GIA: Primera prova avaluable

Albert Campos Gisbert

3 d'octubre de 2022

1. **Trobeu tots els valors que pren l'expressió** $(1+\sqrt{3}i)^n + (1-\sqrt{3}i)^n$**, si n és un nombre natural.**

   Si $z_1 = (1+\sqrt{3}i)^n$ i $z_2 = (1-\sqrt{3}i)^n$, podem dir que $z_2 = \overline{z}_1$ ja que $Re(\overline{z}_1) = Re(z_1)$ i $Im(z_1) = -Im(\overline{z}_1)$;

   Tenint en compte que es tracta de la suma d'un nombre complex i el seu conjugat, podem aplicar per les propietats dels conjugats el següent:

$$z + \overline{z} = 2Re(z) \longrightarrow 2r^n_{\alpha n}$$

   Desenvolupem l'expressió:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \longrightarrow |z| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = arctag(\tfrac{b}{a}) \longrightarrow Arg(z) = arctag(\sqrt{3}) = \tfrac{\pi}{3}$$

$$2(r^n)_{\alpha n} = 2(2^n)_{\frac{\pi n}{3}} = 2^{n+1}_{\frac{\pi n}{3}}$$

   Ara si ho expressem en trigonomètrica:

$$r\alpha = re^{i\alpha} \longrightarrow e^{i\alpha} = cos(\alpha) + isin(\alpha)$$

$$2^{n+1}_{\frac{\pi n}{3}} = 2^{n+1}e^{\frac{i\pi n}{3}} \longrightarrow 2^{n+1}_{cos(\frac{\pi n}{3})}$$

2. **Calculeu el producte de les arrels n-èsimes de la unitat, on $n \geq 2$ és un nombre natural. Pista: Podeu usar la fórmula $\sum_{k=1}^{m} k = m\frac{m+1}{2}$**

Per definició sabem que les arrels n-èsimes d'un nombre complex es defineixen com:

$$\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$$

Al ser arrels n-èsimes de la unitat, sabem que $z = 1_0$, per tant podem dir que:

$$\sqrt[n]{1}e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$k = 0, 1, 2 \ldots n-1;$

Llavors podem expressar el producte de les arrels n-èsimes:

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} 1_{\frac{2k\pi}{n}} = 1_{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} = 1_{\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = 1_{\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k}$$

Seguint la igualtat que sabem $\sum_{k=1}^{m} k = m\frac{m+1}{2}$:

$$1_{\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = 1_{\frac{(n-1)n}{2}\frac{2\pi}{n}} = 1_{(n-1)\pi}$$