TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (*2 punts*) Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ que depèn de $x \in \mathbb{R}$ definida per:

$$a_n = \frac{(3x+2)^n + 3n^2 + 2}{4^n + 3n + 3}, \; n \geq 1.$$

   a) Trobeu els valors de x pels quals la successió és convergent.
   b) Trobeu el suprem, l'ínfim, el màxim (si s'escau) i el mínim (si s'escau) del conjunt $\{x \in \mathbb{R} : (a_n)_{n\geq 1} \text{ és convergent}\}$.

2. (*1 punt*) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt[4]{n^3}) + 3}{\ln(\sqrt[5]{n^2}) + 3\ln(\sqrt{n^3}) + 2} \right).$$

3. (*1 punt*) Demostreu la igualtat següent per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$. :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

4. (*2 punts*)
   a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punt $x_0 = 1$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.
   b) Utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat anterior, calculeu el valor aproximat de $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ i doneu una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació.

5. (*4 punts*)
   a) Calculeu el límit $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$.
   b) Determineu el caràcter de la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$.
   c) Doneu una fita superior de l'error absolut en aproximar e^a pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x) = e^x$ centrat en $x_0 = 0$, en funció de N i a per a tot $N \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$.
   d) Calculeu el valor de la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$ i justifiqueu la resposta.

1. (*2 punts*) Sigui $a \in (0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ que depèn de $x \in \mathbb{R}$ definida per:

$$a_n = \frac{(3x+2)^n + 3n^2 + 2}{4^n + 3n + 3}, \ n \geq 1.$$

   a) Trobeu els valors de x pels quals la successió és convergent.

   b) Trobeu el suprem, l'ínfim, el màxim (si s'escau) i el mínim (si s'escau) del conjunt $\{x \in \mathbb{R} : (a_n)_{n\geq 1} \text{ és convergent}\}$.

SOLUCIÓ:

a) Calculem el límit de la successió:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3x+2)^n + 3n^2 + 2}{4^n + 3n + 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{3x+2}{4}\right)^n + \dfrac{3n^2}{4^n} + \dfrac{2}{4^n}}{1 + \dfrac{3n}{4^n} + \dfrac{3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3x+2}{4}\right)^n$$

$$\begin{cases} = \nexists \ (\infty \text{ sense signe}), & \text{si} \quad \dfrac{3x+2}{4} < -1; \\ \nexists, & \text{si} \quad \dfrac{3x+2}{4} = -1; \\ = 0, & \text{si} \quad -1 < \dfrac{3x+2}{4} < 1; \\ = 1, & \text{si} \quad \dfrac{3x+2}{4} = 1; \\ = +\infty, & \text{si} \quad \dfrac{3x+2}{4} > 1. \end{cases}$$

Per tant la successió és convergent si i només si $-1 < \dfrac{3x+2}{4} \leq 1$, és a dir $\mathbf{x} \in \left(\mathbf{-2}, \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right]$.

b) El conjunt és $\{x \in \mathbb{R} : (a_n)_{n\geq 1} \text{ és convergent}\} = \left(-2, \dfrac{2}{3}\right]$ i, per tant el seu **suprem i màxim** és el $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$, el seu **ínfim** és el $\mathbf{-2}$, i aquest conjunt **no té mínim**.

2. (*1 punt*) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt[4]{n^3})+3}{\ln(\sqrt[5]{n^2})+3\ln(\sqrt{n^3})+2}\right).$$

SOLUCIÓ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt[4]{n^3})+3}{\ln(\sqrt[5]{n^2})+3\ln(\sqrt{n^3})+2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{4}\ln n+3}{\left(\frac{2}{5}+3\frac{3}{2}\right)\ln n+2}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{\ln n}}{\left(\frac{2}{5}+3\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{\ln n}}\right)=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4+45}{10}}=\mathbf{\frac{15}{98}}.$$

3. (*1 punt*) Demostreu la igualtat següent per a qualsevol $x\in\mathbb{R}$. :

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

SOLUCIÓ: Per a qualsevol $x\in\mathbb{R}$ es té:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$\frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^0+e^{-2x})}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

4. (*2 punts*)

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en el punt $x_0=1$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat anterior, calculeu el valor aproximat de $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ i doneu una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació.

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Tayor de grau 2 d'una funció $f(x)$ en el punt $x_0=1$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange són, respectivament:

$$P_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \quad \text{i} \quad R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3,$$

per a cert c entre 1 i x.

Com que $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x)=\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}\,x^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x)=\frac{10}{27}\,x^{-\frac{8}{3}}$, i $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{3}$, $f''(1)=-\frac{2}{9}$, $f'''(c)=\frac{10}{27\,c^{\frac{8}{3}}}$, tenim:

$P_2(x) = 1 + \dfrac{1}{3}\,(x-1) - \dfrac{1}{9}\,(x-1)^2$ i $R_2(x) = \dfrac{5}{81\,c^{\frac{8}{3}}}\,(x-1)^3$, amb $1 < c < \dfrac{3}{2}$.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq P_2\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}-1\right) - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{41}{36} \simeq$ 1.1389.

Càlcul de la fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació:

$$\epsilon = |R_2(x)| = \left|\frac{5}{81\,c^{\frac{8}{3}}}\,\left(\frac{3}{2}-1\right)^3\right| = \left|\frac{5}{2^3 81\,c^{\frac{8}{3}}}\right| \overset{(1<c<\frac{3}{2})}{<} \frac{5}{2^3 81} = \tfrac{5}{648} \simeq 0.0077.$$

5. (*4 punts*)

   a) Calculeu el límit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$.

   b) Determineu el caràcter de la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$.

   c) Doneu una fita superior de l'error absolut en aproximar e^a pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x) = e^x$ centrat en $x_0 = 0$, en funció de N i a per a tot $N \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$.

   d) Calculeu el valor de la suma de la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n}{n!}$ per a tot $a \in \mathbb{R}$ i justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ: Si $a \in \mathbb{R}$ tenim:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = \mathbf{0}$ **per a tot a** $\in \mathbb{R}$ pel criteri del quocient, ja que:

Sigui $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, aleshores $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = 0 < 1$.

b) Sigui $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, hem vist que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1$, aleshores, pel criteri del quocient, la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\dfrac{a^n}{n!}\right|$ és convergent per a tot $a \in \mathbb{R}$, i, per tant, la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n}{n!}$ és **convergent per a tot a** $\in \mathbb{R}$.

c) Siguin $N \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$. L'error absolut en aproximar e^a pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x) = e^x$ centrat en $x_0 = 0$ és el valor absolut del residu d'aquest polinomi de Taylor, és a dir: $\left|R_N(a) = \dfrac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}\,a^{N+1}\right|$, per at cert c entre a i 0. Aleshores: ; $\left|R_N(a) = \dfrac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}\,a^{N+1}\right| = \dfrac{e^c\,|a^{N+1}|}{(N+1)!}$, que és creixent en c. Aleshores:

Si $a < 0$, aleshores $a < c < 0$ i una fita de l'error serà $e^0\,\dfrac{|a^{N+1}|}{(N+1)!} = \dfrac{|\mathbf{a^{N+1}}|}{(\mathbf{N+1})!}$.

Si $0 < a$, aleshores $0 < c < a$ i una fita de l'error serà $\mathbf{e^a}\ \dfrac{|\mathbf{a^{N+1}}|}{(\mathbf{N+1})!}$.

(També es pot dir que en ambdues situacions $< \mathbf{e}^{|\mathbf{a}|}\ \dfrac{|\mathbf{a^{N+1}}|}{(\mathbf{N+1})!}$).

d) El valor de la suma de la sèrie és $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} - 1 = e^a - 1$ per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$. En efecte:

$$\lim_{N\to+\infty} \left| e^a - \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!} \right| \overset{(1)}{<} \lim_{n\to+\infty} e^{|a|}\ \frac{|a^{N+1}|}{(N+1)!} \overset{apartat\ a)}{=} 0 \Longrightarrow \left| e^a - \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!} = \mathbf{e^a - 1}.$$

(1) S'utilitza l'apartat c). També es poden fer els casos $a < 0$ i $a > 0$ per separat: en el primer cas s'afita el límit per $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a^{N+1}|}{(N+1)!}$ i en el segon per $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^a\ \frac{|a^{N+1}|}{(N+1)!}$; tots dos són 0 per l'apartat a).