6 INTEGRACIÓ APROXIMADA

(Resum teòric)

Índex

De vegades el càlcul d'una integral definida pot ser molt difícil, laboriós o impossible usant la regla de Barrow. En aquests casos el valor de la integral es pot aproximar mitjançant la integració numèrica. Els mètodes més elementals consisteixen en considerar particions de l'interval i substituir la funció per un polinomi en cada subinterval. D'aquesta manera, s'obté el valor aproximat de la integral a partir d'una suma ponderada de les imatges dels punts que defineixen la partició de l'interval d'integració. Després, sota certes condicions de regularitat es pot fitar l'error comès en aquesta aproximació.

6.1. Mètode dels trapezis

Sigui f una funció contínua en $[a,b]$, amb $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, i considerem una partició $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ amb els punts equiespaiats i, per tant, amb tots els subintervals de longitud $h = (b-a)/n$. El mètode dels trapezis consisteix a aproximar la integral de $f(x)$ en $[a,b]$ per la suma de les integrals de les rectes que passen per $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ en cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$. Si es pot obtenir una cota de la derivada segona, llavors l'error pot acotar-se. Amb precisió, el teorema és el següent.

Teorema (Mètode dels trapezis). Sigui f una funció amb segona derivada contínua en $[a,b]$, $h = (b-a)/n$ y $x_i = a + ih$ per a $i = 0, \ldots, n$.
Si $|f''(x)| < M$ per a tot $x \in [a,b]$, llavors l'error que es comet amb l'aproximació $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$ és menor que $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M$.

6.2. Mètode de Simpson

El mètode de Simpson consisteix a aproximar la integral de f en cada interval de la forma $[x_i, x_{i+2}]$ mitjançant el polinomi de segon grau que passa pels tres punts $(x_i, f(x_i))$,

$(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ i $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$.

Si es pot obtenir una cota de la derivada quarta, llavors l'error pot acotar-se. Amb precisió, el teorema és el següent.

Teorema (Mètode de Simpson). Sigui f una funció amb derivada quarta contínua en $[a,b]$, $h = (b-a)/n$ amb $n = 2m$ parell i $x_i = a+ih$ per a $i = 0,\dots,n$. Si $|f^{(4)}(x)| < M$ per a tot $x \in [a,b]$, llavors l'error que es comet amb l'aproximació

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right)$$

és menor que $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M$.

6.3. Apèndix A: La integral de Riemann. Funcions integrables i propietats de la integral

El càlcul d'àrees és un problema molt antic en Matemàtica. El procediment per calcular àrees de polígons (regulars o no, convexos o no) es coneix bé des de fa segles, i consisteix fonamentalment en la triangulació. El problema important en el que segueix és el càlcul d'àrees de superfícies planes no poligonals.

La figura plana més elemental amb un costat corb és la limitada per l'eix d'abscisses, les rectes $x = a$ i $x = b$ (amb $a < b$), i per la gràfica d'una funció $y = f(x)$. Considerarem només les funcions fitades en un interval $[a,b]$.

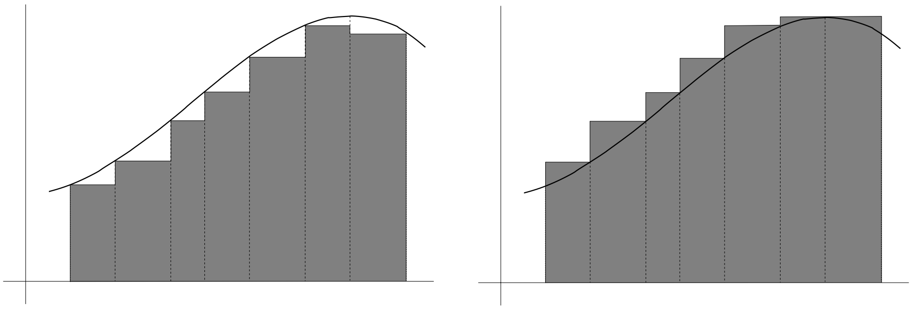
Siguin $a < b$ dos nombres reals i $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada. La discussió següent va encaminada a definir quan la funció f és integrable en l'interval $[a,b]$.

Una partició de l'interval $[a,b]$ és un conjunt ordenat $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. L'interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ s'anomena i-èsim subinterval de la partició. Atès que la funció f està fitada en $[a,b]$, també està fitada en cada subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, pel que té ínfim m_i i suprem M_i en aquest subinterval. Es defineixen la suma inferior i la suma superior de f en $[a,b]$ respecte de la partició P com

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

respectivament.

Si f és contínua i positiva, la suma inferior correspon a la suma de les àrees de n rectangles que aproxima per defecte l'àrea que es vol definir; anàlogament, la suma superior l'aproxima per excés (Veure figura).



Pot demostrar la següent propietat: si f és una funció fitada en $[a, b]$, y P_1 y P_2 són dues particions qualssevol de $[a, b]$, llavors,

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Això implica que el conjunt $\{s(f, P) : P \text{ és una partició de } [a, b]\}$ està fitat superiorment per qualsevol suma superior. Per tant, té suprem, que s'anomena integral inferior de f en $[a, b]$ i es denota

$$\underline{\int_a^b} f.$$

Anàlogament, el conjunt $\{S(f, P) : P \text{ és una partició de } [a, b]\}$ està fitat inferiorment per qualsevol suma inferior. Per tant, ha ínfim, que s'anomena integral superior de f en $[a, b]$ i es denota

$$\overline{\int_a^b} f.$$

Una funció fitada f definida en $[a, b]$ és integrable–Riemann (o, simplement, integrable) en $[a, b]$ si les integrals inferior i superior de f en $[a, b]$ coincideixen. Aquest nombre s'anomena integral de f en $[a, b]$[1], y se denota por cualquiera de los dos símbolos

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

La definició de funció integrable en un interval $[a, b]$ s'estén als casos $b < a$ i $b = a$ com segueix. Si f és integrable en $[a, b]$, llavors definim

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Si a és un punt de l'domini de f, llavors definim

$$\int_a^a f = 0.$$

[1]L'expressió *integral definida de $f(x)$ entre a i b* també s'utilitza amb freqüència.

Les dues primeres propietats de les següents comporten que la majoria de les funcions són funcions integrables. A continuació s'enuncien algunes propietats de la integral.

- Tota funció fitada monòtona en $[a, b]$ és integrable en $[a, b]$
- Tota funció fitada que tingui un nombre finit o numerable de discontinuïtats en $[a, b]$ és integrable en $[a, b]$. (En particular, tota funció continua en $[a, b]$ és integrable en $[a, b]$).
- (Linealitat) Si f i g són integrables en $[a, b]$ i α, β nombres reals, llavors $\alpha f + \beta g$ és integrable en $[a, b]$, i, a més $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g$.
- Si f i g són integrables en $[a, b]$, llavors fg és integrable en $[a, b]$ (però, no és cert, en general, que la integral del producte sigui igual al producte de les integrals).
- Si f i g són integrables en $[a, b]$ i f/g està definida en $[a, b]$ i és fitada, llavors f/g és integrable en $[a, b]$ (però no és cert, en general, que la integral el quocient sigui igual al quocient de les integrals).
- Si f és integrable en $[a, b]$ i g és contínua en un interval que contingui $f([a, b])$, llavors $g \circ f$ és integrable en $[a, b]$.
- (Monotonía) Si f i g són integrables en $[a, b]$ i $f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors, $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

  En particular, si $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- Si f és integrable en $[a, b]$, llavors $|f|$ també ho és, i $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
- (**Teorema de la media**) Si f és integrable en $[a, b]$, i m i M són, respectivament, l'ínfim i el suprem de f en $[a, b]$, llavors existeix $\mu \in [m, M]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = \mu(b - a)$. En el cas que f sigui contínua en $[a, b]$, llavors existeix $c \in [a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = f(c)(b - a)$, i es diu que $f(c)$ és la *media* de f en $[a, b]$.
- (Additivitat respecte de l'interval) Si f és integrable en $[a, b]$, i $a \leq c \leq b$, llavors f és integrable en $[a, c]$ i en $[c, b]$, i $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

6.4. Apèndix B: El teorema fonamental del càlcul

El teorema fonamental de l'càlcul enllaça dos temes aparentment llunyans: integració i derivades.

Teorema fonamental de el càlcul. Sigui f una funció integrable en $[a,b]$ i definim la funció $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ com

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Llavors,

i) F és contínua en $[a,b]$.

ii) Si f és contínua en $c \in (a,b)$, llavors F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$.

Si f y F són funcions definides en un interval (a,b) i $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a,b)$, es diu que F és una primitiva de f en (a,b). En el cas freqüent que la funció f sigui contínua, el teorema anterior adquireix la següent manera.

Corol·lari. Si f és una funció contínua en $[a,b]$ i definim la funció F en $[a,b]$ com $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$, llavors F és derivable en $[a,b]$ i és una primitiva de f en (a,b).

Cal observar que la funció F està definida mitjançant integració de la funció f i que la seva derivada $(F'(x) = f(x))$ pot calcular tot i que no se sàpiga expressar F com a combinació de funcions elementals.

Com a conseqüència de l'teorema anterior, es dedueix l'anomenada *regla de Barrow*, que permet, per a una funció f contínua en $[a,b]$, calcular la seva integral en aquest interval a partir d'una primitiva seva en (a,b).

Regla de Barrow. Si f és contínua en $[a,b]$ i F és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b) tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a,b)$, llavors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

El teorema fonamental de l'càlcul admet diverses versions. Una d'elles és la següent:

Teorema. Sigui f una funció contínua en $[a,b]$, i u, v funcions derivables en un punt x_0 tal que $u(x_0), v(x_0) \in (a,b)$. llavors la funció

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

és derivable en x_0 i $\quad F'(x_o) = f(v(x_0))v'(x_0) - f(u(x_0))u'(x_0)$.

Aquest teorema s'aplica en particular en els casos en què una de les funcions u o v és constant o la identitat.