GIA - ALG : Tercera prova avaluable

Albert Campos Gisbert

28 de novembre de 2022

1. Siguin $u, v \in \mathbb{R}^n$. Demostreu que els vectors $u+v$ i $u-v$ són ortogonals si i només si els vectors u i v tenen la mateixa norma.

Desenvolupem l'hipòtesi de l'enunciat:

$(u+v) \cdot (u-v) = 0 \rightarrow \|u\| = \|v\|$

$uu + vu - vu - vv = 0 \rightarrow \|u\| = \|v\|$

$uu - vv = 0 \rightarrow \|u\| = \|v\|$

$uu - vv = 0 \rightarrow \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{v}^2}$

$uu - vv = 0 \rightarrow uu = vv$

Per tant, podem dir que quan el producte escalar de la suma i resta de dos vectors dona 0 (ortogonals), implica que la norma del primer vector ha de ser equivalent respecte el del altre.

Ara bé, cal encara demostrar que quan tenim dos vectors amb normes equivalents, implica que el producte escalar de la suma i resta dels dos, es efectivament el producte escalar de dos vectors ortogonals:

$\|u\| = \|v\| \rightarrow \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{v}^2} \rightarrow uu = vv$

Llavors, segons hipòtesis:

$uu = vv \rightarrow uu - vv = 0 \rightarrow uu + vu - vu + vv = 0 \rightarrow (u+v)(u-v) = 0$

Per tant, podem concluir la bidireccionalitat de l'enunciat $\{(u+v)(v-v) = 0 \leftrightarrow \|u\| = \|v\|\}$

2. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$:

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + ay + z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = y - bz = 0\}$
on $a, b \in \mathbb{R}$

a) Doneu bases de $F^\perp$ i de $G^\perp$.

Primer, donarem bases de F i G:

Del subespai F, al comptar només amb una equació i tres incògnites, sabem que es tracta d'un plà $\subseteq \mathbb{R}^3$, i tindrem 2 graus de llibertat, que seran $z = \beta$ i $y = \alpha$:

$x = -a\alpha - \beta \Rightarrow (x,y,z) = (-a\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (-a\alpha, \alpha, 0) + (-\beta, 0, \beta)$
$= \alpha(-a,1,0) + \beta(-1,0,1) \Rightarrow F = \langle (-a,1,0), (-1,0,1) \rangle$.

Donat que la dependència lineal dels vectors no depèn del paràmetre "a", podem dir que són independents, i que per tant, els vectors $(-a,1,0)$ i $(-1,0,1)$ són base de F.

Del subespai G, tenim 3 incògnites i dues equacions, per tant, és tracta d'una recta $\subseteq \mathbb{R}^3$, per tant desenvolupem:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - bz = 0 \end{array}\right\}$$

Com que tenim un grau de llibertat, $z = \beta$:
$y = b\beta$, $x = b\beta \Rightarrow (x,y,z) = (b\beta, b\beta, \beta) = \beta(b,b,1)$
$\Rightarrow G = \langle (b,b,1) \rangle$

Ara bé, si volem $F^\perp$ i $G^\perp$, cal que trobem un vector que al realitzar el producte escalar amb les respectives bases, ens doni 0:

$$\left.\begin{array}{l} (-a,1,0) \cdot v_1 = 0 \\ (-1,0,1) \cdot v_1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (-a,1,0) \cdot (1,a,1) = 0 \\ (-1,0,1) \cdot (1,a,1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow F^\perp = \langle (1,a,1) \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} (b,b,1) \cdot w_1 = 0 \\ (b,b,1) \cdot w_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (b,b,1) \cdot (-1,1,0) \\ (b,b,1) \cdot (1,-1,0) \end{array}\right\} \rightarrow G^\perp = \langle (-1,1,0), (1,-1,0) \rangle$$

b) Per a quins valors dels paràmetres a i b formen F i G suma directa?

Per saber quins valors d'a i b F+G serian suma directa, caldrà expressar matricialment aquests dos subespais, i esbrinar quan tindrà rang màxim, per tant, desenvolupem:

$$F+G = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ b & b & 1 \end{pmatrix} \to |F+G| = b+ab+1=0 \Rightarrow a = \frac{-1-b}{b} \Rightarrow a = -1-\frac{1}{b}$$

I si ho fem per b:

$ab = -b-1$

$ab+b = -1$

$b = -\frac{1}{a+1}$

Per tant, F+G no serà directa si $a = -1-\frac{1}{b}$ o $b = -\frac{1}{a+1}$

c) Per a quins valors dels paràmetres a i b són F i G ortogonals?

Tenint en compte que $F = \langle(-a, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$ i que $G = \langle(b, b, 1)\rangle$:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \to (b, b, 1)(x, y, z) = 0$, $y = \alpha$, $z = \beta$; $bx+by+z=0$

$bx + b\alpha + \beta = 0$

$b = \frac{-b\alpha+\beta}{\gamma}$

$G^{\perp}$ quan $b = \frac{-b\alpha+\beta}{\gamma}$

$$\left.\begin{aligned}(-a, 1, 0)(x, y, z) = 0 \\ (-1, 0, 1)(x, y, z) = 0\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}-ax+y = 0 \\ -x+z = 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & z = \beta, \\ & x = -\beta,\ a = -\frac{\gamma}{\beta}\end{aligned}$$

$F^{\perp}$ quan $a = -\frac{\gamma}{\beta}$