9 DERIVADES DE FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

(Resum teòric)

Índex

9.1. Derivades direccionals, derivades parcials

Sigui f una funció real de 2 variables i considerem un punt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ del seu domini i un vector unitari $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. La gráfica de f és una superfície en el pla XY. Considerem la recta r que passa per $\mathbf{a}$ i té la direcció de $\mathbf{v}$. El pla perpendicular al pla XY i que conté la recta r talla la gràfica de f en una corba que passa pel punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$; el pendent de la recta tangent a aquesta corba en aquest punt és la derivada direccional de f segons $\mathbf{v}$ en el punt $\mathbf{a}$. A continuació, formalitzem aquest concepte i el generalitzem a n variables.

Sigui f una funció real de n variables definida i siguin $\mathbf{a} \in Dom f$, i $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitari. La funció f té *derivada en* $\mathbf{a}$ *en la direcció de* $\mathbf{v}$ si existeix el límit següent i és un nombre real:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{\lambda}.$$

Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en $\mathbf{a}$ en la direcció de $\mathbf{e}_i$ es denomina *i-èsima derivada parcial* o *derivada parcial respecte a la i-èsima variable*, per a la qual s'utilitzen indistintament les notacions següents:

$$D_i f(\mathbf{a}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \qquad f_{x_i}(\mathbf{a}),$$

les dues últimes en cas que f estigui definida com a funció de les variables $(x_1, \ldots, x_n)$.

Observem que la i-èsima derivada parcial de f en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ és

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\lambda},$$

i que aquesta definició correspon a la de la derivada al punt a_i de la funció d'una variable definida per $x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Així, el càlcul de derivades parcials es redueix al càlcul de derivades de funcions d'una variable.

Si $f\colon U \to \mathbb{R}$ és una funció que té derivada parcial i-èsima a cada punt de U, aleshores queda definida la funció i-èsima derivada parcial $D_i f$, $\partial f/\partial x_i$ o f_{x_i}, que fa correspondre a cada punt de $\mathbf{x} \in U$ la i-èsima derivada parcial de f en $\mathbf{x}$.

9.2. Vector gradient i matriu jacobiana

Si f admet derivades parcials a $\mathbf{a}$ respecte de totes les variables, s'anomena *vector gradient* de f en $\mathbf{a}$, i es denota per $\nabla f(\mathbf{a})$, el vector

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right).$$

Si f es una funció m-vectorial i totes les seves funcions coordenades admeten derivades parcials a $\mathbf{a}$ respecte de totes les variables, s'anomena *matriu jacobiana* de f en $\mathbf{a}$ la matriu de m files i n columnes

$$\mathcal{J}f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

on, com es pot veure, cada fila és el gradient de cadascuna de les funcions coordenades de f en $\mathbf{a}$. El determinant de la matriu $\mathcal{J}f(\mathbf{a})$ es denomina *jacobià* de f en $\mathbf{a}$.

9.3. Direcció òptima. Regla de la cadena

Recordem que per a una funció real de variable real f la derivabilitat en un punt a equival a l'existència de recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$.

Per a una funció de n variables, l'existència de l'hiperplà tangent a la gràfica de la funció en un punt està lligat al concepte de diferenciabilitat en el punt corresponent. Aquí prescindirem de l'estudi de la diferenciabilitat i parlarem del concepte següent, que dóna una condició suficient per a la diferenciabilitat, i amb el qual és més fàcil treballar.

Sigui f una funció real de n variables definida i sigui $\mathbf{a} \in Dom f,$. La funció f és *de classe C^1 en* $\mathbf{a}$ si n totes les derivades parcials de primer ordre són contínues en $\mathbf{a}$.

Des del punt de vista geomètric, si una funció real de dues variables $f(x,y)$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un punt (a,b), aleshores existeix el pla tangent a la superfície $z=f(x,y)$ en el punt $(a,b,f(a,b))$ i és el pla d'equació:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

Siguin f una funció de n variables i $\mathbf{a}$ un punt del seu domini. Es compleixen les tres propietats següents.

• Si f és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbf{a}$, aleshores f és diferenciable en $\mathbf{a}$.
• Si f és diferenciable en $\mathbf{a}$, aleshores f és contínua en $\mathbf{a}$.
• Si f és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbf{a}$ i $\mathbf{v}$ és un vector unitari, aleshores la derivada direccional de f en $\mathbf{a}$ en la direcció de $\mathbf{v}$ existeix i és

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Pel que fa a la tercera propietat, donat que la derivada direccional és el producte escalar $\nabla f(a) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$, on α és l'angle que formen el vector gradient i $\mathbf{v}$, veiem que la *derivada direccional màxima* en un punt té lloc per a $\alpha = 0$, és a dir, en la direcció i el sentit del gradient en aquest punt, i el seu valor és precisament la norma del vector gradient. La derivada direccional és nul·la si $\alpha = \pi/2$, és a dir, en la direcció ortogonal al gradient.

Per a una funció m-vectorial, els conceptes de diferenciabilitat i de classe $\mathcal{C}^1$ es remet al de les funcions coordenades: sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in U$, i $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ una funció m-vectorial. Es diu que f és *de classe* $\mathcal{C}^1$ en $\mathbf{a}$ si les m funcions coordenades $f_1, \ldots, f_m$ són de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbf{a}$.

La suma i el producte de dues funcions de classe $\mathcal{C}^1$ en un punt també són de classe $\mathcal{C}^1$ en aquest punt. Pel que fa a la composició, es té la denominada regla de la cadena.

Regla de la cadena. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ i $g\colon V \to \mathbb{R}^p$ funcions vectorials.

Si f és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbf{a} \in U$ i g és de classe $\mathcal{C}^1$ en $f(\mathbf{a}) \in V$, aleshores $g \circ f$ és de classe $\mathcal{C}^1$ $\mathbf{a}$ i es compleix la relació següent entre les respectives matrius jacobianes:

$$\mathcal{J}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{J}g(f(\mathbf{a})) \cdot \mathcal{J}f(\mathbf{a}).$$

(Noteu que $\mathcal{J}f(a)$ és una matriu $m \times n$, $\mathcal{J}g(f(a))$ és una matriu $p \times m$, i $\mathcal{J}(g \circ f)(a)$ és una matriu $p \times n$.)