TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (*1 punt*) Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{\ln(4-x^2)}{x(e^{x+1}-1)} \leq 0.$$

Digueu si el conjunt de solucions és fitat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

2. (*3 punts*) Considereu la funció

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}}.$$

   (a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

   (b) Calculeu la frontera, l'interior i l'adherència de $Dom f$. Dieu raonadament si és obert, tancat o compacte.

   (c) Representeu les corbes de nivell de la superfície $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = 0, 1, 2$.

3. (*1 punt*) Considereu el quadrat unitat, és a dir, el conjunt $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Trobeu el seu diàmetre per a cada una de les distàncies d_1, d_2 i d_∞. (*El diámetre d'un conjunt compacte A respecte d'una distància d es defineix com $\delta_d(A) = max\{d(x,y) : x, y \in A\}$*).

4. (*5 punts*) Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = (x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy.$$

   (a) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (0,1)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punt $P = (0,1)$ en aquesta direcció.

   (b) Calculeu els extrems relatius de f.

   (c) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 2e^x)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{-0.7}^{-0.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 8$ per a tot $x \in [-0.7, -0.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

   (d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

   (e) Sigui $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida per $F(x) = (5\sin x, 2e^x)$, i sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció $g = f \circ F$. Utilitzant la regla de la cadena, trobeu la derivada de la funció g.

1. (*1 punt*) Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{\ln(4-x^2)}{x(e^{x+1}-1)} \leq 0.$$

Digueu si el conjunt de solucions és fitat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

SOLUCIÓ: Primer tenim que $\ln(4-x^2)$ ha de estar ben definit. Per tant, $4-x^2>0$. Això implica

$$x^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2.$$

D'altra banda, $\ln(4-x^2)$ s'anul·la si $4-x^2=1$ o, equivalentment, si $x=\pm\sqrt{3}$. Obviament, x s'anul·la en $x=0$, i finalment $e^{x+1}-1$ s'anul·la en $x=-1$. Aquests punts divideixen l'interval $(-2,2)$ en 5 subintervals:

$$(-2,-\sqrt{3}], \quad [-\sqrt{3},-1], \quad [-1,0], \quad [0,\sqrt{3}], \quad [\sqrt{3},2).$$

Com que perquè l'expressió $\frac{\ln(4-x^2)}{x(e^{x+1}-1)}$ sigui negativa, o bé el numerador és positiu i el denominador negatiu o viceversa. Per tant, obtenim que els possibles intervals són:

$$(-2,-\sqrt{3}], \quad [-1,0], \quad [\sqrt{3},2).$$

Com que $x=0$ i $x=-1$ s'han d'excloure perquè s'anul·la el denominador, obtenim que el conjunt de solucions són

$$(-2,-\sqrt{3}] \cup (-1,0) \cup [\sqrt{3},2),$$

que és un conjunt fitat superiorment i inferiorment amb suprem $x=2$ i ínfim $x=-2$.

2. (*3 punts*) Considereu la funció

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}}.$$

   (a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

   (b) Calculeu la frontera, l'interior i l'adherència de $Dom f$. Dieu raonadament si és obert, tancat o compacte.

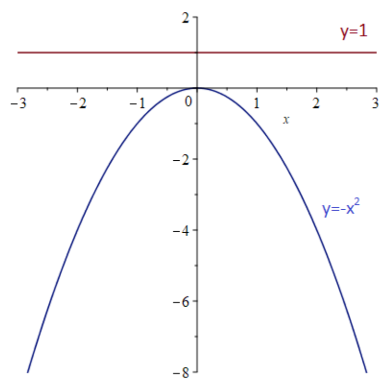
   (c) Representeu les corbes de nivell de la superfície $z=f(x,y)$ corresponents als nivells $z=0,1,2$.

SOLUCIÓ:

(a) Per buscar el domini de $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y}{1-y}}$, observem que, perquè f estigui ben definida, ha de ser $1-y \neq 0$ i el quocient de dintre de l'arrel, $\dfrac{x^2+y}{1-y}$, ha de ser positiu o zero. Per tant, tenim dues opcions:

- Opció 1: $x^2+y \leq 0$ i $1-y<0$, que equival a $y \leq -x^2$ i $y>1$.
- Opció 2: $x^2+y \geq 0$ i $1-y>0$, que equival a $y \geq -x^2$ i $y<1$.

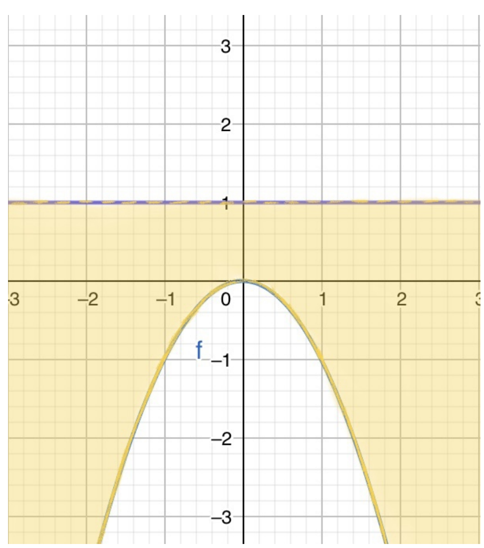
A la figura següent, es representen la recta $y=1$ i la paràbola $y=-x^2$:



Tal com es veu a aquesta figura l'opció 1 és impossible, i per tant obtenim que el domini correspon a

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y<1,\ y \geq -x^2\}.$$

És a dir, el domini és la regió del pla situada entre la recta $y=1$ i la paràbola $y=-x^2$. La recta $y=1$ està exclosa del domini, mentre que la paràbola $y=-x^2$ està inclosa. La representació gràfica del domini és la següent:



(b) Tenim que, com que la frontera no està inclosa íntegrament al conjunt (ja que la recta $y=1$ està exclosa) ni tampoc està exclosa totalment (ja que la paràbola

$y = -x^2$ està inclosa), no és ni un obert ni un tancat i, per tant, tampoc un compacte.

$$\begin{aligned} \mathrm{Front}\,(\mathrm{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = -x^2\} \\ \mathrm{Int}\,(\mathrm{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y < 1,\ y > -x^2\} \\ \mathrm{Ad}\,(\mathrm{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq 1,\ y \geq -x^2\} \end{aligned}$$

(c) Per a la corba de nivell $z = k$, tenim que trobar els (x, y) tals que

$$k = f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+y}{1-y} = k^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y = k^2 - k^2 y.$$

Per tant,

$$y = \frac{1}{k^2+1}\left(k^2 - x^2\right).$$

Corba de nivell $z = 0$:

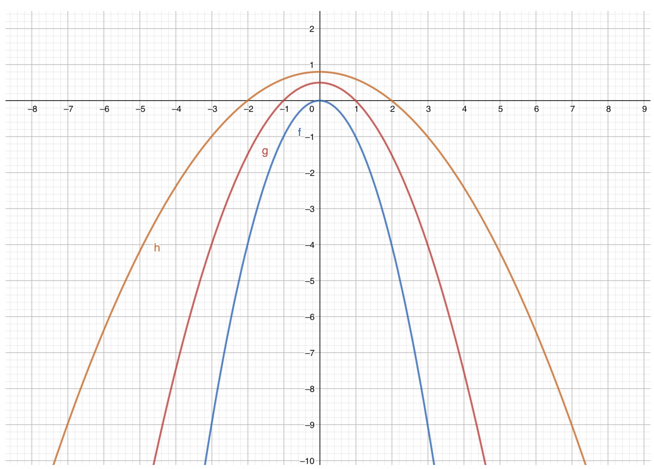
$$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = -x^2\}.$$

Corba de nivell $z = 1$:

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = \frac{1}{2}(1-x^2)\right\}$$

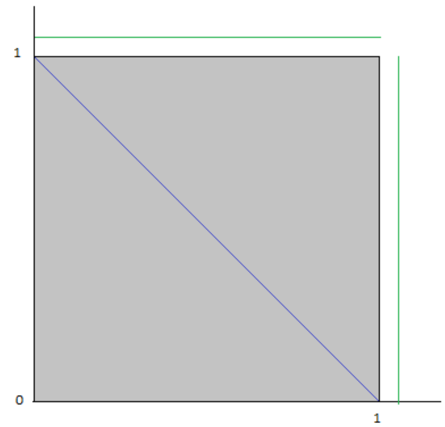
Corba de nivell $z = 2$:

$$C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = \frac{1}{5}(4-x^2)\right\}$$



3. (*1 punt*) Considereu el quadrat unitat, és a dir, el conjunt $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Trobeu el seu diàmetre per a cada una de les distàncies d_1, d_2 i d_∞. (*El diámetre d'un conjunt compacte A respecte d'una distància d es defineix com* $\delta_d(A) = \max\{d(x,y) : x, y \in A\}$).

SOLUCIÓ: $\delta_{d_1}(A) = \sqrt{2}, \delta_{d_2}(A) = 2$ i $\delta_{d_\infty}(A) = 1$. En efecte:



$\delta_{d_1}(A) = \max\{d_1(x,y) : x, y \in A\} =$
$= \max\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]\times[0,1]\} =$
$= \max\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} : 0 \le x_1, x_2 \le 1, 0 \le y_1, y_2 \le 1\} =$
$= \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

$\delta_{d_2}(A) = \max\{d_2(x,y) : x, y \in A\} =$
$= \max\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2| : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]\times[0,1]\} =$
$= |1-0|+|1-0| = 2.$

$\delta_{d_\infty}(A) = \max\{d_\infty(x,y) : x, y \in A\} =$
$= \max\{\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]\times[0,1]\} =$
$= \max\{|1-0|, |1-0|\} = 1.$

4. (*5 punts*) Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = (x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy.$$

(a) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (0,1)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punt $P = (0,1)$ en aquesta direcció.

(b) Calculeu els extrems relatius de f.

(c) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 2e^x)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{-0.7}^{-0.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 8$ per a tot $x \in [-0.7, -0.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

(d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

(e) Sigui $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida per $F(x) = (5\sin x, 2e^x)$, i sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció $g = f \circ F$. Utilitzant la regla de la cadena, trobeu la derivada de la funció g.

SOLUCIÓ: La funció $f(x,y) = (x-2y)^2 = x^2+4y^2-4xy$ és una funció polinòmica i per tant de classe C^2 a tot $\mathbb{R}^2$.

(a) La funció f és de classe C^1 en el punt $(0,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament al punt $P(0,1)$ és la direcció i el sentit del vector gradient de f en aquest punt, i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient en aquest punt.

Les derivades parcials de primer ordre de la funció són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 8y.$$

Per tant, per una banda, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(0,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \right) = (-4, 8),$$

o, equivalentment, la direcció del vector unitari $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$.

I el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és:

$$||\nabla f(1,1)||_2 = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}.$$

(b) Donat que la funció f és de classe C^1 a tot $\mathbb{R}^2$, els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que són $2x - 4y = 0$ i $-4x + 8y = 0$, o, equivalentment $x = 2y$. Així, la funció f té tota una recta de punts crítics que és la recta d'equació $x = 2y$. La matriu hessiana de f en tots aquests punts és

$$Hf(2y, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

que és de determinant nul. Per tant, amb la hessiana no es pot saber de quina naturalesa són els punts crítics. Ara bé, és immediat que $f(x,y) = (x - 2y)^2 \geq 0$, i que en tots els punts crítics és $f(2y, y) = 0$ mentre que en qualsevol altre punt és $f(x,y) > 0$. Per tant, f té mínims relatius en tots aquests punts.

(c) Una fita superior de l'error del mètode dels trapezis és:

$$\left| \int_a^b g(x)dx - T(n) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

sent M_2 una fita superior del valor abssolut de la derivada segona de g en l'interval (a,b). Aquí, $a = -0.7$, $b = -0.5$, i, atès que $|g''(x)| < 8 \ \forall x \in [-0.7, -0.5]$, tenim que $M_2 = 8$. Aleshores per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005, trobarem el nombre de subintervals n imposant $\frac{(0.2)^3}{12n^2} \cdot 8 < 0.005$, que equival a $n^2 > \frac{(0.2)^3 \cdot 8}{12 \cdot 0.005}$, és a dir $n > 1.03279556$. Aleshores el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005 fent ús del mètode dels trapezis és $n = 2$.

(d) Per donar el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior fent ús del mètode dels trapezis prenem $n = 2$, $a = -0.7$, $b = -0.5$, per tant $x_1 = -0.6$ i:

$$\int_a^b g(x)dx \simeq T(2) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{g(a)}{2} + g(x_1) + \frac{g(b)}{2}\right]$$

Substituint $a = -0.7,\ b = -0.5,\ n = 2,\ x_1 = -0.6$ i

$$g(x) = f(5\sin x, 2e^x) = 25\sin x + 16e^{2x} - 40e^x \sin x,$$

a la fórmula dels trapezis, s'obté:

$$I \simeq T(2) = \frac{0.2}{2}\left[\frac{g(-0.7)}{2} + g(-0.6) + \frac{g(-0.5)}{2}\right] \simeq 5.037546351$$

El valor de la integral amb la precisió demanada é $I = 5.037 \pm 0.005$.

(e) Utilitzant la regla de la cadena, la derivada de la funció $g = f \circ F$ és:

$$g'(x) = \mathcal{J}f(F(x)) \cdot \mathcal{J}F(x) = (10\sin x - 8\,e^x, 16\,e^x - 20\sin x) \cdot \begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2e^x \end{pmatrix} =$$

$$= 50\sin x\ \cos x + 32\,e^{2x} - 40\cos x\,e^x - 40\sin x\,e^x.$$