3 FUNCIONS ELEMENTALS

(Resum teòric)

Índex

La forma més habitual de definir una funció és mitjançant operacions que involucren funcions ben conegudes. les més utilitzades són les anomenades *funcions elementals*, que són les funcions polinòmiques, racionals, potencials, exponencials, logarítmiques, circulars i les seves inverses, i les hiperbòliques i les seves inverses. A continuació, definim aquestes funcions i resumim les seves propietats.

3.1. Polinomis

Sigui $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ una funció polinòmica amb coeficients reals. Es compleixen les propietats següents.

- El domini de f és $\mathbb{R}$.
- La funció f és contínua i derivable en $\mathbb{R}$.
- Si $n = 0$, la funció f és la funció constant a_0, la gràfica de $y = f(x)$ és la recta horizontal $y = a_0$, i els límits quan $x \to \pm\infty$ són ambdòs a_0.
- Si $n \geq 1$ és parell

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0; \\ -\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

- Si $n \geq 1$ és senar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0; \\ +\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0; \\ -\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

Els polinomis de grau 1 són de la forma $f(x) = mx + n$ amb $m \neq 0$. La gràfica de $f(x)$ és una recta obliqua; el número $m = f'(x)$ s'anomena *pendent* de la recta. La funció f és estrictament creixent en tot el domini si $m > 0$ i estrictament decreixent si $m < 0$. El número $n = f(0)$ es denomina *ordenada a l'origen*. El polinomi $f(x) = mx + n$, amb $m \neq 0$, té una única arrel, que és $x_0 = -n/m$.

Els polinomis de grau 2 són de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, amb $a \neq 0$. Les seves gràfiques són paràboles de vèrtex $(-b/2a, c - (b^2/4a))$, que correspon a un mínim o un màxim segons que $a > 0$ o $a < 0$. El valor de a regula l'obertura de la paràbola, que és tant més tancada com més gran és $|a|$. Els límits de $f(x)$ en $+\infty$ y $-\infty$ són els dos $+\infty$ si $a > 0$ i $-\infty$ si $a < 0$.

Una funció polinòmica de grau $n \geq 3$ té un màxim de $n - 1$ extrems relatius que separen un màxim de n intervals de monotonia.

3.2. Funcions racionals

Una *funció racional* és una funció definida com a quocient de dos polinomis,

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x], \quad b(x) \neq 0.$$

Suposem que $a(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ és de grau m i que $b(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ és de grau n. Si $n = 0$, és a dir, si $b(x)$ és constant, llavors $f(x)$ és un polinomi. Suposarem, doncs, $n \geq 1$. La funció racional $f(x) = a(x)/b(x)$ compleix les propietats següents:

- El domini és el conjunt de tots els nombres reals excepte aquells en què s'anul·la el denominador $b(x)$.
- La funció és contínua i derivable en tot el seu domini.
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$. En el cas $m > n$, d'acord amb els límits de polinomis, aquest límit és $\pm\infty$; el signe del límit en $+\infty$ coincideix amb el signe de a_m/b_n, mentre que el signe de el límit en $-\infty$depèn també de la paritat de$n - m$. Si $m < n$ el límit és 0, i si $m = n$ és a_m/b_n.

3.3. Funcions potencials

Una *funció potencial* és una funció de la forma $f(x) = x^a$, amb $a \in \mathbb{R}$. Si a és un natural, llavors es tracta d'una funció polinòmica. Suposarem, doncs, que a no és natural.

La funció potencial $f(x) = x^a$ té les propietats següents:

- El seu domini és $[0, +\infty)$ si $a > 0$ i $(0, +\infty)$ si $a < 0$.
- La funció és contínua i derivable en tot el seu domini.

- Si $a > 0$, llavors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$.
- Si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$.

3.4. Funcions circulars (o trigonomètriques)

Els angles, excepte indicació contrària, es mesuren en *radiants*. L'equivalència amb els graus sexagesimals és $180^0 = \pi\,\mathrm{rad}$, és a dir, $1\,\mathrm{rad} = (180/\pi)\cdot 1^0$ (aproximadament, $1\,\mathrm{rad} = 57{,}296^0 = 57^0 17' 45''$).

Sigui x un nombre real. Sobre la circumferència de centre l'origen i radi 1, considerem un arc de circumferència d'origen el punt $(1,0)$ i longitud $|x|$ i en sentit antihorari si $x > 0$, i en sentit horari si $x < 0$. Sigui $P = (c, s)$ l'extrem d'aquest arc. L'angle que té el semieix positiu d'abscisses com el primer costat i la recta OP com a segon, mesura, precisament, x radiants. El sinus i el cosinus de x es defineixen per $\sin x = s$, $\cos x = c$.

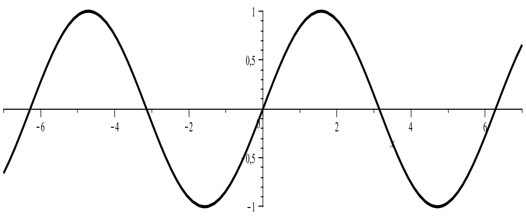
El sinus i el cosinus d'un angle es defineixen com el sinus i el cosinus de la seva mesura en radiants.

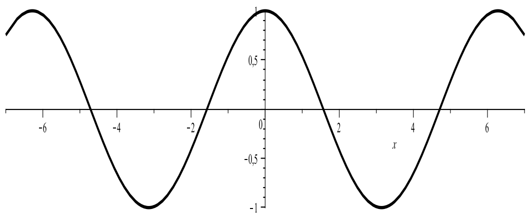
Si x és un dels angles aguts d'un triangle rectangle, a y b són els catets oposat i contigu, respectivament, a l' angle x, i c és la hipotenusa, llavors $\sin x = a/c$ i $\cos x = b/c$.

Les funcions sinus i cosinus tenen les propietats següents:

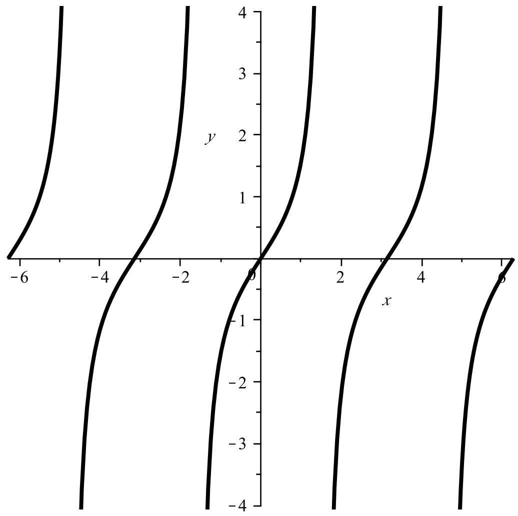
- Tenen domini $\mathbb{R}$ i conjunt imatge l'interval $[-1, 1]$.
- Són contínues i derivables en tot el seu domini.
- Són periòdiques de període 2π.
- La funció sinus és imparella i la funció cosinus és parella.

A la figura següent es representen gràficament les funcions sinus (esquerra) i cosinus (dreta).





Es defineix la funció *tangent* per $\tan x = \sin x/\cos x$. La funció tangent té les següents propietats següents (veure figura).



- El seu domini és el conjunt de tots els nombres reals excepte els que tenen el cosinus igual a zero, és a dir, els nombres de la forma $x = (2n+1)\pi/2$, amb $n \in \mathbb{Z}$. El recorregut de la funció tangent és $\mathbb{R}$, és a dir, tot nombre real és la tangent d'algun nombre.
- És periòdica de període π. És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És imparella.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.
- Si $a = (2n+1)\pi/2$, con $n \in \mathbb{Z}$, aleshores

$$\lim_{x\to a^-} \tan x = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^+} \tan x = -\infty.$$

Per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, les funcions sinus, cosinus i tangent tenen les propietats següents:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- (Fórmules d'addició)
  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$
  $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$
- (Fórmules de l'angle doble)
  $\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$
- (Fórmules de l'angle meitat)
  $\cos^2(x/2) = \dfrac{1+\cos x}{2}, \qquad \mathrm{sen}^2(x/2) = \dfrac{1-\cos x}{2};$

- (Fórmules de transformació de sumes en productes)

$$\sin x + \sin y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x-y}{2}.$$

Els dos límits següents són destacables.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$

Unes altres funcions circulars són la *cotangent*, definida per $\cot x = 1/\tan x = \cos x/\sin x$; la *secant*, definida per $\sec x = 1/\cos x$; i la *cosecant*, definida per $\mathrm{cosec}\, x = 1/\sin x$.

Mencionem també les funcions circulars *inverses*.

La funció sinus és injectiva en l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Per tant, en aquest interval té inversa, anomenada funció *arc sinus* i denotada arcsin. La funció $f(x) = \mathrm{arc\,sen}\, x$ té les propietats següents:

- El domini és $[-1, 1]$ i el seu recorregut $[-\pi/2, \pi/2]$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.

La funció cosinus és injectiva en l'interval $[0, \pi]$. per tant, en aquest interval té inversa, anomenada funció *arc cosinus* i denotada arc cos. La funció $f(x) = \arccos x$ té les propietats següents:

- El domini és $[-1, 1]$ i el seu recorregut $[0, \pi]$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.

La funció tangent és injectiva en l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Per tant, en aquest interval té inversa, anomenada funció *arc tangent* i denotada arctan. La funció $f(x) = \arctan x$ té les següents propietats:

- El seu domini és $\mathbb{R}$ i el seu recorregut $(-\pi/2, \pi/2)$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.
- $\displaystyle \lim_{x\to -\infty}\arctan x = -\pi/2, \qquad \lim_{x\to +\infty}\arctan x = +\pi/2.$

3.5. Funcions exponencials i logarítmiques

Sigui $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. La funció *exponencial de base a* és la funció definida per $f(x) = a^x$.

La funció $f(x) = a^x$ és injectiva en $\mathbb{R}$ i, per tant, té inversa, que es diu *funció logaritme en base a*, i es denota $\log_a$. Tenim:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

El límit

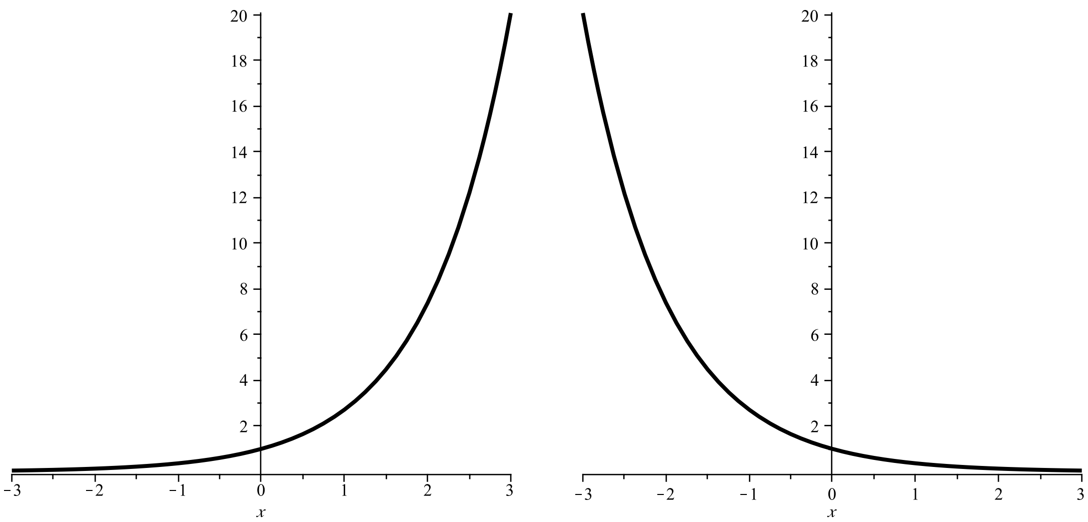
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

existeix i és un nombre real e de valor aproximat $e = 2{,}7182818\ldots$ la funció exponencial de base e és la més utilitzada. La funció logaritme en base e s'anomena funció *logaritme natural* o *neperià* i es denota per $\ln$.

Considerem la funció exponencial de base a, és a dir, la funció $f(x) = a^x$.

- El seu domini és $\mathbb{R}$ i el seu recorregut $(0, +\infty)$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament monòtona en tot el domini, creixent si $a > 1$ i decreixent si $a < 1$.
- Si $a > 1$, aleshores $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- Si $a < 1$, aleshores $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ i $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- $a^0 = 1$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$, $\quad a^{x-y} = a^x / a^y$, $\quad (a^x)^y = a^{xy}$, $\quad$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.

A la figura següent es mostren les gràfiques de les funcions e^x (esquerra) i $(1/e)^x$ (dreta).



Assenyalem que dues funcions logarítmiques difereixen només en un factor constant: si a i b són bases de logaritmes,

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x = (\log_a b) \log_b x.$$

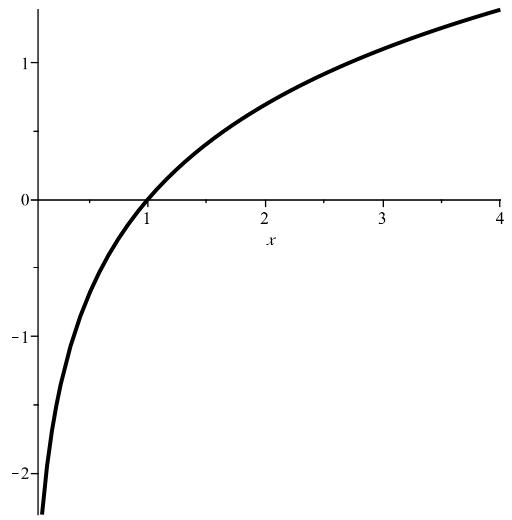
Considerem una funció logaritme $f(x) = \log_a x$.

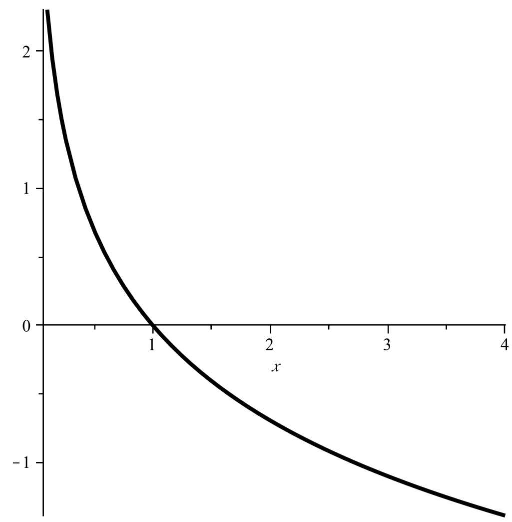
- El seu domini és $(0, +\infty)$ i el seu recorregut $\mathbb{R}$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament monòtona en tot el domini, creixent si $a > 1$ i decreixent si $a < 1$.
- Si $a > 1$, aleshores $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.
- Si $a < 1$, aleshores $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^r = r \log_a x$, per a tot x, y reals positius i tot real r.

El límit següent és destacable:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

A la figura següent es mostren les gràfiques de les funcions logaritme en base e (esquerra) i en base $1/e$ (dreta).





3.6. Funcions hiperbòliques

Les funcions *sinus hiperbòlic, cosinus hiperbòlic* i *tangent hiperbòlica*, es defineixen, respectivament, per

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}.$$

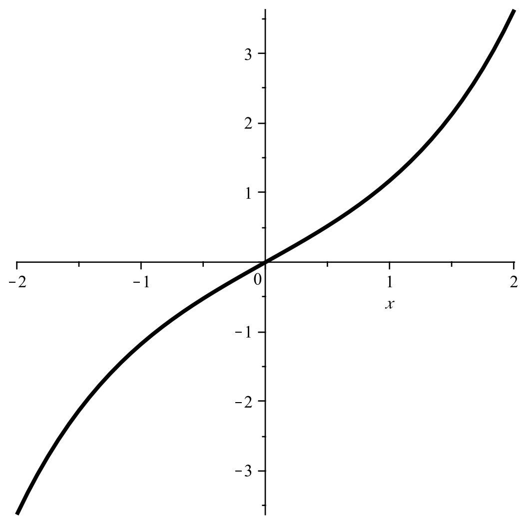
La funció $f(x) = \operatorname{senh} x$ té les propietats següents:

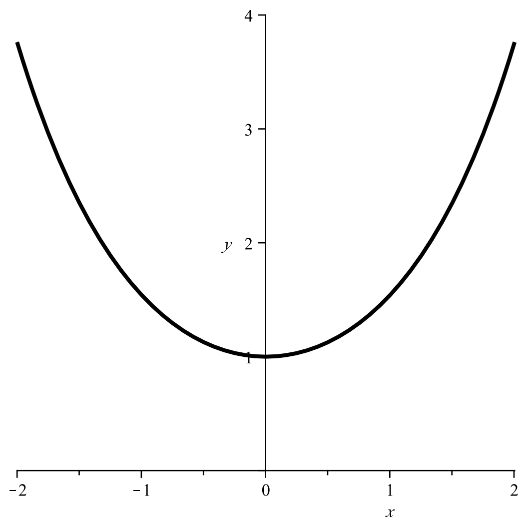
- El domini i el recorregut són $\mathbb{R}$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És una funció senar.
- És estrictament creixent en tot el domini.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{senh} x = +\infty.$

La funció $f(x) = \cosh x$ té les propietats següents:

- El domini és $\mathbb{R}$ i el recorregut és $[1, +\infty)$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És una funció parella.
- És estrictament decreixent en $(-\infty, 0]$, estrictament creixent en $[0, +\infty)$, i té un mínim en $(0, 1)$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty.$

A la figura següent es mostren les gràfiques de les funcions sinus hiperbòlic (esquerra) i cosinus hiperbòlic (dreta)

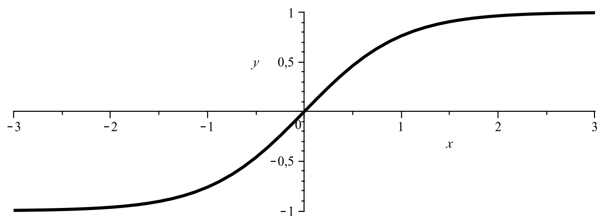




La funció $f(x) = \tanh x$ té les propietats següents:

- El domini és $\mathbb{R}$ i el recorregut és l'interval $(-1, 1)$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És una función imparella.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1.$

La seva gràfica és la següent:



Per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, es compleixen les fórmules següents:

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$
- (Fórmules d'addició)
  $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y, \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y,$
  $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tan hy}{1 + \tanh x \tanh y}.$
- (Fórmules de l'argument doble)
  $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x, \quad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x,$
  $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^x x}.$
- (Fórmules de l'argument meitat)
  $\cosh^2(x/2) = \dfrac{1 + \cosh x}{2}, \qquad \operatorname{senh}^2(x/2) = \dfrac{\cosh x - 1}{2}.$
- (Fórmules de transformació de sumes en productes)
  $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}, \qquad \cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2},$
  $\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x-y}{2} \cosh \dfrac{x+y}{2}, \qquad \cosh x - \cosh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}.$

La funció sinus hiperbòlic és injectiva. Per tant, té una funció inversa, anomenada *argument sinus hiperbòlic* i denotada $\operatorname{arg\,senh}$. Tenim $y = \operatorname{arg\,senh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{senh} y$. La funció *argument sinus hiperbòlic* admet també l'expressió explícita següent:

$$\operatorname{arg\,senh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

La funció $f(x) = \operatorname{arg\,senh} x$ té les propietats següents:

- El domini i el recorregut són $\mathbb{R}$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És una funció senar.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arg\,senh} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arg\,senh} x = +\infty.$

La funció cosinus hiperbòlic no és injectiva, però restringida a $[0,+\infty)$, sí que ho és. En aquest interval té inversa, anomenada funció *argument cosinus hiperbòlic* i denotada $\operatorname{arg\,cosh}$. Tenemos $y = \operatorname{arg\,cosh} x \Leftrightarrow \cosh y = x$. La funció *argument cosinus hiperbòlic* admet també l'expressió explícita següent:

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

La funció $f(x) = \operatorname{arg\,cosh} x$ té les propietats següents:

- El seu domini és $[1,+\infty)$ i el seu recorregut $[0,+\infty)$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arg\,cosh} x = +\infty.$

La funció tangent hiperbòlica és injectiva. Per tant, té inversa, denominada *argument tangent hiperbòlica* i denotada $\operatorname{arg\,tanh}$. Tenim $y = \operatorname{arg\,tanh} x \Leftrightarrow \tanh y = x$. La funció $f(x) = \operatorname{arg\,tanh} x$ admet també l'expressió explícita següent:

$$\operatorname{arg\,tanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

La funció $f(x) = \operatorname{arg\,tanh} x$ té les propietats següents:

- El seu domini és $(-1,1)$ i el seu recorregut $\mathbb{R}$.
- És contínua i derivable en tot el seu domini.
- És una funció senar.
- És estrictament creixent en tot el seu domini.
- $\lim\limits_{x\to-1^+} \operatorname{arg\,tanh} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to1^-} \operatorname{arg\,tanh} x = +\infty.$

Funcions potencials-exponencials

Les funcions de l'tipus $f(x) = u(x)^{v(x)}$, on u i v són funcions, es denominen *potencials-exponencials*. Arguments que involucren logaritmes permeten resoldre certes indeterminacions de l'tipus 1^∞, ∞^0 y 0^0.

- Sigui $\triangle \in \{a^+, a^-, a, +\infty, -\infty\}$. Suposem que

  1. $u(x) \neq 1$ per a tot x en un entorn de $\triangle$;
  2. $\lim\limits_{x \to \triangle} u(x) = 1$;
  3. $\lim\limits_{x \to \triangle} |v(x)| = +\infty$;
  4. existeix $\lim\limits_{x \to \triangle} v(x)\,(u(x) - 1) = \square \in \{\ell, +\infty, -\infty\}$.

  Llavors, $\lim\limits_{x \to \triangle} u(x)^{v(x)} = e^{\square}$.