GIA-FIB-UPC
Curs 2023-2024

Mercè Mora
Departament de Matemàtiques - UPC

FONAMENTS MATEMÀTICS

1. Formalisme i demostracions (2-48)
2. Teoria de conjunts (49-64)
3. Combinatòria (78-98)
4. Grafs (99-154)

FORMALISME I DEMOSTRACIONS

Sumatoris i productoris (3-16)

Proposicions (17-28)

Predicats (29-37)

Demostracions (38-45)

Principi d'inducció (46-48)

Sumatoris i productoris

- $\sum_{i \in I} f(i)$ denota la suma de totes les expressions $f(i)$, on $i \in I$.

- $\prod_{i \in I} f(i)$ denota el producte de totes les expressions $f(i)$, on $i \in I$.

Sumatoris i productoris

- $\sum_{i=n}^{m} f(i)$, on m, n són enters tals que $n \leq m$, denota la suma de les expressions $f(n), f(n+1), \ldots, f(m)$, és a dir,

$$\sum_{i=n}^{m} f(i) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(m).$$

- $\prod_{i=n}^{m} f(i)$, on m, n són enters tals que $n \leq m$, denota el producte de les expressions $f(n), f(n+1), \ldots, f(m)$, és a dir,

$$\prod_{i=n}^{m} f(i) = f(n)f(n+1) \cdot \ldots \cdot f(m).$$

Sumatoris i productoris. Exemples

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$ $\qquad$ $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n)} = n$ $\qquad$ $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n)} = 1$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 3 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n)} = 3n$ $\qquad$ $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n)} = 3^n$

Sumatoris i productoris. Exemples

- $\displaystyle\sum_{i=5}^{9} i^2 = 25+36+49+64+81 = 255$

- $\displaystyle\prod_{\substack{p \text{ primer} \\ 2 \leq p \leq 10}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}$

- $\displaystyle\prod_{a\in\{2,3,5,7\}} \left(a^2/\sqrt{a}\right) = \left(4/\sqrt{2}\right)\left(9/\sqrt{3}\right)\left(25/\sqrt{5}\right)\left(49/\sqrt{7}\right) \approx 3043.189$

Sumatoris i productoris. Propietats

- $\displaystyle\sum_{i\in I}(f(i)+g(i)) = \sum_{i\in I} f(i) + \sum_{i\in I} g(i)$

- Si c no depen de i, aleshores $\displaystyle\sum_{i\in I} c\, f(i) = c \sum_{i\in I} f(i)$

Sumatoris i productoris. Exemple

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(1+i+2i^2) &= \sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}2i^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}i+2\sum_{i=1}^{n}i^2\end{aligned}$$

Sumatoris i productoris dobles

Es poden considerar expressions que depenen de 2 o més índexs:

- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in X} f(i,j)$ denota la suma de les expressions $f(i,j)$, on $(i,j)\in X$.
- $\displaystyle\prod_{(i,j)\in X} f(i,j)$ denota el producte de les expressions $f(i,j)$, on $(i,j)\in X$.
- $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f(i,j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} f(i,j)$
- $\displaystyle\prod_{i\in I}\prod_{j\in J} f(i,j) = \prod_{(i,j)\in I\times J} f(i,j)$

Sumatoris i productoris. Successions numèriques

- *Succesió numèrica*: llista ordenada de nombres.
- Notació: $(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$. Direm que a_n és el *terme enèsim* de la succesió.
- Exemple: $(\sqrt{n})_{n \geq 1} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots)$ és una succesió de nombres reals.

- *Sucessió recurrent*: succesió tal que, a partir d'un determinat terme, tots s'obtenen en funció dels termes anteriors.

- Exemple: La successió $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ es recurrent, ja que a partir del tercer terme, tots s'obtenen com a suma dels dos anteriors: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ per a tot $n \geq 3$.

Sumatoris i productoris. Progressió aritmètica

- Una *progressió aritmética* és una successió $(a_n)_n$ que satisfà $a_n = a_{n-1} + d$, on d és un valor constant que anomenem *diferència*

- Expressió del terme general:

$$a_n = a_0 + n\,d, \text{ si } n \geq 0$$
$$a_n = a_k + (n-k)\,d, \text{ si } n \geq k$$

- Suma de termes consecutius:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{a_m + a_n}{2}(n - m + 1).$$

Sumatoris i productoris. Progressió aritmètica

- Sumes i productes de termes consecutius d'algunes progressions aritmètiques:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\,a = a\,\frac{n(n+1)}{2} \qquad \prod_{i=1}^{n} i\,a = a^n\,n!$$

$$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} \qquad \prod_{i=m}^{n} i = \frac{n!}{(m-1)!}$$

Sumatoris i productoris. Progressió geomètrica

- Una progressió *geomètrica* és una successió $(a_n)_n$ que satisfà $a_n = r\, a_{n-1}$, on r és un valor constant que anomenem *raó*.

- Expressió del terme general:

  $a_n = a_0\, r^n$, si $n \geq 0$.

  $a_n = a_k\, r^{n-k}$, si $n \geq k$.

- Sumes i productes de termes consecutius:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_n\, r - a_1}{r-1}, \text{ si } r \neq 1;$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{a_n\, r - a_m}{r-1}, \text{ si } r \neq 1;$$

Sumatoris i productoris. Progressió geomètrica

- Sumes i productes de termes consecutius d'algunes progressions geomètriques:

$$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}, \text{ si } r \neq 1; \qquad \prod_{i=1}^{n} r^i = r^{n(n+1)/2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \text{ si } r \neq 1; \qquad \prod_{i=0}^{n} r^i = r^{n(n+1)/2}$$

$$\sum_{i=m}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \ r \neq 1; \qquad \prod_{i=m}^{n} r^i = r^{(n+m)(n-m+1)/2}$$

Sumatoris i productoris. Algunes sumes i productes

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} i\,j = \frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} i\,j = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

Formes proposicionals. Proposicions

- Una *proposició* és una afirmació que és certa o falsa, però no les dues coses alhora.

- Exemples. Són proposicions: "Avui plou", "El quadrat de 2 és 5". En canvi no són proposicions: "$x > 2$", "Has llegit aquest llibre?", "Mira!".

- Valors de veritat. Una proposició pren el *valor de veritat* 1 si és certa, i pren el valor de veritat 0 si és falsa. Una *variable proposicional* representa una proposició arbitrària, amb un valor de veritat no determinat. Normalment utilizarem les lletres p, q, r, ... per a representar-les.

Connectius lògics

Els connectius lògics s'utilizen per a formar noves proposicions a partir d'altres proposicions.

Ens referirem a una proposició genèrica amb una *variable proposicional*, que denotarem normalment amb les lletres p, q, r...

Les *formes proposicionals* estan formades per variables proposicionals i connectius.

Connectius lògics

- *Connectiu* $\neg$. Equival a *no* en llenguatge natural.
  La proposició $\neg p$ és certa si p és falsa, i és falsa, si p és certa.

- *Connectiu* $\wedge$. Equival a *i* en llenguatge natural.
  $p \wedge q$ és una proposició certa si p i q són certes, i és falsa si alguna de les dues és falsa.

- *Connectiu* $\vee$. Equival a *o* (inclussiu) en llenguatge natural.
  $p \vee q$ és una proposició certa si p és certa o si q és certa, i és falsa si les dues proposicions p i q són falses.

Connectius lògics

- *Connectiu* $\rightarrow$. Equival a *Si... aleshores...* en llenguatge natural.
  $p \rightarrow q$ és una proposició certa si p és falsa o bé q és certa, i és falsa si p és certa i q és falsa.

- *Connectiu* $\leftrightarrow$. Equival a ...si, i només si,... en llenguatge natural.
  $p \leftrightarrow q$ és una proposició certa si les dues són certes o bé si les dues són falses, i és falsa si una és certa i l'altra és falsa.

- *Connectiu* $\oplus$. Equival a *O bé ... o bé ...* (*o* exclussiva) en llenguatge natural.
  $p \oplus q$ és una proposició certa si una d'elles és falsa i l'altra és certa, i és falsa si les dues són certes o bé les dues són falses.

Taules de veritat

Proporcionen el valor de veritat de formes proposicionals obtingudes amb connectius lògics en funció dels valors de veritat de les variables proposicionals que hi intervenen.

Taules de veritat dels connectius $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Tautologíes i contradiccions. Equivalència lògica

- Una *tautologia* és una forma proposicional que pren sempre el valor de veritat 1.
  Per exemple, $p \vee \neg p$ és una tautologia.

- Una *contradicció* és una forma proposicional que pren sempre el valor de veritat 0.
  Per exemple, $p \wedge \neg p$ és una contradicció.
  La negació d'una contradicció és una tautologia.

- Dues formes proposicionals p i q són *equivalents* si prenen sempre el mateix valor de veritat, és a dir, si tenen la mateixa taula de veritat.
  Ho éscriurem $p \equiv q$ i equival a dir que $p \leftrightarrow q$ és una tautologia.

Algunes tautologies

(a) $p \vee \neg p$

(b) $p \to p \vee q$

(c) $p \wedge q \to p$

(d) $((p \to q) \wedge p) \to q$

(e) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

(f) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

(g) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

Algunes equivalències lògiques.

(a) $\neg(\neg p) \equiv p$ *(doble negació)*

(b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \;,\; \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ *(lleis de de Morgan)*

(c) $p \wedge q \equiv q \wedge p \;,\;\; p \vee q \equiv q \vee p$ *(commutativitat)*

(d) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \;,\;\; p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *(associativitat)*

(e) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \;,$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *(distributivitat)*

(f) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \;,\;\; \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

(g) $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ *(contrarecíproc)*

(h) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(i) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

(j) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r \equiv (p \wedge \neg r) \rightarrow q$

Tautologies i equivalències lògiques.

Si $\mathcal{T}$ representa una tautologia i $\mathcal{C}$ una contradicció (és a dir, $\mathcal{T}$ pren sempre el valor de veritat 1 i $\mathcal{C}$ pren sempre el valor de veritat 0), aleshores es compleix:

(a) $p \wedge \mathcal{T} \equiv p, \qquad p \wedge \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}$

(b) $p \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}, \qquad p \vee \mathcal{C} \equiv p$

(c) $\mathcal{T} \to p \equiv p, \qquad p \to \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$

(d) $\mathcal{C} \to p \equiv \mathcal{T}, \qquad p \to \mathcal{C} \equiv \neg p$

Recíproc i contrarecíproc

- La proposició *recíproca* de $p \to q$ és $q \to p$.
  Una proposició i la seva recíproca no són equivalents.

- La proposició *contrarecíproca* de $p \to q$ és $\neg q \to \neg p$.
  Una proposició i la seva contrarecíproca són equivalents.

Altres connectius lógics

Els connectius $|$ i $\downarrow$ están definits per les taules de veritat:

p	q	$p\|q$	$p \downarrow q$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

- Es compleix: $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$, $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.
- Tota proposició és equivalent a una proposició que conté només connectius d'un dels conjunts següents: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{|\}$, $\{\downarrow\}$.

Àlgebra de Boole

Un conjunt B amb

- una operació unària, que denotarem $\overline{}$;
- dues operacions binàries internes en B, que denotarem $\vee$ i $\wedge$;
- i dos elements de B que denotarem 0 i 1,

és una *àlgebra de Boole*, que denotarem $(B, \vee, \wedge, \overline{}, 0, 1)$, si es compleix:

(a) $x \vee 0 = x$, per a tot element $x \in B$
(0 és l'element neutre de $\vee$);
$x \wedge 1 = x$, per a tot element $x \in B$
(1 és l'element neutre de $\wedge$);

(b) $x \vee \overline{x} = 1$, per a tot element $x \in B$;
$x \wedge \overline{x} = 0$, per a tot element $x \in B$; *(complementari)*

(c) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$ *(commutativitat)*;
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *(associativitat)*;

(d) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(distributivitat).

Si $\mathcal{P}$ representa el conjunt de totes les proposicions, aleshores $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, \neg, \mathcal{C}, \mathcal{T})$ és una àlgebra de Boole.

Predicats i quantificadors. Predicats

- Un *predicat* és una afirmació que depèn d'una o més variables. El denotarem $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on $x_1, \ldots, x_n$ són les variables.

- L'*univers de discurs* és el conjunt no buit de valors que poden prendre les variables del predicat.

- Exemple. Si l'univers de discurs és el conjunt dels nombres enters, "x és un quadrat perfecte" és un predicat que depèn de una variable; "$x \leq y + z$ " és un predicat que depèn de tres variables.

Predicats i quantificadors

Si $P(x)$ és un predicat amb univers de discurs U.

- $\forall x P(x)$ equival a "per a tot element x de U es compleix $P(x)$"
- $\exists x P(x)$ equival a "existeix un element x de U tal que $P(x)$"
- $\exists! x P(x)$ equival a "existeix un únic element x de U tal que $P(x)$"

Quantificadors

Per exemple, si $U = \{a, b, c\}$, aleshores:

- $\forall x P(x)$ equival a $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$
- $\exists x P(x)$ equival a $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$
- $\exists ! x P(x)$ equival a: $(P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (\neg P(a) \wedge P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge P(c))$

Quantificadors i pertinença a conjunts

- $(\forall x \in X)\, P(x)$ denota $\forall x(x \in X \to P(x))$.
- $(\exists x \in X)\, P(x)$ denota $\exists x(x \in X \wedge P(x))$.
- $(\forall x, y \in X)\, P(x, y)$ denota $\forall x \forall y((x \in X \wedge y \in X) \to P(x, y))$.
- $(\exists x, y \in X)\, P(x, y)$ denota $\exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge P(x, y))$.

Exemples de formalització de predicats

Representem els conjunts dels nombres reals, enters i naturals per $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$, respectivament. Si l'univers de discurs és $U = \mathbb{R}$, aleshores podem expressar:

- El quadrat d'un nombre real qualsevol és no negatiu: $\forall x(x^2 \geq 0)$.
- La suma de dos enters qualssevol és enter: $\forall x \forall y((x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}) \rightarrow x + y \in \mathbb{Z})$.
- Existeix un nombre enter tal que el seu quadrat és 2: $\exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 2)$.
- Existeix un únic nombre natural tal que el seu quadrat és 4: $\exists ! x(x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 4)$.

Proposicions i predicats

Un predicat amb totes les variables quantificades o bé substituides per valors concrets de l'univers de discurs és una proposició. En aquest cas,

- La proposició $\forall x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a tots els elements de U.
- La proposició $\exists x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a almenys un element de U.
- La proposició $\exists! x P(x)$ és certa si el predicat $P(x)$ és cert per a un i només un element de U.

Expressions amb quantificadors

- Commutativitat.

    (1) $\forall x \forall y P(x, y)$ és equivalent a $\forall y \forall x P(x, y)$.

    (2) $\exists x \exists y P(x, y)$ és equivalent a $\exists y \exists x P(x, y)$.

    (3) En general, l'expressió $\forall x \exists y P(x, y)$ i l'expressió $\exists y \forall x P(x, y)$ no són equivalents.

    Concretament, sempre és pot deduir que $\forall x \exists y P(x, y)$ a partir de $\exists y \forall x P(x, y)$,

    però en general no és pot deduir $\exists y \forall x P(x, y)$ a partir de $\forall x \exists y P(x, y)$.

Expressions amb quantificadors

- Negació.

  (1) $\neg\forall x P(x)$ és equivalent a $\exists x \neg P(x)$.

  (2) $\neg\exists x P(x)$ és equivalent a $\forall x \neg P(x)$.

Expressions amb quantificadors

- Negació i pertinença a conjunts. Sigui X un subconjunt de l'univers de discurs.

(1) $\neg(\forall x \in X)\, P(x)$ és equivalent a $(\exists x \in X)\neg P(x)$.

(2) $\neg(\exists x \in X)\, P(x)$ és equivalent a $(\forall x \in X)\neg P(x)$.

(3) $\neg(\forall x, y \in X)\, P(x, y)$ és equivalent a $(\exists x, y \in X)\, \neg P(x, y)$.

(4) $\neg(\exists x, y \in X)\, P(x, y)$ és equivalent a $(\forall x, y \in X)\, \neg P(x, y)$.

Demostracions

- Un *axioma* és una proposició que assumim certa en una teoria determinada.
- Un *teorema* és una afirmació que és pot provar que és certa en una teoria determinada.
- Una *demostració* és un argument per a provar un teorema.
- En una demostració s'utilizen regles de inferència que deriven de tautologies.
- Escriurem $p \Rightarrow q$ si es pot deduir la veracitat de q a partir de la veracitat de p, és a dir, si $p \rightarrow q$ és certa.

Regles d'inferència

- $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ *(sil·logisme hipotètic)*
  De $p \to q$ i $q \to r$ certes, podem deduir que $p \to r$ és certa

- $p \to p \vee q$ *(addició)*
  De p certa, podem deduir $p \vee q$ certa

- $p \wedge q \to p$, $p \wedge q \to q$ *(simplificació)*
  De $p \wedge q$ certa, podem deduir que p és certa i que q és certa

Regles d'inferència

- $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ *(modus ponens)*
  De $p \rightarrow q$ i p certes, podem deduir que q és certa
- $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ *(modus tollens)*
  De $p \rightarrow q$ i $\neg q$ certes, podem deduir que p és certa
- $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ *(sil·logisme disjuntiu)*
  De $p \vee q$ i $\neg p$ certes, podem deduir que q és certa

Errors més freqüents (*fal·làcies*)

- De $p \to q$ i q certes NO es pot deduir que p sigui certa.
- De $p \to q$ i $\neg p$ certes NO es pot deduir que $\neg q$ sigui certa.

Mètodes de demostració

Demostració de $p \to q$.

- *Demostració directa.* Deduir q a partir de p utilizant regles de inferència.
- *Contrarecíproc.* Equival a demostrar $\neg q \to \neg p$.
- *Reducció a l'absurd.* Equival a deduir una contradicció a partir de $p \wedge \neg q$.

Mètodes de demostració

- Demostrar $p \to (q \wedge r)$ és equivalent a demostrar $p \to q$ i $p \to r$.
- Demostrar $p \to (q \vee r)$ és equivalent a demostrar $(p \wedge \neg q) \to r$.
- Demostrar $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r) \to q$ és equivalent a demostrar $p_1 \to q$ i $p_2 \to q$ i ... i $p_r \to q$ (*demostració per casos*).
- Demostrar $p \leftrightarrow q$ és equivalent a demostrar $p \to q$ i $q \to p$.

Mètodes de demostració

- Demostrar que les condicions $p_1, \ldots, p_n$ són equivalents es pot fer de diverses maneres. Per exemple, és equivalent a demostrar
$$p_1 \leftrightarrow p_2,\ p_2 \leftrightarrow p_3,\ \ldots,\ p_{n-1} \leftrightarrow p_n$$
o bé
$$p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ \ldots,\ p_{n-1} \to p_n\ ,\ p_n \to p_1.$$

Demostracions i quantificadors

- *Demostració de* $\forall x P(x)$.

  -Fer una demostració genèrica de $P(x)$, és a dir, que sigui vàlida per a qualsevol valor de x.

  -Reducció a l'absurd: arribar a una contradicció a partir de $\exists x \neg P(x)$.

- *Demostració de* $\exists x P(x)$.

  -Trobar un element concret c de l'univers de discurs tal que la proposició $P(c)$ sigui certa.

  -Reducció a l'absurd: arribar a contradicció a partir de $\forall x \neg P(x)$.

- *Demostració de* $\neg \forall x P(x)$. Equival a demostrar $\exists x \neg P(x)$. En aquest cas, si c és un element tal que la proposició $\neg P(c)$ sigui certa, direm que c es un *contraexemple* de $\forall x P(x)$.

- *Demostració de* $\neg \exists x P(x)$. Equival a demostrar $\forall x \neg P(x)$.

Principi de inducció

Versió 1

Considerem una propietat $P(n)$ que depèn de n, on $n \in \mathbb{Z}$. Sigui $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n \geq n_0$, de $P(n)$ certa, podem deduir que $P(n+1)$ és certa.

Principi de inducció

Versió 2

Considerem una propietat $P(n)$ que depèn de n, on $n \in \mathbb{Z}$. Sigui $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n > n_0$, de $P(n-1)$ certa, podem deduir que $P(n)$ és certa.

Principi de inducció

Versió 3: inducció completa

Considerem una propietat $P(n)$ que depèn de n, on $n \in \mathbb{Z}$. Sigui $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Podem afirmar que $P(n)$ és certa per a tot $n \geq n_0$ si és compleixen les dues condicions següents:

I) $P(n_0)$ és certa;

II) per a tot $n > n_0$, de $P(k)$ certa per a tot k tal que $n_0 \leq k < n$, podem deduir que $P(n)$ és certa.

TEORIA DE CONJUNTS

Conjunts (50-64)

Relacions d'equivalència (65-68)

Aplicacions (70-77)

Conjunts

- *Conjunt*: col·lecció d'objectes que anomenem *elements* del conjunt.

- Notació: si un element a és del conjunt A escriurem $a \in A$. Direm que *a pertany* al conjunt A o bé que A *conté a*. Si a no és un element del conjunt A, escriurem $a \notin A$.

- Descripció dels elements d'un conjunt.

  (1) Per enumeració: es dona tots els elements del conjunt. Escriurem els elements entre claus, per exemple: $A = \{1, -15, *, 1/3, x\}$.

  (2) Per comprensió: es dona una propietat que caracteritza els elements del conjunt. Per exemple: $A = \{x : x \text{ és un enter parell}\}$.

Conjunts

- Observació: en un conjunt no hi ha elements repetits.
- Dos conjunts són iguals si tenen els mateixos elements.
- Conjunt *buit*: conjunt que no conté cap element.
  El denotarem $\varnothing$ o bé $\{\}$.
- El *cardinal* d'un conjunt A és el nombre d'elements de A. El denotarem $|A|$ o bé $\#A$. Si un conjunt A té n elements, direm que A és un *n-conjunt*.

Conjunts numèrics

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, conjunt dels nombres *naturals*.
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$, conjunt dels nombres naturals *positius*.
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, si n és un nombre natural, $n \geq 1$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, conjunt dels nombres *enters*.
- $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p\,,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\,\}$, conjunt dels nombres *racionals*.
- $\mathbb{R}$ conjunt format per tots els nombres *reals*.
- $\mathbb{C}$ conjunt format per tots els nombres *complexos*.

Subconjunts

- B és un *subconjunt* de A si tot element de B és de A.
- Notació: escriurem $B \subseteq A$ (o bé $B \subset A$) si B és subconjunt de A; $B \nsubseteq A$ si B no és subconjunt de A; $B \subsetneq A$ si $B \subset A$ i $A \neq B$. Es compleix $B \subset A$ si i només si $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$.
- Observacions.

  (1) $\varnothing \subset A$, per a tot conjunt A.

  (2) $A = B \iff A \subset B \text{ i } B \subset A \iff (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$.

Subconjunts

- *Conjunt de les parts* d'un conjunt A: $\mathcal{P}(A) = \{B \, : \, B \subset A\}$.
- Observació. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ i $A \in \mathcal{P}(A)$, per a tot conjunt A.
- Propietat. Si A és un conjunt finit, aleshores $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Operacions

Sigui X un conjunt i A, B subconjunts de X.

- La *unió* de A i B és el conjunt
  $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$.

- La *intersecció* de A i B és el conjunt
  $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ i } x \in B\}$.
  Dos conjunts A i B són *disjunts* si $A \cap B = \varnothing$.

Operacions

Sigui X un conjunt i A, B subconjunts de X.

- La *diferència* de A i B és el conjunt $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ i } x \notin B\}$.
  També el denotarem $A - B$.

- El *complementari* de A en X és el conjunt $C_X(A) = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$.
  També el denotarem $\overline{A}$ o bé A^c, si no hi ha confusió respecte al conjunt X.

- La *diferència simètrica* dels conjunts A i B és el conjunt $A \oplus B = \{\, x \,|\, x \in A \cup B \text{ i } x \notin A \cap B \,\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
  Es denota també $A \triangle B$

Cardinals

- Si A i B són conjunts finits disjunts, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Si A és finit, aleshores $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
- Si X és finit i $A \subseteq X$, aleshores $|C_X(A)| = |X| - |A|$.
- Si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

Representació binària de subconjunts. Taules de pertinença

- Si $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, associem a cada subconjunt $A \subset U$ la paraula binària $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de longitud n tal que
$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \in A, \\ 0, & \text{si } x_i \notin A. \end{cases}$$
Direm que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és la *representació binària* de A.

- La representació binària de U és $(1, 1, \ldots, 1)$ i la representació binària de $\varnothing$ és $(0, 0, \ldots, 0)$.

Representació binària de subconjunts. Taules de pertinença

- Si les representacions binàries de $A, B \subset U$ són respectivament $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, aleshores podem trobar la representació binària de les operacions amb conjunts utilitzant taules de pertinença:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A} \cup B$	$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$	$A \setminus B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0

Propietats de la unió i la intersecció

Si A, B, C són subconjunts d'un conjunt U, aleshores es satisfà:

$$\begin{array}{ll}
A \cap A = A & \textit{(idempotència)} \\
A \cup A = A & \\[1ex]
A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cap U = A & \textit{(absorció)} \\
A \cup \emptyset = A,\ A \cup U = U & \\[1ex]
A \cap B = B \cap A & \textit{(commutativitat)} \\
A \cup B = B \cup A & \\[1ex]
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & \textit{(associativitat)} \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & \\[1ex]
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & \textit{(distributivitat)} \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) &
\end{array}$$

Propietats de la diferència i del complementari

Diferència.

$$A \setminus \emptyset = A \qquad A \setminus B \subseteq A$$
$$A \setminus U = \emptyset \qquad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$
$$A \setminus A = \emptyset$$

Complementari respecte a U.

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad A \cup \overline{A} = U$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Àlgebra de Boole del conjunt de les parts amb la unió i la intersecció

- Si U és un conjunt, aleshores $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, U)$ és una àlgebra de Boole.

Producte cartesià

- *Parell ordenat*: element de la forma (a, b).
- Igualtat de parells ordenats:
  $(a, b) = (c, d)$ si i només si $a = c$ i $b = d$.
- *Producte cartesià* dels conjunts A i B:
  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.
- Propietat. Si A i B són conjunts finits, aleshores
  $|A \times B| = |A||B|$.

Producte cartesià

- *n-pla ordenada*: element de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Igualtat de n-ples ordenades:
  $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.
- *Producte cartesià* dels conjunts $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
  $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.
- Propietat. Si $A_1, \ldots, A_n$ són conjunts finits, aleshores
  $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \ldots |A_n|$.

Relacions binàries

- Una *relació binària* R en un conjunt A és un subconjunt R del producte cartesià $A \times A$. Si $(a, b) \in R$ aleshores direm que l'element a *està relacionat* amb l'element b. Ho escriurem aRb.

- Si R és una relació binària en un conjunt A, direm que la relació R és:

  (1) *Reflexiva*: si per a tot $a \in A$ es té que aRa.

  (2) *Simètrica*: si per a tot $a, b \in A$ amb aRb es té que bRa.

  (3) *Antisimètrica*: si $a, b \in A$ són tals que aRb i bRa aleshores $a = b$.

  (4) *Transitiva*: si per a tot $a, b, c \in A$ amb aRb i amb bRc es té que aRc.

Relacions d'equivalència

- Una *relació d'equivalència* en un conjunt A és una relació binària reflexiva, simètrica i transitiva.
  Notacions habituals: R, $\sim$, $\equiv$.

- *Classe d'equivalència* d'un element $a \in A$ per la relació d'equivalència $\sim$, que denotarem $\overline{a}$ (o bé $[a]$):
  és el subconjunt de A format pels elements relacionats amb a, és a dir, $\overline{a} = \{b \in A \,:\, b \sim a\}$.
  Qualsevol element de $\overline{a}$ és un *representant* de la classe d'equivalència $\overline{a}$.

- El *conjunt quocient* $A/_\sim$ de A per la relació d'equivalència $\sim$ és el conjunt que té per elements les classes d'equivalència del elements de A per la relació $\sim$.
  És a dir $A/_\sim = \{\overline{a} : a \in A\}$.

Propietats de les classes d'equivalència

- Si $\sim$ és una relació d'equivalència en un conjunt A, es compleix:

  (a) Si $a \in A$ aleshores $\varnothing \neq \overline{a} \subseteq A$ i $a \in \overline{a}$.

  (b) Si $a \in A$ i $b \in \overline{a}$, aleshores $\overline{a} = \overline{b}$.

  (c) Si $a \in A$ i $b \notin \overline{a}$, aleshores $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$.

  (d) Si $a, b \in A$ aleshores les condicions següents són equivalents:

    i) $a \sim b$
    ii) $\overline{a} = \overline{b}$
    iii) $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$
    iv) per a tot $x \in \overline{a}$ i per a tot $y \in \overline{b}$ es compleix $x \sim y$.

Conjunt quocient i particions

Una *partició* d'un conjunt A és una col·lecció de subconjunts no buits $A_1, \dots, A_r$ de A tals que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

- Si A és un conjunt no buit i $\sim$ és una relació d'equivalència en A, aleshores $A/_\sim \subseteq \mathcal{P}(A)$ i els elements del conjunt quocient $A/_\sim$ determinen una partició de A.

- Si $\{A_1, \dots, A_r\}$ és una partició del conjunt A aleshores existeix una única relació d'equivalència $\sim$ en A tal que el seu conjunt quocient és $A/_\sim = \{A_1, \dots, A_r\}$.

Aplicacions

- Una *aplicació* f entre dos conjunts no buits A, B és una correspondència que a cada element $a \in A$ li assigna un únic element de $b \in B$, que denotarem $f(a)$.
  Direm que $f(a)$ és la *imatge* de a per f.
  Notació: $f\colon A \to B$.

- Observem que per a definir una aplicació cal donar dos conjunts no buits A i B, i una imatge $f(a) \in B$ per a cada element de A.
  Direm que A és el *domini* o *conjunt de sortida* i B és el *conjunt d'arribada*.
  Si $f(a) = b$, és a dir, si b és la imatge de a per f, direm que a és *una antiimatge* de b per f.

- Dues aplicacions $f\colon A \to B$ i $g\colon A' \to B'$ són iguals si, i només si, $A = A'$, $B = B'$ i, per a tot element de A, es compleix $f(a) = g(a)$.

Imatges i antiimatges

- Si $f: A \to B$ és una aplicació, tot element d'A té una i només una imatge, en canvi els elements de B no necessàriament tenen antiimatge i, si en tenen, en poden tenir més d'una.

- Si $f: A \to B$ és una aplicació, $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, aleshores el *conjunt imatge* de A' per f és

$$f(A') = \{f(a) \colon a \in A'\} \subseteq B$$

i el *conjunt antiimatge* de B' per f és

$$f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

Si $B' = \{b\}$ escriurem $f^{-1}(b)$ en lloc de $f^{-1}(\{b\})$.

Aplicacions injectives

- Una aplicació $f\colon A \to B$ és *injectiva* si elements diferents tenen imatges diferents.

  Les condicions següents són equivalents:

  (1) $f\colon A \to B$ és injectiva;

  (2) $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$, $\forall a, a' \in A$;

  (3) $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$, $\forall a, a' \in A$;

  (4) $|f^{-1}(b)| \leq 1$, $\forall b \in B$.

Aplicacions exhaustives

- Una aplicació $f: A \to B$ és *exhaustiva* si tot element $b \in B$ té, com a mínim, una antiimatge per f.

  Les condicions següents són equivalents:

  (1) $f: A \to B$ és exhaustiva;

  (2) $(\forall b \in B)(\exists a \in A) f(a) = b$;

  (3) $f(A) = B$;

  (4) $|f^{-1}(b)| \geq 1, \forall b \in B$.

Aplicacions bijectives

- Una aplicació $f: A \to B$ és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva.

  Les condicions següents són equivalents:

  (1) $f: A \to B$ és bijectiva;

  (2) $(\forall b \in B)(\exists! a \in A) f(a) = b$;

  (3) $|f^{-1}(b)| = 1, \ \forall b \in B$.

Composició d'aplicacions. Aplicació identitat. Inversa

- Siguin $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dues aplicacions. Es defineix la *composició* de les aplicacions f i g, que denotarem $g \circ f$, com l'aplicació $g \circ f\colon A \to C$, on $(g \circ f)(a) = (g(f(a))$ per a tot $a \in A$.

- Sigui A un conjunt no buit. La *aplicació identitat* en el conjunt A és l'aplicació $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ definida per $\mathrm{Id}_A(a) = a$, per a tot $a \in A$.

- Sigui $f\colon A \to B$ una aplicació. Es diu que una aplicació $g\colon B \to A$ és la *inversa* de f si es compleix que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ i que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
  Si existeix l'aplicació inversa de f, aleshores aquesta és única i la denotarem per f^{-1}.

Composició d'aplicacions i inversa. Propietats

- Una aplicació f té inversa si, i només si, f és bijectiva.

- La composició d'aplicacions bijectives és bijectiva.

Algunes funcions

- *Part entera*. Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores

  $\lfloor x \rfloor$ denota l'enter menor o igual que x més pròxim a x,
  és a dir, $\lfloor x \rfloor = n$ si $n \in \mathbb{Z}$ i es compleix $n \leq x < n+1$
  Direm que $\lfloor x \rfloor$ és la *part entera inferior* o simplement la *part entera* de x

  $\lceil x \rceil$ denota l'enter més gran o igual que x més pròxim a x,
  és a dir, $\lceil x \rceil = n$ si $n \in \mathbb{Z}$ i es compleix $n-1 < x \leq n$
  Direm que $\lceil x \rceil$ és la *part entera superior* de x.

Algunes funcions

- Considerem les funcions definides de $\mathbb{N}^+$ en $\mathbb{R}$ per

  $f(n) = \log n$;
  $f(n) = n^\alpha$, si $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
  $f(n) = a^n$, si $a > 1$;
  $f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$;
  $f(n) = n^n$.

  Per a n suficientment gran, es compleix

$$\log n \leq n^\alpha \leq a^n \leq n! \leq n^n$$

$$n^\alpha \leq n^\beta, \text{ si } 1 < \alpha < \beta$$

$$a^n \leq b^n, \text{ si } 0 < a < b$$

COMBINATÒRIA

Principis bàsics d'enumeració (79-80)

Seleccions (81-92)

- Seleccions ordenades amb repetició (82-83)
- Seleccions ordenades sense repetició (84-85)
- Seleccions no ordenades sense repetició. Nombres binomials (86-90)
- Seleccions no ordenades amb repetició (91-92)

Nombres multinomials (93-94)

Principi d'inclusió-exclusió (95-98)

Principis bàsics d'enumeració

- *Principi de les caselles*. Si distribuïm n objectes en m capses i $n > m$, almenys una capsa contindrà dos o més objectes.

- *Principi de les caselles generalitzat*. Si distribuïm n objectes en m capses i $n > rm$, almenys una capsa contindrà $r + 1$ o més objectes.

- *Principi de doble recompte.* Considerem dos conjunts finits A, B i un subconjunt S, $S \subseteq A \times B$. Si per a tot $(a, b) \in A \times B$ definim

  $$f_a(S) = |\{b \in B : (a, b) \in S\}|, \quad c_b(S) = |\{a \in A : (a, b) \in S\}|$$

  aleshores
  $$|S| = \sum_{a \in A} f_a(S) = \sum_{b \in B} c_b(S).$$

Principis bàsics d'enumeració. Exemples

1) A un conjunt de 13 persones, almenys dues han nascut el mateix mes.
2) A un conjunt de 57 persones, almenys 5 han nascut el mateix mes
3) Si prenem 5 punts d'un triangle equilàter de costat 1, almenys n'hi ha un parell que disten com a molt $1/2$.
4) Si A i B són conjunts finits tals que $|A| > |B|$, aleshores una aplicació $f : A \to B$ no pot ser injectiva.
5) (Erdös-Szekeres, 1935) Tota successió de $n^2 + 1$ nombres reals diferents conté una subsuccessió estrictament creixent de longitud $n + 1$ o bé una subsuccessió estrictament decreixent de longitud $n + 1$.
6) Si a una classe de 57 estudiants cada noi coneix exactament 8 noies i cada noia coneix exactament 11 nois, aleshores hi ha 33 nois i 24 noies.
7) No és possible trobar una col.lecció de subconjunts de $\{1, 2, \dots, 8\}$ de forma que cada un tingui tres elements i cada element de $\{1, 2, \dots, 8\}$ pertanyi exactament a cinc d'aquests subconjunts.

Seccions

En aquesta secció comptarem el nombre de maneres de triar k elements d'un conjunt de n elements amb dos criteris addicionals:

- si l'ordre en que triem els elements és rellevant o no,
- si es poden repetir o no els elements.

Identificarem aquestes seleccions amb altres conceptes matemàtics.

Seleccions ordenades amb repetició

- Una *k-permutació amb repetició* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements no necessàriament diferents de A.

- Notació. $PR(n, k)$ denota el nombre de k-permutacions amb repetició d'un n-conjunt.

- Càlcul. $PR(n, k) = n^k$, si $k \geq 1$.

Seleccions ordenades amb repetició. Exemples

1) Hi ha 10^9 possibles números de telèfon de 9 xifres.
2) El nombre d'aplicacions $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és n^k.
3) El nombre de paraules binàries de longitud n és 2^n.
4) El nombre de subconjunts d'un n-conjunt és 2^n.
5) El nombre de paraules de longitud k que es poden formar amb un alfabet de n lletres és n^k.
6) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades és n^k.

Seleccions ordenades sense repetició

- Una *k-permutació* d'un n-conjunt A és una selecció ordenada de k elements diferents de A.

- Notació. $P(n,k)$ denota el nombre de k-permutacions d'un n-conjunt.

- Càlcul.
  $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$, si $1 \leq k \leq n$; $P(n,k) = 0$, si $k > n$.

- Cas particular: $n = k$. Una n-permutació d'un n-conjunt A s'anomena *permutació* de A. El nombre de permutacions d'un n-conjunt és $P(n,n) = n^{\underline{n}} = n! = P(n)$. Podem identificar una permutació del conjunt A amb una aplicació bijectiva $\sigma : A \to A$.

Seleccions ordenades sense repetició. Exemples

1) El nombre de maneres d'ordenar les cartes d'una baralla amb 48 cartes és

$$\begin{aligned}48! =&12413915592536072670862289047373 \\ &37503852148635467776000000000000 \\ \approx&1.241 \times 10^{61}.\end{aligned}$$

2) El nombre d'aplicacions injectives $f : A \to B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $P(n, k) = n^{\underline{k}}$.

3) El nombre d'aplicacions bijectives $f : A \to B$, on $|A| = |B| = n$, és $P(n, n) = n!$.

4) El nombre de paraules de longitud k amb totes les lletres diferents que es poden formar amb un alfabet de n lletres és $P(n, k) = n^{\underline{k}}$.

5) El nombre de maneres de repartir k boles numerades en n capses numerades de manera que hi hagi com a molt una bola a cada capsa és $P(n, k) = n^{\underline{k}}$.

Seleccions no ordenades sense repetició

- Una *k-combinació* d'un n-conjunt A és una selecció de k elements diferents d'A en la qual no tenim en compte l'ordre dels elements. És a dir, una k-combinació de A és un k-subconjunt d'A.

- Notació. $C(n,k)$ o bé $\binom{n}{k}$ denota el nombre de k-subconjunts d'un n-conjunt. Els nombres $\binom{n}{k}$ s'anomenen *nombres binomials*.
- Càlcul. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, si $0 \le k \le n$.

Seleccions no ordenades sense repetició. Exemples

1) El nombre de possibles apostes a la loteria primitiva és $\binom{49}{6} = 13983816$.
2) Amb una baralla de 48 cartes es poden formar $\binom{48}{5} = 1712304$ mans de 5 cartes.
3) El nombre de paraules binàries de longitud n que contenen exactament k zeros és $\binom{n}{k}$.
4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que a cada capsa hi hagi com a molt una bola és $\binom{n}{k}$.
5) El nombre de k-eples $(i_1, \ldots, i_k)$ d'enters tals que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ és $\binom{n}{k}$.
6) El nombre de camins de longitud mínima del punt de coordenades $(0, 0)$ al punt (m, n) que utilitzen només segments horitzontals i verticals de longitud 1 és $\binom{m+n}{m}$.

Propietats dels nombres binomials

(1) Per a tot $n \geq 0$, $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(2) Per a tot $n \geq 2$, si $1 \leq k \leq n-1$, aleshores

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

L'equació recurrent anterior ens permet construir el triangle de Tartaglia o de Pascal, on cada fila conté els nombres binomials $\binom{n}{k}$ amb n fix i $0 \leq k \leq n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

(3) *Binomi de Newton*. Per a tot enter n, $n \geq 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Propietats dels nombres binomials

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, si $n \geq 0$.

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, si $n \geq 0$.

(6) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, si $n \geq k \geq 0$.

(7) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, si $n \geq k \geq 1$.

(8) $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, si $n \geq k \geq r \geq 0$.

Propietats dels nombres binomials

(9) $\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}$, si $n \geq k+1 \geq 2$.

(10) $\displaystyle\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r}{r} = \binom{n+k+1}{k}$, per a n, k enters no negatius

(addició en paral·lel)

(11) $\displaystyle\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$, per a n, k enters no negatius

(addició superior)

(12) $\displaystyle\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$, si $n+m \geq k$

(Identitat de Vandermonde)

Seleccions no ordenades amb repetició

- Una *k-combinació amb repetició* o *k-multiconjunt* d'un n-conjunt A, és una selecció no ordenada de k elements de A no necessàriament diferents.

- Notació. $CR(n,k)$ o bé $\left(\binom{n}{k}\right)$ denota el nombre de k-combinacions amb repetició d'un n-conjunt, és a dir, el nombre de k-multiconjunts d'un n-conjunt. Escriurem

$$M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$$

el k-multiconjunt de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ que conté k_i còpies de l'element a_i, per a tot $i \in [n]$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$.

- Càlcul. $CR(n,k) = \left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$, per a $n \geq 1$, $k \geq 0$.

Seleccions no ordenades amb repetició. Exemples

1) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

2) El nombre de solucions enteres no negatives de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ tals que $x_i \geq r_i$, per a tot $i \in [n]$, amb $\sum_{i=1}^{n} r_i = s \leq k$, és $CR(n, k-s) = \binom{n+k-s-1}{k-s} = \binom{n+k-1-s}{n-1}$.

3) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

4) El nombre de maneres de repartir k boles indistingibles en n capses numerades de manera que cap capsa quedi buida és $CR(n, k-n) = \binom{k-1}{k-n}$.

5) El nombre de k-eples $(i_1, \ldots, i_k)$ d'enters tals que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ és $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Nombres multinomials

- Una *permutació d'un k-multiconjunt* és una ordenació dels elements del multiconjunt.

- Notació. $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ denota el nombre de permutacions d'un k-multiconjunt $M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$, on $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$.

  Els nombres $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ s'anomenen *nombres multinomials*.

- Càlcul. Si k, $k_1, \ldots, k_n$ són enters no negatius tals que $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, aleshores $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$.

Nombres multinomials

- Exemple. Amb les lletres de la paraula MISSISSIPPI es poden formar $\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$ paraules.

- *Teorema del multinomi.* Per a tot enter m, $m \geq 0$, es satisfà

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^m = \sum_{m_1+\cdots+m_r=m} \binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_r} a_1^{m_1} \ldots a_r^{m_r}$$

Principi d'inclusió-exclusió

- Considerem una família de conjunts finits, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una *k-intersecció* dels conjunts $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és qualsevol conjunt de la forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ amb $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

  Definim

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

  és a dir,
  α_k és la suma dels cardinals de totes les k-interseccions.

Principi d'inclusió-exclusió

- *Principi d'inclusió-exclusió.* Per a qualsevol família de conjunts finits $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k.$$

- Exemple. El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Desarranjaments

- Un *desarranjament* de $[n]$ és qualsevol permutació σ de $[n]$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in [n]$.

- Notació. D_n denota el nombre de desarranjaments de $[n]$.

- Càlcul. El nombre D_n de desarranjaments de $[n]$ és

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Desarranjaments

- La probabilitat de que una permutació qualsevol de $[n]$ sigui un desarranjament, suposant que totes les permutacions són equiprobables, és

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Quan n tendeix a infinit, aquest valor tendeix a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0.367879.$$

És a dir, la proporció de desarranjaments en el conjunt de permutacions de $[n]$ és del $36,78\%$.

TEORIA DE GRAFS

Conceptes bàsics (100-129)
Recorreguts, connexió, distància (130-146)
Arbres (147-154)

Conceptes bàsics de grafs

• Un *graf* G, $G = (V, A)$, està format per dos conjunts disjunts V i A tals que V és finit no buit i tot element de A és un subconjunt de cardinal 2 de V.

- Els elements de V s'anomenen *vèrtexs* i els elements de A, *arestes*. Si $\{u, v\} = a \in A$, escriurem $a = uv$.
- Si $a = uv$ és una aresta de G, direm que els vèrtexs u, v són *adjacents* i que el vèrtex u (o bé v) i l'aresta a són *incidents*. Si u, v són adjacents, ho escriurem també $u \sim v$.

Conceptes bàsics de grafs

- L'*ordre* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs del graf, $|V|$.
- La *mida* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre d'arestes del graf, $|A|$.
- Observem que dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ són iguals si, i només si, $V_1 = V_2$ i $A_1 = A_2$.

Conceptes bàsics

- Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- El nombre de grafs diferents amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i mida m és

$$\binom{n(n-1)/2}{m}.$$

- El nombre de grafs diferents amb conjunt de vèrtexs $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ és

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Variants

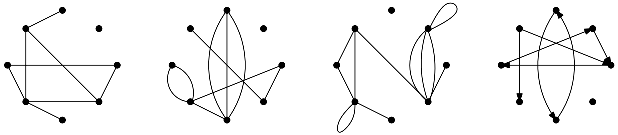
- *Multigraf:* admet arestes múltiples (més d'una aresta connectant dos vèrtexs).
- *Pseudograf:* admet llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix) i arestes múltiples.
- *Digraf, graf dirigit:* es tenen *arcs* enlloc d'arestes. Un *arc* és un parell ordenat de vèrtexs (és a dir, una aresta orientada).
- *Graf/digraf ponderat:* assignem pesos a les arestes/arcs.

Representació d'un graf

Normalment representem un graf amb un punt del pla per a cada vèrtex i una línia contínua entre dos vèrtexs, si hi ha una aresta entre els dos vèrtexs.

També es poden considerar representacions a l'espai tridimensional, o bé a altres superfícies. De manera semblant es poden representar altres variants (multigrafs, digrafs,...).

Exemples de les variants de graf:



graf *multigraf* *pseudograf* *digraf*

Graus

Si $G = (V, A)$ és un graf i $u \in V$,

- el *grau* de u és el nombre d'arestes incidents a u,
  $g(u) = |\{a \in A : u, a \text{ són incidents}\}|$;

- el *grau mínim* de G, $\delta(G)$, és el mínim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\delta(G) = \min\{\, g(u) \mid u \in V\}$;

- el *grau màxim* de G, $\Delta(G)$, és el màxim de tots els graus dels vèrtexs de G, és a dir, $\Delta(G) = \max\{\, g(u) \mid u \in V\}$;

- direm que G és regular si tots els vèrtexs tenen el mateix grau. Per tant, G és regular si i només si $\delta(G) = \Delta(G)$.
  Si G és regular i tots els vèrtexs tenen grau d, direm que G és d-regular.

- la *seqüència de graus* de G és la successió dels n graus dels vèrtexs de G, que normalment donarem en ordre decreixent.

Propietats

(1) Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores $0 \leq g(u) \leq n-1$ per a tot $u \in V$.

(2) No hi ha cap graf d'ordre n, $n \geq 2$, amb tots els graus dels vèrtexs diferents. És a dir, si $n \geq 2$, a la seqüència de graus hi ha almenys un valor repetit.

(3) *Lema de les encaixades.* Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores

$$\sum_{u \in V} g(u) = 2m.$$

(4) *Conseqüència del lema de les encaixades.* Tot graf conté un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Matriu d'adjacència

La *matriu d'adjacència* d'un graf $G = (V, A)$ d'ordre n, on $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$, és la matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ quadrada $n \times n$ tal que l'element de la fila i i columna j és

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i u_j \in A, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

La matriu d'adjacència d'un graf satisfà:

(1) És una matriu binària (de zeros i uns), simètrica, amb zeros a la diagonal principal, i no és única: depèn de l'ordenació escollida al conjunt de vèrtexs del graf.

(2) La suma dels elements de la fila o de la columna i-èsima és el grau del vèrtex u_i.

(3) La suma de tots els elements de la matriu és dues vegades la mida.

Altres maneres de donar un graf: llista o taula d'adjacències

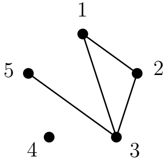
- Si $G = (V, A)$ és un graf tal que $|V| = n$ i $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, podem donar el graf G amb una llista de longitud n, la *llista d'adjacències*, on a la posició i, $1 \leq i \leq n$, hi ha el conjunt de vèrtexs adjacents a v_i. Si donem aquesta informació en forma de taula, parlem de *taula d'adjacències*.

Exemple: llista o taula d'adjacències

Si $G = (V, A)$ on $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}\}$

Representació gràfica:



Llista d'adjacències: $(\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{\}, \{3\})$

Taula d'adjacències:

1	2	3	4	5
2	1	1		3
3	3	2		
		5		

Isomorfia de grafs

- Dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ són *isomorfs* si existeix una aplicació bijectiva $f : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que:

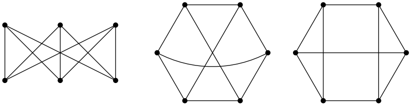
$$\forall u, v \in V_1 \ , \ uv \in A_1 \Longleftrightarrow f(u)f(v) \in A_2.$$

- Si G_1 i G_2 són isomorfs, escriurem $G_1 \cong G_2$. Direm que l'aplicació f és un *isomorfisme de grafs* entre G_1 i G_2.

Propietats

- La isomorfia de grafs defineix una relació d'equivalència en el conjunt de tots els grafs. Cadascuna de les classes d'equivalència que determina aquesta relació és una *classe d'isomorfia*. Tenim, doncs, una partició del conjunt de tots els grafs en classes d'isomorfia.

- $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1$ i G_2 tenen el mateix ordre, la mateixa mida, i la mateixa seqüència de graus.
  El recíproc no és cert. Contraexemple: els tres grafs següents tenen el mateix ordre, mida i seqüència de graus, però el de la dreta no és isomorf als altres dos:



Tipus de grafs

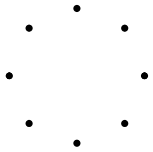
- Graf *nul* d'ordre n, N_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n i mida 0.

  El graf N_1 s'anomena graf *trivial*.

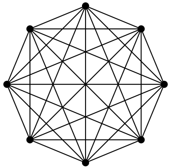
- Graf *complet* d'ordre n, K_n, on $n \geq 1$: graf d'ordre n amb totes les arestes possibles.

  Per tant, la mida de K_n és $\binom{n}{2}$.

  El graf $K_1 \cong N_1$ és el graf *trivial*.



N_8



K_8

Tipus de grafs

- Graf *trajecte* d'ordre n, T_n, on $n \geq 1$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $n-1$ tal que $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $A = \{u_1 u_2, u_2 u_3, \ldots, u_{n-1} u_n\}$

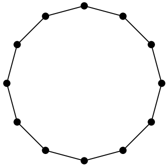
  Es compleix $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$, si $n \geq 3$.

T_7

4.1 Tipus de grafs

- Graf *cicle* d'ordre n, C_n, on $n \geq 3$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida n tal que $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\}$.

  Es compleix $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$, per a tot $n \geq 3$.

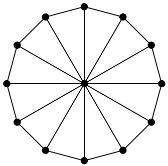


C_{12}

Tipus de grafs

- Graf *roda* d'ordre n, W_n, on $n \geq 4$: graf isomorf a $G = (V, A)$ d'ordre n i mida $2n - 2$ tal que
  $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i
  $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-2}u_{n-1}, u_{n-1}u_1\} \cup$
  $\quad \{u_1u_n, u_2u_n, \ldots, u_{n-1}u_n\}$.

  W_n té ordre n, mida $2n - 2$,
  grau mínim $\delta(W_n) = 3$ i grau màxim $\Delta(W_n) = n - 1$.

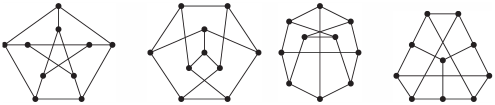


W_{13}

Tipus de grafs

- Graf de *Petersen*: graf 3-regular d'odre 10 i mida 15 isomorf a $G = (V, A)$ on
  $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i
  $A = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\} \cup$
  $\cup \{v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1\} \cup$
  $\cup \{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5\}$.

A la figura següent podeu veure diferents maneres de representar el graf de Petersen:



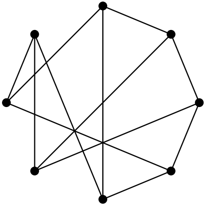
Tipus de grafs

- Graf *d-regular*: graf tal que tot vèrtex té grau d, per a algun enter $d \geq 0$.

  Per exemple, K_n és un graf $(n-1)$-regular.

  Si un graf G d'ordre n i mida m és d-regular, aleshores $m = \frac{dn}{2}$.

  Exemple de graf 3-regular:



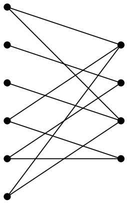
Tipus de grafs

- Graf *bipartit*: graf $G = (V, A)$ tal que existeix una partició del conjunt de vèrtexs en dos subconjunts, $V = V_1 \cup V_2$, de forma que totes les arestes del graf són de tipus uv amb $u \in V_1$ i $v \in V_2$ (és a dir, no hi ha arestes uv tals que $u, v \in V_1$ ni tals que $u, v \in V_2$).

  Els conjunts V_1 i V_2 s'anomenen *parts estables*.

  Observem que $\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v)$.

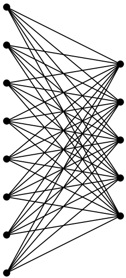
  Exemple de graf bipartit:



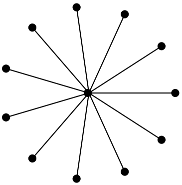
Tipus de grafs

- Graf *bipartit complet*, $K_{r,s}$, on $r, s \geq 1$: graf bipartit d'ordre $r + s$ i mida rs tal que les parts estables són V_1 i V_2, amb $|V_1| = r \geq 1$ i $|V_2| = s \geq 1$, i el conjunt d'arestes és $A = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ (és a dir, tot vèrtex de V_1 és adjacent a tot vèrtex de V_2).

  El graf $K_{1,s}$ se l'anomena *graf estrella*.



$K_{8,5}$



$K_{1,11}$

Subgrafs

Si $G = (V, A)$ és un graf,

- $H = (V', A')$ és un *subgraf* de G si H és un graf tal que $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$.

- $H = (V', A')$ és un *subgraf generador* de G si H és un subgraf de G tal que $V' = V$.

Subgrafs

- Si $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per S* és el subgraf que té S com a conjunt de vèrtexs, i el conjunt d'arestes està format per totes les arestes de G incidents en dos vèrtexs de S.

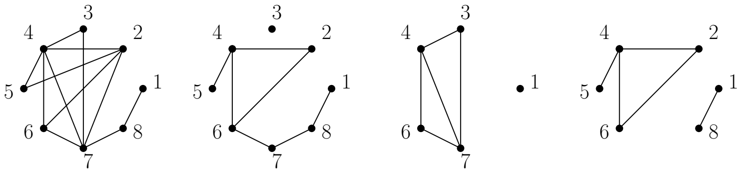
  Notació: $G[S]$ (o bé $< S >$) representa el subgraf generat per $S \subseteq V$ en G.

  És a dir, $G[S] = (S, A')$, on $A' = \{ uv \in A \mid u, v \in S \}$.

- Si $T \subseteq A$, $T \neq \emptyset$, el *subgraf de G generat o induït per T* té com a conjunt de vèrtexs tots els vèrtexs incidents a alguna de les arestes de T i el conjunt d'arestes és T.

Subgrafs: exemples

D'esquerra a dreta, un graf G i tres subgrafs de G: un subgraf generador, un subgraf generat per un conjunt de vèrtexs i un subgraf generat per un conjunt d'arestes.



G $\quad$ H $\quad$ $G[\{1,3,4,6,7\}]$ $\quad$ $G[\{18,24,26,45,46\}]$

Supressió de vèrtexs

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, considerem els grafs següents:

- *Supressió d'un vèrtex $u \in V$ de G*: graf que s'obté de G al suprimir el vèrtex u i totes les arestes incidents amb u, és a dir, és el graf $G - u = (V - \{u\}, A')$ on

$$A' = A - \{a \in A | a \text{ és incident amb } u\}.$$

Per tant, $G - u$ és un graf d'ordre $n - 1$ i mida $m - g(u)$.

Si $u_1, \ldots, u_s \in V$, es defineix recursivament $G - \{u_1, \ldots, u_s\} = (G - \{u_1, \ldots, u_{s-1}\}) - u_s$.

Addició de vèrtexs i arestes

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, considerem els grafs següents:

- *Supressió d'una aresta $a \in A$*: graf que s'obté de G al suprimir l'aresta a, és a dir, és el graf $G - a = (V, A - \{a\})$.

  Per tant, $G - a$ és un graf d'ordre n i mida $m - 1$.

  Si $a_1, \dots, a_s \in A$, es defineix recursivament $G - \{a_1, \dots, a_s\} = (G - \{a_1, \dots, a_{s-1}\}) - a_s$.

- *Addició d'una aresta $a = uv \notin A$, $u, v \in V$*: graf que s'obté de G a l'afegir una aresta a que no és de G, és a dir, és el graf $G + a = (V, A \cup \{a\})$.

  Per tant, $G + a$ és un graf d'ordre n i mida $m + 1$.

  Si $a_1, \dots, a_s \notin A$, es defineix recursivament $G + \{a_1, \dots, a_s\} = (G + \{a_1, \dots, a_{s-1}\}) + a_s$.

Operacions amb grafs

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, es defineix:

- Graf *complementari* de G: és el graf $\overline{G} = (V, A')$ (també s'escriu G^c) on $A' = \{\, uv \mid u, v \in V \text{ i } uv \notin A \,\}$.

  Per tant, $\overline{G}$ és un graf d'ordre n, mida $\binom{n}{2} - m$, i per a tot vèrtex $u \in V$, $g_G(u) + g_{\overline{G}}(u) = n - 1$.

  Direm que un graf G és *autocomplementari* si $G \cong \overline{G}$.

Operacions amb grafs

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ és un graf d'ordre n_1 i mida m_1 i $G_2 = (V_2, A_2)$ és un graf d'ordre n_2 i mida m_2, es defineix:

- *Unió disjunta* de G_1 i G_2, si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: és el graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.

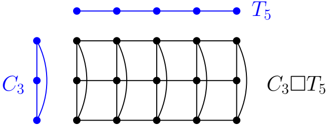
  Per tant, $G_1 \cup G_2$ té ordre $n_1 + n_2$ i mida $m_1 + m_2$.

Operacions amb grafs

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ és un graf d'ordre n_1 i mida m_1 i $G_2 = (V_2, A_2)$ és un graf d'ordre n_2 i mida m_2, es defineix:

- *Producte cartesià* de G_1 i G_2: és el graf $G_1 \Box G_2 = (V_1 \times V_2, A')$, on A' està definit de la forma següent: $\forall u, u' \in V_1 \,, \forall v, v' \in V_2 \;, \; (u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow u = u' \text{ i } vv' \in A_2, \text{ o bé } v = v' \text{ i } uu' \in A_1.$

A la figura següent hi ha representats els grafs C_3, T_5 i el producte cartesià de C_3 per T_5.



Operacions amb grafs

Es compleix:

(i) $g_{G_1 \square G_2}(u,v) = g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)$, per a tot $(u,v) \in V_1 \times V_2$, on g_H denota el grau d'un vèrtex en el graf H.

(ii) $G_1 \square G_2$ és un graf d'ordre $n_1 n_2$ i mida $n_1 m_2 + n_2 m_1$.

El producte cartesià de r grafs, $r \geq 2$, es defineix recursivament. Per a $r = 2$ és el producte cartesià de grafs que ja hem definit. Si $r \geq 3$, $G_1, G_2, \ldots, G_r$ és el graf

$$G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_r = (G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_{r-1}) \square G_r.$$

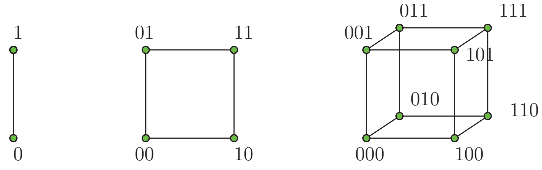
- Per a tot $r \geq 1$, el *graf hipercub*, Q_r, es defineix com el producte cartesià

$$Q_r = \overbrace{K_2 \square \ldots \square K_2}^{(r)}.$$

El graf Q_r és r-regular d'ordre 2^r.

Es pot identificar amb el graf que té per conjunt de vèrtexs $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) : \forall i \in [r]\ ,\ x_i \in \{0,1\}\}$ i dos vèrtexs $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ són adjacents si, i només si, tenen exactament $r-1$ components iguals.

Vegeu a la figura següent un representació dels grafs hipercub Q_1, Q_2 i Q_3:



Q_1 Q_2 Q_3

Recorreguts, camins i cicles

Sigui $G = (V, A)$ un graf i $u, v \in V$.

- Un *u-v recorregut de longitud k*, $k \geq 1$, és una successió alternada de vèrtexs i arestes,
  $u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, \ldots u_{k-1}, a_k, u_k$ tal que $u = u_0$, $v = u_k$, i $a_i = u_{i-1}u_i \in A$, per a tot $i \in [k]$.

  Un vèrtex $u \in V$ es considera un *recorregut de longitud* 0.

  Un recorregut queda determinat per la successió de vèrtexs $u_0, u_1, \ldots, u_k$, ja que entre dos vèrtexs adjacents només hi ha una aresta que els uneix. Per tant, sovint donarem només la seqüència de vèrtexs del recorregut.

  Si $u = v$ (resp. $u \neq v$) direm que el recorregut és *tancat* (resp. *obert*).

Recorreguts, camins i cicles

- Un *camí* és un recorregut que no repeteix vèrtexs.

- Un *cicle* és un recorregut tancat de longitud almenys 3 amb tots els vèrtexs diferents, llevat de l'últim que coincideix amb el primer.

- Si G és un graf d'ordre n, aleshores,
  (1) la longitud d'un camí és com a molt $n-1$;
  (2) la longitud d'un cicle és com a molt n;

- Un graf de mida almenys 1 conté recorreguts de longitud k, per a tot $k \geq 0$.

Recorreguts, camins i cicles: propietats immediates

(1) Si $u - v$ és un recorregut de longitud k, aleshores hi ha $u - v$ camí de longitud com a molt k que passa per vèrtexs i arestes del recorregut.

(2) Si un graf G conté dos vèrtexs u, v tals que almenys hi ha dos $u - v$ camins diferents, llavors G conté almenys un cicle.

(3) Tot recorregut tancat de longitud senar conté un cicle de longitud senar.

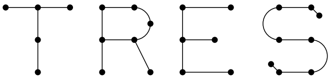
Connexió

- Un graf és *connex* si per a qualsevol parell de vèrtexs del graf hi ha almenys un camí que els connecta. Un *component connex* d'un graf és un subgraf connex maximal.

- La relació binària en el conjunt de vèrtexs d'un graf "dos vèrtexs estan relacionats si, i només si, hi ha almenys un camí que els connecta" és d'equivalència.

- Els *components connexos* de G són els subgrafs induïts per les classes d'equivalència d'aquesta relació.

Per exemple, el graf de la figura següent té 4 components connexos:



Connexió: propietats immediates

(1) Un graf connex d'ordre ≥ 2 no té vèrtexs de grau zero.

(2) Els vèrtexs del component connex del vèrtex u d'un graf G són tots els vèrtexs v tals que existeix almenys un $u - v$ camí en G.

(3) Si $G_1, \dots, G_k$ són els components connexos del graf G, aleshores $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$.

(4) Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u \in V$, aleshores el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos.

(5) Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $a \in A$, aleshores el graf $G - a$ té com a molt 2 components connexos.

Connexió: propietats

(1) Si G és un graf connex d'ordre n i mida m, aleshores $m \geq n - 1$.

(2) Si G és un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos, aleshores $m \geq n - k$.

Distància

- Si u, v són dos vèrtexs del mateix component connex d'un graf G, la *distància* entre u i v és el mínim de les longituds de tots els $u - v$ camins.

- Si no hi ha cap $u - v$ camí, direm que la distància entre u i v és infinita.

- Denotarem la distància entre els vèrtexs u, v del graf G amb $d(u, v)$.

Distància. Propietats

- $d(u, v) = 1$ si, i només si, u i v són adjacents.
- $d(u, v) = 2$ si, i només si, no són adjacents i existeix un vèrtex w adjacent a u i a v alhora.
- Si $G = (V, A)$ és un graf connex i $u, v, w \in V$,
  (1) $d(u, v) \geq 0$;
  (2) $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
  (3) $d(u, v) = d(v, u)$ (simetria);
  (4) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (desigualtat triangular).

Excentricitat, diàmetre, radi

Considerem un graf $G = (V, A)$.

- L'*excentricitat* d'un vèrtex $u \in V$, que denotarem $e(u)$, és el màxim de les distàncies entre u i tots els vèrtexs del graf:

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

- El *diàmetre* de G, que denotarem $D(G)$, és el màxim de les excentricitats dels vèrtexs de G:

$$D(G) = \max_{u \in V} e(u) = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

- El *radi* de G, que denotarem $r(G)$, és el mínim de les excentricitats dels vèrtexs de G:

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u).$$

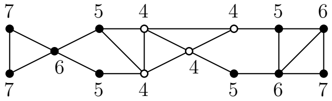
Vèrtexs centrals

Considerem un graf $G = (V, A)$.

- Un vèrtex u és *central* si té excentricitat mínima, és a dir, $e(u) = r(G)$.

- El *centre* de G és el subgraf generat per tots els vèrtexs centrals de G.

El graf de la figura següent té diàmetre 7 i radi 4. Els vèrtexs estan etiquetats amb l'excentricitat. Els vèrtexs blancs són centrals:



Propietats

(1) Un graf és connex si, i només si, el diàmetre és finit.

(2) Si G és connex, llavors $r(G) \leq D(G) \leq 2\, r(G)$.

(3) Els grafs amb diàmetre 1 són els grafs complets K_n, $n \geq 2$.

(4) Els grafs d'ordre n i diàmetre $n-1$ són els grafs trajecte T_n.

(5) Els grafs d'ordre n, $n \geq 2$, i radi 1 són els grafs amb grau màxim $\Delta(G) = n-1$.

(6) Un graf pot contenir camins de longitud més gran que el diàmetre.

(7) **Caracterització dels grafs bipartits.** Un graf no trivial és bipartit si, i només si, no conté cicles de longitud senar.

Algorismes DFS i BFS

Sigui $G = (V, A)$ un graf i $v \in V$.

- Algoritme DFS: Cerca en profunditat (Depth First search)

  El conjunt W obtingut amb l'algorisme següent conté els vèrtexs del component connex de G que conté v.

- Algoritme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

  El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf.

Algoritme DFS:

```
Llista DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vèrtex v
/* Post: la llista dels vèrtexs del mateix component connex que v
{
Pila P;
P.empilar(v);
Llista W;
W.afegir(v);
int x;
while (not P.es_buida) {
x=P.cim;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
P.empilar(y);
W.afegir(y);
}
else {
P.desempilar;
}
}
return W;
}
```

Algoritme BFS

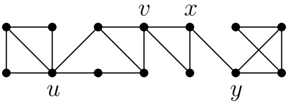
```
vector BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v
/* Post: un vector D tal que D[x]=d(v,x)
{
Cua C;
C.demanar_torn(v);
Llista W;
W.afegir(v);
vector<int> D(n);
D[v]=0;
int x;
while (not C.es_buida) {
x=C.primer;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
C.demanar_torn(y);
W.afegir(y);
D[y]=D[x]+1;
}
else {
C.avançar;
}
}
```

Vèrtexs de tall i arestes pont

Considerem un graf $G = (V, A)$.

- Un vèrtex $u \in V$ és *vèrtex de tall* si el graf $G - u$ té més components connexos que G.
- Una aresta $a \in A$ és *aresta pont* si el graf $G - a$ té més components connexos que G.

Exemple. L'única aresta pont del graf de la figura següent és xy. Els vèrtexs de tall són u, v, x i y



Vèrtexs de tall i arestes pont. Propietats.

1) Els vèrtexs de grau 0 i de grau 1 no són mai vèrtexs de tall.

2) Un vèrtex és de tall en un graf G si, i només si, és vèrtex de tall del component connex de G que el conté:

   Si G' és el component connex d'un vèrtex u, u és vèrtex de tall en G si, i només si, $G' - u$ és un graf no connex.

3) Una aresta és pont en G si, i només si, és aresta pont del component connex de G que la conté:

   Si G' és el component connex que conté l'aresta a, a és aresta pont en G si, i només si, $G' - a$ és un graf no connex.

4) Si $G = (V, A)$ és un graf i $a = uv \in A$, aleshores l'aresta a és pont si, i només si, no pertany a cap cicle.

Vèrtexs de tall i arestes pont. Propietats.

- Sigui $G = (V, A)$ un graf, $u \in V$ i $a \in A$.

  (1) Si $g(u) = 1$ i $uv \in A$, aleshores u no és vèrtex de tall i uv és aresta pont;

  (2) Si $a = uv$ és aresta pont i $g(u) \geq 2$, aleshores u és vèrtex de tall.

- Si $G = (V, A)$ és un graf connex, $u \in V$ i $a \in A$,

  (1) si u és vèrtex de tall, el nombre de components connexos de $G - u$ és almenys 2 i com a molt $g(u)$;

  (2) si a és aresta pont, el nombre de components connexos de $G - a$ és exactament 2.

Grafs acíclics

- Un graf és *acíclic* si no conté cap subgraf isomorf a un cicle.

- **Propietats**
  1) Un graf 2-regular és unió de cicles.
  2) Un graf connex 2-regular és un graf cicle.
  3) Un graf amb tots els vèrtexs de grau més gran o igual que 2 conté almenys un cicle.

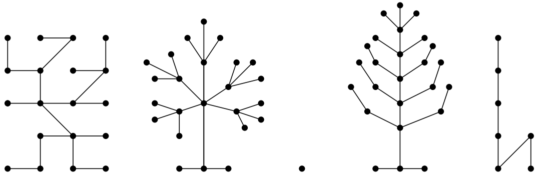
- **Propietat**
  Si G és un graf acíclic d'ordre n i mida m, aleshores $m \leq n - 1$.

  Els recíproc no és cert. El graf $C_3 \cup K_1$ és un contraexemple.

Arbres

- Un *arbre* és un graf connex i acíclic.
- Un *bosc* és un graf acíclic.
- Una *fulla* és un vèrtex de grau 1.

Exemple. Un bosc amb 5 components connexos. Cada component connex és un arbre.



Arbres. Propietats

(1) Si T és un arbre d'ordre n i mida m, llavors $m = n - 1$.

(2) Els components connexos d'un bosc són arbres.

(3) Si G és un bosc d'ordre n i mida m amb k components connexos, llavors $m = n - k$.

(4) Tot arbre T d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.

(5) Tot arbre és un graf bipartit.

Caracterització dels arbres.

Si $G = (V, A)$ és un graf d'ordre n i mida m, aleshores són equivalents:

(1) G és arbre;

(2) G és acíclic i $m = n - 1$;

(3) G és connex i $m = n - 1$;

(4) G és connex i tota aresta és pont;

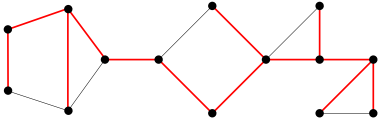
(5) $\forall u, v \in V$, existeix un únic $u - v$ camí;

(6) G és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle.

Arbres generadors

- Un *arbre generador* d'un graf G és un subgraf generador de G que és arbre.

  Exemple. Les arestes vermelles indueixen un arbre generador del graf de la figura.

- **Propietat.** Un graf G té almenys un arbre generador si, i només si, G és connex.

Algorismes DFS i BFS per a obtenir arbres generadors

El graf $T = (W, B)$ obtingut amb els algorismes següents és un arbre generador del component connex de G que conté v.

DFS

```
arbre DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
Pila P;
P.empilar(v);
Llista W;
W.afegir(v);
Llista B;
int x;
while (not P.es_buida) {
x=P.cim;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
P.empilar(y);
W.afegir(y);
B.afegir(xy);
}
else {
P.desmpilar;
}
}
return (W,B);
}
```

BFS

```
arbre BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
     Cua C;
C.demanar_torn(v);
Llista W;
W.afegir(v);
Llista B;
int x;
while (not C.es_buida) {
x=C.primer;
if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
C.demanar_torn(y);
W.afegir(y);
B.afegir(xy);
}
else {
C.avançar;
}
}
return (W,B);
}
```