8 FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

(Resum teòric)

Índex

8.1. Funcions de diverses variables: conceptes bàsics

Siguin n i m nombres naturals. Una funció de n variables reals és una aplicació $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, on D és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ anomenat *domini* de f.

Si $m = 1$, es diu que f és una *funció real* o *escalar*. Si $m \geq 2$, es diu que f es una funció *vectorial* (o també m-vectorial).

La funció f fa correspondre a cada element $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ exactament un element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, que es denota per $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$; en aquest cas, es diu que $\mathbf{y}$ es *la imatge* de $\mathbf{x}$ i que $\mathbf{x}$ es *una antiimatge* o *original* de $\mathbf{y}$. El conjunt de imatges es denota por $f(D)$ i s'anomena *recorregut* o la *imatge* de f.

Associades a una funció vectorial $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, amb $D \subseteq \mathbb{R}^n$, existeixen m funcions escalars $f_1, \ldots, f_m$ de domini D definides per $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, és a dir, $f_i(\mathbf{x})$ és la i-èsima coordenada de $f(\mathbf{x})$ per a cada $\mathbf{x} \in D$. Les funcions f_i s'anomenen coordenades de f, i sol utilitzar-se la notació $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Sovint l'estudi d'una funció vectorial es redueix a l'estudi de les funcions coordenades, per la qual cosa, si no es diu el contrari, ens referirem a funcions reals, és a dir, al cas $m = 1$.

Com en el cas d'una variable, queda definida habitualment una funció mitjançant una expressió que permet calcular la imatge que correspon a cada element, però sense explicitar el domini. En aquest cas, se sobreentén que el domini és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^n$ per als quals l'expressió donada té sentit, és a dir, el conjunt de punts per als quals es pot calcular la imatge.

Sigui f una funció real de domini $D \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunt de punts de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(\mathbf{x}))$, amb $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, s'anomena *gràfica* de f. Com ja sabem, per a $n = 1$ la gràfica és habitualment una corba de $\mathbb{R}^2$. Per a $n = 2$, la gràfica és usualment una superfície de $\mathbb{R}^3$.

En relació amb les gràfiques, són d'utilitat els anomenats *conjunts de nivell* de f. Sigui $k \in \mathbb{R}$. El conjunt $C_k = \{\mathbf{x} \in D \ : \ f(\mathbf{x}) = k\}$ s'anomena *conjunt de nivell* k de la funció f. Per a $n = 2$, es tracta de corbes de $\mathbb{R}^2$ que reben el nom específic de *corbes de nivell* de f.

A l'apèndix 8.3 es mostren les equacions d'algunes corbes importants de $\mathbb{R}^2$.

Els conceptes d'injectivitat, operacions amb funcions i cotes superiors i inferiors són completament anàlegs als conceptes corresponents per a funcions d'una variable.

8.2. Continuïtat

Una funció f és *contínua* en un punt $\mathbf{a}$ del seu domini D si $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.
Per a les funcions reals, com en el cas d'una variable, aquesta condició equival a les tres següents.
(i) existeix $\ell = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ i és un número real; (ii) $\mathbf{a} \in D$; (iii) $\ell = f(\mathbf{a})$.
Per a les funcions vectorials, f és contínua en un punt si i només si totes les seves funcions coordenades ho són.

Una funció f és *continua* en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si és continua en tot punt $\mathbf{a} \in A$.

La relació de la continuïtat amb les operacions és la mateixa que per a $n = 1$. D'aquesta manera, per estudiar la continuïtat d'una funció real de diverses variables sovint n'hi ha prou amb tenir en compte que les funcions elementals són contínues en tot el seu domini, i que la suma, resta, multiplicació, divisió quan el denominador és diferent de zero i composició de funcions contínues és una funció contínua. Quant a les funcions vectorials, aquestes són contínues quan totes les seves funcions components ho són.

Un resultat important quant a la continuïtat en conjunts és el següent.

Teorema de Weierstrass. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ és un compacte i $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ és una funció contínua en K, aleshores $f(K)$ és un compacte de $\mathbb{R}^m$.

Com a conseqüència, s'obté el següent
Corol·lari. Si f és una funció real contínua definida en un compacte $K \subseteq \mathbb{R}^n$, aleshores existeixen $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ en K tals que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ per a tot $\mathbf{x} \in K$.
En altres paraules, tota funció contínua en un compacte assoleix màxim i mínim absoluts en aquest compacte.

8.3. Apèndix: Algunes corbes importants a $\mathbb{R}^2$

- **Rectes**:

  $y = mx + n$ (pendent m)

  $x = a$ (vertical)

- **Còniques**:

  - Paràboles $y = ax^2 + bx + c$ o $x = ay^2 + by + c$.
  - El·lipses amb eixos horitzontal i vertical i centre (α, β):

    $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

    Cas especial $a = b = r$: circumferència amb centre a (α, β) i radi r:

    $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

  - Hipèrboles amb eixos horitzontal i vertical i centre (α, β):

    $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

    Tenen com a asímptotes les rectes $y = \pm\frac{b}{a}x$.

  - Cas especial d'hipèrbola en què els eixos coordenats són les asímptotes:

    $$xy = k$$