TEMA 4. POLINOMI DE TAYLOR

Aproximació polinòmica. Polinomi de Taylor. Fórmula de Taylor. Teorema de Taylor i residu de Lagrange. Fórmula de Taylor de les funcions elementals. Aproximació de valors de funcions i acotació de l'error

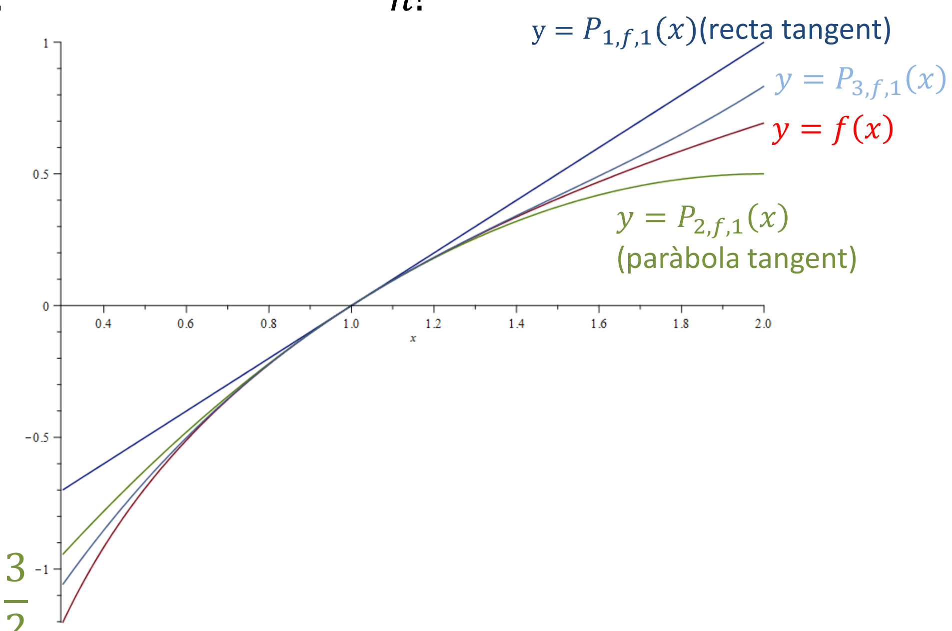
Definició

Siguin $f\colon R \to R$ funció, $n \in N$, $a \in Dom\, f$ tal que f és n vegades derivable en un entorn de a. **El polinomi de Taylor d'ordre n de la funció f en el punt a** és:

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemple

$f(x) = \ln x\,, a = 1$



$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \qquad f''(1) = -1$

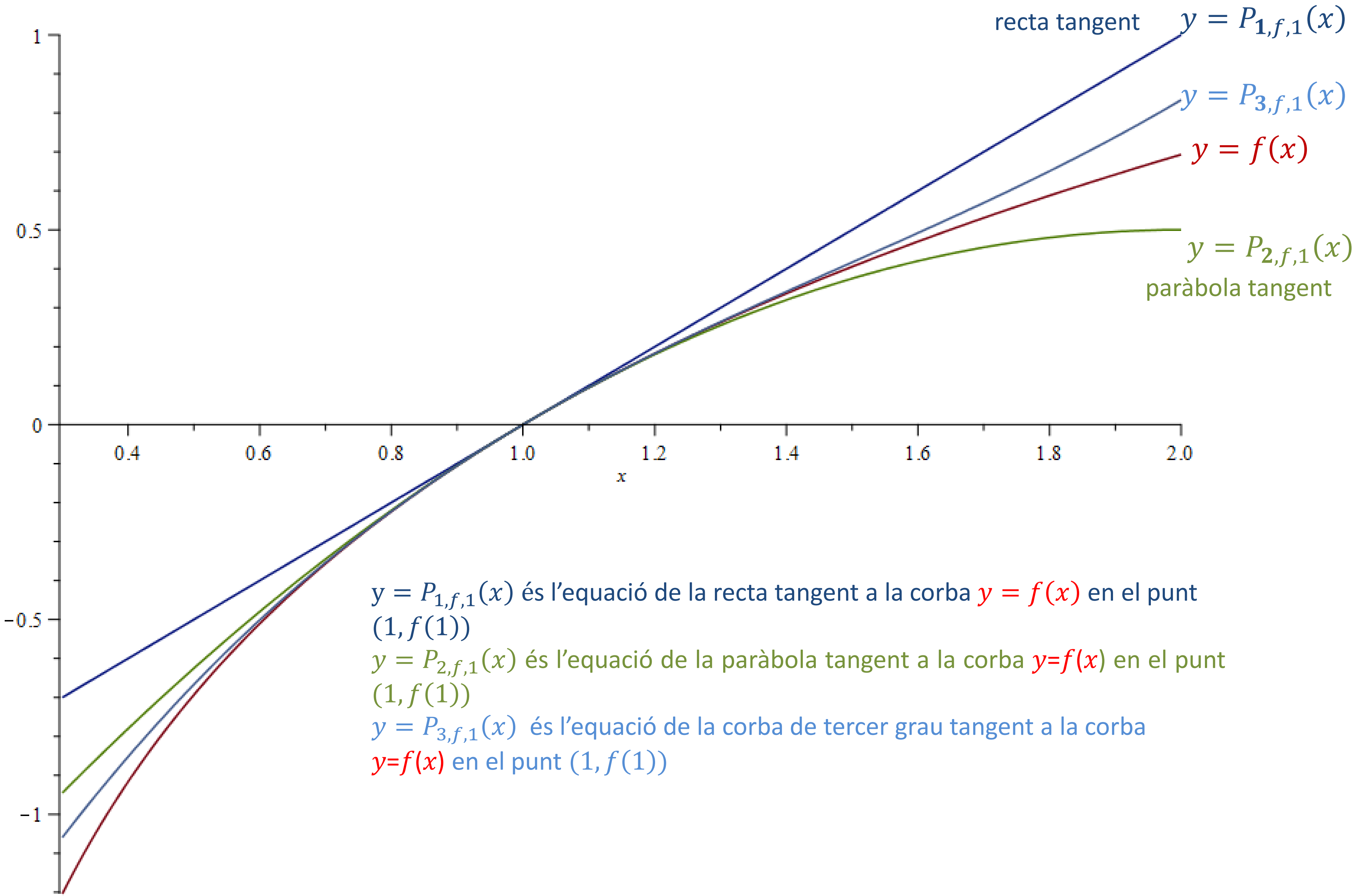
$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \quad f'''(1) = 2$

$P_{1,f,1}(x) = \mathrm{x} - 1$

$P_{2,f,1}(x) = \mathrm{x} - 1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

$P_{3,f,1}(x) = \mathrm{x} - 1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \mathrm{x} - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3x^2}{2} - 3x - \frac{11}{6}$



$y = P_{1,f,1}(x)$ és l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(1, f(1))$

$y = P_{2,f,1}(x)$ és l'equació de la paràbola tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt $(1, f(1))$

$y = P_{3,f,1}(x)$ és l'equació de la corba de tercer grau tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt $(1, f(1))$

$$\left.\begin{array}{l} P_{n,f,a}(a) = f(a) \\ \forall i = 1, \dots n \;\; {P_{n,f,a}}^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \end{array}\right\}$$

"$P_{n,f,a}(x)$ i $f(x)$ són iguals fins a l'ordre n en a"

Definició

Es diu **terme complementa**ri, **reste** o **residu del polinomi de Taylor d'ordre $\boldsymbol{n}$ de la funció $\boldsymbol{f}$ en el punt $\boldsymbol{a}$** a:

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

Teorema de Taylor (i Residu de Lagrange)

$$\left.\begin{array}{l} f\colon R \to R \text{ funció} \\ f, f', f'', \dots f^{(n)} \text{ contínues en } [\alpha, \beta] \\ \exists f^{(n+1)} \text{ en }]\alpha, \beta[\\ a \in]\alpha, \beta[\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in Dom\, f \;\; \exists c \;\; entre \;\; x \;\; i \; a \;\; tal\; que: \\ f(x) = P_{n,f,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{array}$$

Residu de Lagrange:

$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, per a cert c entre x i a

Com més gran és $\boldsymbol{n}$ i més a prop està $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{x}$ millor és l'aproximació $\boldsymbol{f(x) \cong P_{n,f,a}(x)}$

Fórmula de Taylor d'ordre n de la funció f en el punt a:

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ per a cert } c \text{ entre } x \text{ i } a$$

funció polinomi residu (en valor absolut : error)

Fórmula de Taylor per a les funcions elementals

$0 \gtrless c \gtrless x$

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}, \quad (x > -1).$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos c.$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin c.$
- $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-\alpha}},$

  on α és un nombre real, $x > -1$ i, per a tot nombre sencer $k \geq 0$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh c.$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sinh c.$

Fórmula de Taylor d'ordre n de la funció f en el punt a:

$$\boxed{\underset{\text{funció}}{\underset{\uparrow}{f(x)}} = \underset{\text{polinomi}}{\underset{\uparrow}{P_{n,f,a}(x)}} + \underset{\text{residu (en valor absolut : error)}}{\underset{\uparrow}{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}}, \text{ per a cert } c \text{ entre } x \text{ i } a}$$

Aproximació de valors de funcions i acotació de l'error

$$\left.\begin{array}{l} f:\ R \to R \text{ funció} \\ f, f', f'', \ldots f^{(n)} \text{ contínues en } [\alpha,\beta] \\ \exists f^{(n+1)} \text{ en } [\alpha,\beta] \\ x, a \in]\alpha,\beta[\\ f^{(n+1)} \text{ contínua en } [\alpha,\beta] \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists M_{n+1} = \max_{\substack{t\in[x,a] \\ \vee\ t\in[a,x]}} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

I llavors l'error de l'aproximació $f(x) \cong P_{n,f,a}(x)$ és:

$$\left|R_{n,f,a}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{M_{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercicis: **4.1: 1, 2, 3**

Estudi local de funcions i càlcul d'extrems.
Estudi local de funcions

Monotonia i extrems

f funció $n+1$ vegades derivable en un entorn de a

$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 1)$

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x) \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x)$$

signe

Per a x prou pròxims a a:

Si n parell i $f^{(n)}(a) > 0$: $f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f$ té un mínim relatiu en a

Si n parell i $f^{(n)}(a) < 0$: $f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f$ té un màxim relatiu en a

Si n senar i $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ és creixent en a

Si n senar i $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ és decreixent en a

Convexitat, concavitat i punts d'inflexió

f funció $n+1$ vegades derivable en un entorn de a

$f''(a) = f^{(3)}(a) = \cdots f^{(n-1)}(a)$ =0, $f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2)$

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x) \Rightarrow$$
$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x)$$

signe

Para x prou pròxims a a:

Si n parell i $f^{(n)}(a) > 0$: $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n > 0 \Rightarrow f$ és convexa en a

Si n parell i $f^{(n)}(a) < 0$: $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n < 0 \Rightarrow f$ és còncava en a

Si n senar i $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ té un punt d'inflexió en a

Si n senar i $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ té un punt d'inflexió en a