4 LA FÓRMULA DE TAYLOR

(Resum teòric)

Índex

4.1. Introducció

Un recurs per estudiar el comportament d'una funció en un entorn d'un punt és aproximar-la mitjançant alguna altra funció fàcil d'avaluar, particularment per un polinomi.

Sigui f una funció n vegades derivable en el punt a. El *polinomi de Taylor de grau n per f en a* és el polinomi

$$P_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferència $R_n(f,a,x) = f(x) - P_n(f,a,x)$ s'anomena *residu n-èsim de Taylor* de la funció f en el punt a.

Cal notar que l'existència de $f^{(n)}(a)$ requereix l'existència de $f^{(k)}(x)$ en un entorn U de a, per a $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Notem també que $y = P_1(f,a,x)$ és l'equació de la *recta tangent* a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$. Es compleixen les dues propietats següents.

- El valor del polinomi $P_n(f,a,x)$ i el de totes les seves derivades fins a ordre n en el punt a coincideixen amb els de la funció f en aquest punt; és a dir

$$P_n^{(i)}(f,a,a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, \ldots, n.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{R_n(f,a,x)}{(x-a)^n} = 0.$

El límit anterior pot interpretar-se en el sentit que la similitud entre $f(x)$ i $P_n(f, a, x)$ és més acusada com més gran és el grau i com més a prop estigui x de a.

L'expressió

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f, a, x)$$

es coneix com *Fórmula de Taylor d'ordre n per a f en a.*[1].

Descrivim, a continuació, el comportament dels polinomis de Taylor respecte a les operacions amb funcions. Enunciem els resultats en el punt 0. Els resultats corresponents a un punt a s'obtenen mitjançant el canvi de variable $x \mapsto t = x - a$.

Siguin f i g dues funcions amb derivades n -ésimes en el punt 0 i siguin $p = P_n(f, 0, x)$ y $q = P_n(g, 0, x)$ els corresponents polinomis de Taylor de grau n. Aleshores

- Si α i βsón nombres reals, el polinomi de Taylor de grau n de $\alpha f + \beta g$ en el punt 0 és $\alpha p + \beta q$.
- El polinomi de Taylor de grau n de $f \cdot g$ en el punt 0 és el polinomi obtingut de pq suprimint els termes de grau $> n$.
- Si $g(0) \neq 0$, el polinomi de Taylor de grau n de f/g en el punt 0 és el quocient de la divisió de p per q segons potències de$x$ creixents fins al grau n inclòs.
- Si $f(0) = 0$, el polinomi de Taylor de grau n de $g \circ f$ en el punt 0 és el polinomi obtingut de $q \circ p$ suprimint els termes de grau $> n$.

La substitució de funcions $f(x)$ per les expressions $P_n(f, a, x) + R_n(f, a, x)$ pot ser útil en el càlcul de límits en el punt a.

4.2. Teorema de Taylor

En el cas que f sigui una funció $n+1$ vegades derivable en un entorn de a, es disposa de l'expressió del residu següent

Teorema de Taylor. Sigui f una funció $n+1$ vegades derivable en un entorn U de a. Llavors, per a cada $x \in U \setminus \{a\}$ existeix un punt c entre x i a tal que

$$R_n(f, a, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

L'expressió anterior es denomina *residu de Lagrange*.

[1]Per al cas particular $a = 0$, se l'anomena també Fórmula de *MacLaurin*

En les condicions del teorema de Taylor, tenim

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

expressió que s'anomena *fórmula de Taylor d'ordre n de la funció f en el punt a*, amb residu de Lagrange.

4.3. Fórmula de Taylor per a funcions elementals

A continuació es donen les fórmules de Taylor de grau n d'algunes funcions en el punt 0. El valor c és intermedi entre 0 i x.

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + e^c \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}, \quad (x > -1)$.
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos c$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin c$.
- $(1+x)^\alpha = \dbinom{\alpha}{0} + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}x^n + \dbinom{\alpha}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-\alpha}}$,

  on α és un nombre real, $x > -1$ i, per a tot nombre sencer $k \geq 0$,

  $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

- $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh c$.
- $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sinh c$.

4.4. Acotació de l'error

La terminologia següent serà d'utilitat. Siguin I un interval (de qualsevol tipus) i $n \geq 0$ un nombre enter. La classe $\mathcal{C}^n(I)$ està formada per totes les funcions f el domini de les quals conté I i tals que, en tot $x \in I$, existeix la derivada n-èsima $f^{(n)}$i aquesta derivada és contínua. En particular, la classe $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$ està formada per totes les funcions contínues en I. És clar, a més, que si $n > m$, llavors $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I)$. La classe $\mathcal{C}^\infty(I)$

està formada per les funcions que tenen derivades de tots els ordres en I. Anàlogament, si $a \in \mathbb{R}$, les classes $\mathcal{C}^n(a)$ i $\mathcal{C}^\infty(a)$ estan formades per les funcions que tenen derivada n-èsima contínua en a i per les que tenen derivades de tots els ordres en el punt a, respectivament.

Sigui f una funció $n+1$ vegades derivable en un entorn U de a, i suposem que la funció $|f^{(n+1)}|$ està fitada per una constant K en l'interval obert d'extrems a i $x \in U$. Llavors,

$$|f(x) - P_n(f,a,x)| = |R_n(f,x,a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Això permet aproximar $f(x)$ per $P_n(f,a,x)$ en un entorn de a i acotar l'error comès amb l'aproximació. En particular, si I és l'interval $[a,x]$ o $[x,a]$ i $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, llavors la funció $|f^{(n+1)}|$ és contínua en l'interval tancat I i, per tant, té màxim absolut en I, per la qual cosa es pot prendre com K aquest màxim.

4.5. Estudi local de funcions

El polinomi de Taylor permet generalitzar les condicions suficients per monotonia, extrems relatius i convexitat vistos anteriorment. Pel que fa a la monotonia i els extrems relatius, tenim les condicions suficients següents.

Sigui f una funció de classe $\mathcal{C}^n(a)$ tal que

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Llavors

- n parell i $f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ té un mínim relatiu en a;
- n parell i $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ té un màxim relatiu en a;
- n senar i $f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ és estrictament creixent en un entorn de a.
- n senar i $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ és estrictament decreixent en un entorn de a.

Pel que fa a la convexitat, tenim les següents condicions suficients.

Sigui f una funció de classe $\mathcal{C}^n(a)$ tal que $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$. Llavors

- n parell i $f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ és convexa en un entorn de a.
- n parell i $f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ és còncava en un entorn de a.
- n senar $\;\Rightarrow\; f$ té un punt d'inflexió en a.