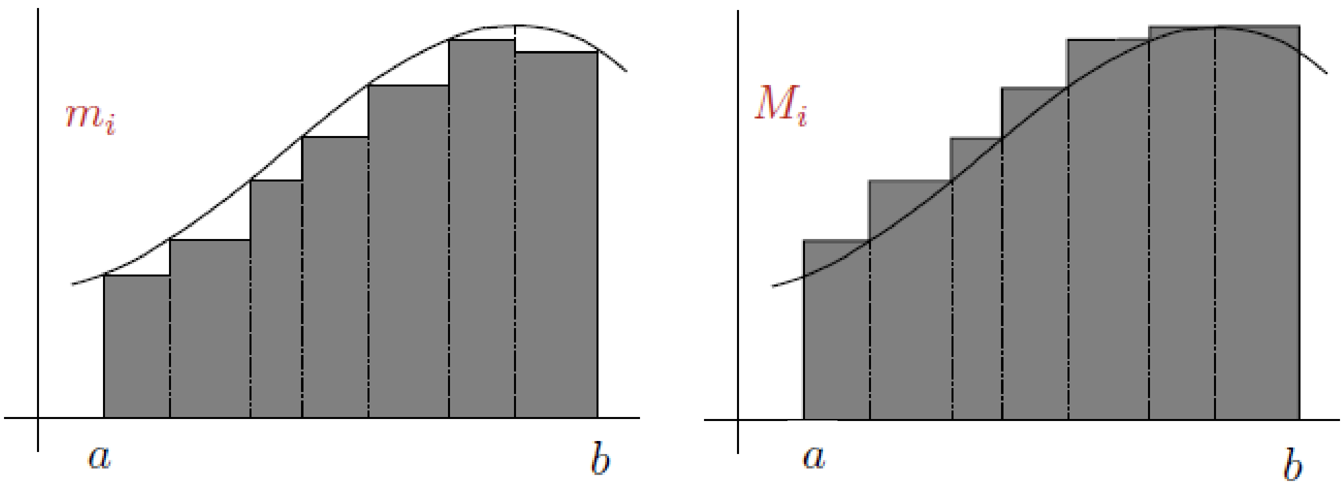
# Integral de Riemann

$a < b$ $\qquad f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$




$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$f$ es integrable–Riemann en $[a, b]$ $\iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

## Propiedades

Toda función acotada monótona en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$

Toda función continua en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$

Toda función acotada que tenga un número finito o numerable de discontinuidades en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.[a]

(Linealidad) Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ y $\alpha$, $\beta$ números reales, entonces $\alpha f+\beta g$ es integrable en $[a,b]$, y además $\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\int_a^b\alpha f+\int_a^b\beta g$.

Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$, entonces $fg$ es integrable en $[a,b]$ (sin embargo, no es cierto, en general, que la integral del producto sea igual al producto de las integrales).

Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ y $f/g$ está definida en $[a,b]$ y es acotada, entonces $f/g$ es integrable en $[a,b]$ (pero no es cierto, en general, que la integral del cociente sea igual al cociente de las integrales).

Si $f$ es integrable en $[a,b]$ y $g$ es continua en un intervalo que contenga $f([a,b])$, entonces $g\circ f$ es integrable en $[a,b]$.

# Primitivas e integral indefinida

## Primitivas

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función
$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función
$a, b \epsilon \mathbb{R}$, $\quad a < b$
$[a, b] \subseteq Dom\ f \ \cap Dom\ F'$

1. $F(x)$ es una <u>primitiva</u> de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \ \ \forall x \epsilon Dom\ f$
2. $F(x)$ es una <u>primitiva</u> de $f(x)$ en $[a, b] \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \ F'(x) = f(x) \ \ \forall x \epsilon [a, b]$

## Integral indefinida

$F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Longrightarrow$ la <u>integral indefinida</u> de $f(x)$ es:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Teorema fundamental del Cálculo

$$\left.\begin{array}{l} f:\ R \to R \text{ función} \\ a, b \epsilon R, a < b \\ f \text{ integrable en } [a,b] \\ F: [a,b] \longrightarrow R \\ \qquad x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{1) } F \text{ es continua en } [a,b] \\ \text{2) Si } f \text{ es continua en } x \in (a,b) \Longrightarrow F \text{ es derivable} \\ \quad \text{en } x \text{ y } F'(x) = f(x) \end{array}\right.$$

$f$ continua en $[a,b]$

$$\boxed{\forall x \in (a,b)\ \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$$

$$\forall x \in (a,b)\ \left(\int_x^a f(t)dt\right)' = -f(x)$$

$g_1, g_2$ derivables en $(a,b)$

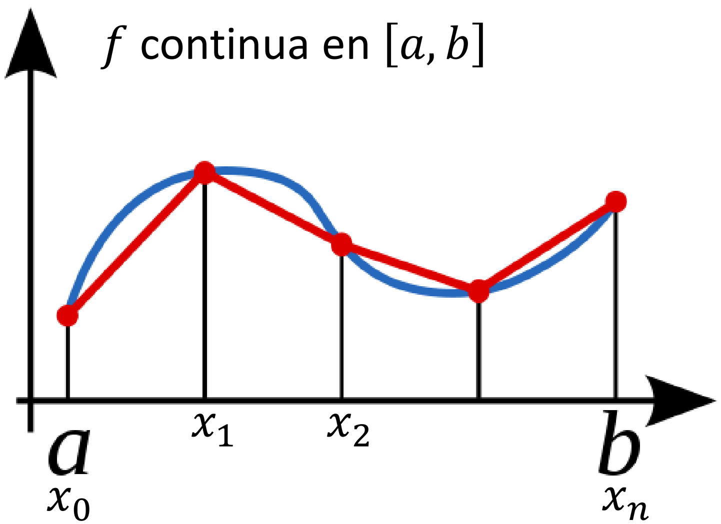
$$\forall x \in (a,b)\ \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt\right)' = f\big(g_2(x)\big) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1{}'(x)$$

## Integración aproximada: Regla de los trapecios y fórmula del error. Método de Simpson y fórmula del error.

$f: R \to R$ función
$a, b \epsilon R, a < b$
$f$ continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x)\, dx$ con la precisión deseada

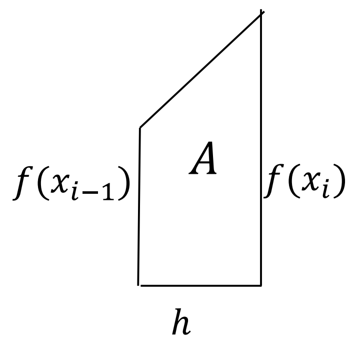
### Regla de los trapecios




$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ partición tal que:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h$$

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = a + i \cdot h, \qquad i = 0, \dots, n$$




$$A = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

**Fórmula de la regla de los trapecios para $n$ subintervalos**

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \cong T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\\[2ex] \displaystyle x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}, \qquad i=0,\dots,n\end{array}}$$

**Error**

Si $f$ es dos veces derivable en $[a,b] \Longrightarrow$

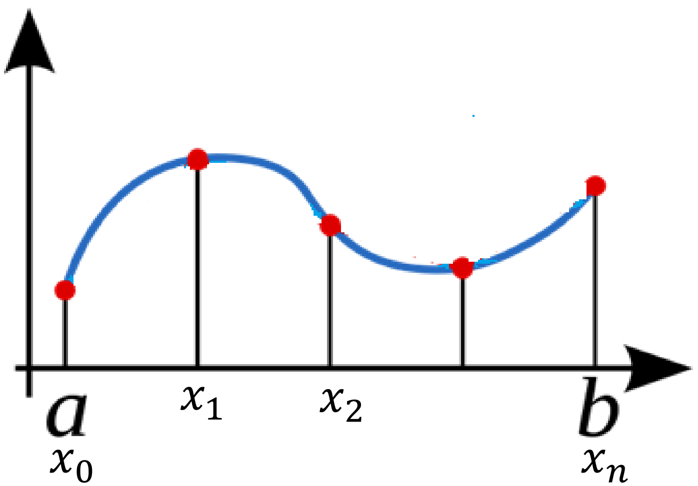
$$\exists c \in [a,b] \quad \left|T_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot|f''(c)|$$

Si $M_2 \geq \max\{|f''(x)|:\ x\in[a,b]\} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left|T_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2}$

**Regla de Simpson**

$f$: $R \to R$ función
$a, b \epsilon R, a < b$
$f$ continua en $[a, b]$

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ con la precisión deseada

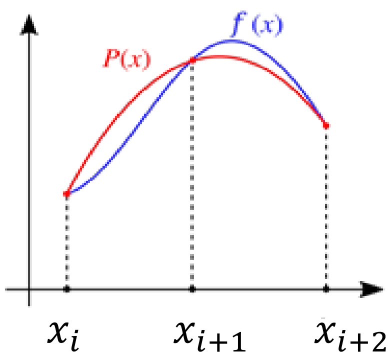



## $n$ par

$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ partición tal que:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h$$

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = a + i \cdot h, \qquad i = 0, \dots, n$$




$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n = \frac{h}{3}\left( f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) \right)$$

## Fórmula de la regla de Simpson para $n$ subintervalos

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n = \frac{b-a}{3n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right)=$$

$$=\frac{b-a}{3n}\left(\begin{array}{c} f(a)+f(b)+4(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1}))+ \\ 2(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})) \end{array}\right)$$

$$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0,\ldots,n$$

Atención: ***n* par**

**Error**

Si $f$ es cuatro veces derivable en $[a,b] \Longrightarrow$

$$\exists c \in [a,b] \quad \left|S_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot|f^{(4)}(c)|$$

Si $M_4 \geq \max\{|f^{(4)}(x)|:\ x \in [a,b]\} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left|S_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M_4}$