7 L'ESPAI $\mathbb{R}^n$

(Resum teòric)

Índex

7.1. L'espai $\mathbb{R}^n$

Els elements de $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ es diuen vectors o punts, depenent del context en què es considerin.

Recordem que $\mathbb{R}^n$ té estructura d'espai vectorial sobre el cos dels nombres reals amb les operacions habituals. En aquest context, els elements de $\mathbb{R}^n$ s'anomenen vectors i els números reals, escalars. Si es volen remarcar aspectes més geomètrics, els elements de $\mathbb{R}^n$ s'anomenen punts i les seves components se solen denominar coordenades.

Donats un punt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i un vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, existeix un únic punt $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ tal que $y_i - x_i = v_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$, que és el punt de coordenades $y_i = x_i + v_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$. En aquestes condicions, és natural utilitzar les notacions $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$; el parell ordenat $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'anomena el representant de $\mathbf{v}$ d'origen $\mathbf{x}$ i d'extrem $\mathbf{y}$.

A l'espai $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ no hi ha un ordre natural, com passa a $\mathbb{R}$, i per establir alguns resultats bàsics no serveixen els mètodes i tècniques basats en l'ordre que s'acostumen a utilitzar en la recta real. Per això cal acudir a mètodes generals de la topologia dels espais mètrics, és a dir, mètodes basats en distàncies.

7.2. Normes i distàncies a $\mathbb{R}^n$

Moltes de les distàncies que intervenen en el càlcul matemàtic en general i en la IA en particular procedeixen de normes. Les definicions de norma i de distància en l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ són les següents.

Una *norma* a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que compleix les propietats següents per a qualssevol $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$: 1) $||\mathbf{x}|| \geq 0$; 2) $||\mathbf{x}|| = 0$ si, i només si, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 3) $||\lambda \cdot \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$; i 4) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

Una *distància* a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que compleix les propietats següents per a qualssevol $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si, i només si, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (separació);
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetria);
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualtat triangular).

Donada una norma $||\cdot||$ a $\mathbb{R}^n$, es diu que un vector $\mathbf{v}$ és *unitari* si $\|\mathbf{v}\| = 1$, i tenim que l'aplicació definida per $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||$ és una distància a $\mathbb{R}^n$. Així és com es defineixen algunes de les distàncies a $\mathbb{R}^n$ que més s'utilitzen en IA. Concretament, les normes i distàncies més utilitzades a $\mathbb{R}^n$ en IA són casos particulars de les p-normes i les corresponents p-distàncies o distàncies de Minkovski:

Sigui p un número real $p \geq 1$, la *p-norma* o $\mathcal{L}^p$ *norma* de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotada per $||\mathbf{x}||_p$ és

$$||\mathbf{x}||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}.$$

La *p-distància* o *p-distància de Minkovski* entre dos punts $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada per $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, és

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_p = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + \cdots + |y_n - x_n|^p}.$$

D'entre aquestes, les distàncies que més s'utilitzen són la distàcia euclidiana, d_2 i la de Manhattan, d_1. En el cas límit de p tendint a més infinit s'obté l'anomenada distància de Chebyshev, $d_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} d_p$.

La *distància euclidiana* entre dos punts $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada por $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, és

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

La *distància de Manhattan* entre dos punts $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada por $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, és

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_1 = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n|.$$

La *distància de Chebyshev* entre dos punts $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, denotada por $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, és

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_\infty = \text{máx}(|y_1 - x_1|, \cdots, |y_n - x_n|).$$

Les gràfiques de la "circumferència unitat" per a cada una d'aquestes tres distàncies són les següents:

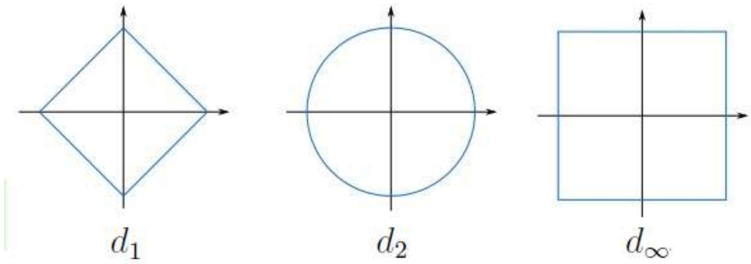

Figura 7.1: "Circumferències unitat".

Cal remarcar que també és força usual considerar qualsevol d'aquestes distàncies però ponderades, utiliztant pesos $w_1, w_2, ..., w_n$, amb $w_k > 0$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ i $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$:

$d_{2w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{w_1(y_1 - x_1)^2 + \cdots + w_n(y_n - x_n)^2}$.

$d_{1w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w_1|y_1 - x_1| + \cdots + w_n|y_n - x_n|$.

$d_{\infty w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}(w_1|y_1 - x_1|, \cdots, w_n|y_n - x_n|)$.

Us trobareu també d'altres distàncies, com la distància discreta:

$d_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{i} \quad d_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1, \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

O la distància de Hamming, definida a partir de la distància discreta d_d a $\mathbb{R}$:

$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_d(x_1, y_1) + \cdots + d_d(x_n, y_n)$.

7.3. Topologia a $\mathbb{R}^n$

En aquest apartat farem servir la distància euclidiana de $\mathbb{R}^n$, definida per $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$.

Donats un punt $\mathbf{a}$ i un número real $r > 0$, es defineix la *bola* de *centre* $\mathbf{a}$ i *radi* r, denotada per $\mathcal{B}_r(\mathbf{a})$, com el conjunt de punts la distància dels quals a $\mathbf{a}$ és menor que r:

$$\mathcal{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}.$$

Per a $n = 1$, aquest concepte coincideix amb el ja conegut d'entorn d'un punt, raó per la qual de vegades es fa servir la paraula *entorn* de $\mathbf{a}$ com a sinònim de bola de centre $\mathbf{a}$; per a $n = 2$, la bola de centre $\mathbf{a}$ i radi r és un cercle de centre $\mathbf{a}$ i radi r, exclosa la circumferència.

Sigui A un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Un punt $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^n$ és un *punt frontera* del conjunt A si tot entorn de $\mathbf{a}$ conté punts del conjunt A i punts que no són del conjunt A. La *frontera* del conjunt A és el conjunt format por tots els punts frontera del conjunt A, i es denota per $\mathcal{F}(A)$. Notem que un punto frontera del conjunt A pot pertànyer o no al conjunt A, per tant, en general, $\mathcal{F}(A)$ pot contenir punts del conjunt A i punts que no són del conjunt A.

Un conjunt A és *tancat* si conté tots els punts de la seva frontera, és a dir, si $\mathcal{F}(A) \subseteq A$; i un conjunt és *obert* si no conté cap punt de la seva frontera, és dir, si $A \cap \mathcal{F}(A) = \emptyset$. (Subratllem l'obvietat que abunden els conjunts que no són ni oberts ni tancats.)

El conjunt $\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A)$ es denomina *adherència* del conjunt A; un conjunt A és tancat si, i només si, $A = \overline{A}$. El conjunt $\overset{\circ}{A} = A \setminus \mathcal{F}(A)$ es denomina *interior* del conjunt A; veiem que A és obert si, i només si, $A = \overset{\circ}{A}$. Els conjunts oberts poden també caracteritzar-se per la següent propietat: un conjunt A és obert si, i només si, tot punt del conjunt A té un entorn contingut a A.

Un conjunt A està *fitat* si està contingut en alguna bola; equivalentment, si està contingut en un producte de intervals.

Si un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és tancat i fitat, es diu que és *compacte*. El concepte de compacitat és de gran importància en relació amb la continuïtat de funcions.

Un punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és un *punt de acumulació* de un conjunt A si tota bola centrada en $\mathbf{a}$ conté algun punt del conjunt A diferent de $\mathbf{a}$. Això és equivalent a dir que tota bola centrada en $\mathbf{a}$ conté infinits punts del conjunt A.