Intersecció i suma

dilluns, 17 d'octubre de 2022 8:06

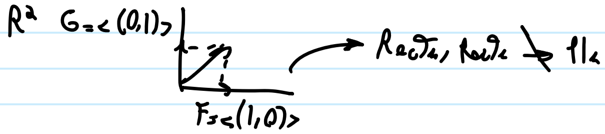
K^n, $F, G \subseteq K^n$ subespais

És subespai?

$F \cap G = \{u \in K^n : u \in F \wedge u \in G\}$ — Sí

$F \cup G = \{u \in K^n : u \in F \vee u \in G\}$ — No

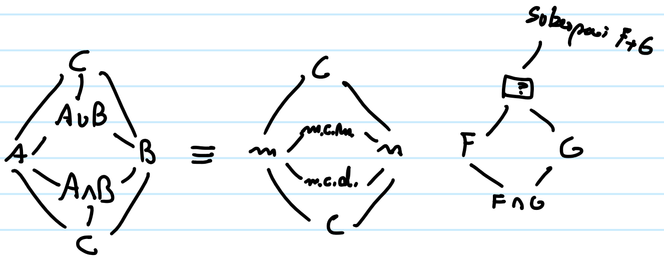
En general, la unió no és un subespai:



A, B conjunts:

$C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$

$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$



Aquesta definició, diu que de tots els subconjunts de A i de B, el més gran d'ells és la intersecció.
Dels conjunts que continguin A, B, la seva suma és el subconjunt més petit que es pot fer.

De tots els subespais continguts en F, G, el més gran possible és la intersecció de F, G.
Per la unió, cal trobar el subespai més petit que contingui a F, G, la unió no ens serveix (res ens garanteix que F U G sigui un subespai), cal fer servir la suma: F + G.

$F \cap G = \{u \in K^n : u \in F \wedge u \in G\}$

$F + G = \{u_1 + u_2 : u_1 \in F \wedge u_2 \in G\}$

Subespai de Kn més petit que conté a F i a G

Per a trobar/demostrar el subespai de la intersecció:

- $F \cap G \neq \emptyset$
- $u, v \in F \cap G \Rightarrow u + v \in F \cap G$

$\lambda \in K$, $u \in F \cap G \Rightarrow \lambda u \in F \cap G$

Demostració de l'anterior

- F, G subespais $\Rightarrow \vec{0} \in F \wedge \vec{0} \in G \Rightarrow \vec{0} \in F, G \Rightarrow F \cap G \neq \emptyset$
- $u \in F \cap G \Rightarrow u \in F \wedge u \in G \mid v \in F \cap G \Rightarrow v \in F \wedge v \in G$ $\quad u, v \in G \Rightarrow u + v \in G$ $\quad u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$
- $u \in F \cap G \Rightarrow u \in F \wedge u \in G \Rightarrow \lambda u \in F \wedge \lambda u \in G \Rightarrow \lambda u \in G \cap F$

Per a trobar/demostrar el subespai F + G

- $F + G \neq \emptyset$ $\quad \vec{0} \in F, G$
- $u, v \in F + G \Rightarrow u + v \in F + G$
- $u \in F + G, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in F + G$

Demostració de l'anterior

- F, G subespais $\Rightarrow \vec{0} \in F \wedge \vec{0} \in G \Rightarrow \vec{0} \in F + G$
- $u \in F + G \Rightarrow u = u_1 + u_2$, $\quad u_1 \in F, u_2 \in G$

$v \in F + G \Rightarrow v = v_1 + v_2$ $\quad v_1 \in F, v_2 \in G$

$\Rightarrow u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in F} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in G}$

- $u \in F + G \Rightarrow u \in F \vee u \in G \Rightarrow \lambda u \in F \vee \lambda u \in G \Rightarrow \lambda u \in F + G$