

Àlgebra

Examens resolts

Jaume Martí-Farré

José Luis Ruiz

Grau en Intel·ligència Artificial

Departament de Matemàtiques

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 2022

Collecció de problemes que han aparegut en diferents actes d'avaluació de l'assignatura d'Àlgebra del *Grau en Intel·ligència Artificial* de la Facultat d'Informàtica de Barcelona, U.P.C., des de setembre de 2021.

© 2021–2023.

ÍNDIX

1	Curs 2021–2022	1
1.1	Problemes avaluables	1
1.2	Examen parcial	10
1.3	Examen final	13
1.4	Examen de recuperació	18

CAPÍTOL 1

CURS 2021–2022

1.1 Problemes avaluables

1 Determineu els nombres complexos que coincideixen amb la cinquena potència del seu conjugat.

Solució: Hem de resoldre l'equació $z = \bar{z}^5$. Si calculem el mòdul, obtenim: $r = |z| = |\bar{z}^5| = |z|^5 = r^5$. Una solució és $r = 0$, d'on $z = 0$. Si $r = |z| \neq 0$, dividim els dos membres per $|z|$ i obtenim $r^4 = |z|^4 = 1$, d'on $r = |z| = 1$. Ara, expressem $z = 1_\alpha$ i imposem la condició del problema:

$$1_\alpha = (\overline{1_\alpha})^5 \Rightarrow 1_\alpha = 1_{-5\alpha} \Rightarrow \alpha = -5\alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solucions són, per tant: $z = 0$, $z = 1_{k\pi/3}$, amb $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. És a dir, les solucions són 0 i les arrels sisenes de la unitat.

2 Sigui $J = (a_{ij})_{ij}$ la matriu $n \times n$, $n \geq 1$, tal que $a_{ij} = 1$, per a tot $i, j = 1, \dots, n$.

- 1) Calculeu les potències J^2, J^3 i conjectureu una fórmula per la potència J^k , per a $k \geq 1$.
- 2) Proveu per inducció sobre $k \geq 1$ que la fórmula que heu trobat a l'apartat anterior és correcta.
- 3) Calculeu el rang de les matrius J^k , amb $k \geq 1$.
- 4) Considerem els vectors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Quina condició ha de complir el vector \mathbf{b} per tal que el sistema d'equacions lineals $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ sigui compatible?
- 5) Trobeu la solució general del sistema homogeni $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, on $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.
- 6) Trobeu la solució general del sistema $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, on $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ i expresseu-la com a suma d'una solució particular i la solució general del sistema homogeni associat.

Solució:

1) Com que totes les entrades de J són iguals, hi ha prou amb calcular el producte d'una fila per una columna, que és clarament igual a n . Per tant, J^2 té totes les entrades iguals a n ; és a dir, $J^2 = n \cdot J$. Ara, $J^3 = J^2 \cdot J$ i, igual que abans, hi ha prou amb calcular el producte d'una fila de J^2 per una columna de J , que és clarament igual a n^2 . Per tant, $J^3 = n^2 \cdot J$. Conjecturem doncs que si $k \geq 1$, aleshores $J^k = n^{k-1} \cdot J$.

2) Provem per inducció (simple) sobre $k \geq 1$ que $J^k = n^{k-1} \cdot J$.

Pas base: $k = 1$. Si $k = 1$, tenim d'una banda que $J^1 = J$ i de l'altra que $n^{1-1} \cdot J = n^0 \cdot J = J$. Per tant, la propietat es compleix per a $k = 1$.

Pas inductiu: Fixem un enter $k \geq 1$ i suposem que $J^k = n^{k-1} \cdot J$ (hipòtesi d'inducció). Hem de provar que $J^{k+1} = n^k \cdot J$ (tesi d'inducció). Procedim:

$$J^{k+1} = J^k \cdot J \stackrel{\text{HI}}{=} n^{k-1} J \cdot J = n^{k-1} J^2 = n^{k-1} \cdot n \cdot J = n^k \cdot J,$$

on a la segona igualtat hem aplicat la hipòtesi d'inducció i a la penúltima la propietat que hem vist a l'apartat a): $J^2 = J$.

3) Com que $J^k = n^{k-1} \cdot J$ i $n^{k-1} \neq 0$, el rang de J^k és igual al rang de J . Ara bé, totes les files de J són iguals; per tant, J és equivalent a la matriu esglaonada que té la primera fila formada per uns i la resta per zeros. Per tant, el rang de J , i per tant el de J^k , és 1.

4) Si apliquem el mètode de Gauss a la matriu ampliada $(J^k | \mathbf{b})$, obtenim la matriu:

$$(J^k | \mathbf{b}) \xrightarrow{G} \left(\begin{array}{ccc|c} n^{k-1} & \cdots & n^{k-1} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2 - b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n - b_1 \end{array} \right)$$

Per tal que el sistema sigui compatible, el rang de la matriu del sistema, que és 1 com hem vist abans, ha de ser igual al rang de la matriu ampliada. Per tant, $b_i - b_1 = 0$, per a $i = 2, \dots, n$. És a dir, el sistema és compatible si i només si totes les b_i són iguals.

5) El sistema homogeni $J^k \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ és equivalent al sistema homogeni $J \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ (dividint totes les equacions per n^{k-1}). Però en aquest sistema totes les equacions són iguals a:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

Per tant, la solució ve donada per:

$$x_1 = -x_2 - \cdots - x_n, \quad x_2 = x_2, \quad \dots \quad x_n = x_n.$$

És a dir, les incògnites x_2, \dots, x_n són paràmetres (hi ha $n - 1$ graus de llibertat) i x_1 queda expressada en funcions dels paràmetres. Observem que si $n = 1$, el sistema és compatible determinat i la solució és $x_1 = 0$.

- 6) Per l'apartat 4, el sistema és compatible (determinat si i només si $n = 1$; i indeterminat si $n > 1$, perquè el rang és 1). Com que el nombre de graus de llibertat és $n - 1$, podem expressar les solucions com (dividint per n^{k-1}):

$$x_1 = n^{2-k} - x_2 - \dots - x_n, \quad x_2 = x_2, \quad \dots \quad x_n = x_n.$$

És a dir, la solució s'expressa com a suma d'una solució particular més la solució general del sistema homogeni associat:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (n^{2-k}, 0, \dots, 0) + (-x_2 - \dots - x_n, x_2, \dots, x_n).$$

- 3** L'objectiu d'aquest problema és comprovar la propietat següent en un cas concret:

Si $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ són subespais vectorials, aleshores: $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Considerem els següents subespais de \mathbb{R}^6 :

$$F = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculeu una base ortonormal de $F \cap G$ i completeu-la a una base ortonormal B de \mathbb{R}^6 .
- 2) Calculeu les coordenades del vector $w = (2, 3, -1, 6, 5, 2)$ en la base B .
- 3) Calculeu el subespai $(F \cap G)^\perp$.
- 4) Calculeu el subespai F^\perp .
- 5) Calculeu el subespai G^\perp .
- 6) Calculeu el subespai $F^\perp + G^\perp$. És una suma directa?
- 7) Comproveu que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solució: Notem per B_F i A_G les matrius de l'enunciat de manera que $F = \text{Col}(B_F)$ i $G = \text{Nul}(A_G)$.

- 1) Per a trobar una base de $F \cap G$, podem procedir de dues maneres: si expressem F com a $F = \text{Nul}(A_F)$, llavors tenim que $F \cap G = \text{Nul} \begin{pmatrix} A_F \\ A_G \end{pmatrix}$ i resollem el sistema homogeni associat; o bé escrivim una combinació lineal de les columnes de la matriu B_F i substituïm al sistema homogeni donat per la matriu A_G i trobem les condicions que han de satisfer els coeficients de la combinació lineal.

- 1a) Sigui $v = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6$ un vector arbitrari. Que $v \in F$ és equivalent a que el rang de la matriu $(B_F | v^T)$ sigui 3. Fent transformacions elementals per files, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les equacions de F són: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$. És a dir, $F = \text{Nul}(A_F)$, on:

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment:

$$F \cap G = \text{Nul} \begin{pmatrix} A_F \\ A_G \end{pmatrix} = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i aquest sistema té per solucions: $x_1 = x_5 = x_6 = 0, x_2 = -x_3 - x_4, x_4 = x_4$. Per tant, $F \cap G$ té dimensió 2 i una base és: $(0, -1, 1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0, 0)$. És a dir:

$$F \cap G = \text{Col} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1b) Els vectors de F són les combinacions lineals de les columnes de B_F :

$$\alpha(1, 1, 0, 0, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0, 0, 0) + \gamma(1, 0, 0, 1, 0, 0) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma, 0, 0).$$

Aquest vector pertany a G si i només satisfà el sistema homogeni donat per la matriu A_G ; és a dir: $\alpha + \beta + \gamma = 0$. D'aquí obtenim que $\gamma = -\alpha - \beta$. Substituint aquesta condició a la combinació lineal, obtenim que un vector de $F \cap G$ és de la forma:

$$\alpha(0, 1, 0, -1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1, 0, 0).$$

És a dir:

$$F \cap G = \text{Col} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a obtenir una base ortonormal de $F \cap G$, apliquem el mètode de Gram-Schmidt a la base $v_1 = (0, -1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, -1, 0, 1, 0, 0)$ (usem el resultat de l'apartat 1a).

$$w_1 = v_1 = (0, -1, 1, 0, 0, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0, -1/2, -1/2, 1, 0, 0)$$

Finalment:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0), \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0)$$

és una base ortonormal de $F \cap G$.

Ara hem de completar la base u_1, u_2 a una base ortonormal de \mathbb{R}^6 . Per a facilitar els càlculs, treballarem amb la base $u'_1 = \sqrt{2}u_1 = (0, -1, 1, 0, 0, 0)$, $u'_2 = \sqrt{6}u_2 = (0, -1, -1, 2, 0, 0)$, que es ortogonal. En primer lloc, completarem aquesta base a una base ortogonal de \mathbb{R}^6 i per últim normalitzarem els vectors obtinguts. Considerem la matriu $\text{Col}(u'_1, u'_2, e_1, \dots, e_6)$ que té per columnes els vectors u'_1, u'_2 i els vectors de la base canònica. Esglaonant aquesta matriu obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observem que a les columnes corresponents als vectors de la base canònica els pivots estan a les columnes que de e_1, e_2, e_5, e_6 . Per tant, $u'_1, u'_2, e_1, e_2, e_5, e_6$ és una base de \mathbb{R}^6 . Ara apliquem el mètode de Gram-Schmidt a aquesta base, però mantenint u'_1, u'_2 , que ja són ortogonals, i començant per e_1 :

$$w_1 = u'_1 = (0, -1, 1, 0, 0, 0)$$

$$w_2 = u'_2 = (0, -1, -1, 2, 0, 0)$$

$$w_3 = e_1 - \frac{e_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_1 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$w_4 = e_2 - \frac{e_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_2 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_2 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 = (0, 1/3, 1/3, 1/3, 0, 0)$$

pels càlculs agafem $w'_4 = (0, 1, 1, 1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} w_5 &= e_5 - \frac{e_5 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_5 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_5 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 - \frac{e_5 \cdot w'_4}{w'_4 \cdot w'_4} w'_4 \\ &= e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ w_6 &= e_5 - \frac{e_6 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{e_6 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{e_6 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 - \frac{e_6 \cdot w'_4}{w'_4 \cdot w'_4} w'_4 - \frac{e_6 \cdot w_5}{w_5 \cdot w_5} w_5 \\ &= e_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Així doncs, una base ortogonal de \mathbb{R}^6 que esten la base u'_1, u'_2 de $F \cap G$ és:

$$u'_1, u'_2, e_1, w'_4, e_5, e_6,$$

y una base ortonormal B és:

$$\begin{aligned} u_1 &= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0) \\ u_2 &= (0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0) \\ u_3 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ u_4 &= (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0) \\ u_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ u_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

- 2) Les coordenades del vector $w = (2, 3, -1, 6, 5, 2)$ en aquesta base B es poden calcular utilitzant els coeficients de Fourier, donat que la base B és ortonormal:

$$w = \sum_{i=1}^6 (w \cdot u_i) u_i.$$

Però: $w \cdot u_1 = -4/\sqrt{2}$, $w \cdot u_2 = 2/\sqrt{6}$, $w \cdot u_3 = 2$, $w \cdot u_4 = 5/\sqrt{3}$, $w \cdot u_5 = 5$ i $w \cdot u_6 = 2$. És a dir:

$$w_B = (-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 2, \frac{5}{\sqrt{3}}, 5, 2).$$

Una altra manera de calcular aquestes coordenades és utilitzant la fórmula de canvi de base, tenint en compte que en aquest cas $M(B \rightarrow C)^{-1} = M(B \rightarrow C)^T$, ja que les bases B i C són ortonormals.

3) Calculem ara $(F \cap G)^\perp$. A l'apartat 1 hem calculat equacions de $F \cap G$:

$$F \cap G = \text{Nul}(A_{F \cap G}), \quad A_{F \cap G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i també una base de $F \cap G$:

$$F \cap G = \text{Col}(B_{F \cap G}), \quad B_{F \cap G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$\begin{aligned} (F \cap G)^\perp &= \text{Nul}(B_{F \cap G}^T) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Col}(A_{A \cap G}^\perp) = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una altra manera de calcular $(F \cap G)^\perp$ seria: u_1, \dots, u_6 és una base ortonormal de \mathbb{R}^6 tal que $F \cap G = \langle u_1, u_2 \rangle$. Per tant: $(F \cap G)^\perp = \langle u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle$.

4) Sabem que $F = \text{Col}(B_F) = \text{Nul}(A_F)$. Per tant, $F^\perp = \text{Col}(A_F^T) = \text{Nul}(B_F^T)$. És a dir:

$$F^\perp = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Sabem que $G = \text{Nul}(A_G)$. Per tant:

$$G^\perp = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a expressar G^\perp de la forma $\text{Nul}(M)$, afegim una columna genèrica $(x_1, \dots, x_6)^T$ a la matriu A_G^T i impossem que la matriu resultant tingui rang 3. Obtenim les equacions $x_3 = x_2$, $x_4 = x_2$, $x_6 = 0$. És a dir:

$$G^\perp = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 6) Tenim $F^\perp + G^\perp = \text{Col}(N|M)$, on $F^\perp = \text{Col}(N)$ i $G^\perp = \text{Col}(M)$, on N i M s'han obtingut en apartats anteriors. Per tant:

$$F^\perp + G^\perp = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i comprovem directament que el resultat és igual a $F \cap G^\perp$.

És $F^\perp + G^\perp$ suma directa? Tenim: $\dim(F^\perp + G^\perp) = 4$ i $\dim(F^\perp) = \dim(G^\perp) = 3$. Per la fórmula de Grassmann:

$$\dim(F^\perp \cap G^\perp) = -\dim(F^\perp + G^\perp) + \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) = -4 + 3 + 3 = 2.$$

En particular, $F^\perp \cap G^\perp \neq \{0\}$ i, per tant, $F^\perp + G^\perp$ no és suma directa.

4 Considerem la matriu real següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculeu la descomposició en valors singulars de la matriu A .
- 2) Digueu quins són els valors singulars, els vectors singulars per la dreta i els vectors singulars per l'esquerra de A .
- 3) Doneu bases ortonormals dels subespais $\text{Col}(A)$, $\text{Nul}(A)$, $\text{Col}(A^T)$ i $\text{Nul}(A^T)$.
- 4) Descomposeu la matriu A com a suma de dues matrius de rang 1.

Solució: Com que el número de files és inferior al número de columnes, treballem amb la matriu $A \cdot A^T$:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu ja és diagonal. Per tant, els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{3}$ i $\sigma_2 = \sqrt{2}$ i la matriu Σ és:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Els vectors singulars per l'esquerra són directament els vectors de la base canònica: $u_1 = (1, 0)$ i $u_2 = (0, 1)$; és a dir:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara els vectors singulars per la dreta i la matriu V . Tenim:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sigma_1} A^T \cdot u_1^T = (1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3})^T \\ v_2 &= \frac{1}{\sigma_2} A^T \cdot u_2^T = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{3})^T. \end{aligned}$$

Ara hem de completar els vectors v_1, v_2 a una base ortonormal de \mathbb{R}^5 . En aquest cas, a simple vista, veiem que afegint els vectors $v_3 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 1, 0)$ i $v_5 = (1, 0, 0, 0, 1)$, tenim una base ortogonal de \mathbb{R}^5 i normalitzant-la obtenim les columnes de la matriu V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Finalment, la descomposició en valors singulars de la matriu A és: $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$.

A partir de les matrius U i V , i tenint en compte que el rang de A és 2, obtenim bases ortonormals dels subespais següents:

- Una base ortonormal de $\text{Col}(A)$ està formada per les columnes de la matriu U .
- Una base ortonormal de $\text{Nul}(A)$ està formada per les tres últimes columnes de V .
- Una base ortonormal de $\text{Col}(A^T)$ està formada per les 2 primeres columnes de V .
- $\text{Nul}(A^T)$ és el subespai $\{(0, 0)\}$.

1.2 Examen parcial

5 Determineu els nombres complexos no nuls tals que el seu invers és la quarta potència del seu conjugat.

Solució: Sigui $z = r_\alpha$ un nombre complex no nul, amb $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Llavors tenim:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}, \quad \bar{z} = r_{-\alpha}.$$

Per tant, la condició $z^{-1} = (\bar{z})^4$ és equivalent a $(1/r)_{-\alpha} = (r_{-\alpha})^4 = r_{-4\alpha}$ que és equivalent a les dues condicions següents:

$$\frac{1}{r} = r^4, \quad -\alpha = -4\alpha + 2k\pi,$$

on $k \in \mathbb{Z}$. La equació $\frac{1}{r} = r^4$ és equivalent a $r^5 = 1$ i com que $r \neq 0$, la única solució real i positiva és $r = 1$. És a dir, els nombres complexos que busquem tenen tots mòdul 1. La condició sobre l'argument és equivalent a $3\alpha = 2k\pi$. Per tant, les solucions són els nombres complexos de la forma:

$$1_{\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Però és fàcil veure que només obtenim tres valors diferents que es corresponen amb els valors de $k = 0, 1, 2$. És a dir, les solucions són:

$$1, \quad 1_{2\pi/3}, \quad 1_{4\pi/3},$$

que són les arrels cúbiques de la unitat.

6 Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerem la matriu $M_\lambda = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ definida com:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1) Calculeu el determinant de M_λ .
- 2) Calculeu la matriu inversa de M_2 .
- 3) Determineu les solucions, segons els valors de $\mu \in \mathbb{R}$, del sistema d'equacions $M_{-1} \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, on $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $\mathbf{b} = (1, 1, \mu, \mu)$.

Solució:

1) Desenvolupant per la primera fila, per exemple, obtenim:

$$\det(M_\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2,$$

on els dos determinants 3×3 els hem desenvolupat per la última fila.

2) Aplicant el mètode de Gauss-Jordan, per exemple, obtenim:

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

3) Aplicant el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el sistema és compatible si i només si $\mu = -1$. I en el cas que $\mu = -1$, el sistema és equivalent a $x_1 - x_4 = -1$, $x_2 - x_3 = -1$. Per tant, si $\mu = -1$, el sistema és compatible i indeterminat amb rang 2 i dos graus de llibertat i les solucions es poden expressar com:

$$x_1 = -1 + x_4, \quad x_2 = -1 + x_3, \quad x_3 = x_3, \quad x_4 = x_4.$$

7 Considerem els vectors $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $v_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ i $w = (1, 1, 1, 1, a)$ de \mathbb{R}^5 , on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real.

- 1) Demostreu que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ és una base de \mathbb{R}^5 i determineu les coordenades del vector w en aquesta base.
- 2) Calculeu la dimensió del subespai $\langle v_1, v_2, w \rangle$. Determineu els valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ per als quals existeix una matriu $M \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$ tal que $\text{Nul}(M) = \langle v_1, v_2, w \rangle$.
- 3) En el cas $a = 2$, determineu una matriu A tal que $\text{Nul}(A) = \langle v_1, v_2, w \rangle$.

Solució:

- 1) Com que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 són cinc vectors de \mathbb{R}^5 , per demostrar que són base únicament hem de veure que són linealment independents i per a això hem de veure que la matriu que aquests cinc vectors determinen té rang màxim. Agafem doncs la matriu P que té aquests vectors per columnes:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu té determinant $\det(P) = 1 \neq 0$ i, per tant, el conjunt B és una base de \mathbb{R}^5 . Les coordenades del vector w en aquesta base seran $w = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, on $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ són les solucions del sistema:

$$P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

És fàcil veure que la solució d'aquest sistema és $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ i $\lambda_5 = a - 2$. Per tant, les coordenades de w en la base B són $(1, 1, 0, 0, a - 2)$.

- 2) Com que $w = v_1 + v_2 + (a - 2)v_3$, aleshores $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2, \rangle$ si $a = 2$ i $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ si $a \neq 2$. Per tant, com que els vectors v_1, v_2, v_3 són linealment independents, podem concloure que el subespai $\langle v_1, v_2, w \rangle$ té dimensió 2 si $a = 2$ i té dimensió 3 si $a \neq 2$. Així, si $M \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$ és una matriu tal que $\text{Nul}(M) = \langle v_1, v_2, w \rangle$, aleshores tindrem que $\dim \langle v_1, v_2, w \rangle = 5 - \text{rang}(M) \geq 5 - 2 = 3$. D'on $\dim \langle v_1, v_2, w \rangle = 3$ i, per tant $a \neq 2$.
- 3) Si $a = 2$, aleshores $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2, \rangle$ és un subespai de dimensió 2. Per tant, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \langle v_1, v_2, w \rangle$ si i només si la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$$

té rang 2. Aplicant el mètode de Gauss, la matriu anterior es transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

i, per tant, el seu rang val 2 si i només si $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = x_5 - x_1 - x_2 = 0$. Així, $\langle v_1, v_2, w \rangle = \text{Nul}(A)$, on:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Examen final

Qüestions

8 Siguin F i G dos subespais de \mathbb{R}^n diferents tals que $\dim(F) = \dim(G) = n - 1$. Sigui A una matriu tal que $\text{Nul}(A) = F \cap G$. Determineu el rang de la matriu A i justifiqueu quantes files, com a mínim, i quantes columnes pot tenir la matriu A .

Solució: Un subespai F de \mathbb{R}^n de dimensió $n - 1$ ve donat per una equació:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

on algun dels a_i és no nul. En efecte, un subespai de dimensió $n - 1$ ve donat per un sistema homogeni amb $n - 1$ graus de llibertat i, per tant, de rang 1. És a dir:

$$F = \text{Nul}(a_1 \dots a_n), \quad \text{rang}(a_1 \dots a_n) = 1, \quad \dim(F) = n - 1.$$

Anàlogament, $G = \text{Nul}(b_1 \dots b_n)$, amb algun dels b_j no nul. Per tant, el subespai intersecció $F \cap G$ ve donat per:

$$F \cap G = \text{Nul} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 2, perquè les files no són proporcionals (ja que els subespais F i G són diferents). És a dir, $F \cap G = \text{Nul}(A)$, amb A una matriu de rang 2 amb n columnes i un mínim de dues files.

9 Estudieu la diagonalització de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sobre \mathbb{R} i sobre \mathbb{C} . En cas que diagonalitzi, calculeu una matriu invertible P i una matriu diagonal D tals que $D = P^{-1}AP$.

Solució: Calculem primer el polinomi característic:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(x^2 - 2x + 2).$$

Aquest polinomi té una única solució real: $x = 0$. Per tant, la matriu A no diagonalitza sobre \mathbb{R} . Sobre \mathbb{C} podem descompondre el polinomi com:

$$p_A(x) = -x(x^2 - 2x + 2) = -x(x - (1 + i))(x - (1 - i)).$$

Com que té solucions complexes diferents (és a dir, totes tenen multiplicitat algebraica igual a 1), la matriu sí diagonalitza sobre \mathbb{C} . Els valors propis són $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + i$ i $\lambda_3 = 1 - i$. Per tant, una possible matriu diagonal és:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Calculem ara els subespais propis $E_0 = \text{Nul}(A)$, $E_{1+i} = \text{Nul}(A - (1 + i)I)$ i $E_{1-i} = \text{Nul}(A - (1 - i)I)$. Tenim, resolent els sistemes:

$$E_0 = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{1+i} = \text{Nul} \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$E_{1-i} = \text{Nul} \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de canvi de base és:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}.$$

10 Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de \mathbb{R}^3 . Determineu una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ en la qual el vector e_1 té coordenades $(1, 1, 0)$, el vector e_2 té coordenades $(1, 2, 1)$ i el vector e_3 té coordenades $(1, 2, 2)$. Quin vector $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ té coordenades $(3, 6, 5)$ en aquesta base?

Solució: De les dades del problema podem deduir la matriu de la base B_e en la base B_v :

$$M(B_e \rightarrow B_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim:

$$M(B_v \rightarrow B_e) = M(B_e \rightarrow B_v)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir, la base que demana el problema és:

$$v_1 = (2, -2, 1), \quad v_2 = (-1, 2, -1), \quad v_3 = (0, -1, 1).$$

Finalment, les coordenades de w en la base canònica són:

$$M(B_v \rightarrow B_e) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11 Demostreu que si la matriu A següent és una matriu diagonalitzable i té polinomi característic $(x-5)(x-1)^3$, aleshores $a = b = 1$ i $c = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Solució: La matriu A té dos valors propis diferents: $\lambda_1 = 5$, amb multiplicitat algebraica $m_5 = 1$, i $\lambda_2 = 1$, amb multiplicitat algebraica $m_1 = 3$. Com que A és diagonalitzable, les multiplicitats algebraiques han de coincidir amb les corresponents multiplicitats geomètriques. Això passa automàticament si la multiplicitat algebraica és 1, perquè tenim la desigualtat $1 \leq m_\lambda \leq \dim(E_\lambda)$. Per tant, només hem d'imposar que la multiplicitat geomètrica del valor propi $\lambda_2 = 1$ sigui 3; és a dir, $\dim(E_1) = 3$. Però això és equivalent a dir que el rang de la matriu $A - I$ és $4 - 3 = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c-1 \end{pmatrix}$$

i aquesta matriu té rang 1 si i només si la última columna és $(1, 1, 1, 1)^T$. És a dir, si i només si $a = b = 1$ i $c = 2$.

Problema

12 Siguin $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ les aplicacions lineals definides per les matrius:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculeu les dimensions dels nuclis i les imatges d'aquestes aplicacions lineals.
- 2) Comproveu que $\text{Ker}(f)$ i $\text{Im}(g)$ són complementaris ortogonals.
- 3) Demostreu que $a = b = 0$ i $c = -1$ són els únics valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que els vectors $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ i $v_2 = (a, b, 1, c)$ són una base ortogonal de $\text{Ker}(f)$. Comproveu que els vectors $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ determinen una base ortogonal de $\text{Im}(g)$.
- 4) Doneu les coordenades de $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ en la base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (amb els valors de a, b i c de l'apartat anterior).
- 5) Determineu la projecció ortogonal de $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ sobre $\text{Ker}(f)$ i sobre $\text{Im}(g)$.
- 6) El vector $w = (1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ està més proper a $\text{Ker}(f)$ o a $\text{Im}(g)$?

Solució:

- 1) Es veu fàcilment que el rang de A_f és 2 (la primera i tercera columnes són independents) i que el rang de A_g és també 2 (la segona columna és 1/3 de la suma de les altres dues columnes). Per tant, tenim:

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(A_f) = 2, \quad \text{Im}(f) = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$, tenim que $\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$. Anàlogament, tenim:

$$\dim(\text{Im}(g)) = \text{rang}(A_g) = 2, \quad \text{Im}(g) = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

i com que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g))$, tenim que $\dim(\text{Ker}(g)) = 3 - 2 = 1$.

- 2) Recordem que si $F = \text{Nul}(A)$, llavors $F^\perp = \text{Col}(A^T)$; i si $F = \text{Col}(B)$, llavors $F^\perp = \text{Nul}(B^T)$. Per tant:

$$(\text{Im}(g))^\perp = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker}(f).$$

Alternativament, podem expressar $\text{Ker}(f)$ com a $\text{Col}(B)$ resolent el sistema homogeni donat per la matriu A_f i obtenim: $x = y, y = y, z = -t, t = t$. És a dir:

$$\text{Ker}(f) = \text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$(\text{Ker}(f))^\perp = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Im}(g).$$

- 3) Tenim:

$$(1, -1, 0, 0) \cdot (a, b, 1, c) = a - b = 0 \iff a = b.$$

A més, el vector $(a, a, 1, c)$ pertany a $\text{Ker}(f)$ si i només si $A_f \cdot (a, a, 1, c)^T = (0, 0, 0)^T$. És a dir, si i només si $a + a = 0$ i $1 + c = 0$ si i només si $a = 0$ i $c = -1$.

Els vectors v_3 i v_4 són ortogonals:

$$v_3 \cdot v_4 = (1, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 1) = 0;$$

per tant, són linealment independents. Si veiem que també generen el subespai $\text{Im}(g)$, determinaran una base ortogonal d'aquest subespai. Hem de veure que el rang de la matriu següent és 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu té rang 2. Això implica que el subespai generat per les dues primeres columnes, que és $\text{Im}(g)$ segons hem vist a l'apartat (a), coincideix amb el subespai generat per les dues últimes columnes.

- 4) Per calcular les coordenades del vector w en la base v_1, v_2, v_3, v_4 , que és ortogonal, utilitzarem els coeficients de Fourier. Si posem $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, aleshores:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \frac{-2}{2} = -1, & \alpha_2 &= \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \frac{-2}{2} = -1, \\ \alpha_3 &= \frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} = \frac{4}{2} = 2, & \alpha_4 &= \frac{w \cdot v_4}{v_4 \cdot v_4} = \frac{6}{2} = 3.\end{aligned}$$

És a dir, les coordenades de $w = (1, 3, 2, 4)$ en la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ són $(-1, -1, 2, 3)$:

$$(1, 3, 2, 4) = (-1) \cdot (1, -1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1, -1) + 2 \cdot (1, 1, 0, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1, 1).$$

- 5) Observem que v_1, v_2 és una base de $\text{Ker}(f)$, que v_3, v_4 és una base de $\text{Im}(g)$ i que aquests dos subespais són complementaris ortogonals. Per tant, tenim:

$$\begin{aligned}P_{\text{Ker}(f)}(w) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (-1) \cdot (1, -1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1, -1) = (-1, 1, -1, 1), \\ P_{\text{Im}(g)}(w) &= \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 2 \cdot (1, 1, 0, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1, 1) = (2, 2, 3, 3).\end{aligned}$$

- 6) Recordem que la distància d'un vector a un subespai és la norma de la component ortogonal del vector respecte del subespai. Per tant, per calcular la distància de w a cada subespai, calculem els vectors components ortogonals $C_{\text{Ker}(f)}(w)$ i $C_{\text{Im}(g)}(w)$:

$$\begin{aligned}C_{\text{Ker}(f)}(w) &= w - P_{\text{Ker}(f)}(w) = (2, 2, 3, 3), \\ C_{\text{Im}(g)}(w) &= w - P_{\text{Im}(g)}(w) = (-1, 1, -1, 1),\end{aligned}$$

i les seves normes:

$$\|C_{\text{Ker}(f)}(w)\| = \sqrt{26}, \quad \|C_{\text{Im}(g)}(w)\| = 2.$$

Per tant, el vector w està més a prop del subespai $\text{Im}(g)$ que del subespai $\text{Ker}(f)$.

1.4 Examen de recuperació

Qüestions

- 13** Determineu la solució general del sistema homogeni:

$$\begin{cases} ix + (1 - 2i)y + (1 - i)z = 0 \\ -x + (2 + i)y - (1 + i)z = 0 \end{cases}$$

i la solució general del sistema:

$$\begin{cases} ix + (1 - 2i)y + (1 - i)z = 1 - 2i \\ -x + (2 + i)y - (1 + i)z = 2 + i \end{cases}$$

Solució: Aplicant el mètode de Gauss a la matriu del sistema homogeni donat, obtenim:

$$\begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ -1 & 2+i & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ 0 & 1-2i & -1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1-2i & 1-i \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix}$$

on la primera transformació consisteix en multiplicar la segona fila per $-i$ i sumar-li la primera fila i a la segona transformació hem restat la primera fila a la segona fila. Per tant, tenim que $z = 0$ i $x = ((-1+2i)/i)y$. És a dir, la solució general del sistema homogeni és:

$$x = (2+i)\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

El segon sistema té per sistema homogeni associat el primer sistema. Per tant, la seva solució general s'obté sumant a una solució particular la solució general del sistema homogeni. Ara bé, està clar que $x = 0, y = 1, z = 0$ és una solució del segon sistema. Per tant, la solució general d'aquest és:

$$x = (2+i)\lambda, \quad y = 1+\lambda, \quad z = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

14 Sabem que el vector $w = (a, 1, b)$ de \mathbb{R}^3 té coordenades $(-1, c, -2)$ en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 , on $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Determineu els valors dels paràmetres a, b, c .

Solució: Que les coordenades de w en la base B siguin $(-1, c, -2)$ vol dir que:

$$w = (-1)v_1 + cv_2 + (-2)v_3 = -(1, -2, 0) + c(1, 1, 0) - 2(1, 1, 1) = (c-3, c, -2).$$

Igualant a $w = (a, 1, b)$, obtenim: $c = 1, b = -2, a = -2$.

15 Sigui $f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (x + 2y, -5x + 7y)$. Doneu la matriu associada a f en la base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , on $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 5)$.

Solució: Siguin C la base canònica i $B = \{v_1, v_2\}$ la base donada. La matriu de f en la base canònica i la matriu de la base B en la base canònica són, respectivament:

$$M(f; C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad M(B \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f en la base B és:

$$M(f; B) = M(B \rightarrow C)^{-1} \cdot M(f; C) \cdot M(B \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

ja que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

16 Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

on $a \in \mathbb{R}$. Demostreu que hi ha un únic valor del paràmetre a per al qual la matriu A és diagonalitzable. Per aquest valor doneu una matriu diagonal D i una matriu invertible P de manera que $A = PDP^{-1}$.

Solució: El polinomi característic de la matriu és:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^3(a-x),$$

desenvolupant per la quarta columna i després la matriu que resulta és triangular superior.

Si $a = -1$, llavors A té un únic valor propi de multiplicitat algebraica 4 i sabem que una matriu $n \times n$ amb un únic valor propi de multiplicitat algebraica n diagonalitza si i només si la matriu ja és diagonal, que no és el cas. Per tant, si A diagonalitza, llavors $a \neq -1$.

Si $a \neq -1$, llavors A té dos valors propis: -1 , amb multiplicitat 3, i a , simple. La matriu A diagonalitza si i només si $\dim(E_{-1}) = 3$. Però $\dim(E_{-1}) = 4 - \text{rang}(A + I) = 3$ si i només si $a = 3$, ja que:

$$A + I = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusió: A diagonalitza si i només si $a = 3$. Amb aquest valor de a calculem bases

dels subespais propis E_{-1} i E_3 . Obtenim:

$$E_{-1} = \text{Nul}(A + I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \text{Nul}(A - 3I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17 Sigui $F \subseteq \mathbb{R}^4$ un subespai de dimensió 2. Sabem que la projecció ortogonal dels vectors $w_1 = (2, 3, 0, 1)$ i $w_2 = (3, 0, 1, 2)$ sobre F són $P_F(w_1) = (1, 2, 1, 2)$ i $P_F(w_2) = (2, 1, 2, 1)$, respectivament. Determineu una base del complementari ortogonal de F i unes equacions que defineixin F .

Solució: En primer lloc, sabem que $4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$; és a dir, $\dim(F^\perp) = 2$. Per tant, per a determinar el subespai ortogonal, és suficient calcular dos vectors linealment independents de F^\perp . Per exemple:

$$v_1 = w_1 - P_F(w_1) = (2, 3, 0, 1) - (1, 2, 1, 2) = (1, 1, -1, -1),$$

$$v_2 = w_2 - P_F(w_2) = (3, 0, 1, 2) - (2, 1, 2, 1) = (1, -1, -1, 1).$$

Així doncs:

$$F^\perp = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ja que si $F^\perp = \text{Col}(B)$, llavors $F = \text{Nul}(B^T)$.

Problema

18 Siguin A, B, C, M les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $C^T C = M$.

- Determineu, en funció dels paràmetres a i b , els rangs de les matrius A i B . Per a quins valors dels paràmetres a i b es té que $C = AB$? Quan $C = BA$? És C una matriu invertible?
- Doneu bases i dimensions dels subespais $F = \text{Nul}(A)$ i $G = \text{Col}(B)$. Quan $F + G = \text{Col}(C)$? Quan $F \cap G = \text{Nul}(C)$?
- Siguin f, g, h les aplicacions lineals definides per les matrius A, B i C , respectivament. Doneu bases i dimensions dels nuclis i les imatges d'aquestes aplicacions lineals. Quan $h = g \circ f$?
- Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 els vectors de \mathbb{R}^4 definits per les columnes de la matriu C . Justifiqueu que v_1, v_2, v_3, v_4 determinen una base ortogonal de \mathbb{R}^4 i doneu les coordenades d'un vector genèric $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ en aquesta base.

Solució:

- Es comprova directament que $\text{rang}(A) = 3$ si $a = 0$ i $\text{rang}(A) = 4$ si $a \neq 0$.
 - Esglaonant la matriu B , comprovem fàcilment que $\text{rang}(B) = 3$ si $b = 2$, i que $\text{rang}(B) = 4$ si $b \neq 2$.
 - La igualtat $C = AB$ no és certa mai, ja que la matriu AB és 5×5 i C és 4×4 .
 - Pel que fa a la igualtat $C = BA$: és certa si i només si $a = 1$ i $b = -3$.
 - Finalment, tenim que $\det(C^T C) = \det(C^T) \det(C) = \det(C)^2 = \det(M) = 40^2 \neq 0$, donat que $C^T C = M$ i $\det(C^T) = \det(C)$. Per tant, la matriu C sempre és invertible perquè el seu determinant és no nul.
- $F = \text{Nul}(A)$: les equacions de F són: $x + t = 0$, $x + y = 0$, $y = 0$, $az = 0$, $t = 0$. És a dir, $x = y = t = 0$ i $az = 0$. Per tant, si $a \neq 0$, llavors $F = \{(0, 0, 0, 0)\}$ i $\dim(F) = 0$; i si $a = 0$, llavors F està generat pel vector $(0, 0, 1, 0)$ i $\dim(F) = 1$.

- $G = \text{Col}(B)$: si esglaonem la matriu B , veiem que si $b = 2$, llavors $\dim(G) = \text{rang}(B) = 3$ i G està generat per les tres primeres columnes de B ; i si $b \neq 2$, llavors $\dim(G) = \text{rang}(B) = 4$ i com que G és un subespai de \mathbb{R}^4 , tenim que $G = \mathbb{R}^4$. Resumint, si $b \neq 2$, $G = \mathbb{R}^4$; i si $b = 2$, llavors:

$$G = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $F + G = \text{Col}(C)$?: hem vist al primer apartat que la matriu C és invertible. Per tant, té rang 4 i en conseqüència $\text{Col}(C) = \mathbb{R}^4$. És a dir, hem d'estudiar quan és $F + G = \mathbb{R}^4$. Si $b \neq 2$, llavors $G = \mathbb{R}^4$ i, per tant, $F + G = F + \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$. Estudiem què passa si $b = 2$. Si, a més, $a = 0$, llavors $F = \{(0, 0, 0, 0)\}$ i, per tant, $F + G = G$, que té dimensió 3. Si $a \neq 0$, llavors $F = \text{Col}(0, 0, 1, 0)^T$ i, per tant:

$$F + G = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ja que si $F = \text{Col}(A_1)$ i $G = \text{Col}(A_2)$, llavors $F + G = \text{Col}(A_1 | A_2)$. Aquesta matriu té rang 4 i per tant $F + G = \mathbb{R}^4$. Resumint:

- si $b \neq 2$: $F + G = \mathbb{R}^4 = \text{Col}(C)$.
- si $b = 2$ i $a = 0$: $F + G = G \neq \text{Col}(C)$.
- si $b = 2$ i $a \neq 0$: $F + G = \mathbb{R}^4 = \text{Col}(C)$.
- $F \cap G = \text{Nul}(C)$?: el rang de C és 4 i, per tant, $\text{Nul}(C) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Per tant, hem de veure quan $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Si $a = 0$, llavors $F = \{(0, 0, 0, 0)\}$ i, per tant, $F \cap G = F = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Si $a \neq 0$, llavors $F \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$ i si $b \neq 2$, llavors $G = \mathbb{R}^4$ i $F \cap G = F \cap \mathbb{R}^4 = F \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$. Només ens falta estudiar el cas en què $a \neq 0$ i $b = 2$. En aquest cas, F està generat pel vector $(0, 0, 1, 0)$ i cap múltiple d'aquest vector pertany a G ja que $\dim(G) = \text{rang}(B) = 3$ i:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

En conseqüència, $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Resumint:

- si $a = 0$: $F \cap G = F = \text{Nul}(C)$.
- si $a \neq 0$ i $b \neq 2$: $F \cap G = F \neq \text{Nul}(C)$.
- si $a \neq 0$ i $b = 2$: $F \cap G = \text{Nul}(C)$.

- c)
- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $M(f) = A$. Llavors $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(A)$ i $\text{Im}(f) = \text{Col}(A)$. Si $a \neq 0$, llavors $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$, com hem vist a l'apartat b), i una base de $\text{Im}(f)$ està formada per les 4 columnes de A , que té rang 4.
 - $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $M(g) = B$. Llavors $\text{Ker}(g) = \text{Nul}(B)$ i $\text{Im}(g) = \text{Col}(B)$. Si $b \neq 2$, llavors $\text{Im}(g) = \text{Col}(B) = \mathbb{R}^4$, segons hem vist a l'apartat b). En aquest cas, $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim(\text{Im}(g)) = 5 - 4 = 1$. Resolent el sistema homogeni de matriu associada B , quan $b \neq 2$, obtenim:

$$\text{Ker}(g) = \langle (0, -1, 1, -1, 0) \rangle.$$

Si $b = 2$, llavors B té rang 3, una base de $\text{Im}(g)$ està formada per les tres primeres columnes de B i $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim(\text{Im}(g)) = 5 - 3 = 2$. Resolent el sistema homogeni de matriu associada B , quan $b = 2$, obtenim:

$$\text{Ker}(g) = \langle (0, -1, 1, -1, 0), (-2, 2, 0, 0, 1) \rangle.$$

- $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $M(h) = C$. Llavors $\text{Ker}(h) = \text{Nul}(C)$ i $\text{Im}(h) = \text{Col}(C)$. Com que el rang de C és 4, tenim que h és injectiva i exhaustiva; és a dir: $\text{Ker}(h) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ i $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^4$.
 - Tenim: $h = g \circ f \iff M(h) = M(g \circ f) = M(g)M(f) \iff C = BA \iff a = 1, b = -3$, la última equivalència per l'apartat a).
- d) Sabem que el rang de C és 4; per tant, les columnes de C formen una base de \mathbb{R}^4 . Que v_1, v_2, v_3, v_4 sigui una base ortogonal vol dir que, a més, $v_i \cdot v_j = 0$, per a tot $i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$. Però aquesta condició és equivalent a que el producte $C^T C$ sigui una matriu diagonal, que és el cas com es diu a l'enunciat: $C^T C = M$. A més, sabem que $v_1 \cdot v_1 = v_4 \cdot v_4 = 10$ i $v_2 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_3 = 4$. Les coordenades d'un vector $w = (x, y, z, t)$ en aquesta base són els seus coeficients de Fourier i es poden calcular així:

$$w = \sum_{i=1}^4 \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i = \frac{1}{10}(2x + y - 2z - t)v_1 + \frac{1}{4}(x - y + z - t)v_2 + \frac{1}{10}(x + y + z + t)v_3 + \frac{1}{10}(x - 2y - z + 2t)v_4.$$