Estructura vectorial de $\mathbb{K}^n$

1 Siguin $u = (3, -1, 2), v = (4, 0, -8)$ i $w = (6, -1, 4)$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Calculeu:

1) $u - v$; 2) $5v + 3w$; 3) $5(v + 3w)$ 4) $(2w-u)-3(2v+u)$.

Solució:

1) $u - v = (3, -1, 2) - (4, 0, -8) = (-1, -1, 10)$.

2) $5v + 3w = 5(4, 0, -8) + 3(6, -1, -4) = (38, -3, -52)$.

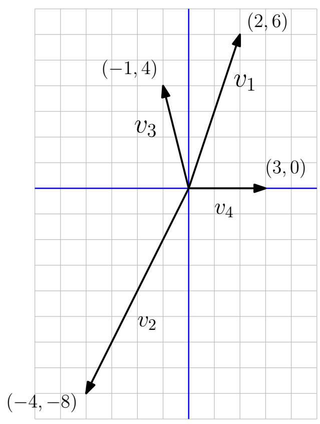
3) $5(v + 3w) = 5v + 15w = 5(4, 0, -8) + 15(6, -1, -4) = (110, -15, -100)$.

4) $(2w-u)-3(2v+u) = -4u-6v+2w = -4(3, -1, 2)-6(4, 0, -8)+2(6, -1, -4) = (-24, 2, 22)$.

2 Dibuixeu en el pla els vectors següents de $\mathbb{R}^2$.

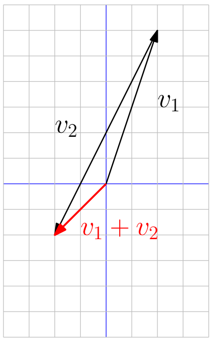
1) $v_1 = (2, 6)$; 2) $v_2 = (-4, -8)$; 3) $v_3 = (-1, 5)$; 4) $v_4 = (3, 0)$.

Solució:

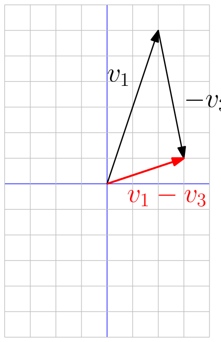


3 Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu v_1+v_2, v_1-v_3 i v_2-v_4 gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

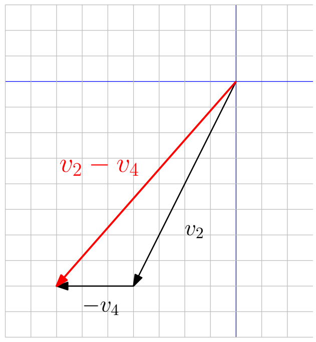
Solució: $v_1 + v_2 = (-2, -2)$, $v_1 - v_3 = (3, 1)$ i $v_2 - v_4 = (-7, -8)$.



$v_1 + v_2 = (-2, -2)$



$v_1 - v_3 = (3, 1)$



$v_2 - v_4 = (-7, -8)$

4 Siguin $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ i $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ amb $\alpha \neq 0$. Suposem que es compleix la relació $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Escriviu els vectors u, $u - v$ i $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w.

Solució: Com que $\alpha \neq 0$, es pot aïllar u de la condició de l'enunciat i s'obté:

$$u = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w.$$

Per tal d'obtenir ara $u - v$ en funció només de v, w només cal substituir aquesta expressió de u a $u - v$ i agrupar els termes en v i en w, la qual cosa dona:

$$u - v = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w - v = -\frac{\beta + \alpha}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w.$$

Finalment, per tal d'obtenir $u + \alpha^{-1}\beta v$ en termes de v, w fem el mateix:

$$u + \alpha^{-1}\beta v = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w + \alpha^{-1}\beta v = -\frac{\gamma}{\alpha} w.$$

5 Proveu que el vector $u = (0, 3, 5, 1) \in \mathbb{R}^4$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt següent almenys de dues maneres diferents.

$$T = \{(1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Solució: Si escrivim el vector u com a combinació lineal dels vectors de T, obtenim el sistema d'equacions següent, que és compatible indeterminat, donat que el rang de la matriu del sistema és 3 i el rang de la matriu ampliada és 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solució s'expressa com:

$$(x, y, z, t) = (-2, 2, 1, 0) + s \cdot (1, -1, 0, 1).$$

Dues solucions: fem $s = 0$ i $s = 1$ i obtenim: $(-2, 2, 1, 0)$ i $(-1, 1, 1, 1)$. Per tant, el vector u es pot expressar com:

$$\begin{aligned} u = (0, 3, 5, 1) &= -2 \cdot (1, 0, -1, 0) + 2 \cdot (1, 1, 1, 0) + (0, 1, 1, 1) \\ &= -(1, 0, -1, 0) + (1, 1, 1, 0)(0, 1, 1, 1) + (0, 1, 2, 0). \end{aligned}$$

6 Per a quins valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ el vector $u = (1, 5, a) \in \mathbb{R}^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt $\{(3, 1, -1), (0, 7, -1), (-1, 2, 0)\}$?

Solució: És equivalent a dir que el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - z & = & 1 \\ x + 7y + 2z & = & 5 \\ -x - y & = & a \end{array} \right.$$

és compatible. Tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & a \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 5+a \\ 0 & -21 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & (5+a)/2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & (5+a)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - (5+a)/2 \end{pmatrix}.$$

El sistema és compatible si i només si el rang de la matriu del sistema coincideix amb el rang de la matriu ampliada i això passa si i només si $a = -1$. Finalment, la solució és $x = 1 - y$, $z = 2 - 3y$, amb y lliure.

7 Donats els vectors $u = (1, 1, 2)$ i $v = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, trobeu quina condició han de complir les components d'un vector (x, y, z) per a que pertanyi al subespai $F = \langle u, v \rangle$.

Solució: Per definició, $(x, y, z) \in F$ si i només si (x, y, z) és combinació lineal de u, v; és a dir, si i només si existeixen escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 2) + \mu(0, 1, 1).$$

Aquesta equació vectorial en λ, μ equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} \lambda &= x \\ \lambda + \mu &= y \\ 2\lambda + \mu &= z \end{aligned}$$

Per tant, el vector (x, y, z) és de F si i només si aquest sistema d'equacions lineals en λ, μ té solució, i el que busquem és la condició o condicions de compatibilitat d'aquest sistema. La matriu ampliada, un cop esglaonada, és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right).$$

Per tant, el sistema és compatible si i només si $z - y - x = 0$, que és la condició buscada per tal que el vector $(x, y, z) \in F$.

8 Siguin $F = \langle(1, -1, 1), (0, 1, -1)\rangle$ i $G = \langle(1, 0, 0), (1, -2, 1)\rangle$ subespais de $\mathbb{R}^3$.

1) Demostreu que $F = G$.
2) Sigui $e = (9, \sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2})$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen F.

Solució:

1) Cal provar les dues inclusions $F \subseteq G$ i $G \subseteq F$. Per tal de provar qualsevol d'aquestes inclusions, per exemple que $F \subseteq G$, n'hi ha prou amb provar que els generadors de F pertanyen a G, que vol dir que són combinació lineal dels generadors de G. En efecte, si és així, un vector qualsevol de F, en ser una combinació lineal dels generadors de F, és una combinació lineal de combinacions lineals dels generadors de G, i això acaba sent una combinació lineal dels generadors de G i, per tant, també un element de G. Anàlogament, la inclusió $G \subset F$ queda provada comprovant simplement que els generadors de G són de F. Comprovem les dues coses.

   - Els generadors de F són combinació lineal dels generadors de G: en efecte, només cal comprovar que les equacions vectorials:

   $$(1, -1, 1) = a(1, 0, 0) + b(1, -2, 2), \quad (0, 1, -1) = c(1, 0, 0) + d(1, -2, 2)$$

   en a, b, c, d com a incògnites tenen solució. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i analitzant-los s'obté que efectivament tenen solució i és:

   $$(1, -1, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, -2, 2), \quad (0, 1-, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 0) - (1, -2, 2).$$

   - Els generadors de G són combinació lineal dels de F: ara cal resoldre les equacions vectorials:

   $$(1, 0, 0) = a'(1, -1, 1) + b'(0, 1, -1), \quad (1, -2, 2) = c'(1, -1, 1) + d'(0, 1, -1)$$

   en a', b', c', d' com a incògnites. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i resolent-los s'obté que:

   $$(1, 0, 0) = (1, -1, 1) + (0, 1, -1), \quad (1, -2, 2) = (1, -1, 1) - (0, 1, -1).$$

Alternativament, com que només ens interessa saber si els generadors de F són combinació lineal dels de G, i els de G ho són dels de F, sense necessitat de trobar quines combinacions lineals són, n'hi ha prou amb estudiar el rang de la matriu que té per columnes els quatre vectors, els dos generadors de F més els dos generadors de G. Esglaonant-la s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, és matriu de rang 2. Però el rang d'una matriu dóna el nombre màxim de columnes linealment independents. Com que les dues últimes columnes (generadors de G) ja ho són, deduïm que les dues primeres (generadors de F) són necessàriament combinació lineal de les dues últimes i, per tant, que $F \subseteq G$. Anàlogament, com que les dues primeres columnes (generadors de F) també són linealment independents, deduïm que les dues últimes (generadors de G són combinació lineal de les primeres i, per tant, que també $G \subseteq F$.

2) Per tal de veure que $e \in F$ només cal comprovar que e és combinació lineal dels generadors de F, cosa que es pot fer comprovant que la matriu que té per columnes els dos generadors de F més el vector e és de rang 2. Però com que ens demanen també trobar quina combinació lineal és, ho fem plantejant directament l'equació vectorial:

$$(9, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}) = a(1,-1,1) + b(0,1,-1)$$

en a, b com a incògnites i resolent el corresponent sistema d'equacions lineals. Aquest és el de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & -1 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant:

$$e = (9, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}) = 9(1,-1,1) + (8+\sqrt{2})(0,1,-1).$$

Anàlogament, es pot comprovar que e també es pot obtenir com la combinació lineal dels generadors de G:

$$e = (9, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}) = \frac{17+\sqrt{2}}{2}(1,0,0) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1,-2,2).$$

9 Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents on s'indica.

1) $\{(1,2,3),(3,6,8)\}$ a $\mathbb{R}^3$;

2) $\{(2,-3,1),(3,-1,5),(1,-4,3)\}$ a $\mathbb{R}^3$;

3) $\{(5,4,3),(3,3,2),(8,1,3)\}$ a $\mathbb{R}^3$;

4) $\{(4,-5,2,6),(2,2,-1,3),(6,-3,3,9),(4,-1,5,6)\}$ a $\mathbb{R}^4$;

5) $\{(1,0,0,2,5),(0,1,0,3,4),(0,0,1,4,7),(2,-3,4,11,12)\}$ a $\mathbb{R}^5$.

Solució: En cada cas hem de calcular el rang de la matriu associada als vectors.

1) El rang de la matriu és 2 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\\ 3 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

2) El rang de la matriu és 3 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 0 & 13 & 7\\ 0 & 14 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 0 & 13 & 7\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 33\end{pmatrix}$$

3) En aquest cas, el rang de la matriu associada és 2 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 8\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}5 & 3 & 8\\ -1 & 0 & -7\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 3 & -27\\ 0 & 2 & -18\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -9\\ 0 & 1 & -9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A més, la relació de dependència lineal és:

$$-7(5,4,3) + 9(3,3,2) + (8,1,3) = (0,0,0).$$

4) El rang de la matriu associada és 3 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 6 & 4\\ -5 & 2 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 9 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ -5 & 2 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 9 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ -5 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ -5 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1 & 4 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 9 & 9 & 8\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 8/9\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 8/9\\ 0 & 0 & 2 & 43/9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5) El rang de la matriu associada és 4 i, per tant, són linealment independents:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 11\\ 5 & 4 & 7 & 12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 4 & 7 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 16\\ 0 & 0 & 7 & 14\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -14\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

10 A $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors $(1,1,0,a)$, $(3,-1,b,-1)$ i $(-3,5,a,-4)$. Determineu a i b per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector $(0,0,0,0)$ com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

Solució: Escrivim la matriu associada als vectors i l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & b & a \\ 0 & -1-3a & -4+3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & b & a \\ 0 & -1-3a & -4+3a \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -4+3a-2(1+3a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -6-3a \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -6-3a \end{pmatrix}$$

Ara, els vectors són linealment dependents si i només si el rang d'aquesta matriu és més petit que 3 i això passa si i només si $a=-2b$ i $a=-2$; és a dir, si i només si $a=-2$ i $b=1$. La solució del sistema homogeni en aquest cas és:

$$(x,y,z) = s\cdot(-3,2,1).$$

Una solució és: $-3u_1+2u_2+u_3=(0,0,0,0)$.

11 Siguin $u,v,w\mathbb{R}^n$. Demostreu que el conjunt de vectors $\{u-v, v-w, w-u\}$ és linealment dependent.

Solució: Cal provar que existeix una combinació lineal dels tres vectors no trivial (és a dir, amb almenys un coeficient diferent de zero) que dóna el vector zero o, equivalentment, que almenys un dels vectors es pot obtenir com a combinació lineal de la resta (no que qualsevol d'ells és combinació lineal dels altres). Ara, per les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial es té que:

$$u-v = u-w+w-v = -(w-u)-(v-w) = (-1)(w-u)+(-1)(v-w).$$

12 Si $\{e_1,e_2,\dots,e_r\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent de $\mathbb{R}^n$, és cert que qualsevol e_i es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

Solució: No és cert. La condició de linealment dependents equival a què hi hagi algun vector que és combinació lineal de la resta, però no a què ho sigui qualsevol. Per exemple, a $\mathbb{R}^3$ els vectors $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,1)$ i $e_3=(0,2,2)$ són linealment dependents, ja que $0\cdot e_1+2\cdot e_2-e_3=0$, i efectivament e_3 és combinació lineal de e_1,e_2 perquè és $e_3=0\cdot e_1+2\cdot e_2$.

Però el vector e_1 no es pot obtenir com a combinació lineal de e_2, e_3 ja que una combinació lineal genèrica d'aquests dos vectors és:

$$ae_2 + be_3 = a(0,1,1) + b(0,2,2) = (a+2b)(0,1,1) \neq (1,0,0)$$

siguin quins siguin els reals a, b.

13 Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors a $\mathbb{R}^n$ són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

1) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores el conjunt $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és linealment independent.
2) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \notin \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, aleshores $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és linealment independent.
3) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és un conjunt generador.
4) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $e_r \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$, aleshores $\{e_1, \dots, e_{r-1}\}$ és un conjunt generador.
5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

Solució:

1) No és cert. Per exemple, si B és la base canònica de $\mathbb{R}^r$, que en particular és una família linealment independent de vectors, qualsevol vector $v \in \mathbb{R}^r$ tal que $v \notin B$ és combinació lineal dels vectors de B i, per tant, $B \cup \{v\}$ és un conjunt linealment dependent.
2) És cert. En efecte, suposem que la família ampliada és linealment dependent. Hi haurà aleshores una combinació lineal no trivial de tots ells que donarà el vector zero, és a dir, existiran $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_v$ no tots nuls tals que:

   $$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_v v = 0_E.$$

   De fet, com que $\{e_1, \dots, e_r\}$ és per hipòtesi linealment independent, ha de ser necessàriament $\lambda_v \neq 0$. Per tant, passant el terme $\lambda_v v$ a l'altra banda, i aïllant v tenim v com a combinació lineal del conjunt inicial de vectors, la qual cosa es contradiu amb la hipòtesi que $v \notin \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$.
3) És cert, ja que podem expressar qualsevol vector d'E com a combinació lineal del conjunt anterior sense necessitat d'utilitzar el vector v.
4) També és cert ja que qualsevol vector v combinació lineal de tots els e_i's també ho és de només els $r-1$ primers vectors. En efecte, si:

   $$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r e_r,$$

   només cal substituir e_r per la combinació lineal corresponent dels $r-1$ primers vectors $e_r = a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}$ (una tal combinació lineal existeix perquè estem suposant que

$e_r \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$) i queda que:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r (a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}) \\ &= (\lambda_1 + a_1 \lambda_r) e_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} + a_{r-1} \lambda_r) e_{r-1}, \end{aligned}$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial.

5) No, ja que aquest pot ser el vector zero, i qualsevol combinació lineal del vector zero, trivial o no, és el vector zero.

14 Considereu el conjunt de vectors $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,4), (0,0,0,2)\}$.

1) Demostreu que formen una base de $\mathbb{R}^4$.
2) Trobeu les coordenades del vector $(1, 0, 2, -3)$ en aquesta base.
3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari (x, y, z, t) en aquesta base.

Solució:

1) Com que estem en dimensió 4, i són 4 vectors, n'hi ha prou amb veure que són linealment independents (en general, n vectors linealment independents en un espai de dimensió n són automàticament base). Això vol dir comprovar que la matriu que els té per columnes és de rang 4. Ara, esglaonant aquesta matriu s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

així que és de rang 4. Per tant, són una base.

2) Busquem els escalars $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(1, 0, 2, -3) = a\,(1, 1, 0, 0) + b\,(0, 0, 1, 1) + c\,(1, 0, 0, 4) + d\,(0, 0, 0, 2).$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant les seves components amb les del vector de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a + c &= 1 \\ a &= 0 \\ b &= 2 \\ b + 4c + 2d &= -3, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = -9/2$, que són les coordenades buscades.

3) Cal repetir el mateix d'abans però substituint el vector anterior per un de genèric, de manera que l'equació vectorial a resoldre ara és:

$$(x, y, z, t) = a\,(1, 1, 0, 0) + b\,(0, 0, 1, 1) + c\,(1, 0, 0, 4) + d\,(0, 0, 0, 2)$$

i el sistema d'equacions lineals equivalent és:

$$\begin{aligned} a+c &= x \\ a &= y \\ b &= z \\ b+4c+2d &= t, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = y$, $b = z$, $c = x - y$ i $d = (t - z - 4(x - y))/2 = (t + 4y - 4x - z)/2$.

15 Considereu el subespai $F = \langle(0,1,1),(4,1,-1),(2,1,0)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base de F i la condició (en forma de sistema d'equacions lineals homogènies) que ha de satisfer un vector (x,y,z) per pertànyer a F.

Solució: Escalonant la matriu associada als vectors generadors de F obtenim que els dos primers vectors formen una base de F: $B_F = \{(2,1,0),(0,1,1)\}$.

Sigui $u = (x,y,z)$ un vector arbitrari. Perquè $u \in F$, la matriu formada pels dos vectors de la base de F i u ha de tenir rang 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x-2y+2z \end{pmatrix}.$$

És a dir, s'ha de satisfer que $x - 2y + 2z = 0$.

16 Considereu els subespais següents de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \langle(1,-1,1,0),(0,1,-1,1),(1,0,0,-1)\rangle, \quad G = \langle(1,0,0,0),(1,-2,2,0),(0,1,-1,1)\rangle.$$

Proveu que $F = G$ i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors $(\sqrt{3},\sqrt{2}-1,1-\sqrt{2},0)$ i $(0,1,0,0)$ pertany a F i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

Solució: Per comprovar que són el mateix, expressem tots els vectors generadors de F com a combinació lineal dels generadors de G:

$$\begin{aligned} (1,-1,1,0) &= 1/2(1,0,0,0) + 1/2(1,-2,2,0) \\ (1,0,0,-1) &= 1/2(1,0,0,0) + 1/2(1,-2,2,0) + (0,1,-1,1) \\ (1,0,0,0) &= 1/2(1,-1,1,0) + 1/2(0,1,-1,1) + 1/2(1,0,0,-1) \end{aligned}$$

i tots els vectors generadors de G com a combinació lineal dels generadors de F:

$$\begin{aligned} (0,1,-1,1) &= (0,1,-1,1) \\ (1,-2,2,0) &= 3/2(1,-1,1,0) - 1/2(0,1,-1,1) - 1/2(1,0,0,-1). \end{aligned}$$

Tenim que $(0,1,0,0) \notin F$ i $v = (\sqrt{3},\sqrt{2}-1,1-\sqrt{2},0) \in F$. A més:

$$\begin{aligned} v_{B_F} &= ((1-\sqrt{2}+\sqrt{3})/2, (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2, (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2), \\ v_{B_G} &= ((\sqrt{2}-1)/2+\sqrt{3}, (1-\sqrt{2})/2, 0). \end{aligned}$$

17 Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que el conjunt $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també és una base de $\mathbb{R}^3$.

Solució: La matriu associada als vectors donats en la base donada és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

que té rang 3. Per tant, els vectors donats formen una base de $\mathbb{R}^3$.

18 Trobeu una base del subespai E de $\mathbb{R}^5$ següent i completeu-la a una base de $\mathbb{R}^5$.

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4,\ x_5 = x_2 - x_1\}.$$

Solució: En general, la dimensió i una base de qualsevol subespai de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ descrit com el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni, com és el cas de E, venen donades pel nombre de graus de llibertat del sistema i per les solucions que apareixen a la forma paramètrica de la solució general del sistema, respectivament.

En aquest cas, el sistema d'equacions lineals homogeni és el de matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que té rang 2. Per tant, la dimensió de E és $n - r = 5 - 2 = 3$. Les variables lliures del sistema (les corresponents a les columnes que no tenen pivot) són x_3, x_4, x_5. Per tant, per a trobar la solució general del sistema (expressar les variables no lliures x_1, x_2 en termes només de les lliures x_3, x_4, x_5) cal resoldre el sistema triangulat:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3 + x_4 \\ -2x_2 &= -x_3 - x_4 - x_5 \end{aligned}$$

fent marxa enrere. La solució general que s'obté és:

$$x_1 = -x_5, \quad x_2 = x_3 + x_4 + x_5,$$

que en forma paramètrica és

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3(0, 1, 1, 0, 0) + x_4(0, 1, 0, 1, 0) + x_5(-1, 1, 0, 0, 1).$$

Per tant, una base de E és $B = \{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 1)\}$. Evidentment, aquesta només és una solució, ja que un espai o subespai vectorial té moltes bases diferents.

Per tal d'obtenir una base de tot $\mathbb{R}^5$, que estarà formada per 5 vectors linealment independents, cal buscar dos vectors més de $\mathbb{R}^5$ que, juntament amb la base de E anterior, encara formin un sistema linealment independent. Això vol dir trobar dues files que, afegides a la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

doni una matriu de rang 5. És clar que afegint les files 0 0 0 1 0 i 0 0 0 0 1 la matriu resultant té rang 5, ja que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és de rang 5. Per tant, una base de $\mathbb{R}^5$ formada a partir de la base B és:

$$B' = \{(0,1,1,0,0), (0,1,0,1,0), (-1,1,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}.$$

19 Per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$ els vectors $(\lambda, 0, 1, \lambda), (\lambda, 1, 2, 1), (1, 0, \lambda, \lambda)$ generen un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2?

Solució: En general, la dimensió d'un subespai qualsevol de $\mathbb{R}^n$ descrit per generadors és igual al rang de la matriu que té els vectors generadors per columnes, ja que el rang dóna el nombre màxim de generadors linealment independents. Per tant, busquem λ tal que:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 2.$$

Per tal de trobar el rang d'aquesta matriu l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Per tal de continuar, distingim ara els casos $\lambda \neq 1$ i $\lambda = 1$. En el primer cas, es pot dividir l'última fila per $\lambda - 1$ i queda que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

que és clarament una matriu de rang 3 qualsevol que sigui $\lambda \neq 1$. En el cas $\lambda = 1$ queda la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que és de rang 2. Per tant, només quan $\lambda = 1$ el subespai generat és de dimensió 2. Per a qualsevol altre valor, és de dimensió 3.

20 Doneu una base i la dimensió dels subespais E, F i $E \cap F$ en els casos següents:

1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z\}$ i $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0\}$ com a subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$.
2) $E = \langle(1, 1, -1), (2, 0, -1), (0, 2, -1)\rangle$ i $F = \langle(1, 0, -1), (2, 3, 0), (4, 3, -2)\rangle$ com a subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$.
3) $E = \{(a, a + 3b, 2a - b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ i $F = \{(-2a, b, 0, 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ com a subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$.

Solució:

1) Un vector de E és de la forma $(x, x, 2x) = x \cdot (1, 1, 2)$. Per tant: $E = \langle(1, 1, 2)\rangle$ i $\dim(E) = 1$. Anàlogament, un vector de F és de la forma (resolent el sistema homogeni que defineix F) $(-z, 2z, z) = z \cdot (-1, 2, 1)$. Per tant: $F = \langle(-1, 2, 1)\rangle$ i $\dim(F) = 1$.

   El subespai intersecció està definit pels vectors (x, y, z) que són solució del sistema d'equacions:

   $$2x = 2y = z, \qquad x + y = z, \quad 3x + y + z = 0.$$

   És fàcil veure que aquest sistema és compatible i determinat i que té solución única $x = y = z = 0$. Per tant, $E \cap F = \{(0, 0, 0)\}$.

2) Es comprova fàcilment que el rang de les matrius següents és 2 i que les dues primeres columnes són linealment independents:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Per tant, $E = \langle(1, 1, -1), (2, 0, -1)\rangle$ i $\dim(E) = 2$; i anàlogament, $F = \langle(1, 0, -1), (2, 3, 0)\rangle$ i $\dim(F) = 2$.

   Sigui $(x, y, z) \in E \cap F$. Llavors podem escriure:

   $$(x, y, z) = \lambda \cdot (1, 1, -1) + \mu \cdot (2, 0, -1) = \alpha \cdot (1, 0, -1) + \beta \cdot (2, 3, 0).$$

   D'aqui resulta un sistema d'equacions amb incògnites $\lambda, \mu, \alpha, \mu$. L'objectiu és trobar una relació entre λ i μ o una relació entre α i β. Per exemple, en aquest cas trobem que $\alpha = 5\beta$. Per tant, un vector de la intersecció s'expressa com:

   $$(x, y, z) = 5\beta \cdot (1, 0, -1) + \beta \cdot (2, 3, 0) = \beta \cdot (7, 3, -5).$$

   Per tant, $E \cap F = \langle(7, 3, -5)\rangle$ i $\dim(E \cap F) = 1$.

3) Pels vectors del subespai E tenim:

   $$(a, a + 3b, 2a - b, c) = a \cdot (1, 1, 2, 0) + b \cdot (0, 3, -1, 0) + c \cdot (0, 0, 0, 1).$$

   Per tant, $E = \langle(1, 1, 2, 0), (0, 3, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$. Es comprova que aquests tres vectors són independents i, per tant, formen una base de E i $\dim(E) = 3$.

   Anàlogament, pels vectors de F podem escriure:

   $$(-2a, b, 0, 3b) = a \cdot (-2, 0, 0, 0) + b \cdot (0, 1, 0, 3).$$

Per tant, $F = \langle(-2,0,0,0),(0,1,0,3)\rangle$. Aquests dos vectors són linealment independents i, per tant, formen una base de F i $\dim(F) = 2$.

Sigui $(x,y,z,t) \in E \cap F$. Podem escriure:

$$(x,y,z,t) = (a, a+3b, 2a-b, c) = (-2\alpha, \beta, 0, 3\beta)$$

per a certs $a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Resolent el sistema homogeni que resulta d'aquesta igualtat resulta que $\beta = -4\alpha$. Per tant:

$$(x,y,z,t) = (-2\alpha, -4\alpha, 0, -12\alpha) = -2\alpha \cdot (1,2,0,6).$$

Per tant, $E \cap F = (1,2,0,6)$ i $\dim(E \cap F) = 1$.

21 Considereu la base $B = \{(1,0,-1),(1,2,1),(3,4,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Doneu la matriu $M(C \to B)$ de canvi de base de la base canònica C de $\mathbb{R}^3$ a B.

2) Sigui $B' = \{(2,-1,-2),(1,-2,1),(1,0,1)\}$ una altra base de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la matriu de canvi de base de B' a B: $M(B' \to B)$.

Solució:

1) Tenim:

$$M(B \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(C \to B) = M(B \to C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$\begin{aligned} M(B' \to B) = M(C \to B)M(B' \to C) &= \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7/2 & 6 & 3 \\ 3/2 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

22 Siguin $B = \{(1,5,6),(-2,-5,3),(1,4,-1)\}$ i $B' = \{(1,3,2),(-1,-2,5),(0,2,4)\}$.

1) Comproveu que B i B' són bases de $\mathbb{R}^3$.

2) Doneu les matrius de canvi base $M(B \to B')$ i $M(B' \to B)$.

3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector que en base canònica té coordenades $(2,5,2)$.

Solució:

1) Considerem les matrius associades als vectors B i B' en base canònica C, respectivament:

$$M(B \to C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad M(B' \to C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es comprova fàcilment que els rangs d'aquestes matrius és 3 i, per tant, tant B com B' són bases.

2) Tenim:

$$M(B \to B') = M(B' \to C)^{-1} M(B \to C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(B' \to B) = M(B \to B')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tenim, d'una banda:

$$u_B^T = M(C \to B) \cdot u_C^T = M(B \to C)^{-1} \cdot u_C^T = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix},$$

i de l'altra:

$$u_{B'}^T = M(B \to B') \cdot u_B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

23 Comproveu que $B = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ i $B' = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ són bases de $\mathbb{R}^3$. Sigui $u \in \mathbb{R}^3$ tal que en la base B té coordenades $u_B = (x,y,z)$ i en la base B', $u_{B'} = (x',y',z')$. Expresseu x,y,z en funció de x',y',z' i viceversa.

Solució: Ens donen les bases B i B' en funció de la base canònica C; és a dir, tenim les matrius:

$$M(B \to C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(B' \to C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(B \to B') = M(B' \to C)^{-1} M(B \to C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(B' \to B) = M(B \to B')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si $u_B = (x,y,z)$, llavors $u_{B'}^T = M(B \to B') \cdot u_B^T = \left(\begin{smallmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$; i si $u_{B'} = (x',y',z')$, llavors $u_B^T = M(B' \to B) \cdot u_{B'}^T = 1/2 \left(\begin{smallmatrix} y'+z'-x' \\ z'+x'-y' \\ x'+y'-z' \end{smallmatrix}\right)$.