GIA - ALG: Segona prova avaluable

Albert Campos Gisbert

7 d'octubre de 2022

1. **Sigui $a \in \mathbb{R}$ i considerem la matriu:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   (a) **Calculeu el rang de la matriu A. Quan és A invertible?**

   Tenint en compte que A és una matriu d'ordre 3, llavors, el rang(A) haurà de ser màxim, és a dir, de 3. Per tant, utilitzarem el mètode de Gauss-Jordan per esbrinar quin rang té A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

   Després de realitzar tres transformacions elementals a la matriu A, hem obtingut la seva matriu esglaonada. Analitzant la matriu, veiem que si $a = -1$, la tercera fila seria nula, per tant el rang(A), no seria màxim, i per conseqüència A no serà invertible- A serà invertible només quan $a \neq -1$.

   (b) **Calculeu A^{-1} si $a = 0$**

   Si $a = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Si calculem A^{-1} per determinants, sabem que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

   $|A| = 4 - 2 = 2;$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) **Determineu els valors del paràmetre a pels quals:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Segons les propietats de les matrius, sabem que $A * A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+2 & -a-2 & -a-1 \end{pmatrix}$$

Per a que es compleixi la igualtat, ha de ser cert:

$$\begin{cases} a+2=0 \\ -a-2=0 \\ -a-1=1 \end{cases}$$

Per tant, A^{-1} serà coherent sempre que $a = -2$

2. **Considerem el sistema homogeni:**

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x+az=0 \end{cases}$$

(a) **Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat?**

Per saber quan el sistema serà compatible determinat, necessitarem conèixer el rang de la matriu associada. Per tant, escrivim el sistema en matriu i simplifiquem mitjançant el mètode de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ -1 & 1 & 2 & |0 \\ 2 & 0 & a & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & 3 & |0 \\ 2 & 0 & a & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & 3 & |0 \\ 0 & -2 & a-2 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & 3 & |0 \\ 0 & 0 & a+1 & |0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+3z=0 \\ (a+1)z=0 \end{cases}$$

Si $a=-1$, la tercera fila serà nula i la matriu tindrà 1 grau de llibertat, per tant serà un sistema compatible indeterminat.

Si $a \neq -1$, la tercera fila no serà nula, per tant el rang(A) serà màxim, i el grau de llibertat serà 0, per tant serà un sistema compatible determinat.

(b) **Calculeu les solucions del sistema segons els diferents valors del paràmetre a.**

Resolem el sistema amb les transformacions elementals ja aplicades a la seva matriu associada:

- Per $a=-1 \to \begin{cases} x+y+z=0 \to x+\frac{3\lambda}{2}+\lambda=0 \to x=\frac{-5\lambda}{2} \\ 2y+3z=0 \to \lambda=z; 2y+3\lambda=0 \to y=\frac{-3\lambda}{2} \end{cases}$

$-\, Per a \neq -1 \to \begin{cases} x+y+z=0 \to x+0+0=0 \to x=0 \\ 2y+3z=0 \to 2y+3(0)=0 \to y=0 \\ z=0 \to \lambda=0 \end{cases}$

(c) **Determineu a i b de manera que $(x, y, z) = (2, b, 4)$ sigui una solució del sistema.**

Si $x = 2$, $y = b$ i $z = 4$:

$$\begin{cases} 2 + b + 4 = 0 \to 0 = 0 \\ 2b + 12 = 0 \to 2b = -12 \to b = \frac{-12}{2} = -6 \\ (a + 1)4 = 0 \to 4a = -4 \to a = -1 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (2, b, 4)$ és solució si i només si $a = -1$ i $b = -6$

3. **Determineu els valors del paràmetre a pels quals:**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 2x + az = c \end{cases}$$

(a) **Per a quins valors dels paràmetres a i c el sistema és compatible? Quan és compatible determinat? Quan és compatible indeterminat?**

Utilitzem gauss per simplificar la matriu asociada i coneixer el seu rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ -1 & 1 & 2 & |3 \\ 2 & 0 & a & |c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 2 & 3 & |4 \\ 2 & 0 & a & |c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 2 & 3 & |4 \\ 0 & -2 & a-2 & |c-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 2 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & a+1 & |c+2 \end{pmatrix}$$

Donat que $(a + 1)z = c + 2$, El sistema serà incompatible quan $a = -1$ i $c \neq -2$, compatible indeterminat si $a = -1$ i $c = -2$, i compatible determinat a és es arbitraria, $c \neq -2$ i $a + 1 = c + 2$.

(b) **Determineu els valors de a i c de manera que $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ sigui una solució del sistema. Quan és l'única solució del sistema?**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 4 \\ (a + 1)z = c + 2 \end{cases}$$

Tenim que $(a + 1)z = c + 2$; Si substituïm pels valors que ens dona el enunciat, tenim que $(a + 1)(-2) = c + 2 \to -2a - 2 = c + 2 \to a = \frac{c+4}{2} \to c = -2a - 4$

(c) **Demostreu que no existeixen a i c de manera que $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ sigui una solució del sistema.**

Substituïm pels valors del enunciat: $\begin{cases} x + y + z = 1 \rightarrow 1 = 1 \\ 2y + 3z = 4 \rightarrow 3 \neq 4 \\ (a+1)z = c + 2 \rightarrow a = c + 1 \end{cases}$

El sistema serà sempre incompatible doncs, quan substituïm dona $3 = 4$ en la segona fila, per tant $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ mai podrà ser solució del sistema.

(d) **Determineu la solució general del sistema en el cas $a = 0$ i c arbitrari.**

Substituïm pels valors del enunciat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 2 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & 1 & |c+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \rightarrow x = \frac{3c+2}{2} - 3c + 2 \rightarrow x = \frac{-3c+6}{2} \\ 2y + 3z = 4 \rightarrow 2y + 3c + 6 = 4 \rightarrow y = \frac{-3c-2}{2} \\ z = c + 2 \end{cases}$$

(e) **Determineu la solució general del sistema en el cas a arbitrari i $c = -2$**

Substituïm pels valors del enunciat: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 2 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & a+1 & |0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \rightarrow x + 2 + 0 = 1 \rightarrow x = -1 \\ 2y + 3z = 4 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ (a+1)z = 0 \rightarrow z = 0 \end{cases}$$