Àlgebra de límits

1.-Límits finits:

Si $\lim a_n = a$, i $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbf{R}$ aleshores

$$\begin{aligned}
&\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b \\
&\lim a_n b_n = ab \\
&\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0,\ b_n \neq 0\ \forall n \\
&\lim b_n^{a_n} = b^a \text{ si } b, b_n > 0\ \forall n \\
&\lim \log a_n = \log a \text{ si } a_n, a > 0\ \forall n
\end{aligned}$$

2.-Límits infinits:

Si $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \lim c_n = +\infty$ i $\lim d_n = 0$, $a \in \mathbf{R}$ aleshores:

$$\begin{array}{ll}
\lim(a_n \pm b_n) = \pm\infty & \lim(\pm c_n \pm b_n) = \pm\infty \\
\lim a_n b_n = \pm\infty \text{ si } a \neq 0 & \lim c_n b_n = +\infty \\
\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0 & \lim \dfrac{a_n}{d_n} = \pm\infty \\
\lim \dfrac{b_n}{a_n} = \pm\infty & \lim \dfrac{b_n}{d_n} = \pm\infty \\
\lim \dfrac{d_n}{a_n} = 0 & \lim \dfrac{d_n}{b_n} = 0 \\
\lim a_n^{b_n} = +\infty \text{ si } a > 1 & \lim a_n^{b_n} = 0 \text{ si } 0 < a < 1 \\
\lim b_n^{a_n} = +\infty \text{ si } a > 0 & \lim b_n^{a_n} = 0 \text{ si } a < 0 \\
\lim c_n^{b_n} = +\infty & \lim c_n^{-b_n} = 0
\end{array}$$

(quan en el resultat posa $\pm\infty$, vol dir que és $+\infty$, $-\infty$, o ∞ depenent de les conegudes regles del producte de signes)

3.-Indeterminacions:

$$\infty - \infty\ , 0 \cdot \infty\ , \frac{\infty}{\infty}\ , \frac{0}{0}\ , 1^{\infty}\ , 0^0\ , \infty^0$$

RESUM DE RESOLUCIÓ D'INDETERMINACIONS

$$\lim \quad (a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim \quad n^r (a_r + a_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{r-1}} + a_0 \frac{1}{n^r}) = \quad +\infty \cdot a_r = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0}}$$

Si és $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$:

- grau P(n) > grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = $+\infty$ o $-\infty$
- grau P(n) < grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = 0
- grau P(n) = grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = quocient dels coeficients dels termes de major grau

Si no: dividir numerador i denominador pel terme dominant (el infinit més gran), simplificar,…

$$\boxed{\infty - \infty}$$

Si en el límit hi ha una resta d'arrels quadrades, es multiplica i es divideix per la suma de les arrels i s'aplica: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Es pot utilitzar:

$$a_n - b_n = a_n \cdot b_n \cdot \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\boxed{1^\infty} \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

De la mateixa forma: $a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = \lim (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim \left[(1 + a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}} \right]^{b_n \cdot (a_n - 1)} =$$

$$= \quad e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}}$$

$\boxed{0\cdot\infty}$

Hi ha dues possibilitats:

i) Es passa a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

ii) Es passa a la forma 1^{∞}:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n b_n = \ln(\lim (1+a_n)^{b_n})$$

$\boxed{0^0 \text{ i } \infty^0}$

Es prenen logaritmes i es passa a la indeterminació $0\cdot\infty$

$$0^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

$$\infty^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

4 CRITERIS ÚTILS

Criteri arrel-quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

Criteri del quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l\right) \Rightarrow \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty \\ l = 1 \Rightarrow \ ?? \end{cases}$$

Criteri de l'arrel:

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \right) \Rightarrow \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty \\ l = 1 \Rightarrow \ ?? \end{cases}$$

Criteri del sandwich:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq n_0$$
$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = l\right)$$