La proposició $\forall x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a tots els elements de U.
- La proposició $\exists x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a almenys un element de U.
- La proposició $\exists! x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a un i només un element de U.

Expressions amb quantificadors

- Commutativitat.
  (a) $\forall x \forall y P(x, y)$ és equivalent a $\forall y \forall x P(x, y)$.
  (b) $\exists x \exists y P(x, y)$ és equivalent a $\exists y \exists x P(x, y)$.
  (c) En general, l'expressió $\forall x \exists y P(x, y)$ i l'expressió $\exists y \forall x P(x, y)$ no són equivalents. Concretament, sempre és pot deduir que $\forall x \exists y P(x, y)$ a partir de $\exists y \forall x P(x, y)$, però en general no és pot deduir $\exists y \forall x P(x, y)$ a partir de $\forall x \exists y P(x, y)$.
- Negació.
  (a) $\neg \forall x P(x)$ és equivalent a $\exists x \neg P(x)$.
  (b) $\neg \exists x P(x)$ és equivalent a $\forall x \neg P(x)$.
- Negació i pertinença a conjunts. Sigui X un subconjunt de l'univers de discurs.
  (a) $\neg(\forall x \in X)\, P(x)$ és equivalent a $(\exists x \in X) \neg P(x)$.
  (b) $\neg(\exists x \in X)\, P(x)$ és equivalent a $(\forall x \in X) \neg P(x)$.
  (c) $\neg(\forall x, y \in X)\, P(x, y)$ és equivalent a $(\exists x, y \in X)\, \neg P(x, y)$.
  (d) $\neg(\exists x, y \in X)\, P(x, y)$ és equivalent a $(\forall x, y \in X)\, \neg P(x, y)$.

1.1.5 Demostracions

Un *axioma* és una proposició que assumim certa en una teoria determinada. Un *teorema* és una afirmació que és pot provar que és certa en una teoria determinada. Una *demostració* és un argument per a provar un teorema. En una demostració s'utilizen regles de inferència que deriven de tautologies. Escriurem $p \Rightarrow q$ si es pot deduir la veracitat de q a partir de la veracitat de p, és a dir, si $p \to q$ és certa.

Regles d'inferència

- $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ *(sil·logisme hipotètic)*
- $p \to p \vee q$ *(addició)*
- $p \wedge q \to p$, $p \wedge q \to q$ *(simplificació)*
- $((p \to q) \wedge p) \to q$ *(modus ponens)*
- $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ *(modus tollens)*
- $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$ *(sil·logisme disjuntiu)*

Errors més freqüents (*fal·làcies*)

- De $p \to q$ i q certes NO es pot deduir que p sigui certa.
- De $p \to q$ i $\neg p$ certes NO es pot deduir que $\neg q$ sigui certa.

Mètodes de demostració (I)

Demostració de $p \to q$.

- *Demostració directa.* Deduir q a partir de p utilitzant regles de inferència.
- *Contrarecíproc.* Equival a demostrar $\neg q \to \neg p$.
- *Reducció a l'absurd.* Equival a deduir una contradicció a partir de $p \wedge \neg q$.

Mètodes de demostració (II)

- Demostrar $p \to (q \wedge r)$ és equivalent a demostrar $p \to q$ i $p \to r$.
- Demostrar $p \to (q \vee r)$ és equivalent a demostrar $(p \wedge \neg q) \to r$.
- Demostrar $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r) \to q$ és equivalent a demostrar $p_1 \to q$ i $p_2 \to q$ i ... i $p_r \to q$ (*demostració per casos*).
- Demostrar $p \leftrightarrow q$ és equivalent a demostrar $p \to q$ i $q \to p$.
- Demostrar que les condicions $p_1, \ldots, p_n$ són equivalents es pot fer de diverses maneres. Per exemple, és equivalent a demostrar

  $p_1 \leftrightarrow p_2,\ p_2 \leftrightarrow p_3,\ \ldots,\ p_{n-1} \leftrightarrow p_n$

  o bé

  $p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_{n-1} \to p_n\ ,\ p_n \to p_1.$

Demostracions i quantificadors

- *Demostració de $\forall x P(x)$.*
  -Fer una demostració genèrica de $P(x)$, és a dir, que sigui válida per a qualsevol valor de x.
  -Reducció a l'absurd: arribar a una contradicció a partir de $\exists x \neg P(x)$.
- *Demostració de $\exists x P(x)$.*
  -Trobar un element concret c de l'univers de discurs tal que la proposició $P(c)$ sigui certa.
  -Reducció a l'absurd: arribar a contradicció a partir de $\forall x \neg P(x)$.
- *Demostració de $\neg \forall x P(x)$.* Equival a demostrar $\exists x \neg P(x)$. En aquest cas, si c és un element tal que la proposició $\neg P(c)$ sigui certa, direm que c es un *contraexemple* de $\forall x P(x)$.
- *Demostració de $\neg \exists x P(x)$.* Equival a demostrar $\forall x \neg P(x)$.

Principi de inducció

Utilitzarem el principi d'inducció per a demostrar propietats que depenen d'un enter. A continuació n'enunciem tres versions. La tercera versió és més potent que les altres dues, és a dir, qualsevol propietat que es pugui demostrar amb les dues primeres versions, es pot demostrar amb la tercera, pero hi ha propietats que es poden demostrar amb la tercera versió, pero no amb les dues primeres.

Considerem una propietat $P(n)$ que depèn de n, on $n \in \mathbb{Z}$. Sigui $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Versió 1. Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n \geq n_0$, de $P(n)$ certa, podem deduir que $P(n+1)$ és certa.

Versió 2. Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n > n_0$, de $P(n-1)$ certa, podem deduir que $P(n)$ és certa.

Versió 3. Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n > n_0$, de $P(k)$ certa per a tot k tal que $n_0 \leq k < n$, podem deduir que $P(n)$ és certa.

1.2 Exercicis

1.1 Calculeu el valor de cadascuna de les sumes següents (sense utilitzar fórmules conegudes de sumatoris):

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 2.$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j.$ c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j^2.$ d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 2^j.$

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{6} (n-1).$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} n!.$ g) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{2} n^2.$ h) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{2} n(n+1).$

1.2 Calculeu el valor de cadascun dels productes següents (sense utilitzar fórmules conegudes de productoris):

a) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} 3.$ b) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} (m+1).$ c) $\displaystyle\prod_{j=-1}^{4} (j+1).$ d) $\displaystyle\prod_{j=1}^{5} j^2.$ e) $\displaystyle\prod_{j=1}^{5} 2^j.$ f) $\displaystyle\prod_{j=1}^{5} j!.$

1.3 Calculeu el valor de cadascun dels productes següents:

a) $\displaystyle\prod_{i=7}^{10} 3^i.$ b) $\displaystyle\prod_{i=0}^{10} 5^i.$ c) $\displaystyle\prod_{i=3}^{10} 2\cdot(3^i).$

1.4 Trobeu el valor de cadascuna de les dobles sumes següents:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} j.$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} i.$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} (i+j).$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} ij.$

1.5 Trobeu el valor de cadascun dels dobles productes següents:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3} j.$ b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3} i.$ c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3} (i+j).$ d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3} ij.$

1.6 Trobeu el valor de cadascuna de les quantitats següents:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4} ij.$ b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij.$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4} (i+j).$ d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} (i+j).$

1.7 Considerem una successió $(a_n)_{n\geq 0}$ i sigui $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$. Expresseu les sumes següents en funció de S:

a) $\sum_{m=1}^{10} a_m$. b) $\sum_{i=0}^{9} a_{i+1}$. c) $\sum_{j=1}^{10} a_{j-1}$.

1.8 Siguin m, n enters tals que $m \leq n$. Siguin $A = \sum_{m\leq i\leq n} a_i$ i on $B = \sum_{m\leq i\leq n} b_i$. Expresseu cadascuna de les sumes següents en funció de A i B:

a) $\sum_{m\leq i\leq n} 5a_i$. b) $\sum_{m\leq i\leq n} (a_i - b_i)$. c) $\sum_{m\leq i\leq n} (-b_i)$. d) $\sum_{m\leq i\leq n} (3a_i + 4b_i)$.

1.9 Calculeu les sumes següents en funció de n.

a) $\sum_{i=1}^{n} (5i+3)$. b) $\sum_{i=0}^{n} 3^i$. c) $\sum_{i=3}^{n} \frac{5}{3^i}$. d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{4-3\cdot 2^i}{3^i}$.

1.10 Expresseu les sumes següents utilitzant un únic sumatori:

a) $\sum_{i=0}^{99} (7i-1)^2 + \sum_{j=0}^{99} (7j+6)^2$.

b) $\sum_{n=1}^{100} (n+1)^3 - \sum_{n=0}^{100} (-1)^n n^3$.

c) $\sum_{i=1}^{100} (4i-1)^2 + \sum_{i=1}^{100} (4i+1)^2$.

1.11

a) Utilitzeu sumatoris per expressar la suma dels n primers nombres naturals parells no nuls i la suma dels n primers nombres naturals senars.

b) Calculeu el valor de l'expressió $\sum_{i=1}^{100} (2i-1) + \sum_{i=0}^{99} (2i+1)$.

c) Calculeu el valor de l'expressió $\sum_{i=1}^{100} (2i)^2 + \sum_{i=0}^{99} (2i+1)^2$.

Indicació: utilitzeu l'expressió $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.12 Determineu si l'expressió següent és certa per a valors qualssevol de $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

1.13 Determineu si la igualtat següent és certa per a valors qualssevol de $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} (a_j b_i).$$

1.14 Sigui $A = \prod_{i=1}^{n} a_i$. Expresseu els productes següents en funció de A:

a) $\prod_{i=1}^{n} i a_i$.

b) $\prod_{i=1}^{n} a_i^k$.

1.15 Siguin $A = \prod_{i=n}^{m} a_i$ i $B = \prod_{i=n}^{m} b_i$, on $m \geq n$. Expresseu $\prod_{i=n}^{m} a_i b_i$ en funció d'A i B.

1.16 Siguin $A = \prod_{i=1}^{m} a_i$ i $B = \prod_{i=1}^{n} b_i$. Expresseu $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} a_i b_j$ en funció d'A i B.

1.17 Feu les taules de veritat de les formes proposicionals següents i determineu quines són tautologies:

a) $p \wedge q \to p$.

b) $p \vee q \to p$.

c) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

d) $(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$.

e) $(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$.

1.18 Considereu les expressions següents:

1) Tots els alumnes tenen carnet de conduir.
2) Algun alumne té carnet de conduir.
3) Tots els alumnes tenen carnet de conduir i toquen algun instrument.
4) Tots els alumnes tenen carnet de conduir o toquen algun instrument.
5) Algun alumne té carnet de conduir i toca algun instrument.
6) Tots els alumnes que han aprovat matemátiques, han aprovat física.

a) Negueu-les en llenguatge natural.

b) Formalitzeu-les tenint en compte que l'univers de discurs és el conjunt d'alumnes, $C(x)$ és el predicat "x té carnet de conduir"; $T(x)$ és el predicat "x toca algun instrument"; $M(x)$ és el predicat "x ha aprovat matemàtiques"; $F(x)$ és el predicat "x ha aprovat física".

1.19 Formalitzeu les proposicions següents i determineu si són certes o falses.

a) Per a tot enter x, existeix un enter y tal que $xy = 0$.

b) Existeix un enter y tal que per a tot enter x es compleix $xy = 0$.

c) Per a tot enter x, existeix un enter y tal que $x + y = 0$.

d) Existeix un enter y tal que per a tot enter x es compleix $x + y = 0$.

e) Existeix un enter y tal que per a tot enter x es compleix $xy = x$.

f) Per a tot nombre real x diferent de zero, existeix un únic nombre real y tal que $xy = 1$.

1.20 Negueu els enunciats següents:

a) $(\forall x, y \in \mathbb{N})\ (x = y^2)$.

b) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x = y^2)$.

c) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x \leq y)$.

d) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$.

e) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}\ y \leq nx))$.

f) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (|x| < \delta \Rightarrow x^2 < \varepsilon)$.

Digueu si els enunciats dels apartats a), b), c), d) són certs o bé ho és la seva negació.

1.21

a) Suposem que les formes proposicionals $p \wedge q$ i $(p \vee q) \to r$ són certes. Podem deduir que r és certa?

b) Suposem que les formes proposicionals $e \to f$, $\neg g \to \neg f$, $h \to i$ i $e \vee h$ són certes. Podem deduir que $g \vee i$ és certa?

1.22 Siguin x, y nombres reals positius no nuls. Demostreu que si $y > x$, aleshores

$$\frac{x+1}{y+1} > \frac{x}{y}.$$

És cert el recíproc?

1.23 Demostreu la fórmula de resolució de l'equació de segon grau $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, on a, b, c són nombres reals tals que $a \neq 0$.

1.24 Demostreu que la suma de dos nombres senars consecutius és múltiple de 4.

1.25 Sigui x un nombre real positiu. Demostreu que si x és irracional, aleshores $\sqrt{x}$ és irracional.

1.26 Considerem la proposició: "Per a tot $n \in \mathbb{N}$, el nombre $n^2 + 5n + 6$ no és primer".

a) Determineu si són correctes les demostracions següents:

1) Per a $n = 2$ tenim $n^2 + 5n + 6 = 2^2 + 10 + 6 = 20$, que no és primer. Per tant, la proposició és certa.

2) Si n és un nombre natural, en particular $n > 0$. Si $n^2 + 5n + 6$ no és primer, aleshores $n^2 + 5n + 6 = pq$ per a alguns nombres naturals p, q tals que $0 < p < n^2 + 5n + 6$ i $0 < q < n^2 + 5n + 6$. Sabem que $n^2 + 5n + 6 = pq$, i els nombres p, q són diferents de 1 i de $n^2 + 5n + 6$. Per tant, $n^2 + 5n + 6$ no és primer, tal com volíem demostrar.

b) Feu una demostració de la proposició si les demostracions anteriors són incorrectes.

1.27 Demostreu que si $x^2 - 3x + 2 < 0$, aleshores $1 < x < 2$.

1.28 Demostreu per inducció les fórmules següents:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k! = n! - 1$, $\forall n \geq 2$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$, $\forall n \geq 1$.

e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$, $\forall n>1$.

1.29 Considerem la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{(2n+1)^2}{8}$.

a) Demostreu que, per a tot $n\geq 1$, si la fórmula és certa per a n, també ho és per a $n+1$.

b) Per a quins valors de n, $n\geq 1$, és vàlida?

1.30 Demostreu per inducció les desigualtats següents:

a) $n^2-5n+6\geq 0$, $\forall n\geq 0$.

b) $n^2<2^n$, $\forall n\geq 5$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$, $\forall n>1$.

d) $\displaystyle\frac{1}{2n}\leq\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$, $\forall n>0$.

1.31 Considerem un tauler $2^n\times 2^n$ on $n\geq 1$, enter, i triem una casella qualsevol. Demostreu que es pot recobrir tot el tauler excepte la casella triada amb peces formades per 3 caselles en forma de L, sense trencar-les i de forma que no se solapin.

1.32 Sigui $(u_n)_n$ la successió recurrent definida per $u_0=0$, $u_1=1$ i $u_n=5u_{n-1}-6u_{n-2}$, si $n\geq 2$. Demostreu que $u_n=3^n-2^n$, per a tot $n\geq 0$.

1.33 Sigui $(u_n)_n$ la successió recurrent definida per $u_0=2$, $u_1=-6$ i $u_n=-8u_{n-1}+9u_{n-2}+8\cdot 3^{n-1}$, si $n\geq 2$. Demostreu que $u_n=3^n+(-9)^n$, per a tot $n\geq 0$.

Exercicis complementaris

1.34 Escriviu tots els sumands de les dues primeres expressions següents i els 3 primers i 3 últims termes de la tercera:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_{2i}$. b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} a_{2^i}$. c) $\displaystyle\sum_{i=5}^{n^2} a_i$.

1.35 Trobeu el valor de cadascuna de les dobles sumes següents:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=0}^{6} j$. b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{6} i$. c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}(i+j+1)$. d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}(i+1)(j+1)$.

1.36 Trobeu el valor de cadascun dels dobles productes següents:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=0}^{3} j$. b) $\displaystyle\prod_{i=0}^{4}\prod_{j=1}^{3} j$. c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}(i+1)$. d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3}(i+1)(j-1)$.

1.37 Calculeu les sumes següents en funció de n.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)^2$. b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(5^k+3k^2)$. c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k\,3^{k+3}-2^k}{3^{k+1}}$.

1.38 Calculeu els productes següents.

a) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$. b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{34}{5^k}$. c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2^{k-2}}{3^k}$.

1.39 Calculeu en funció de n i de k.

a) $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} i^k$. b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^k$.

1.40 Determineu si les expressions següents són iguals en general:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(a_i+b_i)$; b) $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)+\left(\prod_{i=1}^{m} b_i\right)$; c) $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{m} b_i\right)$.

1.41 Siguin n i m nombres naturals tals que $n \leq m$. Estudieu les relacions d'igualtat entre les expressions següents:

a) $\prod_{i=n}^{m} ka_i$; b) $k\prod_{i=n}^{m} a_i$; c) $k^{m-n}\prod_{i=n}^{m} a_i$; d) $k^{m-n+1}\prod_{i=n}^{m} a_i$.

1.42 Siguin n i m nombres naturals tals que $n \leq m$. Determineu r per tal que $\prod_{i=n}^{m} ka_i = k^r \prod_{i=n}^{m} a_i$.

1.43

a) Suposem que les formes proposicionals $p \vee q \to r$, $s \to p$, $s \vee q$ i $\neg t \to \neg r$ són certes. Podem deduir que t és certa?

b) Suposem que les formes proposicionals $l \to (p \vee m)$, $(m \vee n) \to (l \to k)$ i $\neg p \wedge l$ són certes. Podem deduir que k és certa?

c) Suposem que les formes proposicionals $\neg a \to (b \to \neg c)$, $c \to \neg a$, $(\neg d \vee a) \to \neg\neg c$ i $\neg d$ són certes. Podem deduir que $\neg b$ és certa?

1.44 Suposem que l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, on a, b, c són racionals i $a \neq 0$, té dues arrels diferents. Demostreu que una de les arrels és irracional si, i només si, l'altra arrel també és irracional.

1.45 Demostreu o doneu un contraexemple: Si x, y són irracionals, aleshores x^y és irracional.

1.46 Demostreu per inducció les fórmules següents:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, $\forall n \geq 1$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \geq 1$.

d) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, $\forall n \geq 0$.

e) $\sum_{k=0}^{n-1} 2\,(-5)^k = \frac{1-(-5)^n}{3}$, $\forall n \geq 1$.

1.47 Demostreu per inducció les desigualtats següents:

a) Si $0 < a \leq b$, aleshores $a^n \leq b^n$, $\forall n \geq 1$.

b) $3^n < n!$, $\forall n \geq 7$.

c) $n! < n^n$, $\forall n \geq 2$. $\quad \forall n > 1$.

d) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 < \frac{n^3}{3} < \sum_{k=0}^{n} k^2$, $\forall n \geq 1$.

e) $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n+1$, $\forall n \geq 0$.

1.48 Demostreu que la suma dels angles interiors d'un polígon convex de n vèrtexs és igual a $\pi(n-2)$.

1.49 Sigui $(u_n)_n$ la successió recurrent definida per $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ i $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$, si $n \geq 2$. Demostreu que $u_n = 2^{n+1} - n \cdot 2^{n-1}$, per a tot $n \geq 0$.

1.3 Solucions

1.1

a) 20. b) 55. c) 385. d) 2046. e) 14. f) 154. g) 10. h) 10.

1.2

a) 243. b) 720. c) 0. d) 14400. e) 32768. f) 34560.

1.3

a) 3^{34}. b) 5^{55} c) $2^8 \cdot 3^{52}$.

1.4

a) 105. b) 90. c) 195. d) 315.

1.5

a) 1296. b) 13824. c) 36288000. d) 17915904.

1.6

a) 2352. b) 31104 c) 1320. d) 5544.

1.7

a) S. b) S. c) $S - a_{10} + a_0$.

1.8

a) $5A$. b) $A - B$. c) $-B$. d) $3A + 4B$.

1.9

a) $\dfrac{5n^2 + 11n}{2}$. b) $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ c) $5\,\dfrac{3^{n-2} - 1}{2 \cdot 3^n}$. d) $-\dfrac{2}{3^n} + \dfrac{6 \cdot 2^n}{3^n} - 4$.

1.10

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{99}(98i^2 + 70i + 37)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}((1 - (-1)^n)n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}(32i^2 + 2)$.

1.11

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i)$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.

b) 20000.

c) És la suma dels quadrats dels primers 200 nombres naturals, $\sum_{i=1}^{200} i^2 = 2686700$.

1.12 És falsa.

1.13 És certa.

1.14

a) $n!\,A$.

b) A^k.

1.15 AB

1.16 $A^n B^m$

1.17

p	q	$p \wedge q \to p$	$p \vee q \to p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p))$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

p	q	r	$(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$	$(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Són tautologies les formes proposicionals dels apartats a), c) i d).

1.18

a) 1) Algun alumne no té carnet de conduir.
   2) Cap alumne té carnet de conduir.
   3) Algun alumne no té carnet de conduir o no toca cap instrument.
   4) Algun alumne ni té carnet de conduir ni toca cap instrument.
   5) Cap alumne té carnet de conduir i toca algun instrument. O bé: Els alumnes o no tenen carnet de conduir o no toquen cap instrument.
   6) Algun alumne ha aprovat matemátiques però no ha aprovat física.

b) 1) $\forall x C(x)$.
   2) $\exists x C(x)$.
   3) $\forall x(C(x) \wedge T(x))$.
   4) $\forall x(C(x) \vee T(x))$.
   5) $\exists x(C(x) \wedge T(x))$.
   6) $\forall x(M(x) \to F(x))$.

1.19

a) Si $U = \mathbb{Z}$: $\forall x \exists y (xy = 0)$. Cert.

b) Si $U = \mathbb{Z}$: $\exists y \forall x (xy = 0)$. Cert.

c) Si $U = \mathbb{Z}$: $\forall x \exists y (x + y = 0)$. Cert.

d) Si $U = \mathbb{Z}$: $\exists y \forall x (x + y = 0)$. Fals.

e) Si $U = \mathbb{Z}$: $\exists y \forall x (xy = x)$. Cert

f) Si $U = \mathbb{R}$: $\forall x (x \neq 0 \to (\exists! y)(xy = 1))$. Cert.

1.20

a) $\exists x, y \in \mathbb{N}\ (x \neq y^2)$. L'enunciat donat és fals, la negació és certa.

b) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \neq y^2)$. L'enunciat donat és cert.

c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x > y)$. L'enunciat donat és cert.

d) $\exists x, y, z \in \mathbb{R}\ (x \leq y \text{ i } y \leq z \text{ i } x > z)$. L'enunciat donat és cert.

e) $\exists x, y \in \mathbb{R}\ \big(x > 0 \text{ i } \forall n \in \mathbb{N}\ (y > nx)\big)$.

f) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ (|x| < \delta \text{ i } x^2 \geq \varepsilon)$.

1.21

a) Sí.

b) Sí.

1.22 El recíproc també és cert.

1.26

a) Són incorrectes.

b) Es pot deduir que és cert tenint en compte que per a tot natural n, el nombre $n^2 + 5n + 6$ és parell i diferent de 2.

1.29

a)

b) Per a cap.

1.34

a) $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$.

b) $a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, a_{32}, a_{64}$.

c) $a_5, a_6, a_7, a_{n^2-2}, a_{n^2-1}, a_{n^2}$.

1.35

a) 105.

b) 105.

c) 225.

d) 540.

1.36

a) 0.

b) 7776.

c) 13824.

d) 0.

1.37

a) $\dfrac{16\,n^3}{3} + 4\,n^2 - \dfrac{n}{3}$

b) $\dfrac{5^{n+1} - 5}{2} + n(n+1)(2n+1)$

c) $\dfrac{9n(n+1)}{2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 1$.

1.38

a) $2^{n(n+1)/2}$.

b) $34 \cdot 5^{-(n-1)(n+2)/2}$.

c) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n(n+1)/2}$.

1.39

a) 0.

b) $(n!)^k$.

1.40 Les tres expressions són diferents en general.

1.41 Les expressions a) i d) són iguals. La resta són diferents en general.

1.42 $r = m - n + 1$.

1.43

a) Sí.

b) Sí.

c) Sí.

CAPÍTOL 2

TEORIA DE CONJUNTS

2.1 Resum de teoria

2.1.1 Conjunts

- *Conjunt*: col·lecció d'objectes que anomenem *elements* del conjunt.

- Notació: si un element a és del conjunt A escriurem $a \in A$. Direm que a *pertany* al conjunt A o bé que A *conté* a. Si a no és un element del conjunt A, escriurem $a \notin A$.

- Descripció dels elements d'un conjunt.

  (a) Per enumeració: es dona tots els elements del conjunt. Escriurem els elements entre claus, per exemple: $A = \{1, -15, *, 1/3, x\}$.

  (b) Per comprensió: es dona una propietat que caracteritza els elements del conjunt. Per exemple: $A = \{x : x \text{ és un enter parell}\}$.

- Observació: en un conjunt no hi ha elements repetits.

- Dos conjunts són iguals si tenen els mateixos elements.

- Conjunt *buit*: conjunt que no conté cap element. El denotarem $\varnothing$ o bé $\{\}$.

- El *cardinal* d'un conjunt A és el nombre d'elements de A. El denotarem $|A|$ o bé $\#A$. Si un conjunt A té n elements, direm que A és un *n-conjunt*.

- Conjunts numèrics:

  (a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, conjunt dels nombres *naturals*.

  (b) $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$, conjunt dels nombres naturals *positius*.

  (c) $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, si n és un nombre natural, $n \geq 1$.

  (d) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, conjunt dels nombres *enters*.

  (e) $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p\,,\, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\,\}$, conjunt dels nombres *racionals*.

  (f) $\mathbb{R}$ conjunt format per tots els nombres *reals*.

  (g) $\mathbb{C}$ conjunt format per tots els nombres *complexos*.

Subconjunts

- B és un *subconjunt* de A si tot element de B és de A.

- Notació: escriurem $B \subseteq A$ (o bé $B \subset A$) si B és subconjunt de A; $B \not\subseteq A$ si B no és subconjunt de A; $B \subsetneq A$ si $B \subset A$ i $A \neq B$. Per tant, $B \subset A$ si i només si $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$.

- Observacions.

  (a) $\varnothing \subset A$, per a tot conjunt A.

  (b) $A = B \iff A \subset B$ i $B \subset A \iff (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$.

- Conjunt de les *parts* d'un conjunt A: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$.

- Observació. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ i $A \in \mathcal{P}(A)$, per a tot conjunt A.

- Propietat. Si A és un conjunt finit, aleshores $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Operacions

Sigui X un conjunt i A, B subconjunts de X.

- La *unió* de A i B és el conjunt $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$.

- La *intersecció* de A i B és el conjunt $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ i } x \in B\}$. Dos conjunts A i B són *disjunts* si $A \cap B = \varnothing$.

- La *diferència* de A i B és el conjunt $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ i } x \notin B\}$. També el denotarem $A - B$.

- El *complementari* de A en X és el conjunt $C_X(A) = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$. També el denotarem $\overline{A}$ o bé A^c, si no hi ha confusió respecte al conjunt X.

- La *diferència simètrica* dels conjunts A i B és el conjunt $A \oplus B = \{\, x \mid x \in A \cup B \text{ i } x \notin A \cap B \,\} = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B) = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$. Es denota també $A \triangle B$

Cardinals

- Si A i B són conjunts finits disjunts, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B|$.

- Si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- Si A és finit, aleshores $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

- Si X és finit i $A \subseteq X$, aleshores $|C_X(A)| = |X| - |A|$.

- Si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

Representació binària de subconjunts. Taules de pertinença

- Si $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, associem a cada subconjunt $A \subset U$ la paraula binària $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de longitud n tal que $a_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \in A, \\ 0, & \text{si } x_i \notin A. \end{cases}$

  Direm que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és la *representació binària* de A.

- La representació binària de U és $(1, 1, \ldots, 1)$ i la representació binària de $\varnothing$ és $(0, 0, \ldots, 0)$.

- Si les representacions binàries de $A, B \subset U$ són respectivament $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, aleshores podem trobar la representació binària de les operacions amb conjunts utilitzant taules de pertinença:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A} \cup B$	$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$	$A \setminus B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0

Propietats

Si A, B, C són subconjunts d'un conjunt U, aleshores es satisfà:

- Unió i intersecció.

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	*(idempotència)*
$A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A,\ A \cup U = U$	*(absorció)*
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	*(commutativitat)*
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	*(associativitat)*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*(distributivitat)*

- Diferència.

$A \setminus B \subseteq A$	$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$	
$A \setminus \emptyset = A$	$A \setminus U = \emptyset$	$A \setminus A = \emptyset$

- Complementari respecte a U.

$\overline{\overline{A}} = A$	$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = U$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Àlgebra de Boole del conjunt de les parts amb la unió i la intersecció

- Si U és un conjunt, aleshores $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, ^-, \varnothing, U)$ és una àlgebra de Boole.

Producte cartesià

- *Parell ordenat*: element de la forma (a, b).
- Igualtat de parells ordenats: $(a, b) = (c, d)$ si i només si $a = c$ i $b = d$.
- *Producte cartesià* dels conjunts A i B: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.
- Propietat. Si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \times B| = |A||B|$.

Les definicions anteriors es poden generalitzar a més de dos conjunts:

- *n-pla ordenada*: element de la forma $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
- Igualtat de n-ples ordenades: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.
- *Producte cartesià* dels conjunts $A_1, A_2, \dots, A_n$:
  $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$.
- Propietat. Si $A_1, \dots, A_n$ són conjunts finits, aleshores $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \dots |A_n|$.

2.1.2 Relacions d'equivalència

Relacions binàries

- Una *relació binària* R en un conjunt A és un subconjunt R del producte cartesià $A \times A$. Si $(a, b) \in R$ aleshores direm que l'element a està relacionat amb l'element b. Ho escriurem aRb.
- Si R és una relació binària en un conjunt A, direm que la relació R és:
  (a) *Reflexiva*: si per a tot $a \in A$ es té que aRa.
  (b) *Simètrica*: si per a tot $a, b \in A$ amb aRb es té que bRa.
  (c) *Antisimètrica*: si $a, b \in A$ són tals que aRb i bRa aleshores $a = b$.
  (d) *Transitiva*: si per a tot $a, b, c \in A$ amb aRb i amb bRc es té que aRc.

Relacions d'equivalència

- Una *relació d'equivalència* en un conjunt A és una relació binària reflexiva, simètrica i transitiva. Notacions habituals: R, $\sim$, $\equiv$.
- *Classe d'equivalència* d'un element $a \in A$ per la relació d'equivalència $\sim$, que denotarem $\overline{a}$ (o bé $[a]$): és el subconjunt de A format pels elements relacionats amb a, és a dir, $\overline{a} = \{b \in A : b \sim a\}$. Qualsevol element de $\overline{a}$ és un *representant* de la classe d'equivalència $\overline{a}$.
- El *conjunt quocient* $A/_\sim$ de A per la relació d'equivalència $\sim$ és el conjunt que té per elements les classes d'equivalència del elements de A per la relació $\sim$. És a dir $A/_\sim = \{\overline{a} : a \in A\}$.

Propietats de les classes d'equivalència

- Si $\sim$ és una relació d'equivalència en un conjunt A, es compleix:

  a) Si $a \in A$ aleshores $\varnothing \neq \overline{a} \subseteq A$ i $a \in \overline{a}$.

  b) Si $a \in A$ i $b \in \overline{a}$, aleshores $\overline{a} = \overline{b}$.

  c) Si $a \in A$ i $b \notin \overline{a}$, aleshores $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$.

  d) Si $a, b \in A$ aleshores les condicions següents són equivalents:

     i) $a \sim b$

     ii) $\overline{a} = \overline{b}$

     iii) $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$

     iv) per a tot $x \in \overline{a}$ i per a tot $y \in \overline{b}$ es compleix $x \sim y$.

Conjunt quocient i particions

Una *partició* d'un conjunt A és una col·lecció de subconjunts no buits $A_1, \ldots, A_r$ de A tals que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ i $A_i \cap A_j = \varnothing$, si $i \neq j$.

- Si A és un conjunt no buit i $\sim$ és una relació d'equivalència en A, aleshores $A/_\sim \subseteq \mathcal{P}(A)$ i els elements del conjunt quocient $A/_\sim$ determinen una partició de A.

- Si $A_1, \ldots, A_r$ és una partició del conjunt A aleshores existeix una única relació d'equivalència $\sim$ en A tal que el seu conjunt quocient és $A/_\sim = \{A_1, \ldots, A_r\}$.

2.1.3 Aplicacions

Aplicacions, imatges i antiimatges

- Una *aplicació* f entre dos conjunts no buits A, B és una correspondència que a cada element $a \in A$ li assigna un únic element de $b \in B$, que denotarem $f(a)$. Direm que $f(a)$ és la *imatge* de a per f. Notació: $f\colon A \to B$.

- Observem que per a definir una aplicació cal donar dos conjunts no buits A i B, i una imatge $f(a) \in B$ per a cada element de A. Direm que A és el *domini* o *conjunt de sortida* i B és el *conjunt d'arribada*. Si $f(a) = b$, és a dir, si b és la imatge de a per f, direm que a és *una antiimatge* de b per f.

- Dues aplicacions $f\colon A \to B$ i $g\colon A' \to B'$ són iguals si, i només si, $A = A'$, $B = B'$ i, per a tot element de A, es compleix $f(a) = g(a)$.

- Si $f\colon A \to B$ és una aplicació, tot element d'A té una i només una imatge, en canvi els elements de B no necessàriament tenen antiimatge i, si en tenen, en poden tenir més d'una.

- Si $f\colon A \to B$ és una aplicació, $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, aleshores el *conjunt imatge* de A' per f és $f(A') = \{f(a)\colon a \in A'\} \subseteq B$ i el *conjunt antiimatge* de B' per f és $f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$. Si $B' = \{b\}$ escriurem $f^{-1}(b)$ en lloc de $f^{-1}(\{b\})$.

Aplicacions injectives, exhaustives i bijectives

- Una aplicació $f\colon A \to B$ és *injectiva* si elements diferents tenen imatges diferents. Les condicions següents són equivalents:

  (a) $f\colon A \to B$ és injectiva;

  (b) $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$, $\forall a, a' \in A$;

  (c) $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$, $\forall a, a' \in A$:

  (d) $|f^{-1}(b)| \leq 1$, $\forall b \in B$.

- Una aplicació $f\colon A \to B$ és *exhaustiva* si tot element $b \in B$ té, com a mínim, una antiimatge per f. Les condicions següents són equivalents:

  (a) $f\colon A \to B$ és exhaustiva;

  (b) $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$;

  (c) $f(A) = B$;

  (d) $|f^{-1}(b)| \geq 1$, $\forall b \in B$.

- Una aplicació $f\colon A \to B$ és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva. Les condicions següents són equivalents:

  (a) $f\colon A \to B$ és bijectiva;

  (b) $(\forall b \in B)(\exists! a \in A)(f(a) = b)$;

  (c) $|f^{-1}(b)| = 1$, $\forall b \in B$.

Composició d'aplicacions. Aplicació identitat. Inversa

- Siguin $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dues aplicacions. Es defineix la *composició* de les aplicacions f i g, que denotarem $g \circ f$, com l'aplicació $g \circ f\colon A \to C$ on $(g \circ f)(a) = (g(f(a))$ per a tot $a \in A$.

- Sigui A un conjunt no buit. La *aplicació identitat* en el conjunt A és l'aplicació $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ definida per $\mathrm{Id}_A(a) = a$, per a tot $a \in A$.

- Sigui $f\colon A \to B$ una aplicació. Es diu que una aplicació $g\colon B \to A$ és la *inversa* de f si es compleix que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ i que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Si existeix l'aplicació inversa de f, aleshores aquesta és única i la denotarem per f^{-1}.

- Una aplicació f té inversa si, i només si, f és bijectiva.

- La composició d'aplicacions bijectives és bijectiva.

Algunes funcions

- *Part entera.* Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores $\lfloor x \rfloor$ denota l'enter menor o igual que x més pròxim a x. És a dir, $\lfloor x \rfloor = n$ si es compleix $n \leq x < n + 1$, on $n \in \mathbb{Z}$. De manera semblant, $\lceil x \rceil$ denota l'enter més gran o igual que x més pròxim a x. És a dir, $\lceil x \rceil = n$ si es compleix $n - 1 < x \leq n$, on $n \in \mathbb{Z}$. Direm que $\lfloor x \rfloor$ és la *part entera inferior* o simplement la *part entera* de x, i $\lceil x \rceil$ és la *part entera superior* de x.

- Considerem les funcions definides de $\mathbb{N}^+$ en $\mathbb{R}$ per $f(n) = \log n$; $f(n) = n^\alpha$, si $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(n) = a^n$, si $a > 1$; $f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$; $f(n) = n^n$. Per a n suficientment gran, es compleix

$$\log n \leq n^\alpha \leq a^n \leq n! \leq n^n$$

$$n^\alpha \leq n^\beta, \text{ si } 1 < \alpha < \beta$$

$$a^n \leq b^n, \text{ si } 0 < a < b$$

2.2 Exercicis

2.1 Especifiqueu tots els elements dels conjunts següents:

a) $\{x : x \in \mathbb{R}, x^2 = 1\}$;

b) $\{x : x \in \mathbb{Z},\ x$ positiu i $x < 12\}$;

c) $\{x : x \in \mathbb{Z},\ x < 100,\ x$ és un quadrat perfecte$\}$;

d) $\{x : x \in \mathbb{Z},\ x^2 = 2\}$.

2.2 Doneu una propietat que caracteritzi els elements dels conjunts següents:

a) $\{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$;

b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

c) $\{-2, 2\}$;

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$.

2.3 De quins conjunts següents és element el nombre 2?

a) $\{x \in \mathbb{R} : x$ enter i $x > 1\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \pm\sqrt{y}\}$;

c) $\{2, \{2\}\}$;

d) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$.

2.4 Determineu si les expressions següents són certes o falses:

a) $x \in \{x\}$.

b) $\{x\} \subseteq \{x\}$.

c) $\{x\} \in \{x\}$.

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$.

e) $\varnothing \subseteq \{x\}$.

f) $\varnothing \in \{x\}$.

2.5 Considerem el conjunt $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Decidiu si les expressions següents són certes o falses:

a) $\emptyset \in A$.

b) $\emptyset \subseteq A$.

c) $\{\emptyset\} \in A$.

d) $\{\emptyset\} \subseteq A$.

e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$.

f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$.

g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$.

h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$.

2.6 Quin és el cardinal dels conjunts següents?

a) $\{x\}$.

b) $\{\{x\}\}$.

c) $\{x, \{x\}\}$.

d) $\{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$.

2.7 Considerem els subconjunts de nombres enters $A = \{n \in \mathbb{Z}\colon n$ és múltiple de $12\}$ i $B = \{n \in \mathbb{Z}\colon n$ és múltiple de 2 i de $6\}$. Determineu si són certes les afirmacions $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ i $A = B$.

2.8 Determineu tots els elements dels conjunts $A \cup B$ i $A \cap B$ per a cadascuna de les parelles de conjunts A i B següents:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 4\}$.

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-4, -3, -2, -1\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ és parell } \}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \text{ és senar } \}$.

2.9 Considerem el conjunt $U = [10]$ i els subconjunts $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6, 10\}$ i $C = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.

a) Doneu la representació binària dels subconjunts A, B i C.

b) Quins conjunts representen les paraules 1111001111, 0101111000 i 1000000001?

2.10 Discutiu si els enunciats següents són certs o falsos, on A, B, C són conjunts qualssevol:

a) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = B = \emptyset$.

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = B = \emptyset$.

c) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

d) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.

2.11 Considerem A, B, C conjunts qualssevol. Demostreu que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ si i només si $A \subseteq C$.

2.12 Calculeu $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{a\})$, $\mathcal{P}(\{a, b\})$, $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ i $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$. Observeu que $\mathcal{P}(A)$ té 2^n elements si A en té n.

2.13 Donat $A = \{1, 2, 3, 4\}$, decidiu si les afirmacions següents són certes o falses:

a) $\{3\} \in A$.

b) $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$.

c) $4 \in \mathcal{P}(A)$.

d) $\{\{4\}\} \in \mathcal{P}(A)$.

e) $\{3, 4\} \in \mathcal{P}(A)$.

f) $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

2.14 Doneu, si és possible, un conjunt A de manera que $\mathcal{P}(A)$ sigui:

a) $\emptyset$.

b) $\{\emptyset\}$.

c) $\{\emptyset, \{a\}\}$.

d) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$.

e) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, a\}\}$.

f) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}\}$.

2.15 Considerem dos conjunts A, B qualssevol. Demostreu:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

b) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

2.16 Demostreu que si A és un conjunt tal que $\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$ té 8 elements, aleshores A té un sol element. Demostreu que el recíproc és cert si i només si $A \neq \{\emptyset\}$.

2.17 Considerem dos conjunts A, B qualssevol.

a) Demostreu $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

b) Demostreu $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. És cert $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

c) Demostreu $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ si i només si $A \subseteq B$ o bé $B \subseteq A$.

2.18 Determineu els elements del complementari del conjunt A en U en els casos següents:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ és parell }\}$, si $U = \mathbb{Z}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 5 \text{ o } x < -1\}$, si $U = \mathbb{Z}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$, si $U = \mathbb{R}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq x\}$, si $U = \mathbb{Z}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq x\}$, si $U = \mathbb{R}$.

f) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x\}$, si $U = \mathbb{R}$.

2.19 Determineu els elements del conjunt $A \setminus B$ si $A = \{n \in \mathbb{Z} : -9 \leq n \leq 9\}$ i si B és:

a) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ és quadrat perfecte}\}$.

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ és múltiple de 2 o de 3}\}$.

c) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ és múltiple de 2 i de 3}\}$.

d) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n < n^2\}$.

2.20 Siguin A, B i C són conjunts qualssevol. Demostreu les equivalències següents, si són certes, o doneu-ne un contraexemple, si són falses:

a) $B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \subseteq (A \cup C)$.

b) $B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \subseteq (A \cup C)$ i $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$.

2.21 Expresseu de la manera més simple possible els conjunts següents, on $A, B, C \subseteq U$ i $\overline{A}, \overline{B}$ representa respectivament el complementari de A, B en U:

a) $A \cap (\overline{A} \cup B)$.

b) $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) $(A \cap (\overline{A} \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$.

2.22 Siguin A_1, A_2, B_1, B_2 conjunts no buits. Demostreu:

a) $A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2 \;\Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1 \quad \text{i} \quad A_2 \subseteq B_2$.

b) $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \times B_2) \cap (A_2 \times B_1)$.

2.23 Sigui $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 16, 18\}$. Doneu la descripció de les relacions binàries següents com a subconjunt del producte cartesià $A \times A$. Comproveu si són reflexives, simètriques o transitives.

a) $xRy \Leftrightarrow x$ és divisor de y
(també denotat $x|y$ o bé $y = \dot{x}$).

b) $xRy \Leftrightarrow x$ és el quadrat de y.

c) $xRy \Leftrightarrow y - x = 2$.

d) $xRy \Leftrightarrow x + y = 20$.

e) $xRy \Leftrightarrow x + y = 30$.

f) $xRy \Leftrightarrow xy$ és parell.

2.24

a) Considereu el raonament següent, segons el qual tota relació R simètrica i transitiva és també reflexiva: com que la relació és simètrica, aleshores sempre que xRy també es té yRx; aleshores, com que la relació és transitiva, es té xRx. És correcta aquesta demostració? Perquè?

b) Suposem que R és una relació simètrica i transitiva definida en un conjunt A. Suposem que per a tot $x \in A$, existeix un element $y_x \in A$ tal que xRy_x. Demostreu que R és una relació d'equivalència en A.

c) Doneu un exemple de relació simètrica i transitiva que no sigui reflexiva.

2.25 Sigui $X = \{a, b, c, d, e, f, g, \}$. Considerem els conjunts:
$A_1 = \{a, c, e\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{d, g\}$;
$B_1 = \{a, e, g\}$, $B_2 = \{b, e, f\}$, $B_3 = \{c, d\}$;
$C_1 = \{a, b, e, g\}$, $C_2 = \{c\}$, $C_3 = \{d, f\}$;
$D_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Digueu quines de les col·leccions de subconjunts següents formen una partició de X.

a) A_1, A_2, A_3. b) B_1, B_2, B_3. c) C_1, C_2, C_3. d) D_1.

2.26 Siguin a i b enters i n un enter positiu. Direm que a divideix (o és divisor de) b o bé que b és múltiple de a si existeix un enter c tal que $b = ac$. Ho denotarem $a|b$ o bé $b = \dot{a}$. Direm que r és el residu de la divisió entera de a entre n si $0 \leq r < n$ i existeix un enter q tal que $a = nq + r$ (es pot demostrar que el residu de la divisió entera és únic). Per exemple, el residu de la divisió entera de 12 entre 3 és 0, ja que $12 = 3 \cdot 4 + 0$; el residu de la de la divisió entera de 29 entre 6 és 5, ja que $29 = 6 \cdot 4 + 5$; de la divisió entera de -29 entre 5 és 1, ja que $-29 = 6 \cdot (-5) + 1$.

a) Demostreu que el residu de a i de b entre 4 és el mateix si i només si $4|b-a$. (Es pot demostrar per a qualsevol enter positiu n que el residu de a i de b entre n és el mateix si i només si $n|b-a$)

b) Demostreu que la relació $aRb \Leftrightarrow n \mid b - a$ és d'equivalència en $\mathbb{Z}$.

c) Determineu les classes d'equivalència i el conjunt quocient per a $n \in \{2, 4, 11\}$. Quantes classes d'equivalència té el conjunt quocient per a un n qualsevol, $n > 0$?

2.27 Es defineix en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relació: $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$. Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Descriviu les classes d'equivalència i el conjunt quocient $\mathbb{Z} \setminus \{0\}/\sim$.

2.28 Es defineix en $\mathbb{R}$ la relació:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{R}$. Descriviu les classes d'equivalència i el conjunt quocient $\mathbb{R}/\sim$.

2.29 Si a, b són enters tals que b és múltiple de a, escrivim $b = \dot{a}$. Sigui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el subconjunt del pla dels punts amb coordenades enteres. En aquest conjunt es defineix la relació

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a - c = \dot{2} \quad \text{i} \quad b - d = \dot{3}.$$

Proveu que és d'equivalència. Calculeu el nombre de classes d'equivalència i doneu un representant de cada classe a distància mínima de l'origen.

2.30 Considerem el conjunt $\mathcal{P}$ de punts del pla i un punt qualsevol $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}$. Definim la relació en $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{\mathcal{O}\}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ A, B i } \mathcal{O} \text{ estan alineats.}$$

Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{P}^*$. Descriviu les classes d'equivalència i el conjunt quocient $\mathcal{P}^*/\sim$.

2.31 Definim en $\mathbb{Z}$ la relació:

$$a\,R\,b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b.$$

Demostreu que R és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z}$. Descriviu les classes d'equivalència i el conjunt quocient $\mathbb{Z}/R$.

2.32 Sigui A un conjunt no buit. Definiu una relació d'equivalència en A per tal que totes les classes d'equivalència tinguin exactament un element. Quin és el conjunt quocient?

2.33 Sigui A un conjunt no buit. Definiu una relació d'equivalència en A per tal que només hi hagi una classe d'equivalència. Quin és el conjunt quocient?

2.34 Considerem les aplicacions següents. Són iguals?

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = \sum_{i=0}^{x} i$.

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x(x+1)/2$.

c) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x(x+1)/2$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x(x+1)/2$.

2.35 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lfloor x^2/3 \rfloor$. Calculeu $f(S)$ en cada cas.

a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$.

d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$.

2.36 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Calculeu $f^{-1}(S)$ en cada cas.

a) $S = \{0\}$.

b) $S = \{x : 0 \leq x < 1\}$.

c) $S = \{-1, 0, 1\}$.

d) $S = \{x : 0 < x < 1\}$.

2.37 Considerem l'aplicació $f : X \longrightarrow X$ on $f(x) = 2x^2 - 5x$.

a) Suposem que $X = \mathbb{R}$.

  i) Calculeu $f(\{-1, 0, 1, \sqrt{2}\})$ i $f([0, 1))$.

  ii) Calculeu $f^{-1}(\{-5, 0, 1\})$ i $f^{-1}([0, 1))$.

  iii) Determineu si f és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

b) Suposem que $X = \mathbb{Z}$.

  i) Calculeu $f(\{-1, 0, 1, 2\})$.

  ii) Calculeu $f^{-1}(\{-1, 0, 3\})$.

  iii) Determineu si f és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

2.38 Determineu si les aplicacions següents són injectives, exhaustives o bijectives. Calculeu l'aplicació inversa quan siguin bijectives.

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = 3x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, on $f(x) = 3x$, per a tot $x \in \mathbb{Z}$.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si } x \leq 3; \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, & \text{si } x > 3. \end{cases}$

d) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, per a tot $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

e) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = \left\lfloor \dfrac{x+5}{2} \right\rfloor$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

f) $f\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$, on $f(x) = \left\lceil \dfrac{x^2}{2} \right\rceil$, per a tot $x \in\ (0,+\infty)$.

2.39 Considerem una aplicació $f\colon A \to B$ tal que $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$. Comproveu si està ben definida i si es injectiva, exhaustiva o bijectiva en els casos següents:

a) $A = \mathbb{R}$ i $B = \mathbb{R}$.

b) $A = \mathbb{R}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

c) $A = B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

d) $A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N}$.

e) $A = \mathbb{Z}$ i $B = \mathbb{Z}$.

f) $A = \mathbb{R}$ i $B = \mathbb{N}$.

2.40 Determineu les aplicacions $g \circ f$ i $f \circ g$, on $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i

a) $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = x - 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2^x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

2.41 Considerem un conjunt qualsevol A. Definim l'aplicació $\psi\colon \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ on $\psi(X)$ és el complementari de X en A. Demostreu que ψ és bijectiva i determineu ψ^{-1}.

2.42 Considerem dues aplicacions $f\colon A \longrightarrow B$ i $g\colon B \longrightarrow C$. Demostreu:

a) Si f i g són injectives, aleshores $g \circ f$ és injectiva.

b) Si f i g són exhaustives, aleshores $g \circ f$ és exhaustiva.

c) Si f i g són bijectives, aleshores $g \circ f$ és bijectiva.

2.43 Considerem una aplicació $f\colon A \longrightarrow B$ i subconjunts $A', A'' \subseteq A$ i $B', B'' \subseteq B$.

a) Demostreu que si $A' \subseteq A''$, aleshores $f(A') \subseteq f(A'')$. Demostreu que el recíproc és cert si f és injectiva.

b) Demostreu que si $B' \subseteq B''$, aleshores $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$. Demostreu que el recíproc és cert si f és exhaustiva.

Exercicis complementaris

2.44 Determineu tots els elements dels conjunts $A \cup B$ i $A \cap B$ per a cadascuna de les parelles de conjunts A i B següents:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 10\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 3 = 0\}$.

2.45 Considerem els conjunts $A = \{\emptyset\}$, $B = \{1\}$, $C = \{\{1\}\}$, $D = \{1, 2\}$, $E = \{\{1\}, 2\}$. Determineu els elements de la unió i la intersecció dels conjunts dos a dos.

2.46 Decidiu si per a qualsevol conjunt A les afirmacions següents són certes o falses:

a) $\emptyset \in A$.

b) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

c) $\emptyset \subseteq A$.

d) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$.

e) $\{\emptyset\} \subseteq A$.

f) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

2.47 Decidiu si les afirmacions següents són certes o falses:

a) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$.

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

c) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$.

d) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.48 Determineu els elements del conjunt $A \setminus B$ si:

a) $A = \{\emptyset, a\}$, $B = \emptyset$.

b) $A = \{\emptyset, a\}$, $B = \{\emptyset\}$.

c) $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset, a\}$.

d) $A = \{\{a\}, b\}$, $B = \{a, b\}$.

e) $A = \{\{a\}, b\}$, $B = \{\{a\}\}$.

f) $A = \{\{a, b\}\}$, $B = \{a, b\}$.

2.49 Demostreu les equivalències següents, on A, B i C són conjunts qualssevol.

a) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

c) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

2.50 Expresseu de la manera més simple possible els conjunts següents, on $A, B, C \subseteq U$ i $\overline{A}, \overline{B}$ representa respectivament el complementari de A, B en U:

a) $(A \cap B \cap C) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \overline{C})$.

b) $[(A \cup B) \cap (\overline{\overline{A} \cap B})] \cup [(A \cap B) \cup (\overline{\overline{A} \cup B})]$.

2.51 Siguin A_1, A_2, B_1, B_2 conjunts no buits. Demostreu:

a) $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

b) $A_1 \times (B_1 \setminus B_2) = (A_1 \times B_1) \setminus (A_1 \times B_2)$.

2.52 Demostreu si és cert o doneu-ne un contraexemple, si és fals: "Si A, B són conjunts no buits i $S \subseteq A \times B$, aleshores existeixen subconjunts C i D de A i B respectivament tals que $S = C \times D$".

2.53 Demostreu que la relació $(a, b)R_1(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ és d'equivalència en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i que la relació $(a, b)R_2(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ ho és en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Quines són les classes d'equivalència en cada cas? Interpreteu els conjunts quocients.

2.54 Considerem el conjunt $\mathcal{P}$ de punts del pla i un punt qualsevol $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}$. Per a qualsevol punt $X \in \mathcal{P}$, denotem per $d(X, \mathcal{O})$ la distància del punt X al punt $\mathcal{O}$. Definim la relació en $\mathcal{P}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow d(A, \mathcal{O}) = d(B, \mathcal{O}).$$

Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{P}$. Descriviu les classes d'equivalència i el conjunt quocient $\mathcal{P}/\sim$.

2.55 Demostreu que, en el conjunt de les rectes del pla, la relació de paral·lelisme és d'equivalència i la de perpendicularitat no ho és. Quin és, en el primer cas, el conjunt quocient?

2.56 Direm que dues relacions d'equivalència definides en un conjunt A són iguals si determinen les mateixes classes d'equivalència. Calculeu quantes relacions d'equivalència diferents es poden definir en un conjunt amb 1, 2, 3 i 4 elements respectivament.

2.57 Sigui $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x - 1) = x^2$. Calculeu $f(x + 1)$.

2.58 Determineu si les aplicacions següents són injectives, exhaustives o bijectives. Calculeu l'aplicació inversa quan siguin bijectives.

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = |x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = x^3 - x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

c) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on $f(x) = 5x + 3$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

2.59 Doneu una aplicació $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

a) bijectiva;

b) exhaustiva, però no injectiva;

c) injectiva, però no exhaustiva;

d) ni injectiva, ni exhaustiva.

2.60 Considerem l'aplicació $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor$.
(Recordeu que $\lfloor x \rfloor = n$, si $n \in \mathbb{Z}$ i $n \le x < n + 1$)

a) Calculeu la imatge de 0, de 1/2 i de 4 per f. És f injectiva?

b) Calculeu les antiimatges de 0 i de 1/4 per f. És f exhaustiva?

c) Doneu un subconjunt C de $\mathbb{R}$ per tal que l'aplicació $g\colon \mathbb{R} \to C$ definida per $g(x) = \lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor$ sigui exhaustiva.

d) Doneu subconjunts no finits A i B de $\mathbb{R}$ per tal que l'aplicació $h\colon A \to B$ definida per $h(x) = \lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor$ sigui bijectiva.

2.61 Considerem dues aplicacions $f\colon A \longrightarrow B$ i $g\colon B \longrightarrow C$.

a) Demostreu que si $g \circ f$ és injectiva, aleshores:

i) f és injectiva.

ii) g no és necessàriament injectiva.

iii) Si f és exhaustiva, aleshores g és injectiva.

b) Demostreu que si $g \circ f$ és exhaustiva, aleshores:

i) g és exhaustiva.

ii) f no és necessàriament exhaustiva.

iii) Si g és injectiva, aleshores f és exhaustiva.

c) Demostreu que si $g \circ f$ és bijectiva, aleshores:

i) f és injectiva i g és exhaustiva.

ii) f no és necessàriament exhaustiva, i g no és necessàriament injectiva.

2.62 Considerem una aplicació $f\colon A \longrightarrow B$. Demostreu:

a) Si $A' \subseteq A$, aleshores $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$.

b) f és injectiva si i només si $A' = f^{-1}(f(A'))$ per a tot subconjunt $A' \subseteq A$.

c) Si $B' \subseteq B$, aleshores $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$.

d) f és exhaustiva si i només si $B' = f(f^{-1}(B'))$ per a tot subconjunt $B' \subseteq B$.

2.63 Considerem una aplicació $f\colon A \longrightarrow B$. Demostreu:

a) Si $A', A'' \subseteq A$, aleshores $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$.

b) Si $A', A'' \subseteq A$, aleshores $f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$.

c) f és injectiva si i només si $f(A' \cap A'') = f(A') \cap f(A'')$, per a subconjunts $A', A'' \subseteq A$ qualssevol.

d) Si $B', B'' \subseteq B$, aleshores $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$.

e) Si $B', B'' \subseteq B$, aleshores $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$.

2.64 Considerem una aplicació $f\colon A \longrightarrow B$. Demostreu:

a) Si $A', A'' \subseteq A$, aleshores $f(A') \setminus f(A'') \subseteq f(A' \setminus A'')$.

b) f és injectiva si i només si $f(A') \setminus f(A'') = f(A' \setminus A'')$ per a subconjunts $A', A'' \subseteq A$ qualssevol.

c) Si $B', B'' \subseteq B$, aleshores $f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'') = f^{-1}(B' \setminus B'')$.

2.3 Solucions

2.1

a) $\{1, -1\}$;
b) $[11]$;
c) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$;
d) $\varnothing$.

2.2

a) $\{x : x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 15, x \text{ múltiple de } 3\}$;
b) $\{x : x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 3\} = \{x : x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 3\}$;
c) $\{x : x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}$;
d) $\{x : x \in \mathbb{Z}, x = 2^k, 0 \leq k \leq 8\}$.

2.3

a) Sí; b) Sí; c) Sí; d) No.

2.4

a) Cert. b) Cert. c) Fals. d) Cert. e) Cert. f) Fals.

2.5

a) Cert. b) Cert. c) Cert. d) Cert. e) Fals. f) Cert. g) Cert. h) Cert.

2.6

a) 1. b) 1. c) 2. d) 3.

2.7 Només és certa $A \subseteq B$.

2.8

a) $A \cup B = B = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, -1 \leq x \leq 4\} = \{-1, 0-1, 2, 3, 4\}$,
$A \cap B = A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, -1 \leq x \leq 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, -4 \leq x \leq 4\} \setminus \{0\} = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$,
$A \cap B = \emptyset$.
c) $A \cup B = B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 < x \leq 4\} = (-2, 4]$,
$A \cap B = A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leq x < 2\} = [-1, 2)$.
d) $A \cup B = \mathbb{Z}$, $A \cap B = \emptyset$.

2.9

a) 0011100000; 1010010001; 0111001110.
b) $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$; $\{2, 4, 5, 6, 7\}$; $\{1, 10\}$.

2.10

1. Cert.
2. Fals. P. ex. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
3. Fals. P. ex. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3\}$.
4. Fals. P. ex. $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$.

2.12 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\, a\,\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\mathcal{P}(\{\, a, b\,\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,
$\mathcal{P}(\{\, a, b, c\,\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$,
$\mathcal{P}(\{\, a, b, c, d\,\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\},$
$\{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

2.13

a) Fals. b) Cert. c) Fals. d) Fals. e) Cert. f) Cert.

2.14

a) No existeix.
b) $A = \emptyset$.
c) $A = \{a\}$.
d) No existeix.
e) No existeix.
f) $A = \{\emptyset, a\}$.

2.17

2) És fals. Per exemple, si $A = \{1\}$ i $B = \{2\}$, $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ però $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2.18

a) Són els enters senars.
b) Són els enters x tals que $-1 \leq x \leq 4$.
c) L'interval de nombres reals $[-2, 2]$.
d) $\emptyset$.
e) Els nombres reals que no són enters.
f) L'interval de nombres reals $(0, 1)$.

2.19

a) $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.
b) $\{-7, -5, -1, 1, 5, 7\}$.
c) $\{-9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.
d) $\{0, 1\}$.

2.20

a) Falsa. La implicació cap a la dreta és certa, però el recíproc és fals. Per exemple, si $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ i $C = \{2\}$, aleshores $A \cup B = A \cup C = \{1, 2\}$. Per tant, $A \cup B \subseteq A \cup C$, però $B \nsubseteq C$.
b) Certa.

2.21

a) $A \cap B$. b) $\emptyset$. c) B.

2.23

a) $R = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (7, 7), (9, 9), (16, 16), (18, 18), (2, 4), (2, 16), (2, 18), (3, 9), (3, 18), (4, 16), (9, 18)\}$. No és simètrica, però és reflexiva i transitiva.
b) $R = \{(4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$. No és ni reflexiva, ni simètrica, ni transitiva.
c) $R = \{(2, 4), (3, 5), (5, 7), (7, 9), (16, 18)\}$. No és ni reflexiva, ni simètrica, ni transitiva.
d) $R = \{(2, 18), (4, 16), (16, 4), (18, 2)\}$. No és ni reflexiva ni transitiva, però és simètrica.
e) $R = \emptyset$. No és reflexiva, però és simètrica i transitiva.
f) $R = \{(x, y) : x \text{ és parell o bé } y \text{ és parell}\}$ És simètrica, però no és reflexiva ni transitiva.

2.24

a) No és correcta.

2.25

a) No. b) No. c) Sí. d) Sí.

2.26

a)

b)

c) Si $n=2$, el conjunt quocient té 2 elements, $\{\overline{0},\overline{1}\}$, on $\overline{a}$ conté tots els enters tals que el residu de la divisió entera entre 2 és a. És a dir $\overline{0}$ és el conjunt de nombres parells i $\overline{1}$, el conjunt dels nombres senars. Si $n=4$, el conjunt quocient té 4 elements, $\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$, on per a tot $a\in\{0,1,2,3\}$, $\overline{a}$ conté tots els enters tals que el residu de la divisió entera entre 4 és a. Anàlogament, si $n=11$, el conjunt quocient té 11 elements i, per a un n genèric, el conjunt quocient té n elements, $\mathbb{Z}/R=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{n-1}\}$, on, per a tot $a\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, la classe $\overline{a}$ conté tots els enters tals que el residu de la divisió entera entre n és a.

2.27 Hi ha dues classes d'equivalència, formades pels enters positius i els enters negatius, respectivament.

2.28 La classe de $x\in\mathbb{R}$ és el conjunt $\{x+n : n\in\mathbb{Z}\}$. El conjunt quocient $\mathbb{R}/\sim$ té tants elements com nombres reals de l'interval $[0,1)$.

2.29 Les classes són 6 i els seus representants a distància mínima de l'origen són $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(1,-1)$.

2.30 La classe d'equivalència del punt A és el conjunt de punts $\mathcal{P}^*$ que són de la recta que passa per $\mathcal{O}$ i A (és a dir, els punts de la recta determinada per $\mathcal{O}$ i A, excepte $\mathcal{O}$). El conjunt quocient $\mathcal{P}^*/\sim$ té tants elements com rectes del pla que passen pel punt $\mathcal{O}$.

2.31 La classe de $a\in\mathbb{Z}$ és el conjunt $\{a,-1-a\}$. El conjunt quocient $\mathbb{Z}/R$ té tants elements com nombres enters no negatius.

2.34 $f_1=f_2$; f_1, f_3 i f_4 són les 3 diferents.

2.35

a) $\{0,1,3\}$. b) $\{0,1,3,5,8\}$. c) $\{0,8,16,40\}$. d) $\{1,12,33,65\}$.

2.36

a) $[0,1)$. b) $[0,1)$. c) $[-1,2)$. d) $\varnothing$.

2.37

a)
  (a) $f(\{-1,0,1,\sqrt{2}\})=\{-3,0,4-5\sqrt{2},7\}$ i $f([0,1))=(-3,0]$.
  (b) $f^{-1}(\{-5,0,1\})=\{\frac{5-\sqrt{33}}{4},0,\frac{5}{2},\frac{5+\sqrt{33}}{4},\}$ i $f^{-1}([0,1))=(\frac{5-\sqrt{33}}{4},0]\cup[\frac{5}{2},\frac{5+\sqrt{33}}{4})$.
  (c) f no és ni injectiva, ni exhaustiva, ni bijectiva.

b)
  (a) $f(\{-1,0,1,2\})=\{-3,-2,0,7\}$.
  (b) $f^{-1}(\{-1,0,3\})=\{0,3\}$.
  (c) f és injectiva, però no és ni exhaustiva, ni bijectiva.

2.38

a) Bijectiva. $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}$.

b) Injectiva, no exhaustiva.

c) Bijectiva. $f^{-1}(x)=(x+4)/2$, si $x\le 2$, i $f^{-1}(x)=(1+\sqrt{8x+9})/2$, si $x>2$.

d) Bijectiva. $f^{-1}=f$.

e) Ni injectiva, ni exhaustiva.

f) Ni injectiva, ni exhaustiva.

2.39

a) Ben definida. Ni injectiva, ni exhaustiva.

b) Ben definida. No Injectiva, però exhaustiva.

c) No està ben definida.

d) Ben definida. Injectiva, no exhaustiva.

e) Ben definida. Injectiva, no exhaustiva.

f) No està ben definida.

2.40

a) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$; $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 10$.

b) $(g \circ f)(x) = 2^{x^2}$; $(f \circ g)(x) = 2^{2x}$.

2.41 $\psi^{-1} = \psi$.

2.44

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 10\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x \leq 5\}$.

b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

c) $A \cup B = \{1, 2, -\frac{3}{2}\}$, $A \cap B = \{1\}$.

2.45

$A \cup B = \{\emptyset, 1\}$; $A \cup C = \{\emptyset, \{1\}\}$; $A \cup D = \{\emptyset, 1, 2\}$; $A \cup E = \{\emptyset, \{1\}, 2\}$; $B \cup C = \{1, \{1\}\}$; $B \cup D = \{1, 2\} = D$; $B \cup E = C \cup D = D \cup E = \{1, \{1\}, 2\}$; $C \cup E = \{\{1\}, 2\} = E$.

$B \cap D = \{1\} = B$; $C \cap E = \{\{1\}\} = C$; $D \cap E = \{2\}$; la resta d'interseccions són $\emptyset$.

2.46

a) Fals. b) Cert. c) Cert. d) Cert. e) Fals. f) Cert.

2.47

a) Cert. b) Fals. c) Fals. d) Cert.

2.48

a) $\{\emptyset, a\}$. b) $\{a\}$. c) $\emptyset$. d) $\{\{a\}\}$. e) $\{b\}$. f) $\{\{a, b\}\}$.

2.50

a) U. b) A.

2.52 És fals. Per exemple, si $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ i $S = \{(1, a), (2, b)\}$, aleshores és fals.

2.53 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R_1$ es pot identificar amb $\mathbb{Z}$; $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/R_2$ es pot identificar amb $\mathbb{Q}$.

2.54 La classe d'equivalència del punt A és el conjunt de punts de la circumferència de centre $\mathcal{O}$ que conté el punt A. El conjunt quocient $\mathcal{P}/\sim$ té tants elements com punts d'un semirecta amb origen en $\mathcal{O}$.

2.55 Fixat un punt P qualsevol, cada element del conjunt quocient es pot identificar amb una recta que passa per P.

2.56 Si el conjunt té 1, 2, 3 i 4 elements es poden definir respectivament 1, 2, 5 i 15 relacions d'equivaléncia.

2.57 $f(x + 1) = (x + 2)^2$.

2.58

a) Ni injectiva, ni exhaustiva.

b) Exhaustiva, no injectiva.

c) Bijectiva. $f^{-1}(x) = (x-3)/5$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

2.60

a) $f(0) = 0$; $f(1/2) = 0$; $f(4) = 1$. f no és injectiva

b) $f^{-1}(0) = [-1, 2)$; $f^{-1}(1/4) = \emptyset$. f no és exhaustiva.

c) $C = \mathbb{Z}$.

d) $A = \{3k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ i $B = \mathbb{Z}$.

CAPÍTOL 3

COMBINATÒRIA

3.1 Resum de teoria

3.1.1 Principis bàsics d'enumeració

- *Principi de les caselles.* Si distribuïm n objectes en m capses i $n > m$, almenys una capsa contindrà dos o més objectes.
- *Principi de les caselles generalitzat.* Si distribuïm n objectes en m capses i $n > rm$, almenys una capsa contindrà $r + 1$ o més objectes.
- *Principi de doble recompte.* Considerem dos conjunts finits A, B i un subconjunt S, $S \subseteq A \times B$. Si per a tot $(a, b) \in A \times B$ definim $f_a(S) = |\{b \in B : (a, b) \in S\}|$ i $c_b(S) = |\{a \in A : (a, b) \in S\}|$, aleshores
$$|S| = \sum_{a \in A} f_a(S) = \sum_{b \in B} c_b(S).$$
- Exemples
  1) A un conjunt de 13 persones, almenys dues han nascut el mateix mes.
  2) A un conjunt de 57 persones, almenys 5 han nascut el mateix mes
  3) Si prenem 5 punts d'un triangle equilàter de costat 1, almenys n'hi ha un parell que disten com a molt $1/2$.
  4) Si A i B són conjunts finits tals que $|A| > |B|$, aleshores una aplicació $f : A \to B$ no pot ser injectiva.
  5) (Erdös-Szekeres, 1935) Tota successió de n^2+1 nombres reals diferents conté una subsuccessió estrictament creixent de longitud $n + 1$ o bé una subsuccessió estrictament decreixent de longitud $n + 1$.
  6) Si a una classe de 57 estudiants cada noi coneix exactament 8 noies i cada noia coneix exactament 11 nois, aleshores hi ha 33 nois i 24 noies.
  7) No és possible trobar una col.lecció de subconjunts de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ de forma que cada un tingui tres elements i cada element de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ pertanyi exactament a cinc d'aquests subconjunts.

3.1.2 Seleccions

En aquesta secció comptarem el nombre de maneres de triar k elements d'un conjunt de n elements amb dos criteris addicionals: si l'ordre en que triem els elements és rellevant o no, i si es poden repetir o no els elements. Identificarem aquestes seleccions amb altres objectes matemàtics ja coneguts.

Seleccions ordenades amb repetició

- Una *k-permutació amb repetició* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements no necessàriament diferents de A.

- Notació. $PR(n,k)$ denota el nombre de k-permutacions amb repetició d'un n-conjunt.

- Càlcul. $PR(n,k) = n^k$, si $k \geq 1$.

- Exemples

  1) El nombre de possibles números de telèfon de 9 xifres és 10^9.
  2) El nombre d'aplicacions $f\colon A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és n^k.
  3) El nombre de paraules binàries de longitud n és 2^n.
  4) El nombre de subconjunts d'un n-conjunt és 2^n.
  5) El nombre de paraules de longitud k que es poden formar amb un alfabet de n lletres és n^k.
  6) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades és n^k.

Seleccions ordenades sense repetició

- Una *k-permutació* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements diferents de A.

- Notació. $P(n,k)$ denota el nombre de k-permutacions d'un n-conjunt.

- Càlcul. $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$, si $1 \leq k \leq n$; $P(n,k) = 0$, si $k > n$.

- Cas particular: $n = k$. Una n-permutació d'un n-conjunt A s'anomena *permutació* de A. El nombre de permutacions d'un n-conjunt és $P(n,n) = n^{\underline{n}} = n! = P(n)$. Podem identificar una permutació del conjunt A amb una aplicació bijectiva $\sigma : A \to A$.

- Exemples

  1) El nombre de maneres d'ordenar les cartes d'una baralla amb 48 cartes és

  $$\begin{aligned} 48! &= 12413915592536072670862289047373375038521486354677760000000000 \\ &\approx 1.241 \times 10^{61}. \end{aligned}$$

  2) El nombre d'aplicacions injectives $f\colon A \to B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.
  3) El nombre d'aplicacions bijectives $f\colon A \to B$, on $|A| = |B| = n$, és $P(n,n) = n!$.
  4) El nombre de paraules de longitud k amb totes les lletres diferents que es poden formar amb un alfabet de n lletres és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.
  5) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades de manera que hi hagi com a molt una bola a cada capsa és $P(n,k) = n^{\underline{k}}$.

Seleccions no ordenades sense repetició. Nombres binomials

- Una k-*combinació* d'un n-conjunt A és una selecció de k elements diferents d'A en la qual no tenim en compte l'ordre dels elements. És a dir, una k-combinació de A és un k-subconjunt d'A.
- Notació. $C(n,k)$ o bé $\binom{n}{k}$ denota el nombre de k-subconjunts d'un n-conjunt. Els nombres $\binom{n}{k}$ s'anomenen *nombres binomials*.
- Càlcul. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, si $0 \le k \le n$.
- Exemples
  1) El nombre de possibles apostes a la loteria primitiva és $\binom{49}{6} = 13983816$.
  2) Amb una baralla de 48 cartes es poden formar $\binom{48}{5} = 1712304$ mans de 5 cartes.
  3) El nombre de paraules binàries de longitud n que contenen exactament k zeros és $\binom{n}{k}$.
  4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que a cada capsa hi hagi com a molt una bola és $\binom{n}{k}$.
  5) El nombre de k-eples $(i_1,\dots,i_k)$ d'enters tals que $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ és $\binom{n}{k}$.
  6) El nombre de camins de longitud mínima del punt de coordenades $(0,0)$ al punt (m,n) que utilitzen només segments horitzontals i verticals de longitud 1 és $\binom{m+n}{m}$.

Propietats dels nombres binomials

1) Per a tot $n \ge 0$, $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2) Per a tot $n \ge 2$, si $1 \le k \le n-1$, aleshores $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
L'equació recurrent anterior ens permet construir el triangle de Tartaglia o de Pascal, on cada fila conté els nombres binomials $\binom{n}{k}$ amb n fix i $0 \le k \le n$. Els nombres de l'interior del triangle són la suma dels dos superiors més propers.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& \binom{0}{0} &&&& \\ &&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&& \\ && \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} && \\ & \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \end{array}$$

3) *Binomi de Newton.* Per a tot enter n, $n \ge 0$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, si $n \ge 0$.

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, si $n \ge 0$.

6) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, si $n \ge k \ge 0$.

7) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, si $n \geq k \geq 1$.

8) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, si $n \geq k \geq r \geq 0$.

9) $\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}$, si $n \geq k+1 \geq 2$.

10) $\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r}{r} = \binom{n+k+1}{k}$, per a n, k enters no negatius (addició en paral·lel).

11) $\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$, per a n, k enters no negatius (addició superior).

12) $\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$, si $n+m \geq k$ (Identitat de Vandermonde).

Seleccions no ordenades amb repetició

- Una *k-combinació amb repetició* o *k-multiconjunt* d'un n-conjunt A, és una selecció no ordenada de k elements de A no necessàriament diferents.

- Notació. $CR(n,k)$ o bé $\left(\binom{n}{k}\right)$ denota el nombre de k-combinacions amb repetició d'un n-conjunt, és a dir, el nombre de k-multiconjunts d'un n-conjunt. Escriurem

$$M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$$

el k-multiconjunt de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ que conté k_i còpies de l'element a_i, per a tot $i \in [n]$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$.

- Càlcul. $CR(n,k) = \left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$, per a $n \geq 1$, $k \geq 0$.

- Exemples

  1) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.
  2) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ tals que $x_i \geq r_i$, per a tot $i \in [n]$, amb $\sum_{i=1}^{n} r_i = s \leq k$, és $CR(n, k-s) = \binom{n+k-s-1}{k-s} = \binom{n+k-1-s}{n-1}$.
  3) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.
  4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que cap capsa quedi buida és $CR(n, k-n) = \binom{k-1}{k-n}$.
  5) El nombre de k-eples $(i_1, \ldots, i_k)$ d'enters tals que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Nombres multinomials

- Una *permutació d'un k-multiconjunt* és una ordenació dels elements del multiconjunt.

- Notació. $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ denota el nombre de permutacions d'un k-multiconjunt $M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. Els nombres $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ s'anomenen *nombres multinomials.*

- Càlcul. Si k, $k_1, \ldots, k_n$ són enters no negatius tals que $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, aleshores

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

- Exemple. Amb les lletres de la paraula MISSISSIPPI es poden formar $\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$ paraules.

- *Teorema del multinomi.* Per a tot enter m, $m \geq 0$,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^m = \sum_{m_1 + \cdots + m_r = m} \binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_r} a_1^{m_1} \ldots a_r^{m_r}.$$

- Exemple. El coeficient del terme xy^4z^5 al desenvolupar l'expressió $(x+y+z)^{10}$ és $\binom{10}{1,4,5} = 1260$.

3.1.3 Principi d'inclusió-exclusió

- Considerem una família de conjunts finits, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una *k-intersecció* dels conjunts $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és qualsevol conjunt de la forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ amb $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Definim

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

  és a dir, α_k és la suma dels cardinals de totes les k-interseccions.

- *Principi d'inclusió-exclusió.* Per a qualsevol família de conjunts finits $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k.$$

- Exemple. El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Desarranjaments

- Un *desarranjament* de $[n]$ és qualsevol permutació σ de $[n]$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in [n]$.
- Notació. D_n denota el nombre de desarranjaments de $[n]$.
- Càlcul. El nombre D_n de desarranjaments de $[n]$ és

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

  Si $n \geq 2$, aleshores:

$$D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

3.2 Exercicis

3.1 Proveu que donats cinc punts qualssevol de l'interior d'un quadrat amb costat de longitud 2, com a mínim n'hi ha dos que disten com a màxim $\sqrt{2}$.

3.2 Proveu que si prenem deu punts de l'interior d'un triangle equilàter de costat 1, com a mínim n'hi ha dos que disten com a màxim $\frac{1}{3}$.

3.3 Demostreu que en un conjunt de 12 enters n'hi ha com a mínim dos que donen el mateix residu al dividir-los per 11.

3.4 En una classe 32 dels estudiants són nois. Si cada noi coneix cinc de les noies de la classe i cada noia coneix vuit dels nois, quantes noies hi ha a la classe?

3.5 Suposem que tenim un cert nombre de subconjunts diferents de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ amb la propietat de que cadascun té quatre elements i cada element de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ pertany exactament a tres dels subconjunts. Quants subconjunts tenim? Escriviu una col.lecció de subconjunts diferents que satisfaci aquestes condicions.

3.6 Es tenen nou subconjunts diferents de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ de cardinal vuit cadascun d'ells. Si cada element de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ pertany a exactament r dels subconjunts, quin és el valor de r? És possible trobar nou subconjunts de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ de cardinal set, de manera que cada element de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ pertanyi exactament a un mateix nombre de subconjunts?

3.7 De quantes maneres es pot escollir un quadrat negre i un quadrat blanc d'un taulell d'escacs, de forma que no estiguin tots dos ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna?

3.8 Calculeu el nombre de vehícles que es poden matricular a l'estat espanyol sabent que les matrícules consten de 4 dígits numèrics i 3 consonants diferents de Q i Ñ (l'alfabet espanyol consta de 5 vocals i 22 consonants).

3.9 Quants paraules binàries hi ha de longitud 8? I de longitud com a molt 8?

3.10 Quants palíndroms de longitud 7 es poden formar amb un alfabet de 26 lletres? (Un palíndrom és una paraula que es llegeix igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra).

3.11 Quants nombres de telèfon de nou dígits es poden formar? Quants d'aquests tenen algun dígit que es repeteix com a mínim una vegada?

3.12 Calculeu el nombre d'enters no negatius menors que 10^6 que tinguin el dígit 2.

3.13 A una comissió de deu persones s'ha d'elegir un president, un secretari i un tresorer. De quantes maneres es poden escollir si els càrrecs han d'estar ocupats per persones diferents?

3.14 De quantes maneres es poden col·locar vuit torres indistingibles a un taulell d'escacs de forma que no n'hi hagi dues a la mateixa fila ni dues a la mateixa columna? I si les torres són distingibles?

3.15 Calculeu el nombre de paraules binàries de longitud 12 que comencen amb dos zeros o acaben amb tres zeros.

3.16 Si en una classe hi ha m noies i n nois, de quantes maneres es poden col.locar en una fila de forma que no hi hagi dues noies seguides? I de forma que estiguin totes seguides?

3.17 Esbrineu quants números de telèfon de n dígits hi ha tals que el 2 apareix almenys tres cops.

3.18 Sigui $n \geq 1$ un enter.

a) Doneu el nombre de permutacions de $[n]$ diferents de la ordenació natural $1, 2, \ldots, n$.

b) Sigui $k \in [n]$. Calculeu el nombre de permutacions de $[n]$ tals que k és el primer element que no és al seu lloc.

c) Demostreu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k! = n! - 1$ per a $n \geq 1$.

3.19 Un club té 30 membres. Calculeu el nombre de maneres de fer les seleccions següents.

a) Triar 5 membres del club per formar el comitè executiu.

b) Triar president, vicepresident, secretari, tresorer i vocal del club, entenent que els càrrecs són incompatibles.

3.20 Un alumne ha de cursar 3 assignatures i 2 idiomes d'un total de 7 assignatures i 4 idiomes possibles. Calculeu de quantes maneres ho pot escollir.

3.21 En un col.lectiu hi ha 6 dones i 5 homes. Calculeu de quantes maneres es pot constituir una comissió de 4 persones amb almenys una dona.

3.22 En una quadrícula de $n \times n$ quadrats, quants rectangles formats per quadrats s'hi poden dibuixar?

3.23 Quants triangles es poden dibuixar al pla amb tots tres vèrtexs de coordenades enteres en $[0, 4] \times [0, 3]$?

3.24 Calculeu el nombre de paraules de 8 lletres que es poden construir usant les 26 lletres de l'alfabet sense que es repeteixi cap lletra i tals que tinguin almenys 3 vocals.

3.25 Calculeu el coeficient de:

a) x^5 en $(1+x)^{11}$; b) a^2b^8 en $(a+b)^{10}$; c) a^6b^6 en $(a^2+b^3)^5$; d) x^3 en $(3+4x)^6$.

3.26 Proveu la igualtat següent on n és un enter positiu

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

3.27 Demostreu per $n \geq m \geq 0$

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

3.28 Proveu que si llancem 3 daus indistingibles hi ha 56 resultats possibles. Quants resultats possibles hi ha si llancem n daus?

3.29 Calculeu el nombre de maneres diferents de comprar 25 entrepans si n'hi ha de tres tipus disponibles i en volem almenys dos de cada tipus.

3.30 Calculeu el nombre de k-subconjunts de $[n]$ tals que no contenen dos enters consecutius.

3.31 Calculeu el nombre de paraules d'onze lletres que es poden formar amb les onze lletres de la paraula ABRACADABRA.

3.32 Esbrineu quants nombres de telèfon de 11 dígits hi ha tals que totes les xifres parelles apareixen exactament dos cops.

3.33 Calculeu el coeficient de

a) $x^5y^3z^2$ en $(x+y+z)^{10}$.
c) xy^5z^2 en $(x-2y+3z)^8$.
e) x^2y^2z en $(2x+\frac{1}{x}-y+z)^9$.
b) x^3yz^4t en $(x+y+z+t)^9$.
d) x^2y^3 en $(2+x+y)^8$.
f) x^6 en $(3+x+x^2)^5$.

3.34 Un missatge consta d'exactament una ocurrència de les lletres a, b, c, d, e, f i de 18 zeros. Quants missatges hi ha que comencen i acaben amb una lletra i tals que entre cada dues lletres hi ha almenys dos zeros?

3.35 En una classe de 67 estudiants, 47 saben francès, 35 alemany i 23 les dues llengües. Quants no saben ni francès ni alemany? Si a més n'hi ha 20 que saben rus, dels quals 12 saben també francès, 11 alemany i 5 les tres llengües, quants n'hi ha que no saben cap de les tres llengües?

3.36 Es pregunta a un grup de 50 persones quins esports practiquen i 25 responen que futbol, 22 tennis i 16 bàsquet.

a) Podem afirmar que totes practiquen esport?

b) Suposem que totes practiquen algun esport, i que a més 7 practiquen futbol i tennis, 5 futbol i bàsquet i 2 els tres esports.

   i) Quantes practiquen només futbol?
   ii) Quantes no practiquen futbol?
   iii) Quantes practiquen tennis i bàsquet, però no futbol?
   iv) Quantes practiquen només tennis?
   v) Quantes practiquen només bàsquet?

3.37 Quants enters x entre 1 i 1000 no són divisibles ni per 2, ni per 3, ni per 5?

3.38 Calculeu en quantes permutacions del multiconjunt $\{1^3, 2^3, 3^3\}$ no apareix un mateix nombre tres vegades consecutives.

3.39 Calculeu el nombre de solucions enteres no negatives de les equacions següents amb les condicions que s'indiquen. *Indicació:* utilitzeu el principi d'inclusió-exclusió i el complementari.

a) $x+y+z=20, \quad x \le 10$ o $y \le 3$.
b) $x+y+z+t=50, \quad 2 \le x \le 17$ i $3 \le y \le 23$.

Indicació: utilitzeu el principi d'inclusió-exclusió i el complementari.

3.40 A l'entrada d'un castell 10 cavallers lliuren sengles espases, però a la sortida, l'encarregat de tornar les espases ho fa a l'atzar. Calculeu la probabilitat que exactament 5 cavallers rebin les seves propies espases. Generalitzeu el resultat si hi ha n cavallers i k reben la pròpia espasa, $0 \le k \le n$.
Indicació: la probabilitat d'un succés es calcula dividint el nombre de casos favorables entre nombre de casos possibles, si els casos són equiprobables.

Exercicis complementaris

3.41 Demostreu que en un conjunt de 12 enters n'hi ha com a mínim dos tals que la seva diferència és divisible per 11.

3.42 Proveu que en un grup de sis persones n'hi ha tres que es coneixen dos a dos, o bé n'hi ha tres on cap parella de dues persones es coneixen.

3.43 Demostreu que, donats $n+1$ nombres diferents de $[2n]$, n'hi ha dos consecutius.

3.44 Calculeu el nombre de matrius binàries $n \times m$.

3.45 Calculeu el nombre d'enters positius amb tots els dígits diferents.

3.46 Considerem les paraules que es poden formar amb l'alfabet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a) Quantes n'hi ha de longitud n?

b) Quantes n'hi ha de longitud com a molt n?

c) Quantes n'hi ha de longitud n amb totes les xifres senars?

d) Quantes n'hi ha de longitud 6 amb xifres parelles diferents a les posicions senars?

3.47 Considereu els enters de n dígits, amb $n \geq 2$ (s'exclouen els nombres que contenen zeros al principi). Calculeu quants d'aquests nombres **no** contenen dos dígits consecutius iguals.

3.48 Trobeu quantes paraules de sis lletres es poden escriure amb les lletres AEMOUY de manera que no continguin ni la sequència ME ni la seqüència YOU.

3.49 Considerem el conjunt de totes les paraules binàries de longitud 20.

a) Quantes n'hi ha?

b) Quantes contenen exactament 4 zeros?

c) Quantes comencen amb la seqüència 11 i acaben amb la seqüència 0101?

d) Quantes tenen un zero a les posicions 3a, 5a i 9a?

e) Quantes contenen almenys 5 uns?

f) Quantes contenen com a màxim 6 zeros?

g) Quantes contenen exactament 5 zeros a les 8 primeres posicions o bé exactament 5 zeros a les 8 últimes posicions?

h) Quantes no contenen exactament 5 uns?

3.50 Proveu la propietat hexagonal, on n, k són enters tals que $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$

3.51 Utilitzeu la identitat $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ per provar la igualtat

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

on m, n, r són enters positius i $m \geq r$, $n \geq r$.

3.52 Demostreu combinatòriament $\displaystyle\binom{n}{k} = \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-r-1}{k-1}$.

3.53 Calculeu el nombre de termes que s'obtenen en desenvolupar l'expressió $(x+y+z)^n$ i agrupar al màxim tots els termes amb els mateixos exponents.

3.54 A una escola de llengües orientals es pot aprendre xinès, japonès i coreà. Aquest curs hi ha 100 alumnes de japonès, 80 de xinès i 50 de coreà; a més 30 aprenen japonès i coreà alhora; i 20 aprenen xinès i coreà alhora. D'altra banda, sabem que el nombre dels que aprenen japonès o xinès és 5 vegades el nombre dels que aprenen xinès i japonès; i el nombre total d'alumnes de l'escola és 16 vegades el nombre dels matriculats a les 3 llengües. Tenint en compte que tots els alumnes de l'escola aprenen almenys una d'aquestes 3 llengües, quants alumnes hi ha?

3.55 Considerem les paraules de longitud 10 que es poden formar amb els dígits 0, 1 i 2. Quantes n'hi ha? Calculeu quantes contenen almenys un 0, almenys un 1 i almenys un 2.

3.56 Sigui $A = \{n \in \mathbb{Z} : 100 \leq n \leq 999\}$. Calculeu el nombre d'elements de A que satisfan les condicions següents.

a) Són senars.

b) Tenen els tres dígits iguals.

c) Són divisibles per 3 o per 4.

d) No són divisibles ni per 3 ni per 4.

3.3 Solucions

3.4 20.

3.5 6; $\{1,4,6,8\}$, $\{1,3,6,8\}$, $\{1,3,5,8\}$, $\{2,3,5,7\}$, $\{2,4,5,7\}$, $\{2,4,6,7\}$.

3.6 6; No.

3.7 768.

3.8 $10^4 20^3 = 1138240000$.

3.9 256; 510.

3.10 456976.

3.11 10^9; 996371200.

3.12 468559.

3.13 720.

3.14 $8!(= 40320)$. 40320^2.

3.15 1408.

3.16 $\binom{n+1}{m} n!m!$; $(n+1)n!m!$.

3.17 $10^n - 9^{n-2}(n^2 + 17n + 162)/2$.

3.18

a) $n! - 1$.

b) $(n-k)(n-k)!$.

3.19

a) 142506.

b) 17100720.

3.20 210.

3.21 325.

3.22 $\binom{n+1}{2}^2$.

3.23 1056.

3.24 9464918400.

3.25

a) 462.

b) 45.

c) 10.

d) 34560.

3.28 56; $\binom{n+5}{5}$.

3.29 210.

3.30 $\binom{n-k+1}{k}$.

3.31 83160.

3.32 6237000.

3.33

a) 2520. b) 2520. c) -48384. d) 4480. e) 60480. f) 185.

3.34 356400.

3.35 8. 6.

3.36

a) No. b) i) 15. ii) 25. iii) 1. iv) 14. v) 10.

3.37 266.

3.38 1314.

3.39

a) 210. b) 9576.

3.40 $\frac{11}{3600} \approx 0.00305$. $\frac{1}{n!}\binom{n}{k}D_{n-k}$.

3.44 2^{nm}.

3.45 8877690.

3.46

a) 9^n. b) $9(9^n - 1)/8$. c) 5^n. d) 17496.

3.47 9^n.

3.48 582.

3.49

a) 1048576. b) 4845. c) 16384. d) 131072. e) 1042380 f) 60460. g) 408576. h) 1033072.

3.53 $\binom{n+2}{2}$.

3.54 160.

3.55 59049. 55980.

3.56

a) 450. b) 9. c) 450. d) 450.

CAPÍTOL 4

GRAFS

4.1 Resum de teoria

4.1.1 Conceptes bàsics de grafs

Vèrtexs i arestes. Ordre i mida.

Definició. Un *graf* G, $G = (V, A)$, està format per dos conjunts disjunts V i A tals que V és finit no buit i tot element de A és un subconjunt de cardinal 2 de V.

Notacions i terminologia.

- Els elements de V s'anomenen *vèrtexs* i els elements de A, *arestes.* Si $\{u, v\} = a \in A$, escriurem $a = uv$.
- Observem que dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ són iguals si, i només si, $V_1 = V_2$ i $A_1 = A_2$.
- Si $a = uv$ és una aresta de G, direm que els vèrtexs u, v són *adjacents* i que el vèrtex u (o bé v) i l'aresta a són *incidents.* Si u, v són adjacents, ho escriurem també $u \sim v$.
- L'*ordre* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs del graf, $|V|$. La *mida* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre d'arestes del graf, $|A|$.

Propietats.

(1) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores $m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

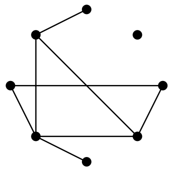
(2) Hi ha $\binom{n(n-1)/2}{m}$ grafs diferents de mida m amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

(3) Hi ha $2^{n(n-1)/2}$ grafs diferents amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

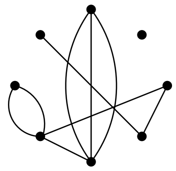
Variants de la definició de graf.

- *Multigraf:* admet arestes múltiples (més d'una aresta connectant dos vèrtexs).
- *Pseudograf:* admet llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix) i arestes múltiples
- *Digraf, graf dirigit:* es tenen *arcs* enlloc d'arestes. Un *arc* és un parell ordenat de vèrtexs (és a dir, una aresta orientada).
- *Graf/digraf ponderat:* assignem un pes a les arestes o arcs

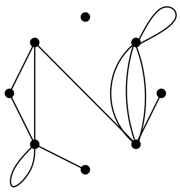
Exemples de les variants de graf:



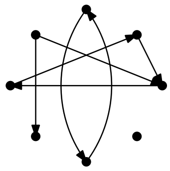
graf



multigraf



pseudograf



digraf

Representació gràfica d'un graf

Normalment representem un graf amb un punt del pla per a cada vèrtex i una línia contínua entre dos vèrtexs, si hi ha una aresta entre els dos vèrtexs. També es poden considerar representacions a l'espai tridimensional, o bé a altres superfícies. De manera semblant es poden representar altres variants (multigrafs, digrafs,...).

Graus

Definicions. Si $G = (V, A)$ és un graf i $u \in V$,

- el *grau* de u és el nombre d'arestes incidents a u, $g(u) = |\{a \in A : u, a \text{ són incidents}\}|$;
- el *grau mínim* de G, $\delta(G)$, és el mínim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\delta(G) = \min\{\, g(u) \,|\, u \in V\}$;
- el *grau màxim* de G, $\Delta(G)$, és el màxim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\Delta(G) = \max\{\, g(u) \,|\, u \in V\}$;
- G és *d-regular* si tot vèrtex té grau d. Per tant, G és regular si i només si $\delta(G) = \Delta(G) = d$;
- la *seqüència de graus* de G és la successió dels n graus dels vèrtexs de G, que normalment donarem en ordre decreixent.

Propietats.

(1) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores $0 \leq g(u) \leq n - 1$ per a tot $u \in V$.

(2) No hi ha cap graf d'ordre n, $n \geq 2$, amb tots els graus dels vèrtexs diferents. És a dir, si $n \geq 2$, a la seqüència de graus hi ha almenys un valor repetit.

(3) *Lema de les encaixades.* Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores

$$\sum_{u \in V} g(u) = 2m.$$

(4) *Conseqüència del lema de les encaixades.* Tot graf conté un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Matriu d'adjacència

Definició. La *matriu d'adjacència* d'un graf $G = (V, A)$ d'ordre n, on $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$, és la matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ quadrada $n \times n$ tal que l'element de la fila i i columna j és

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i u_j \in A, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Propietats. La matriu d'adjacència d'un graf satisfà:

(1) És una matriu binària (de zeros i uns) simètrica, amb zeros a la diagonal principal, i no és única: depèn de l'ordenació escollida al conjunt de vèrtexs del graf.

(2) La suma dels elements de la fila o de la columna i-èsima és el grau del vèrtex u_i.

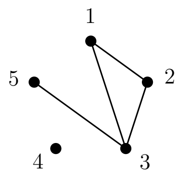
(3) La suma de tots els elements de la matriu és dues vegades la mida.

Altres maneres de donar un graf: llista o taula d'adjacències

Si $G = (V, A)$ és un graf tal que $|V| = n$ i $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, podem donar el graf G amb una llista de longitud n, la *llista d'adjacències*, on a la posició i, $1 \leq i \leq n$, hi ha el conjunt de vèrtexs adjacents a v_i. Si donem aquesta informació en forma de taula, parlem de *taula d'adjacències.*

Exemple. Si $G = (V, A)$, on $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}\}$.

Representació gràfica:



Llista d'adjacències: $(\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{\}, \{3\})$

Taula d'adjacències:

1	2	3	4	5
2	1	1		3
3	3	2		
		5		

Isomorfia de grafs

Definició. Dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ són *isomorfs* si existeix una aplicació bijectiva $f : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que:

$$\forall u, v \in V_1 \ , \ uv \in A_1 \Longleftrightarrow f(u)f(v) \in A_2.$$

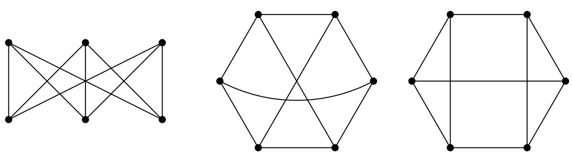
Si G_1 i G_2 són isomorfs, escriurem $G_1 \cong G_2$. Direm que l'aplicació f és un *isomorfisme de grafs* entre G_1 i G_2.

Propietats

1) La isomorfia de grafs defineix una relació d'equivalència en el conjunt de tots els grafs. Cadascuna de les classes d'equivalència que determina aquesta relació és una *classe d'isomorfia.* Tenim, doncs, una partició del conjunt de tots els grafs en classes d'isomorfia.

2) $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1$ i G_2 tenen el mateix ordre, la mateixa mida, i la mateixa seqüència de graus.

   El recíproc no és cert. A la figura següent en tenim un contraexemple, els dos grafs de l'esquerra són isomorfs, però no són isomorfs al de la dreta:



Tipus de grafs

- Graf *nul* d'ordre n, N_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n i mida 0.
  El graf N_1 s'anomena graf *trivial*.

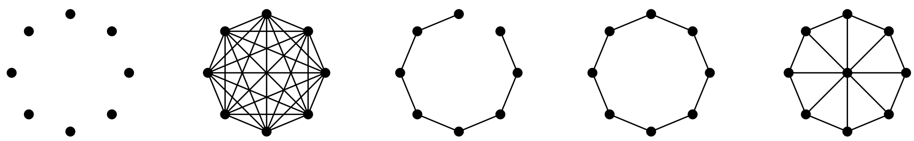
- Graf *complet* d'ordre n, K_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n amb totes les arestes possibles.
  Per tant, la mida de K_n és $\binom{n}{2}$.
  El graf $K_1 \cong N_1$ és el graf trivial.

- Graf *trajecte* d'ordre n, T_n, on $n \geq 1$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $n - 1$ tal que $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n\}$.
  Per tant, $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$, si $n \geq 3$.

- Graf *cicle* d'ordre n, C_n, on $n \geq 3$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida n tal que $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\}$.
  Per tant, $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$.

- Graf *roda* d'ordre n, W_n, on $n \geq 4$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $2n - 2$ tal que $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-2}u_{n-1}, u_{n-1}u_1\} \cup \{u_1u_n, u_2u_n, \dots, u_{n-1}u_n\}$.
  W_n té ordre n i mida $2n - 2$.

A la figura següent tenim exemples de grafs nul, complet, trajecte, cicle i roda:



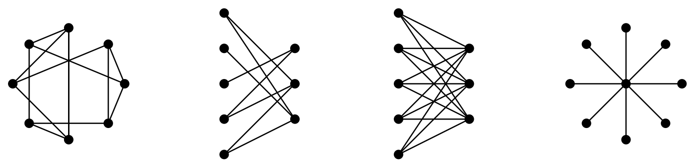
N_8 K_8 T_8 C_8 W_9

- Graf *d-regular*: graf tal que tot vèrtex té grau d, per a algun enter $d \geq 0$.
  Per exemple, K_n és un graf $(n-1)$-regular.
  Si un graf G d'ordre n i mida m és d-regular, aleshores $m = \frac{dn}{2}$.

- Graf *bipartit*: graf $G = (V, A)$ tal que existeix una partició del conjunt de vèrtexs en dos subconjunts, $V = V_1 \cup V_2$, de forma que totes les arestes del graf són de tipus uv amb $u \in V_1$ i $v \in V_2$ (és a dir, no hi ha arestes uv tals que $u, v \in V_1$ ni tals que $u, v \in V_2$). Els conjunts V_1 i V_2 s'anomenen *parts estables*.
  Observem que $\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v)$.

- Graf *bipartit complet*, $K_{r,s}$, on $r, s \geq 1$: graf bipartit d'ordre $r + s$ i mida rs tal que les parts estables són V_1 i V_2, amb $|V_1| = r \geq 1$ i $|V_2| = s \geq 1$, i el conjunt d'arestes és $A = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ (és a dir, tot vèrtex de V_1 és adjacent a tot vèrtex de V_2).
  El graf $K_{1,s}$ se l'anomena *graf estrella*.

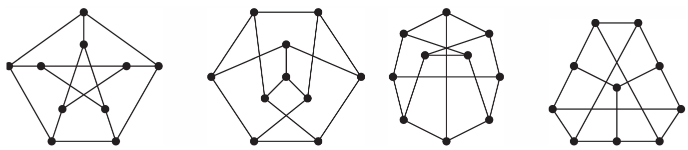
A la figura següent, d'esquerra a dreta, exemples de grafs 3-regular, bipartit, bipartit complet i estrella:



$K_{3,5}$ $K_{1,8}$

- Graf de *Petersen*: graf 3-regular d'odre 10 i mida 15 isomorf a $G = (V, A)$ on
  $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i
  $A = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\} \cup \{v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1\} \cup$
  $\{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5\}$

A la figura següent podeu veure diferents maneres de representar el graf de Petersen:

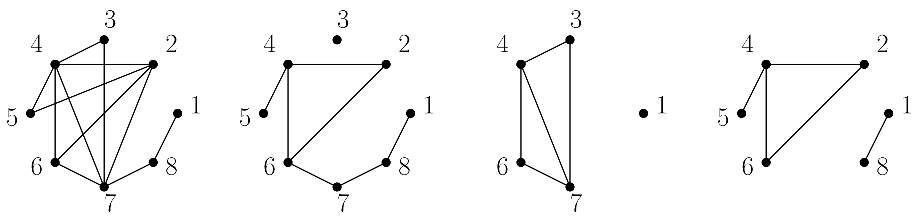


Subgrafs

Si $G = (V, A)$ és un graf,

- $H = (V', A')$ és un *subgraf* de G si H és un graf tal que $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$.
- $H = (V', A')$ és un *subgraf generador* de G si H és un subgraf de G tal que $V' = V$.
- Si $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per S* és el subgraf que té S com a conjunt de vèrtexs, i el conjunt d'arestes està format per totes les arestes de G incidents en dos vèrtexs de S.
  Notació: $G[S]$ (o bé $< S >$) representa el subgraf generat per $S \subseteq V$ en G. És a dir, $G[S] = (S, A')$, on $A' = \{\, uv \in A \,|\, u, v \in S \,\}$.
- Si $T \subseteq A$, $T \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per T* té com a conjunt de vèrtexs tots els vèrtexs incidents a alguna de les arestes de T i el conjunt d'arestes és T.

A la figura següent, d'esquerra a dreta, un graf G i tres subgrafs de G: un subgraf generador, un subgraf generat per un conjunt de vèrtexs i un subgraf generat per un conjunt d'arestes.



G $\quad$ H $\quad$ $G[\{1,3,4,6,7\}]$ $\quad$ $G[\{18,24,26,45,46\}]$

Supressió i addició de vèrtexs i arestes

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, considerem els grafs següents:

- *Supressió d'un vèrtex* $u \in V$ de G: graf que s'obté de G al suprimir el vèrtex u i totes les arestes incidents amb u, és a dir, és el graf $G - u = (V - \{u\}, A')$ on

$$A' = A - \{a \in A | a \text{ és incident amb } u\}.$$

  Per tant, $G - u$ és un graf d'ordre $n - 1$ i mida $m - g(u)$.
  Si $u_1, \ldots, u_s \in V$, es defineix de forma recursiva $G - \{u_1, \ldots, u_s\} = (G - \{u_1, \ldots, u_{s-1}\}) - u_s$.

- *Supressió d'una aresta* $a \in A$: graf que s'obté de G al suprimir l'aresta a, és a dir, és el graf $G - a = (V, A - \{a\})$. Per tant, $G - a$ és un graf d'ordre n i mida $m - 1$.
  Si $a_1, \dots, a_s \in A$, es defineix de forma recursiva $G - \{a_1, \dots, a_s\} = (G - \{a_1, \dots, a_{s-1}\}) - a_s$.
- *Addició d'una aresta* $a = uv \notin A$, $u, v \in V$: graf que s'obté de G a l'afegir una aresta a que no és de G, és a dir, és el graf $G + a = (V, A \cup \{a\})$. Per tant, $G + a$ és un graf d'ordre n i mida $m + 1$.

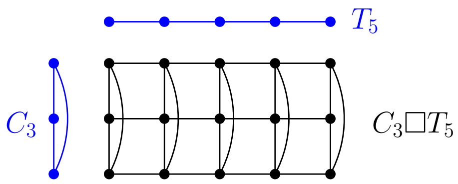
Operacions amb grafs

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, es defineix:

- Graf *complementari* de G: és el graf $\overline{G} = (V, A')$ (també s'escriu G^c) on $A' = \{\, uv \,|\, u, v \in V$ i $uv \notin A \,\}$.
  Per tant, $\overline{G}$ és un graf d'ordre n, mida $\binom{n}{2} - m$, i per a tot vèrtex $u \in V$, $g_G(u) + g_{\overline{G}}(u) = n - 1$.
  Es compleix que $G \cong H$ si i només si $G^c \cong H^c$.
  Direm que un graf G és *autocomplementari* si $G \cong \overline{G}$.

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ és un graf d'ordre n_1 i mida m_1 i $G_2 = (V_2, A_2)$ és un graf d'ordre n_2 i mida m_2, es defineix:

- *Unió disjunta* de G_1 i G_2, si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: és el graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.
  Per tant, $G_1 \cup G_2$ té ordre $n_1 + n_2$ i mida $m_1 + m_2$.
- *Producte cartesià* de G_1 i G_2: és el graf $G_1 \Box G_2 = (V_1 \times V_2, A')$, on A' està definit de la forma següent: $\forall u, u' \in V_1$, $\forall v, v' \in V_2$, $(u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow u = u'$ i $vv' \in A_2$, o bé $v = v'$ i $uu' \in A_1$.
  A la figura següent hi ha representats els grafs C_3, T_5 i el producte cartesià de C_3 per T_5.



  Es compleix:

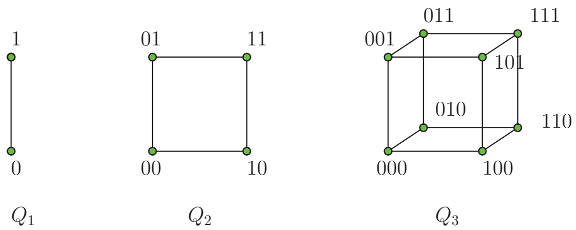
  (i) $g_{G_1 \Box G_2}(u, v) = g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)$, per a tot $(u, v) \in V_1 \times V_2$, on g_H denota el grau d'un vèrtex en el graf H.
  (ii) $G_1 \Box G_2$ és un graf d'ordre $n_1 n_2$ i mida $n_1 m_2 + n_2 m_1$.

  El producte cartesià de r grafs, $r \geq 2$, es defineix recursivament. Per a $r = 2$ és el producte cartesià de grafs que ja hem definit. Si $r \geq 3$, $G_1, G_2, \dots, G_r$ és el graf

$$G_1 \Box G_2 \Box \dots \Box G_r = (G_1 \Box G_2 \Box \dots \Box G_{r-1}) \Box G_r.$$

Per a tot $r \geq 1$, el *graf hipercub*, Q_r, es defineix com el producte cartesià $Q_r = \overbrace{K_2 \Box \dots \Box K_2}^{(r)}$. El graf Q_r és r-regular d'ordre 2^r. Es pot identificar amb el graf que té per conjunt de vèrtexs $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) : \forall i \in [r]\ ,\ x_i \in \{0, 1\}\}$ i dos vèrtexs $(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ són adjacents si, i només si, tenen exactament $r - 1$ components iguals.

Vegeu a la figura següent un representació dels grafs hipercub Q_1, Q_2 i Q_3:



4.1.2 Connexió

Recorreguts, camins i cicles

- Sigui $G = (V, A)$ un graf i $u, v \in V$. Un *u-v recorregut de longitud k, $k \geq 1$,* és una successió alternada de vèrtexs i arestes, $u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, \dots u_{k-1}, a_k, u_k$ tal que $u = u_0$, $v = u_k$, i $a_i = u_{i-1}u_i \in A$, per a tot $i \in [k]$.
  Un vèrtex $u \in V$ es considera un *recorregut de longitud* 0.

  Un recorregut queda determinat per la successió de vèrtexs $u_0, u_1, \dots, u_k$, ja que entre dos vèrtexs adjacents només hi ha una aresta que els uneix. Per tant, sovint donarem només la seqüència de vèrtexs del recorregut.
- Si $u = v$ (resp. $u \neq v$) direm que el recorregut és *tancat* (resp. *obert*).
- Un *camí* és un recorregut que no repeteix vèrtexs.
- Un *cicle* és un recorregut tancat de longitud almenys 3 amb tots els vèrtexs diferents, llevat de l'últim que coincideix amb el primer.

Propietats immediates

(1) La longitud d'un camí és com a molt l'ordre del graf menys 1.

(2) La longitud d'un cicle és com a molt l'ordre del graf.

(3) Un graf de mida almenys 1 conté recorreguts de longitud k, per a tot $k \geq 0$.

Propietats

(1) Si $u - v$ és un recorregut de longitud k, aleshores hi ha $u - v$ camí de longitud com a molt k que passa per vèrtexs i arestes del recorregut.

(2) Si un graf G conté dos vèrtexs u, v tals que almenys hi ha dos $u - v$ camins diferents, llavors G conté almenys un cicle.

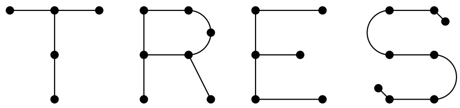
(3) Tot recorregut tancat de longitud senar conté un cicle de longitud senar.

Connexió

Definició. Un graf és *connex* si per a qualsevol parell de vèrtexs del graf hi ha almenys un camí que els connecta. Un *component connex* d'un graf és un subgraf connex maximal.

La relació binària en el conjunt de vèrtexs d'un graf "dos vèrtexs estan relacionats si, i només si, hi ha almenys un camí que els connecta" és d'equivalència. Els *components connexos* de G són els subgrafs induïts per les classes d'equivalència d'aquesta relació.

El graf de la figura següent té 4 components connexos:



Propietats immediates

(1) Un graf connex G d'ordre almenys 2 no té vèrtexs de grau zero, és a dir, $\delta(G) \geq 1$.

(2) Els vèrtexs del component connex del vèrtex u d'un graf G són tots els vèrtexs v tals que existeix almenys un $u - v$ camí en G.

(3) Si $G_1, \ldots, G_k$ són els components connexos del graf G, aleshores $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$.

(4) Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u \in V$, aleshores el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos.

(5) Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $a \in A$, aleshores el graf $G - a$ té com a molt 2 components connexos.

Propietats

(1) Si G és un graf connex d'ordre n i mida m, aleshores $m \geq n - 1$.

(2) Si G és un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos, llavors $m \geq n - k$.

Distància

Definició. Si u, v són dos vèrtexs del mateix component connex d'un graf G, la *distància* entre u i v és el mínim de les longituds de tots els $u - v$ camins. Si no hi ha cap $u - v$ camí, direm que la distància entre u i v és infinita. Denotarem la distància entre els vèrtexs u, v del graf G amb $d(u, v)$. És a dir:

$$d(u,v) = \begin{cases} \infty \text{, si no hi ha cap } u - v \text{ camí,} \\ \text{mínim de les longituds de tots els } u - v \text{ camins, altrament.} \end{cases}$$

Propietats

(1) $d(u, v) = 1$ si, i només si, u i v són adjacents.

(2) $d(u, v) = 2$ si, i només si, no són adjacents i existeix un vèrtex w adjacent a u i a v alhora.

Propietats Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u, v, w \in V$,

(i) $d(u, v) \geq 0$;

(ii) $d(u, v) = 0 \iff u = v$;

(iii) $d(u, v) = d(v, u)$ (simetria);

(iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (desigualtat triangular).

Definicions. Considerem un graf $G = (V, A)$.

- L'*excentricitat* d'un vèrtex $u \in V$, que denotarem $e(u)$, és el màxim de les distàncies entre u i tots els vèrtexs del graf:
$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

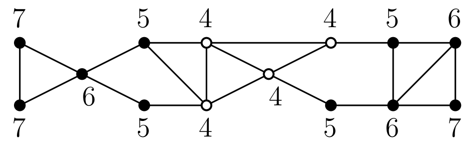
- El *diàmetre* de G, que denotarem $D(G)$, és el màxim de les excentricitats dels vèrtexs de G:
$$D(G) = \max_{u \in V} e(u) = \max_{u,v \in V} d(u, v).$$

- El *radi* de G, que denotarem $r(G)$, és el mínim de les excentricitats dels vèrtexs de G:
$$r(G) = \min_{u \in V} e(u).$$

- Un vèrtex u és *central* si té excentricitat mínima, és a dir, $e(u) = r(G)$.

- El *centre* de G és el subgraf generat per tots els vèrtexs centrals de G.

A la figura següent, es mostra un graf de diàmetre 7 i radi 4. Els vèrtexs estan etiquetats amb l'excentricitat. Els vèrtexs blancs són centrals:



Propietats

(1) Un graf és connex si, i només si, el diàmetre és finit.

(2) Si G és connex, llavors $r(G) \leq D(G) \leq 2\, r(G)$.

(3) Els grafs amb diàmetre 1 són els grafs complets K_n, $n \geq 2$.

(4) Els grafs d'ordre n i diàmetre $n - 1$ són els grafs trajecte T_n.

(5) Els grafs d'ordre n, $n \geq 2$, i radi 1 són els grafs amb grau màxim $\Delta(G) = n - 1$.

(6) Un graf pot contenir camins de longitud més gran que el diàmetre.

Caracterització dels grafs bipartits. Un graf no trivial és bipartit si, i només si, no conté cicles de longitud senar.

Algorismes BFS i DFS

Algoritme DFS: Cerca en profunditat (Depth-first search)

Sigui $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. El conjunt W obtingut amb l'algorisme següent conté els vèrtexs del component connex de G que conté v

```
Llista DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vèrtex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: la llista dels vèrtexs de G que pertanyen al mateix component connex que v
{
Pila P;
P.empilar(v);
```

```
Llista W;
W.afegir(v);
int x;
while (not P.es_buida) {
x=P.cim;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
P.empilar(y);
W.afegir(y);
}
else {
P.desempilar;
}
}
return W;
}
```

Algorisme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i $v \in V$. El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf.

```
vector BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: un vector D tal que D[x]=d(v,x)
{
Cua C;
C.demanar_torn(v);
Llista W;
W.afegir(v);
vector<int> D(n);
D[v]=0;
int x;
while (not C.es_buida) {
x=C.primer;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
C.demanar_torn(y);
W.afegir(y);
D[y]=D[x]+1;
}
else {
C.avançar;
}
}
return D;
}
```

Vèrtexs de tall i arestes pont

Definició. Considerem un graf $G = (V, A)$.

- Un vèrtex $u \in V$ és *vèrtex de tall* si el graf $G - u$ té més components connexos que G.
- Una aresta $a \in A$ és *aresta pont* si el graf $G - a$ té més components connexos que G.

Propietats.

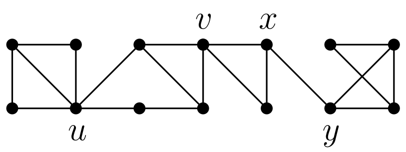
1) Un vèrtex de grau 0 no és mai un vèrtex de tall.

2) Un vèrtex de grau 1 no és mai un vèrtex de tall.

3) Un vèrtex és de tall en un graf G si, i només si, és vèrtex de tall del component connex de G que el conté:
Si G' és el component connex d'un vèrtex u, u és vèrtex de tall en G si, i només si, $G' - u$ és un graf no connex.

4) Una aresta és pont en G si, i només si, és aresta pont del component connex de G que la conté:
Si G' és el component connex que conté l'aresta a, a és aresta pont en G si, i només si, $G' - a$ és un graf no connex.

   Exemple. L'única aresta pont del graf de la figura següent és xy. Els vèrtexs de tall són u, v, x i y



5) Si $G = (V, A)$ és un graf i $a = uv \in A$, aleshores l'aresta a és pont si, i només si, no pertany a cap cicle.

Propietats. Sigui $G = (V, A)$ un graf i $u \in V$ i $a \in A$.

(1) Si $g(u) = 1$ i $uv \in A$, aleshores u no és vèrtex de tall i uv és aresta pont;

(2) Si $a = uv$ és aresta pont i $g(u) \geq 2$, llavors u és vèrtex de tall.

Propietats. Si $G = (V, A)$ és un graf connex, $u \in V$ i $a \in A$,

(1) si u és vèrtex de tall, el nombre de components connexos de $G - u$ és almenys 2 i com a molt $g(u)$;

(2) si a és aresta pont, el nombre de components connexos de $G - a$ és exactament 2.

4.1.3 Arbres

Grafs acíclics

Propietats

1) Un graf amb tots els vèrtexs de grau més gran o igual que 2 conté almenys un cicle.

2) Un graf 2-regular és unió de cicles.

3) Un graf connex 2-regular és un graf cicle.

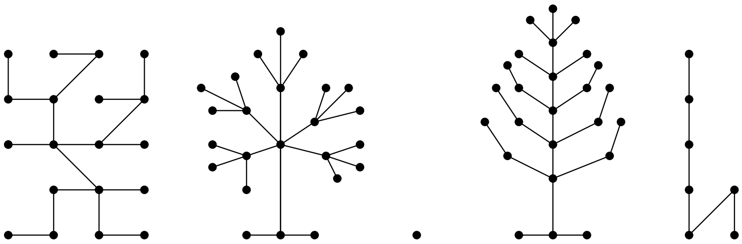
Definició. Un graf és *acíclic* si no conté cap subgraf isomorf a un cicle.

Propietat. Si G és un graf acíclic d'ordre n i mida m, aleshores $m \leq n - 1$.
Els recíproc no és cert. El graf $C_3 \cup K_1$ és un contraexemple.

Arbres

Definició. Un *arbre* és un graf connex i acíclic. Un *bosc* és un graf acíclic. Una *fulla* és un vèrtex de grau 1.

Exemple. Un bosc amb 5 components connexos. Cada component connex és un arbre.



Propietats

(1) Si T és un arbre d'ordre n i mida m, llavors $m = n - 1$.

(2) Els components connexos d'un bosc són arbres.

(3) Si G és un bosc d'ordre n i mida m amb k components connexos, llavors $m = n - k$.

(4) Tot arbre T d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.

(5) Tot arbre és un graf bipartit.

Caracterització dels arbres. Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores són equivalents:

(1) G és arbre;

(2) G és acíclic i $m = n - 1$;

(3) G és connex i $m = n - 1$;

(4) G és connex i tota aresta és pont;

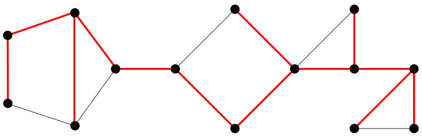
(5) $\forall u, v \in V$, existeix un únic $u - v$ camí;

(6) G és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle.

Arbres generadors

Definició. Un *arbre generador* d'un graf G és un subgraf generador de G que és arbre.

Exemple. Les arestes vermelles indueixen un arbre generador del graf de la figura.



Propietat. Un graf G té almenys un arbre generador si, i només si, G és connex.

Algorismes DFS i BFS per a obtenir arbres generadors

El graf $T = (W, B)$ obtingut amb els algorismes següents és un arbre generador del component connex de G que conté v.

DFS

```
arbre DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
Pila P;
P.empilar(v);
Llista W;
W.afegir(v);
Llista B;
int x;
while (not P.es_buida) {
x=P.cim;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
P.empilar(y);
W.afegir(y);
B.afegir(xy);
}
else {
P.desmpilar;
}
}
return (W,B);
}
```

BFS

```
arbre BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
Cua C;
C.demanar_torn(v);
Llista W;
W.afegir(v);
Llista B;
int x;
while (not C.es_buida) {
x=C.primer;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
C.demanar_torn(y);
W.afegir(y);
B.afegir(xy);
}
else {
C.avançar;
}
}
return (W,B);
}
```

4.2 Exercicis

4.1 Representeu tots els grafs que tenen $\{a, b, c\}$ com a conjunt de vèrtexs.

4.2 Considereu els grafs que tenen $[7]$ com a conjunt de vèrtexs. Calculeu quants grafs hi ha:

a) en total; b) amb exactament 20 arestes; c) amb exactament 16 arestes.

4.3 Per a cadascuna de les seqüències següents, esbrineu si existeixen grafs d'ordre 5 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

a) 3, 3, 2, 2, 2.

b) 4, 4, 3, 2, 1.

c) 4, 3, 3, 2, 2.

d) 3, 3, 3, 2, 2.

e) 3, 3, 3, 3, 2.

f) 5, 3, 2, 2, 2.

4.4 Sigui G un graf d'ordre 9 tal que tots els vèrtexs tenen grau 5 o 6. Proveu que hi ha un mínim de 5 vèrtexs de grau 6 o un mínim de 6 vèrtexs de grau 5.

4.5 Considerem els grafs N_n, K_n, on $n \geq 1$; T_n i C_n, on $n \geq 3$; i W_n, on $n \geq 4$.

a) Doneu una representació gràfica per a $n = 4$ i $n = 6$;

b) Doneu la matriu d'adjacència per a $n = 5$;

c) Doneu l'ordre, la mida, el grau màxim i el grau mínim en funció de n. Són regulars?

d) Esbrineu si són bipartits.

4.6 Demostreu que si un graf és regular de grau senar, aleshores té ordre parell.

4.7 Sigui G un graf bipartit d'ordre n i regular de grau d, $d \geq 1$. Quina és la mida de G? Pot ser que l'ordre de G sigui senar?

4.8 Demostreu que en un graf bipartit d'ordre n la mida és menor o igual que $n^2/4$.

4.9 Siguin $G = (V, A)$, on $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$. Determineu tots els subgrafs de G d'ordre 4 i mida 4.

4.10 Els apartats següents fan referència al graf G definit com segueix. El conjunt de vèrtexs és $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, i dos vèrtexs u i v són adjacents si $|u - v| \in \{1, 4, 5, 8\}$. Determineu l'ordre i la mida dels subgrafs de G següents:

a) El subgraf induït pel conjunt de vèrtexs parells.

b) El subgraf induït pel conjunt de vèrtexs senars.

c) El subgraf induït pel conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4.11 Considereu un graf $G = (V, A)$ amb $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 34, 45\}$. Doneu el conjunt d'arestes, la matriu d'adjacència i una representació gràfica dels grafs G^c, $G - 4$, $G - 45$ i $G + 25$.

4.12 Esbrineu si el complementari d'un graf regular és regular.

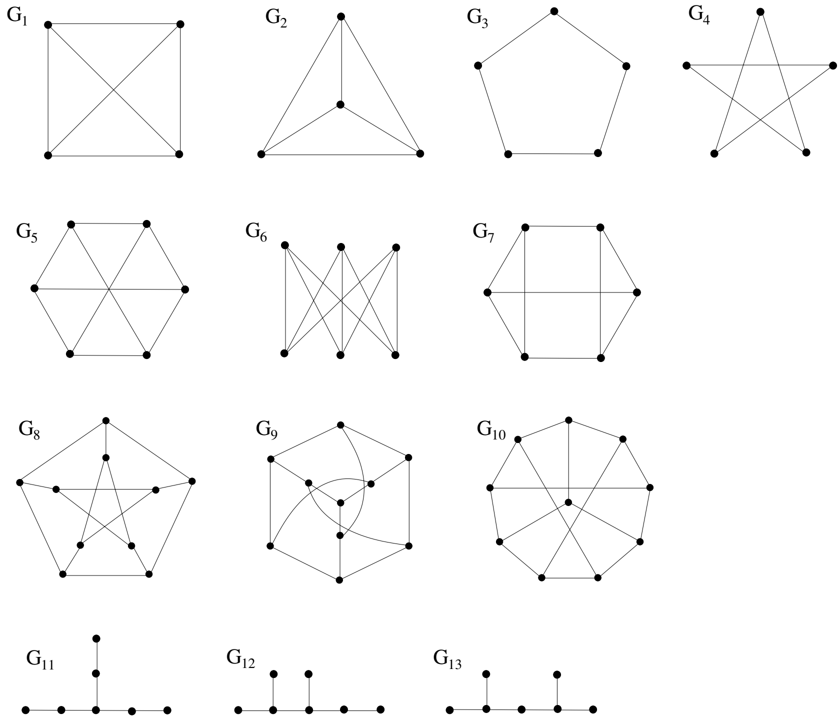


Figura 4.1: Grafs de l'exercici 4.18

4.13 Determineu, llevat isomorfismes, tots els grafs G tals que tant G com el seu complementari són bipartits.

4.14 Doneu el conjunt de vèrtexs i arestes, i una representació gràfica dels grafs $T_3 \cup K_3$, $T_3 + K_3$ i $T_3 \square K_3$ si $V(T_3) = \{1, 2, 3\}$ i 2 és el vèrtex de grau 2 en T_3, i $V(K_3) = \{a, b, c\}$.

4.15 Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs d'ordre quatre i mida dos.

4.16 Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs d'ordre 20 i mida 188.

4.17 Sigui $G = (V, A)$, on $V = \{a, b, c, d\}$ i $A = \{ab, ac, ad, dc\}$. Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els subgrafs del graf G.

4.18 Classifiqueu segons la relació d'isomorfia els grafs de la figura 4.1.

4.19 Sigui G un graf autocomplementari d'ordre n.

a) Doneu el nombre d'arestes de G en funció de n.

b) Demostreu que $n \neq 3$. Doneu un exemple de graf autocomplementari per a $n = 4$ i per a $n = 5$.

c) Demostreu que n és un múltiple de 4 o bé un múltiple de 4 més 1.

d) Comproveu que si $n = 4k$, on $k \geq 1$, la construcció següent dona un graf autocomplementari: prenem $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, on cada V_i conté k vèrtexs; els vèrtexs de V_1 i de V_2 indueixen grafs complets; a més, tenim totes les arestes entre V_1 i V_3, entre V_3 i V_4, i entre V_4 i V_2.

e) Com podem modificar la construcció anterior per obtenir un graf autocomplementari amb $n = 4k + 1$ vèrtexs, on $k \geq 1$?

4.20 Doneu, si és possible, camins de longitud 9 i 11, i cicles de longitud 5, 6, 8 i 9 en els grafs de la figura 4.2.

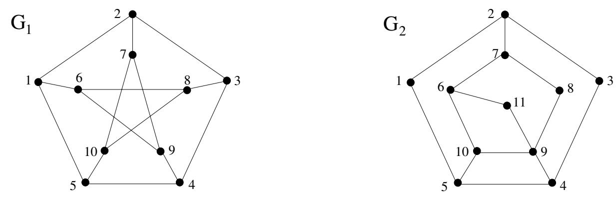


Figura 4.2: Grafs de l'exercici 4.20

4.21 Demostreu que si G és un graf de grau mínim d, aleshores G conté un camí de longitud d.

4.22 Un graf té ordre 13 i 3 components connexos. Demostreu que un dels components té un mínim de 5 vèrtexs.

4.23 Useu l'algorisme DFS per esbrinar si els grafs següents, representats mitjançant la seva taula d'adjacències, són connexos, i en cas contrari determineu-ne els components connexos. Considereu que el conjunt de vèrtexs està ordenat alfabèticament.

a)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
d	d	h	a	a	a	b	c	b	b
e	g		b	d	d	i		g	g
f	i		e			j			
	j		f						

b)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
b	a	f	b	b	c	b	b	c	a	c		g
j	d	i	h	g		e	d	k	b	i		
	e	k				m						
	g											
	h											
	j											

4.24 Demostreu que si un graf té exactament dos vèrtexs de grau senar, aleshores existeix un camí que va d'un a l'altre.

4.25 Sigui G un graf d'ordre n que té exactament dos components connexos i tots dos són grafs complets. Demostreu que la mida de G és, almenys, $(n^2 - 2n)/4$.

4.26 Sigui G un graf d'ordre n amb exactament k components connexos.

a) Demostreu que la mida de G és més gran o igual que $n - k$.

b) Demostreu que la mida de G és com a molt $(n - k + 1)(n - k)/2$.

4.27 Considereu els grafs de l'exercici 4.23. Doneu la distància des dels vèrtexs a i b a tots els vèrtexs del component connex on es troben aplicant l'algorisme BFS.

4.28 Trobeu l'excentricitat de tots els vèrtexs, el radi, el diàmetre, els vèrtexs centrals i el centre

a) dels grafs de l'exercici 4.20;

b) del graf $G = ([8], \{12, 14, 15, 23, 34, 38, 46, 47, 56, 67, 78\})$.

4.29 Doneu exemples de:

a) graf connex amb el radi i el diàmetre iguals.

b) graf connex tal que el diàmetre sigui el doble del radi.

4.30 Doneu un graf $G = (V, A)$ i un vèrtex $u \in V$ tal que G i $G - u$ siguin connexos i es satisfaci:

a) $D(G) = D(G - u)$; b) $D(G) < D(G - u)$; c) $D(G) > D(G - u)$.

4.31 Sigui G un graf no complet d'ordre n, $n \geq 3$, tal que tots els vèrtexs tenen grau més gran que $(n - 1)/2$. Demostreu que G té diàmetre 2.

4.32 Trobeu tots els vèrtexs de tall i arestes pont dels grafs de la figura 4.3.

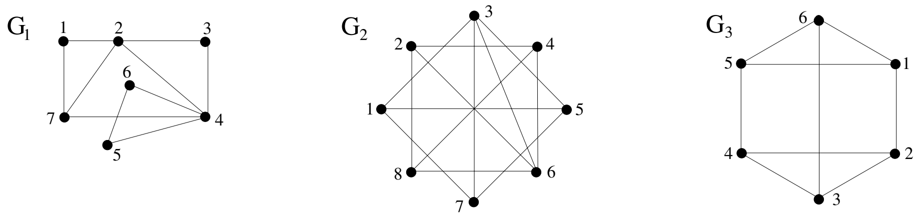


Figura 4.3: Grafs de l'exercici 4.32

4.33 Sigui $G = (V, A)$ un graf connex d'ordre almenys 2. Prenem $z \notin V$ i definim $G + z$ com el graf que té $V \cup \{z\}$ com a conjunt de vèrtexs i $A \cup \{zv : v \in V\}$ com a conjunt d'arestes. Demostreu que $G + z$ no té vèrtexs de tall.

4.34 Quin és l'enter n més petit tal que existeix un graf 3-regular d'ordre n que té alguna aresta pont?

4.35 Demostreu que un graf 3-regular té un vèrtex de tall si, i només si, té alguna aresta pont.

4.36 Siguin $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. Proveu que

a) si G és no connex, aleshores G^c és connex;

b) $(G - v)^c = G^c - v$;

c) si G és connex i v és un vèrtex de tall de G, aleshores v no és un vèrtex de tall de G^c.

4.37 Demostreu que un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell no té arestes pont.

4.38 Sigui T_1 un arbre d'ordre n i mida 17 i T_2 un arbre d'ordre $2n$. Calculeu n i l'ordre i la mida de T_2.

4.39 Per a cada enter $n \geq 1$, sigui a_n el nombre d'arbres no isomorfs d'ordre n. Comproveu els valors de la taula següent:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	1	1	2	3	6	11

4.40 Calculeu quants arbres d'ordre n no isomorfs hi ha tals que:

a) el seu grau màxim és $n-2$, on $n \geq 4$; b) el seu grau màxim és $n-3$, on $n \geq 5$.

4.41 Sigui T un arbre d'ordre 12 que té exactament 3 vèrtexs de grau 3 i exactament un vèrtex de grau 2.

a) Doneu la seqüència de graus de T.

b) Doneu dos arbres no isomorfs amb aquesta seqüència de graus.

4.42

a) Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Proveu que el nombre de fulles de T és

$$2 + \sum_{g(u)\geq 3} (g(u) - 2).$$

b) Sigui Δ el grau màxim de T i sigui n_i el nombre de vèrtexs de grau i de T. Vegeu que la fórmula anterior es pot escriure com

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i.$$

c) Sigui ara G un graf connex, de grau màxim Δ i amb n_i vèrtexs de grau i, per a tot i. Demostreu que si es compleix la igualtat

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i,$$

aleshores G és un arbre.

4.43 Sigui G un graf connex que només té vèrtexs de grau 1 i de grau 4. Sigui k el nombre de vèrtexs de grau 4. Demostreu que G és un arbre si, i nomes si, el nombre de fulles és $2k+2$.

4.44 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$ i de grau màxim Δ. Proveu que T té un mínim de Δ fulles.

4.45 Demostreu que les afirmacions següents són equivalents per a un arbre T d'ordre $n \geq 3$:

a) T és isomorf al graf estrella $K_{1,n-1}$.

b) T té exactament $n-1$ fulles.

c) T té grau màxim $n-1$.

d) T té diàmetre igual a 2.

4.46

a) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents del graf cicle C_n. Quants n'hi ha llevat isomorfismes?

b) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents del graf bipartit complet $K_{2,r}$. Quants n'hi ha llevat isomorfismes?

4.47

a) Justifiqueu que si T és un arbre generador de G obtingut en aplicar l'algorisme BFS començant amb el vèrtex u, aleshores $g_T(u) = g_G(u)$.

b) En aplicar l'algorisme BFS a un graf G d'ordre $n \geq 4$ amb vèrtex inicial v s'obté un graf estrella $K_{1,n-1}$ del que v n'és una fulla. Doneu almenys dos grafs no isomorfs amb aquesta propietat.

4.48 Considereu el graf $K_{r,r+3}$. Quants arbres no isomorfs es poden obtenir en aplicar l'algorisme DFS segons quin sigui el vèrtex inicial?

4.49

a) Demostreu que si T és un arbre generador de G, aleshores les fulles de T no són vèrtexs de tall de G.

b) Demostreu que tot graf connex d'ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtexs que no són vèrtexs de tall.

Exercicis complementaris

4.50 Doneu la mida d'un graf:

a) d-regular d'ordre n;

b) bipartit complet $K_{r,s}$.

4.51 L'Aran i la seva parella organitzen una festa on es reuneixen un total de 5 parelles. Es produeixen un cert nombre de salutacions però, com és natural, ningú no saluda la pròpia parella. A la sortida l'Aran pregunta a tothom quantes persones ha saludat i rep nou respostes diferents. Quantes persones ha saludat l'Aran i quantes la seva parella?
Indicació: Descriviu un graf que modeli la situació. Esbrineu quantes salutacions fa cada membre d'una parella.

4.52 Proveu que si G és un graf d'ordre almenys 6, aleshores G conté un subgraf isomorf a C_3 o G^c conté un subgraf isomorf a C_3.

4.53 Proveu o refuteu les afirmacions següents:

a) Si G_1 i G_2 són grafs regulars, aleshores $G_1 \Box G_2$ és regular.

b) Si G_1 i G_2 són grafs bipartits, aleshores $G_1 \Box G_2$ és bipartit.

4.54 Calculeu el diàmetre dels grafs següents.

a) K_n, $n \geq 1$.

b) T_n, $n \geq 2$.

c) $K_{r,s}$, $2 \leq r \leq s$.

d) $K_{1,s}$, $s \geq 2$.

e) C_n, $n \geq 3$.

f) W_n, $n \geq 4$.

4.55 Doneu un graf connex tal que tot vèrtex de grau ≥ 2 sigui de tall però no sigui arbre.

4.56 Demostreu que les afirmacions següents són equivalents per a un arbre T d'ordre $n \geq 3$:

a) T és isomorf al graf trajecte T_n.

b) T té exactament 2 fulles.

c) T té grau màxim 2.

d) T té diàmetre igual a $n-1$.

4.57 Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Demostreu que les afirmacions següents són equivalents:

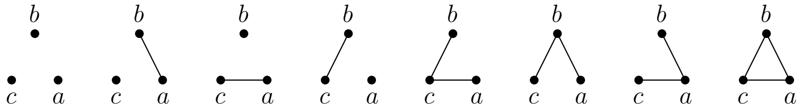
i) El graf G és connex i té un únic cicle.

ii) Existeix una aresta a de G tal que $G - a$ és un arbre.

iii) El graf G és connex i $n = m$.

4.3 Solucions

4.1 N'hi ha 8:

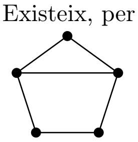


4.2

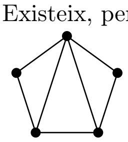
a) $2^{21} = 2097152$; b) 21; c) 20349.

4.3

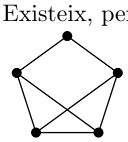
a) Existeix, per exemple:



c) Existeix, per exemple:



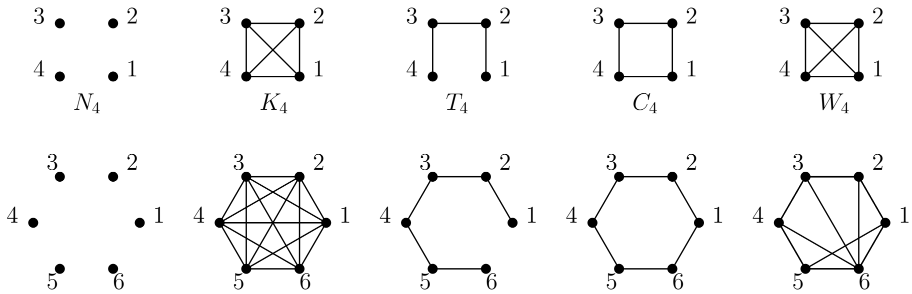
e) Existeix, per exemple:



b) No existeix. d) No existeix. f) No existeix.

4.5

a)



N_4 K_4 T_4 C_4 W_4

N_6 K_6 T_6 C_6 W_6

b) Si $V = [5]$, els vèrtexs de grau 1 en T_5 són 1 i 5; el vèrtex de grau 4 en W_5 és 5, i ordenem els vèrtexs de 1 a 5 per a calcular la matriu d'adjacència:

$$M_A(N_5) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad M_A(K_5) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0 \end{pmatrix}, \quad M_A(T_5) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$M_A(C_5) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad M_A(W_5) = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

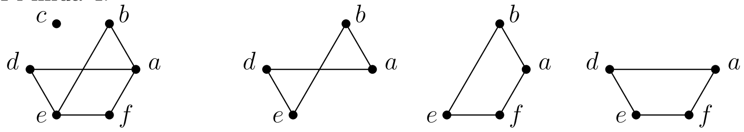
c)

graf	ordre	mida	δ	Δ	regular
N_n	n	0	0	0	sí
K_n	n	$n(n-1)/2$	$n-1$	$n-1$	sí
T_n	n	$n-1$	1	2	no
C_n	n	n	2	2	sí
W_n	n	$2(n-1)$	3	$n-1$	si i només si $n = 4$

d) N_n és bipartit si i només si $n \geq 2$; K_n és bipartit si i només si $n = 2$; T_n és bipartit per a tot valor de n; C_n és bipartit si i només si n és parell; W_n no és mai bipartit.

4.7 La mida és $m = dn/2 = dr = ds$, si les parts estables tenen cardinal r i s respectivament. Per tant, $r = s$ i l'ordre ha de ser parell.

4.9 N'hi ha 3. A la figura següent tenim una representació del graf G i dels 3 subgrafs H_1, H_2 i H_3 d'ordre 4 i mida 4:

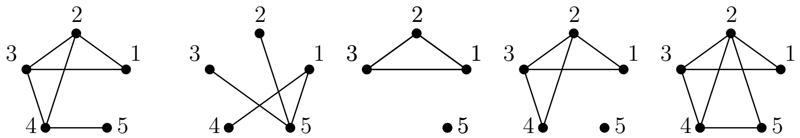


G H_1 H_2 H_3

4.10

a) 5; 4. b) 4; 2. c) 5; 5.

4.11



G G^c $G-4$ $G-45$ $G+25$

$$A(G^c) = \{14, 15, 25, 35\};\ M_A(G^c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A(G-4) = \{12, 13, 23\};\ M_A(G-4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

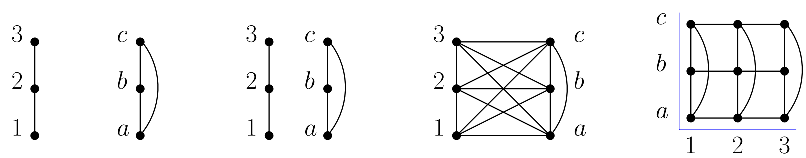
$$A(G-45) = \{12, 13, 23, 24, 34\};\ M_A(G-45) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G+25) = \{12, 13, 23, 24, 25, 34, 45\};\ \ M_A(G+25) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.12 És cert.

4.13 Tenen ordre com a molt 4. D'ordre 2: N_2, K_2; d'ordre 3: $K_1 \cup K_2$, T_3; d'ordre 4: $K_2 \cup K_2$, T_4, C_4.

4.14



T_3 K_3 $T_3 \cup K_3$ $T_3 + K_3$ $T_3 \Box K_3$

$V(T_3 \cup K_3) = \{1, 2, 3, a, b, c\}$; $A(T_3 \cup K_3) = \{12, 23, ab, ac, bc\}$

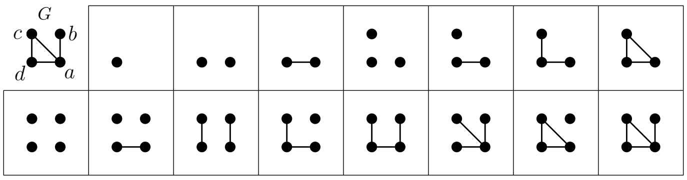
$V(T_3 + K_3) = \{1, 2, 3, a, b, c\}$; $A(T_3 + K_3) = \{12, 23, ab, ac, bc, 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$

$V(T_3\Box K_3) = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$;
$A(T_3\Box K_3) = \{(1,a)(1,b),(1,b)(1,c),(1,a)(1,c),(2,a)(2,b),(2,b)(2,c),(2,a)(2,c),(3,a)(3,b),(3,b)(3,c),(3,a)(3,c),$
$(1,a)(2,a),(2,a)(3,a),(1,b)(2,b),(2,b)(3,b),(1,c)(2,c),(2,c)(3,c)\}$

4.15 $K_2 \cup K_2$ i $K_1 \cup T_3$

4.16 N'hi ha 2. Són els complementaris de $K_2 \cup K_2 \cup K_1 \cup \cdots K_1$ i $T_3 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_1$

4.17 N'hi ha 15:



4.18 Les classes d'equivalència són: $\{G_1, G_2\}$, $\{G_3, G_4\}$, $\{G_5, G_6\}$, $\{G_7\}$, $\{G_8, G_9, G_{10}\}$, $\{G_{11}\}$, $\{G_{12}\}$ i $\{G_{13}\}$

4.20 G_1: Camí de longitud 9: 1 2 3 4 5 10 7 9 6 8. No hi ha camins de longitud 11 ja que té ordre 10. Cicles: 1 2 3 4 5 1; 1 2 3 8 10 5 1; 1 6 8 10 7 9 4 5 1; 1 2 3 4 9 7 10 8 6 1.
G_2: 1 2 3 4 5 10 6 7 8 9. No hi ha camins de longitud 11 ja que té ordre 11. Cicles: 1 2 3 4 5 1; 5 10 6 11 9 4 5; 2 3 4 5 10 9 8 7 2; 5 1 2 3 4 9 11 6 10 5.

4.22 Immediat pel principi de les caselles.

4.23

a) $\langle\{a,b,d,e,f,g,i,j\}\rangle \bigcup \langle\{c,h\}\rangle$.

b) $\langle\{a,b,d,e,g,h,j,m\}\rangle \bigcup \langle\{c,f,i,k\}\rangle \bigcup \langle\{l\}\rangle$.

4.27

a)

v	a	b	d	e	f	g	i	j
d(a,v)	0	2	1	1	1	3	3	3
d(b,v)	2	0	1	2	2	1	1	1

b)

v	a	b	d	e	g	h	j	m
d(a,v)	0	1	2	2	2	2	1	3
d(b,v)	1	0	1	1	1	1	1	2

4.28

a) G_1: $e(v) = 2$, $1 \leq v \leq 10$; $r(G) = 2$; tots els vèrtexs són centrals. G_2: $e(1) = e(11) = 4$, $e(v) = 3$, $2 \leq v \leq 10$; $r(G) = 3$; v vèrtex central si $2 \leq v \leq 10$.

b) G: $e(4) = 2$, $e(v) = 3$, $v \neq 4$; $r(G) = 2$; l'únic vèrtex central és el 4.

4.29

a) C_6.

b) T_5.

4.30

a) $G = W_6$ i u un vèrtex de grau 3.

b) $G = W_7$, u el vèrtex de grau 6.

c) $G = ([4], \{12, 13, 14, 23\})$, $u = 4$.

4.32

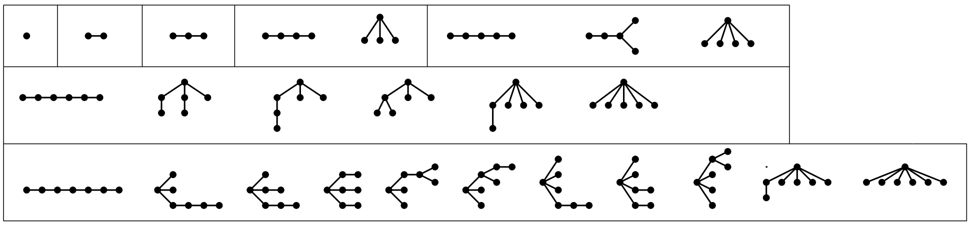
- G_1. Vèrtexs de tall: 4. Arestes pont: cap.

- G_2. Vèrtexs de tall: $3, 6$. Arestes pont: 36.
- G_3. Vèrtexs de tall: cap. Arestes pont: cap.

4.34 $n = 10$

4.38 $n = 18$; ordre de T_2: 36; mida de T_2: 35.

4.39



4.40

a) 1.

b) 1, si $n = 5$; 3, si $n \geq 6$.

4.41

a) 4,3,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1;

b) Dos arbres no isomorfs amb aquesta seqüència de graus:

4.46

a) n; 1.

b) $r2^{r-1}$; $\lceil r/2 \rceil$.

4.47

b) $G_1 \cong K_{1,n-1}$ (el vèrtex v és una de les fulles de $K_{1,n-1}$); G_2 : pengem una fulla d'un vèrtex qualsevol d'un graf complet d'ordre $n-1$ (el vèrtex v és la fulla que pengem).

4.48 Dos.

4.50

a) $dn/2$;

b) rs.

4.51 4 l'Aran i 4 la parella.

4.53 Les dues afirmacions són certes.

4.54

a) 1, si $n \geq 2$. $D(K_1) = 0$.

b) $n - 1$.

c) 2.

d) 2.

e) $\lfloor n/2 \rfloor$.

f) 1, si $n = 4$; 2, si $n \geq 5$.

4.55 Per exemple, qualsevol graf obtingut al penjar una fulla de cadascún dels vèrtexs d'un cicle.