TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (*1 punt*) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt[3]{n^2})+5}{\ln(\sqrt[5]{n^3})+2\ln(\sqrt{n})+42}\right).$$

2. (*3 punts*)

   a) Calculeu el límit $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$ i determineu el caràcter de la sèrie $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$.

   c) Doneu una fita superior de l'error absolut en aproximar $\sin(a)$ pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x)=\sin(x)$ centrat en $x_0=0$, en funció de N i a per a tot $N\geq 1$ i $a\in\mathbb{R}$.

   d) Calculeu el valor de la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$ i justifiqueu la resposta.

3. (*1 punt*) Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{\ln(9-x^2)}{(x-1)(e^{x+2}-1)}\leq 0.$$

   Digueu si el conjunt de solucions és fitat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

4. (*2 punts*) Considereu la funció

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}}.$$

   (a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

   (b) Calculeu la frontera, l'interior i l'adherència de $Dom f$. Dieu raonadament si és obert, tancat o compacte.

5. (*3 punts*) Considereu la funció $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y)=(x-2y)^2=x^2+4y^2-4xy.$$

   (a) Calculeu els extrems relatius de f.

   (b) Sigui $g(x)=f(5\sin x,2e^x)$ i sigui $I=\int_{-0.7}^{-0.5}g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)|<8$ per a tot $x\in[-0.7,-0.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut <0.005.

   (c) Sigui $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definida per $F(x)=(5\sin x,2e^x)$, i sigui $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció $g=f\circ F$. Utilitzant la regla de la cadena, trobeu la derivada de la funció g.

1. (*1 punt*) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt[3]{n^2})+5}{\ln(\sqrt[5]{n^3})+2\ln(\sqrt{n})+42}\right).$$

SOLUCIÓ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt[3]{n^2})+5}{\ln(\sqrt[5]{n^3})+2\ln(\sqrt{n})+42}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{3}\ln n+5}{\left(\frac{3}{5}+2\frac{1}{2}\right)\ln n+42}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{\ln n}}{\left(\frac{3}{5}+1\right)+\frac{42}{\ln n}}\right)=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{5}}=\mathbf{\frac{5}{12}}.$$

2. (*3 punts*)

a) Calculeu el límit $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$ i determineu el caràcter de la sèrie $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$.

c) Doneu una fita superior de l'error absolut en aproximar $\sin(a)$ pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x)=\sin(x)$ centrat en $x_0=0$, en funció de N i a per a tot $N\geq1$ i $a\in\mathbb{R}$.

d) Calculeu el valor de la suma de la sèrie $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ per a tot $a\in\mathbb{R}$ i justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ: Si $a\in\mathbb{R}$ tenim:

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}=$ **0 per a tot a** $\in\mathbb{R}$ pel criteri del quocient, ja que:

Sigui $a_n=\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$, aleshores $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{|a|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|a|^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a^2|}{(2n+3)(2n+2)}=$ $0<1$.

També pel criteri del quocient, la sèrie $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|$ és convergent per a tot $a \in \mathbb{R}$, i, per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ és **convergent per a tot** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$. També és possible utilitzar el criteri de Leibniz.

c) Siguin $N \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$. L'error absolut en aproximar $\sin(a)$ pel polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x) = \sin(x)$ centrat en $x_0 = 0$ és el valor absolut del residu d'aquest polinomi de Taylor, és a dir: $\left|R_N(a) = \frac{(-1)^n a^{2N+1}\cos(c)}{(2N+1)!}\right|$, per at cert c entre a i 0. Aleshores una fita de l'error serà $\left|\frac{a^{2N+1}}{(2N+1)!}\right|$ ja que $|\cos(c)| \leq 1$.

d) El valor de la suma de la sèrie és $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} - a = \sin(a) - a$ per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$. En efecte:

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\sin(a) - \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \overset{(1)}{<} \lim_{N\to+\infty} \frac{|a^{2N+1}|}{(2N+1)!} \overset{apartat\ a)}{=} 0 \Longrightarrow \left|\sin(a) - \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(a) \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(\mathbf{a}) - \mathbf{a}.$$

(1) S'utilitza l'apartat c).

3. (*1 punt*) Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{\ln(9-x^2)}{(x-1)(e^{x+2}-1)} \leq 0.$$

Digueu si el conjunt de solucions és fitat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

SOLUCIÓ: Primer tenim que $\ln(9-x^2)$ ha de estar ben definit. Per tant, $9-x^2 > 0$. Això implica

$$x^2 < 9 \quad \Rightarrow \quad |x| < 3 \quad \Rightarrow \quad -3 < x < 3.$$

D'altra banda, $\ln(9-x^2)$ s'anul·la si $9-x^2 = 1$ o, equivalentment, si $x = \pm\sqrt{8}$. Obviament, $x-1$ s'anul·la en $x = 1$, i finalment $e^{x+2}-1$ s'anul·la en $x = -2$. Aquests punts divideixen l'interval $(-3, 3)$ en 5 subintervals:

$$(-3, -\sqrt{8}], \quad [-\sqrt{8}, -2], \quad [-2, 1], \quad [1, \sqrt{8}], \quad [\sqrt{8}, 3).$$

Com que perquè l'expressió $\frac{\ln(9-x^2)}{(x-1)(e^{x+2}-1)}$ sigui negativa, o bé el numerador és positiu i el denominador negatiu o viceversa. Per tant, obtenim que els possibles intervals són:

$$(-3, -\sqrt{8}], \quad [-2, 1], \quad [\sqrt{8}, 3).$$

Com que $x = 1$ i $x = -2$ s'han d'excloure perquè s'anul·la el denominador, obtenim que el conjunt de solucions són

$$(-3, -\sqrt{8}] \cup (-2, 1) \cup [\sqrt{8}, 3),$$

que és un conjunt fitat superiorment i inferiorment amb suprem $x = 3$ i ínfim $x = -3$.

4. (*2 punts*) Considereu la funció

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}}.$$

(a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

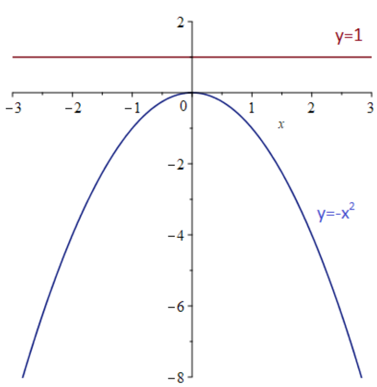
(b) Calculeu la frontera, l'interior i l'adherència de $Dom f$. Dieu raonadament si és obert, tancat o compacte.

SOLUCIÓ:

(a) Per buscar el domini de $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y}{1-y}}$, observem que, perquè f estigui ben definida, ha de ser $1-y \neq 0$ i el quocient de dintre de l'arrel, $\frac{x^2+y}{1-y}$, ha de ser positiu o zero. Per tant, tenim dues opcions:

- Opció 1: $x^2 + y \leq 0$ i $1 - y < 0$, que equival a $y \leq -x^2$ i $y > 1$.
- Opció 2: $x^2 + y \geq 0$ i $1 - y > 0$, que equival a $y \geq -x^2$ i $y < 1$.

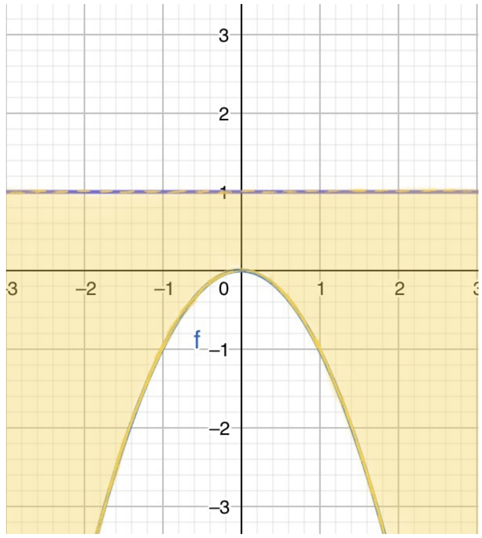
A la figura següent, es representen la recta $y = 1$ i la paràbola $y = -x^2$:



Tal com es veu a aquesta figura l'opció 1 és impossible, i per tant obtenim que el domini correspon a

$$\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y < 1,\ y \geq -x^2\}.$$

És a dir, el domini és la regió del pla situada entre la recta $y = 1$ i la paràbola $y = -x^2$. La recta $y = 1$ està exclosa del domini, mentre que la paràbola $y = -x^2$ està inclosa. La representació gràfica del domini és la següent:



(b) Tenim que, com que la frontera no està inclosa íntegrament al conjunt (ja que la recta $y = 1$ està exclosa) ni tampoc està exclosa totalment (ja que la paràbola $y = -x^2$ està inclosa), no és ni un obert ni un tancat i, per tant, tampoc un compacte.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Front}(\operatorname{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = -x^2\} \\
\operatorname{Int}(\operatorname{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y < 1,\ y > -x^2\} \\
\operatorname{Ad}(\operatorname{Dom}(f)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq 1,\ y \geq -x^2\}
\end{aligned}$$

4. (*3 punts*) Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = (x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy.$$

(a) Calculeu els extrems relatius de f.

(b) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 2e^x)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{-0.7}^{-0.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 8$ per a tot $x \in [-0.7, -0.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

(c) Sigui $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida per $F(x) = (5\sin x, 2e^x)$, i sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció $g = f \circ F$. Utilitzant la regla de la cadena, trobeu la derivada de la funció g.

SOLUCIÓ: La funció $f(x,y) = (x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$ és una funció polinòmica i per tant de classe C^2 a tot $\mathbb{R}^2$.

(a) La funció f és de classe C^1 a tot $\mathbb{R}^2$. Les derivades parcials de primer ordre de la funció són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 8y.$$

Els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que són $2x - 4y = 0$ i $-4x + 8y = 0$, o, equivalentment $x = 2y$.

Així, la funció f té tota una recta de punts crítics que és la recta d'equació $x = 2y$. La matriu hessiana de f en tots aquests punts és

$$Hf(2y, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

que és de determinant nul. Per tant, amb la hessiana no es pot saber de quina naturalesa són els punts crítics. Ara bé, és immediat que $f(x, y) = (x - 2y)^2 \geq 0$, i que en tots els punts crítics és $f(2y, y) = 0$ mentre que en qualsevol altre punt és $f(x, y) > 0$. Per tant, f té mínims relatius en tots aquests punts.

(b) Una fita superior de l'error del mètode dels trapezis és:

$$\left| \int_a^b g(x)dx - T(n) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

sent M_2 una fita superior del valor abssolut de la derivada segona de g en l'interval (a, b). Aquí, $a = -0.7$, $b = -0.5$, i, atès que $|g''(x)| < 8$ $\forall x \in [-0.7, -0.5]$, tenim que $M_2 = 8$. Aleshores per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005, trobarem el nombre de subintervals n imposant $\frac{(0.2)^3}{12n^2} \cdot 8 < 0.005$, que equival a $n^2 > \frac{(0.2)^3 \cdot 8}{12 \cdot 0.005}$, és a dir $n > 1.03279556$. Aleshores el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005 fent ús del mètode dels trapezis és $n = 2$.

(c) Utilitzant la regla de la cadena, la derivada de la funció $g = f \circ F$ és:

$$g'(x) = \mathcal{J}f(F(x)) \cdot \mathcal{J}F(x) = (10 \sin x - 8\, e^x, 16\, e^x - 20 \sin x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \cos x \\ 2e^x \end{pmatrix} =$$

$$= 50 \sin x \, \cos x + 32\, e^{2x} - 40 \cos x \, e^x - 40 \sin x \, e^x.$$