Àlgebra

Resums de teoria i enunciats de problemes

Jaume Martí-Farré
José Luis Ruiz

Grau en Intel·ligència Artifical

Departament de Matemàtiques
Facultat d'Informàtica de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 2022

ÍNDEX

TEMA 1

NOMBRES COMPLEXOS

1.1 Resum teòric

Nombres complexos.

Un nombre complex és un parell ordenat de nombres reals. Notem per $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos. És a dir, els elements de $\mathbb{C}$ són del tipus $z = (a,b)$, amb $a,b \in \mathbb{R}$. Definim les operacions suma i producte com:

1) Suma: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$.

2) Producte: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

Propietats dels nombres complexos.

1) *Igualtat de nombres complexos.* Dos nombres complexos són iguals si i només si són iguals com a parells ordenats de nombres reals. És a dir, si $z_1 = (a_1, b_1)$ i $z_2 = (a_2, b_2)$ són nombres complexos, aleshores $z_1 = z_2$ si i només si $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.

2) Elements neutre i invers en el conjunt dels nombres complexos.

   a) L'element neutre de la suma és $(0,0)$, i l'oposat de (a,b) és $-(a,b) = (-a,-b)$.

   b) L'element neutre del producte és $(1,0)$, i si $(a,b) \neq (0,0)$, aleshores el seu invers és $(a,b)^{-1} = (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$.

3) Tenim que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, identificant el nombre real $\lambda \in \mathbb{R}$ amb el nombre complex $(\lambda, 0) \in \mathbb{C}$. A més, tenim:

   a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, aleshores $\lambda + z = (\lambda, 0) + (a,b) = (\lambda + a, b) \in \mathbb{C}$.

   b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, aleshores $\lambda z = (\lambda, 0)(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \in \mathbb{C}$.

4) Fent servir les operacions entre nombres reals i nombres complexos, tenim les igualtats següents:

   a) Si $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, aleshores $(a^2+b^2)^{-1} \in \mathbb{R}$ i, a més, $z^{-1} = (a,b)^{-1} = (a^2+b^2)^{-1}(a,-b)$.

   b) Si $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, aleshores podem escriure $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a(1,0) + b(0,1)$.

Part real i part imaginària. La unitat imaginària.

1) Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, aleshores direm que a és la seva *part real* i que b és la seva *part imaginària*. Notarem $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.

2) Un nombre complex z és real si i només si $\mathrm{Im}(z) = 0$. Direm que z és *imaginari* (o *imaginari pur*) si i només si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

3) Definim la *unitat imaginària* i com el nombre complex $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

Propietats de la unitat imaginària.

1) La unitat imaginària i satisfà $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Per tant, i és una solució de l'equació $x^2 + 1 = 0$; és a dir, i és una arrel quadrada de -1.

2) Si $n \geqslant 0$ és un nombre natural, aleshores: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

Parell ordenat i forma binòmica d'un nombre complex.

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ és un nombre complex, aleshores $z = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$. Direm que (a, b) és l'expressió de z com *parell ordenat* i direm que $a + bi$ és l'*expressió binòmica* del nombre complex z.

Operacions en forma binòmica. El conjugat. Propietats del conjugat.

1) La suma i el producte de nombres complexos expressats en forma binòmica es realitza operant formalment els binomis. Observem que:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \qquad (a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

2) Definim el *conjugat* $\overline{z}$ d'un nombre complex $z = (a, b)$ com el complex $\overline{z} = (a, -b)$. És a dir, si $z = a + bi$, aleshores $\overline{z} = a - bi$.

3) El conjugat satisfà les propietats següents:

   a) $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$.
   b) $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
   c) Un nombre complex z és real si i només si $z = \overline{z}$.
   d) Un nombre complex z és imaginari si i només si $z = -\overline{z}$.
   e) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.
   f) Si $z = (a, b)$ és un nombre complex no nul, aleshores $z^{-1} = \overline{z}/(z\overline{z}) = \overline{z}/(a^2 + b^2)$.

4) Conjugació i operacions:

   a) Suma: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

b) Producte: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

c) Invers: $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

d) Conjugat: $\overline{\overline{z}} = z$.

Mòdul i argument d'un nombre complex.

Sigui $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. Com a punt del pla podem considerar el seu *mòdul* (que és un nombre real més gran o igual que zero) i, en cas que $z \neq 0$, podem considerar el seu *argument* (que està definit mòdul 2π). És a dir:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{on:} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ és el mòdul de } z. \text{ Notarem } |z| = r. \\ \theta \text{ és l'argument de } z. \text{ Notarem } \arg(z) = \theta. \end{cases}$$

Expressions polar i trigonomètrica d'un nombre complex.

Amb les notacions anteriors, donat $z \in \mathbb{C}$, direm que r_θ és l'*expressió polar* i que $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ és l'*expressió trigonomètrica*.

Propietats del mòdul i de l'argument. Operacions en forma polar.

1) El mòdul d'un nombre real és el seu valor absolut i el seu argument és 0 (si el nombre real és estrictament positiu) o π (si el nombre real és estrictament negatiu).

2) $z\overline{z} = |z|^2$, $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$, $z/\overline{z} = 1_{2\arg(z)}$.

3) Mòdul, argument i operacions de nombres complexos.

   a) Suma: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

   b) Producte: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

   c) Invers: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$.

   d) Conjugat: $|\overline{z}| = |z|$, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

4) Operacions de nombres complexos en forma polar.

   a) Producte: $(r_1)_{\theta_1} \cdot (r_2)_{\theta_2} = (r_1 r_2)_{\theta_1+\theta_2}$.

   b) Invers: $(r_\theta)^{-1} = (r^{-1})_{-\theta}$.

   c) Conjugat: $\overline{r_\theta} = r_{-\theta}$.

   d) Potències: $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Potències i arrels d'un nombre complex.

1) *Fórmula de De Moivre.* Si $n \geqslant 1$ és un nombre natural, aleshores $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

2) *Arrels n-èsimes d'un nombre complex.* Un nombre complex no nul té exactament n arrels n-èsimes diferents. Concretament, si $n \geqslant 1$ és un nombre natural i si $z = r_\theta$ és l'expressió polar del nombre complex no nul z, aleshores $\sqrt[n]{z} = \{(\sqrt[n]{r})_{(\theta+2k\pi)/n} : k = 0, \ldots, n-1\}$, on $\sqrt[n]{r}$ és l'arrel real positiva n-èsima del nombre real positiu r.

1.2 Exercicis

1.1 Expresseu els següents nombres complexos en forma binòmica:

1) $(1+i)^2$
2) $(2+3i)(3-4i)$
3) $\dfrac{1}{i}$
4) $\dfrac{1}{1+i}$
5) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$
6) $\dfrac{1+i}{1-2i}$
7) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$
8) i^5+i^{16}
9) $1+i+i^2+i^3$
10) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

1.2 Calculeu el mòdul dels següents nombres complexos:

1) $1+i$
2) $3+4i$
3) $\dfrac{1+i}{1-i}$
4) $1+i+i^2$
5) i^7+i^{10}
6) $2(1-i)+3(2+i)$

1.3 Calculeu el mòdul i l'argument dels nombres complexos següents:

1) $2i$
2) $-3i$
3) -1
4) 1
5) $-3+\sqrt{3}\,i$
6) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$
7) $(-1+i)^3$
8) $(-1-i)^3$
9) $\dfrac{1}{1+i}$
10) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

1.4 Calculeu $\displaystyle\sum_{k=1}^{2435} i^k$.

1.5 Demostreu que si $z \in \mathbb{C}$, aleshores:

a) $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$.
b) $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$.
c) $z\overline{z}=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$.

1.6 Demostreu les propietats següents:

1) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, aleshores:

   a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
   b) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
   c) $\overline{z_1}z_2=\overline{z_1\overline{z_2}}$.

2) Si $z \in \mathbb{C}$ és no nul, aleshores $\overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1}$.

1.7 Demostreu les propietats següents:

1) Si $z \in \mathbb{C}$, aleshores $z\overline{z}=|z|^2$.
2) Si $z \in \mathbb{C}$ és no nul, aleshores:

a) $z^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

b) $\dfrac{z}{\overline{z}} = 1_{2\arg(z)}$.

1.8 Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tals que $z_1 \neq z_2$ i $|z_1| = |z_2|$. Demostreu que:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right) = 0.$$

1.9 Sigui z el nombre complex donat per $z = (1, -1)$.

1) Expresseu z, $\overline{z}$, $-z$ i z^{-1} en forma binòmica, polar i trigonomètrica.
2) Determineu per a quins nombres naturals n el nombre complex z^n és un nombre real.
3) Sigui $z_1 \in \mathbb{C}$ un nombre complex no nul. Sigui $z_2 = z^n z_1$, on n és un nombre natural. Determineu la diferència entre els arguments de z_1 i de z_2 en funció de n.

1.10 Calculeu les arrels que s'indiquen:

1) Les arrels cúbiques de i.
2) Les arrels quartes de -1.
3) Les arrels cúbiques de $-2 + 2i$.
4) Les arrels sisenes de -8.

1.11 Resoleu les equacions següents a $\mathbb{C}$:

1) $z^2 + 4z + 29 = 0$.
2) $z^2 + 2iz + 1 = 0$.
3) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
4) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.
5) $(z-1)^5 + (z+1)^5 = 0$.

1.12 Siguin z un complex no nul i $z' = z \cdot i$. Determineu la diferència $\arg(z) - \arg(z')$.

1.13 Determineu els nombres complexos que coincideixen amb la cinquena potència del seu conjugat.

1.14 Trobeu els nombres complexos no nuls tals que el seu cub és igual al quadrat del seu conjugat.

1.15 Sigui $z \in \mathbb{C}$. Suposem que existeix una arrel quarta w de z tal que $(1+i)w$ és un nombre real positiu. Determineu l'argument de z.

1.16 Siguin $z = x + iy$ i $z_0 = x_0 + iy_0$ nombres complexos, $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Demostreu que $|z - z_0|$ és la distància a $\mathbb{R}^2$ del punt (x, y) al punt (x_0, y_0).

1.17 Descriviu geomètricament el conjunt de nombres complexos z que satisfan les equacions:

1) $0 < |z| \leq 3$
2) $|z - i| = 1$.
3) $|z + i| \leq 3$.
4) $z(\overline{z} + 2) = 3$.
5) $\mathrm{Re}(\overline{z} - i) = 2$.
6) $\mathrm{Im}(z^2) = 4$.

1.18 Demostreu les fórmules següents:

1) $\sin(3\alpha) = -\sin^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)$.

2) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$.

3) $\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$.

4) $\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\sin(\alpha) - \sin(3\alpha))$.

1.19 Simplifiqueu les expressions següents:

1) $\left(\dfrac{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)}\right)^5$.

2) $\dfrac{(\cos(5\alpha) + i\sin(5\alpha))^6(\cos(3\alpha) - i\sin(3\alpha))^7}{(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^4(\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha))^{-2}}$.

1.3 Solucions

1.1 La forma binòmica és:

1) $2i$. 3) $-i$. 5) 1. 7) 2. 9) 0.

2) $18+i$. 4) $1/2-(1/2)i$. 6) $-1/5+(3/5)i$. 8) $1+i$. 10) $1+i$.

1.2 Els seus mòduls són:

1) $\sqrt{2}$. 2) 5. 3) 1. 4) 1. 5) $\sqrt{2}$. 6) $\sqrt{65}$.

1.3

1) $2i = 2_{\pi/2}$.

2) $-3i = 3_{-\pi/2}$.

3) $-1 = 1_{\pi}$.

4) $1 = 1_0$.

5) $-3+\sqrt{3}i = (2\sqrt{3})_{(5\pi)/6}$.

6) $(1+i)/\sqrt{2} = 1_{\pi/4}$.

7) $(-1+i)^3 = (2\sqrt{2})_{\pi/4}$.

8) $(-1-i)^3 = (2\sqrt{2})_{-\pi/4}$.

9) $1/(1+i) = (\sqrt{2}/2)_{-\pi/4}$.

10) $1/(1+i)^2 = (1/2)_{-\pi/2}$.

1.4 El resultat de la suma és -1.

1.9

1) $z = (1,-1) = 1-i = (\sqrt{2})_{7\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4))$.
$\overline{z} = (1,1) = 1+i = (\sqrt{2})_{\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.
$-z = (-1,1) = -1+i = (\sqrt{2})_{3\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$.
$z^{-1} = (1/2, 1/2) = 1/2 + i/2 = (1/\sqrt{2})_{\pi/4} = (1/\sqrt{2})(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.

2) Per a n múltiple de 4.

3) La diferència dels arguments és $7\pi n/4$.

1.10

1) $(\sqrt{3}+i)/2$, $(-\sqrt{3}+i)/2$, $-i$.

2) $(1+i)/\sqrt{2}$, $(-1+i)/\sqrt{2}$, $(-1-i)/\sqrt{2}$, $(1-i)/\sqrt{2}$.

3) $1+i$, $(-\sqrt{3}-1)/2 + (\sqrt{3}-1)i/2$, $(\sqrt{3}-1)/2 - (\sqrt{3}+1)i/2$.

4) $(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)/2$, $\sqrt{2}i$,$(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i)/2$, $(-\sqrt{6}-\sqrt{2}i)/2$, $-\sqrt{2}i$, $(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)/2$.

1.11

1) $-2 \pm 5i$.

2) $(\pm\sqrt{2}-1)i$.

3) Arrels quadrades de $-1/2+\sqrt{3}/2i = 1_{\pi/3}$ i de $-1/2-\sqrt{3}/2i = 1_{2\pi/3}$, que són: $1_{\pi/6}$, $1_{7\pi/6}$ i $1_{\pi/3}$, $1_{4\pi/3}$, respectivament.

4) Arrels cúbiques de $1 \pm i$, que són: $\sqrt[6]{2}_{\pi/12+2k\pi/3}$, $\sqrt[6]{2}_{7\pi/12+2k\pi/3}$, amb $k = 0,1,2$.

5) 0 i les arrels quadrades de $\pm 2\sqrt{5}-5$, que són: $r_{\pi/2}$, $r_{3\pi/2}$, $s_{\pi/2}$ i $s_{3\pi/2}$, on $r = 5-2\sqrt{5}$ i $s = 5+2\sqrt{5}$.

1.12 La diferència dels arguments és $\pi/2$.

1.13 $z = 0$ i $z = 1_{k\pi/3}$, on $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Consulteu el document d'exàmens resolts per a veure la solució completa.

1.14 Són les arrels cinquenes de la unitat.

1.15 L'argument és π.

1.17

1) Cercle de centre l'origen i radi 3, excepte l'origen.
2) Circumferència de centre $(0, 1)$ i radi 1.
3) Cercle de centre $(0, -1)$ i radi 3.
4) Els punts $(1, 0)$ i $(-3, 0)$.
5) Recta d'equació $x = 2$.
6) Hipèrbola d'equació $xy = 2$.

1.19

1) $\cos(\beta) + i\sin(\beta)$, on $\beta = 10\alpha - 5\pi/2$.
2) $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

TEMA 2

MATRIUS, DETERMINANTS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

2.1 Resum teòric

Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1.1 Matrius

Files i columnes d'una matriu

1) Una matriu A d'ordre $m \times n$, on $m, n \geq 1$ són enters, amb coeficients en un conjunt X és una taula:

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

on $a_{i,j} \in X$ per a tot i, j.

2) En aquesta situació, diem que la matriu A és una matriu de m files i de n columnes.

   a) Si A és d'ordre $m \times 1$, aleshores diem que A és una matriu columna de m components.
   b) Si A és d'ordre $1 \times n$, aleshores diem que A és una matriu fila de n components.
   c) Si $m \neq n$, diem que A és una matriu rectangular d'ordre $m \times n$.
   d) Si $n = m$, diem que A és una matriu quadrada d'ordre n.

3) Notacions usuals dels elements, de les columnes i de les files de la matriu A.

   a) Elements: $A_{(i,j)} = a_{i,j}$ és l'element de la fila i i de la columna j de la matriu A.
   b) Files:

$$A = \begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_m(A) \end{pmatrix}$$

   on $F_i(A) = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ és la i-èsima fila de A, $i = 1, \ldots, m$.

c) Columnes: $A = (C_1(A), \dots, C_n(A))$ on:

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

és la j-èsima columna de A, $j = 1, \dots, n$.

4) Els conjunts $\mathcal{M}_{m,n}(X)$ i $\mathcal{M}_n(X)$.

a) El conjunt de les matrius d'ordre $m \times n$ amb coeficients en X el notem per $\mathcal{M}_{m,n}(X)$.

b) El conjunt de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients en X el notem per $\mathcal{M}_n(X)$. És a dir, $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{M}_{n,n}(X)$.

Operacions amb matrius

1) Suma de matrius. Definim la suma de les matrius $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ com la matriu $A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ que en la fila i i columna j té l'element $(A+B)_{(i,j)} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

2) Producte de matrius. Definim la producte de la matriu $A = (a_{i,l})_{i,l} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ per la matriu $B = (b_{l,j})_{l,j} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ com la matriu $AB \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ que en la fila i i columna j té l'element $(AB)_{(i,j)} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} b_{l,j}$.

3) Producte d'una matriu per un element de $\mathbb{K}$. Definim el producte de la matriu $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ per l'element $\lambda \in \mathbb{K}$ com la matriu $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ que en la fila i i columna j té l'element $(\lambda A)_{(i,j)} = \lambda a_{i,j}$.

Files, columnes i operacions de matrius

1) Files i columnes de la matriu suma. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores les files de la matriu $A + B$ són $F_i(A+B) = F_i(A) + F_i(B)$ i les seves columnes són $C_j(A+B) = C_j(A) + C_j(B)$.

2) Producte per una fila i per una columna. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, aleshores:

$$(\mu_1, \dots, \mu_m)A = \mu_1 F_1(A) + \cdots + \mu_m F_m(A).$$

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 C_1(A) + \cdots + \lambda_n C_n(A).$$

3) Files i columnes de la matriu producte. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, aleshores les files de la matriu producte AB són $F_i(AB) = a_{i,1}F_1(B) + \cdots + a_{i,n}F_n(B)$ i les seves columnes són $C_j(AB) = b_{1,j}C_1(A) + \cdots + b_{n,j}C_n(A)$.

4) Files i columnes de la matriu producte per un element de $\mathbb{K}$. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores les files de λA són $F_i(\lambda A) = \lambda F_i(A)$ i les seves columnes són $C_j(\lambda A) = \lambda C_j(A)$.

Estructura algebraica de les matrius. Matriu identitat. Matrius invertibles.

1) La suma de matrius a $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ satisfà les propietats següents:

   a) Associativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

   b) Commutativa: $A+B=B+A$.

   c) Existència d'element neutre: $A+0=A$, on 0 és la matriu que té tots els coeficients nuls.

   d) Existència d'oposats: $A+(-A)=0$.

2) El producte de matrius és associatiu. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i $C \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{K})$, aleshores $A(BC)=(AB)C$.

3) El producte de matrius és distributiu respecte de la suma. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B,C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, aleshores $A(B+C)=AB+AC$. Si $A \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{K})$, $B,C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, aleshores $(B+C)A=BA+CA$.

4) A més, a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el producte satisfà les propietats:

   a) Associativa: $A(BC)=(AB)C$.

   b) No és commutatiu: en general, $AB \neq BA$.

   c) Existència d'element neutre: $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \cdot A = A$, on Id_n és la matriu identidad d'ordre n (veure el punt següent).

   d) En general, no existeix l'element invers d'una matriu; és a dir, donada una matriu A d'ordre n, no existeix, en general, una matriu B d'ordre n tal que $AB=\mathrm{Id}_n$ (veure el punt següent).

5) La matriu identitat i les matrius invertibles.

   a) L'element neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respecte del producte és la matriu identitat Id_n que en la fila i i columna j té l'element $(\mathrm{Id}_n)_{(i,j)}=0$, si $i \neq j$ i $(\mathrm{Id}_n)_{(i,j)}=1$, si $i=j$. Per tant, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \cdot A = A$.

   b) Les matrius que tenen inversa respecte del producte s'anomenen matrius invertibles. És a dir, una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si existeix una matriu $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB=BA=\mathrm{Id}_n$. La matriu B, si existeix, és única. La matriu B s'anomena inversa de A i la notem per A^{-1}.

6) Propietats de les matrius invertibles.

   a) La matriu identitat és invertible i $(\mathrm{Id}_n)^{-1}=\mathrm{Id}_n$.

   b) Si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfan $AB=\mathrm{Id}_n$, aleshores $BA=\mathrm{Id}_n$ i, per tant, les matrius A i B són matrius invertibles i una és la inversa de l'altra.

   c) Si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són matrius invertibles, aleshores AB és una matriu invertible i $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

   d) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu invertible i si $\lambda \in \mathbb{K}$ és no nul, aleshores la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$.

   e) Si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són matrius invertibles, aleshores la seva suma $A+B$ no és una matriu invertible, en general.

Transposició de matrius

Sigui $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(X)$, on X és un conjunt. La transposada de la matriu A és la matriu $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(X)$ que té per elements $(A^T)_{(i,j)} = a_{j,i}$. La transposició de matrius verifica les propietats següents:

a) $(A^T)^T = A$.

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

c) La matriu A^T és invertible si i només si ho és A. A més, en aquest cas, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Diem que una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és simètrica si $A^T = A$ i que és antisimètrica si $A^T = -A$.

Traça d'una matriu

Sigui $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada d'ordre n. Els elements $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ s'anomenen els elements de la diagonal principal de la matriu A. Definim la traça $\mathrm{Tr}(A)$ de la matriu A com la suma dels elements de la diagonal principal; és a dir, $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$. La traça d'una matriu verifica les propietats següents:

a) $\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$.

b) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$.

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, però en general $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

d) Existeixen matrius invertibles de traça nul·la.

Tipus de matrius

1) Matrius triangulars. Matrius diagonals.

   a) Matriu triangular superior: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
   b) Matriu triangular inferior: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $a_{i,j} = 0$ si $i < j$.
   c) Matriu diagonal: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

2) Matrius esglaonades per files. Una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és una matriu esglaonada per files si existeix $1 \leqslant i_0 \leqslant m$ tal que les files $F_1(A), \ldots, F_{i_0}(A)$ de la matriu A són no nul·les, les files $F_{i_0+1}(A), \ldots, F_m(A)$ de la matriu A són nul·les, i a més, per a tot $i \leqslant i_0$, si el primer element no nul de la fila $F_i(A)$ és l'element de la columna j_i, aleshores el primer element no nul de la fila $F_{i+1}(A)$ està en una columna $j_{i+1} > j_i$.

3) Matrius esglaonades per columnes. Una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és una matriu esglaonada per columnes si existeix $1 \leqslant j_0 \leqslant m$ tal que les columnes $C_1(A), \ldots, C_{j_0}(A)$ de la matriu A són no nul·les, les columnes $C_{j_0+1}(A), \ldots, C_n(A)$ de la matriu A són nul·les, i a més, per a tot $j \leqslant j_0$, si el primer element no nul de la columna $C_j(A)$ és l'element de la fila i_j, aleshores el primer element no nul de la columna $C_{j+1}(A)$ està en una fila $i_{j+1} > i_j$.

Transformacions per files. Transformacions per columnes

1) Una transformació elemental per files d'una matriu A d'ordre $m \times n$ consisteix en fer una de les operacions següents:

   a) intercanviar dues files de A;

   b) multiplicar una fila de A per un element no nul $\lambda \in \mathbb{K}$;

   c) sumar a una fila de A una altra fila de A.

2) Diem que una matriu B s'obté fent transformacions per files d'una matriu A si partint de A i fent un nombre finit de transformacions elementals per files obtenim B. Notem $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B$ per indicar que $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s'obté de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ aplicant transformacions per files.

3) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B$ si i només si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ de manera que $B = PA$.

4) Aplicant transformacions per files podem transformar una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ en una matriu esglaonada per files B. Aquesta transformació de la matriu A no és única (ni en el procés ni en el resultat). Ara bé, si tenim $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B_1$ i $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B_2$, amb B_1, B_2 matrius esglaonades per files, aleshores B_1 i B_2 tenen el mateix nombre de files no nul·les.

5) Una transformació elemental per columnes d'una matriu A d'ordre $m \times n$ consisteix en fer una de les tres operacions següents:

   a) intercanviar dues columnes de A;

   b) multiplicar una columna de A per un element no nul $\lambda \in \mathbb{K}$;

   c) sumar a una columna de A una altra columna de A.

6) Diem que una matriu B s'obté fent transformacions per columnes d'una altra matriu A si partint de A i fent un nombre finit de transformacions elementals per columnes obtenim B. Notem $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} B$ per indicar que $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s'obté $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ aplicant transformacions per columnes.

7) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} B$ si i només si existeix una matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de manera que $B = AQ$.

8) Aplicant transformacions per columnes podem transformar una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ en una matriu esglaonada per columnes B. Aquesta transformació de la matriu A no és única (ni en el procés ni en el resultat). Ara bé, si tenim $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} B_1$ i $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} B_2$, amb B_1, B_2 matrius esglaonades per columnes, aleshores B_1 i B_2 tenen el mateix nombre de columnes no nul·les.

9) Observem que les transformacions per files es poden pensar com a transformacions per columnes en la matriu transposada, i que les transformacions per columnes es poden pensar com a transformacions per files en la matriu transposada.

10) Transformació per files i per columnes d'una matriu A d'ordre $m \times n$.

a) Notem $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} B$ per indicar que la matriu $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s'obté de la matriu A aplicant transformacions per files i columnes.

b) Es demostra que $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} B$ si i només si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ i existeix una matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tals que $B = PAQ$.

c) Aplicant transformacions per files i per columnes podem transformar una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ en una matriu simultàniament esglaonada per files i per columnes B. Aquesta transformació de la matriu A no és única (ni en el procés ni en el resultat). Ara bé, si $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} B_1$ i $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} B_2$, amb B_1, B_2 matrius simultàniament esglaonades per files i per columnes, aleshores B_1 i B_2 tenen el mateix nombre d'elements no nuls en la diagonal principal.

Mètode de Gauss

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ una matriu d'ordre $m \times n$. Diem que una matriu $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s'obté de la matriu A aplicant el mètode de Gauss si B es pot obtenir de A aplicant transformacions per files. És a dir, si $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B$. Notarem també $A \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} B$ si volem remarcar que hem aplicat el mètode de Gauss.

Rang d'una matriu

1) Un invariant de les reduccions d'una matriu. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ una matriu no nul·la. Sigui $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} A_1$, amb A_1 una matriu esglaonada per files; sigui $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} A_2$, amb A_2 una matriu esglaonada per columnes; i sigui $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} A_3$, amb A_3 una matriu simultàniament esglaonada per files i per columnes. En aquesta situació, es té que $r_F(A_1) = r_C(A_2) = r_*(A_3)$, on $r_F(A_1)$ és el nombre de files no nul·les de A_1, on $r_C(A_2)$ és el nombre de columnes no nul·les de A_2, i on $r_*(A_3)$ és el nombre d'elements no nuls en la diagonal principal de A_3.

2) Rang d'una matriu. Definim el rang d'una matriu no nul·la $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ com $\text{rang}(A) = r_F(A_1) = r_C(A_2) = r_*(A_3)$, (veure notacions del punt anterior). En el cas en que $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sigui la matriu nul·la, diem que A té rang zero.

Propietats del rang

1) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és no nul·la, aleshores $1 \leqslant \text{rang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

2) $\text{rang}(AB) \leqslant \text{rang}(A)$.

3) $\text{rang}(\lambda A) = \text{rang}(A)$, si $\lambda \in \mathbb{K}$ és no nul.

4) $\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A)$.

5) Si $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} B$, $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} B$, $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} B$ o $A \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} B$, aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

6) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu diagonal, aleshores $\text{rang}(A)$ és el nombre d'elements no nuls de la diagonal.

7) En particular, $\mathrm{rang}(\mathrm{Id}_n) = n$.

8) Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu invertible si i només si $\mathrm{rang}(A) = n$.

9) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible, aleshores $\mathrm{rang}(A^{-1}) = \mathrm{rang}(A) = n$.

2.1.2 Determinants

Determinant d'una matriu

Sigui $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada d'ordre n amb coeficients en $\mathbb{K}$. Definim el determinant de la matriu A, que notarem per $\det(A)$ o per $|A|$, com l'element de $\mathbb{K}$ definit per:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \pm a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n},$$

on el sumatori està estès a totes les permutacions $i_1, \ldots, i_n$ de $1, \ldots, n$ i el signe de cada sumand es calcula de la manera següent: és $+1$ si hem de fer un nombre parell d'intercanvis a la permutació $i_1, \ldots, i_n$ per a obtenir $1, \ldots, n$; és -1 si hem de fer un nombre senar d'intercanvis a la permutació $i_1, \ldots, i_n$ per a obtenir $1, \ldots, n$.

Observem que el determinant d'una matriu quadrada d'ordre n és una suma amb $n!$ sumands on cada sumand consta d'un signe i un producte amb un element de cada fila i de cada columna.

Càlcul de determinants

1) Determinant de matrius d'ordre $n = 2$. Aplicant la definició, obtenim:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

2) Determinant de matrius d'ordre $n = 3$: regla de Sarrus. Aplicant la definició, obtenim:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}.$$

3) Determinant de matrius triangulars i de matrius diagonals.

   a) Si A és una matriu triangular (superior o inferior), aleshores $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

   b) Si A és una matriu diagonal, aleshores $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

   c) En particular, $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$.

4) Desenvolupament del determinant per una fila. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu d'ordre n. Fixem $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ i per a cada $j \in \{1,\dots,n\}$ sigui $A_{i_0,j}$ la submatriu de A que s'obté a l'el·liminar la fila i_0 i la columna j de la matriu A. Aleshores es té:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(A_{i_0,j}).$$

5) Desenvolupament del determinant per una columna. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu d'ordre n. Fixem $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ i per a cada $i \in \{1,\dots,n\}$ sigui A_{i,j_0} la submatriu de A que s'obté a l'el·liminar la fila i i la columna j_0 de la matriu A. Aleshores es té:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det(A_{i,j_0}).$$

Propietats dels determinants (1)

El determinant verifica les propietats següents (en l'enunciat d'aquestes propietats fem servir la notació de les matrius per columnes).

1) $\det(C_1,\dots,\lambda C_i,\dots,C_n) = \lambda \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$.

2) $\det(C_1,\dots,C_i + C_i',\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C_i',\dots,C_n)$.

3) $\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) = -\det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)$.

4) $\det(C_1,\dots,C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j,\dots\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$.

5) Si $C_i = 0$, aleshores $\det(C_1,\dots,C_n) = 0$.

6) Si existeixen $i \neq j$ amb $C_i = C_j$, aleshores $\det(C_1,\dots,C_n) = 0$.

7) $\det(C_1,\dots,C_n) = 0$ si i només si per a cert $i \in \{1,\dots,n\}$ es té que $C_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j$.

Propietats dels determinants (2)

1) Determinant i operacions amb matrius.

   a) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$.

   b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, on n és l'ordre de la matriu A.

2) Determinant i transposició de matrius.

   a) $\det(A^T) = \det(A)$.

   b) Per tant, totes les propietats del determinant que valen per les columnes també valen per les files.

3) Determinant, transformacions per files, per columnes i mètode de Gauss. Si $A \overset{\mathcal{T}_F}{\rightsquigarrow} A'$, $A \overset{\mathcal{T}_C}{\rightsquigarrow} A'$, $A \overset{\mathcal{T}_*}{\rightsquigarrow} A'$ o $A \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} A'$, aleshores: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A') \neq 0$.

4) Determinant i rang.

   a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores $\operatorname{rang}(A) = n$ si i només si $\det(A) \neq 0$.
   b) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores el rang de A és el màxim nombre natural r per al qual existeix una submatriu A' de A quadrada d'ordre r amb determinant $\det(A') \neq 0$.

5) Determinant i inversa. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$. A més, si A és invertible, aleshores $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Matriu dels adjunts

Sigui $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada d'ordre n. Es definiex la matriu A^* dels adjunts de la matriu A com la matriu quadrada $A^* = (a^*_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que té com elements $a^*_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ on $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ és la submatriu de A que s'obté a l'el·liminar la fila i i la columna j de la matriu A.

1) Propietats: adjunta i transposada.

   a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores $A(A^*)^T = (A^T)^* = \det(A)\,\mathrm{Id}_n$.
   b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores $A^T A^* = A^* A^T = \det(A)\,\mathrm{Id}_n$.

2) Càlcul de la matriu inversa. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu invertible, aleshores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^T = \frac{1}{\det(A)}(A^T)^*.$$

2.1.3 Sistemes d'equacions lineals

Notació matricial. Notació vectorial. Solucions

1) Un sistema de m equacions i n incògnites amb coeficients en $\mathbb{K}$ és un conjunt d'equacions lineals:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

   on per a tot i,j es té que $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{K}$. L'element $a_{i,j}$ és el j-èsim coeficient de la i-èsima equació del sistema. L'element b_i és el terme independent de la i-èsima equació. La j-èsima incògnita del sistema és x_j. Si $b_1 = \cdots = b_m = 0$, aleshores diem que el sistema d'equacions és un sistema homogeni.

2) Notació matricial del sistema. La notació matricial del sistema és $Ax = b$, on:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La matriu $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s'anomena matriu dels coeficients del sistema, o simplement matriu del sistema, i la matriu $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ s'anomena matriu dels termes independents del sistema. Observem que en la i-èsima fila de la matriu A hi ha els coeficients de la i-èsima equació del sistema i que en la j-èsima columna de la matriu A hi ha els coeficients de la j-èsima incògnita del sistema. La matriu $(A\,|\,b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ que s'obté a l'afegir la columna b a la matriu A s'anomena la matriu ampliada del sistema. Matricialment, un sistema homogeni s'expressa com $Ax = 0$.

3) Notació vectorial del sistema. El sistema $Ax = b$ el podem escriure com $x_1C_1(A) + \cdots + x_nC_n(A) = b$ on $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ és la j-èsima columna de la matriu A del sistema. El sistema també el podem escriure com $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = v_b$ on $v_j, v_b \in \mathbb{K}^m$ són els elements definits per $v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})$ i per $v_b = (b_1, \ldots, b_m)$. És a dir, $v_j = C_j(A)^T$ i $v_b = b^T$. Per tant, v_j és la m-pla definida pels coeficients de la j-èsima incògnita del sistema, mentre que v_b és la m-pla definida pels termes independents de les equacions del sistema. Vectorialment un sistema homogeni és $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0$.

4) Solucions del sistema. Diem que $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ és una solució del sistema si i només si:

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \cdots + a_{1,n}\xi_n = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}\xi_1 + a_{m,2}\xi_2 + \cdots + a_{m,n}\xi_n = b_m \end{cases}$$

Equivalentment, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ és una solució del sistema si i només si:

$$A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = b \iff \xi_1C_1(A) + \cdots + \xi_nC_n(A) = b \iff \xi_1v_1 + \cdots + \xi_nv_n = v_b.$$

Sistema compatible. Sistema incompatible

1) Diem que el sistema $Ax = b$ és compatible si i només si té, com a mínim, una solució. Si existeix una única solució, aleshores diem que és un sistema compatible determinat. Si existeix més d'una solució, aleshores diem que és un sistema compatible indeterminat.

2) El sistema $Ax = b$ és un sistema incompatible si no té cap solució.

Teorema de Rouché-Frobenius

1) Existència de solucions.

   a) El sistema $Ax = b$ és compatible si i només si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A\,|\,b)$.

   b) El sistema $Ax = b$ és incompatible si i només si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A\,|\,b)$.

2) Unicitat de les solucions.

   a) El sistema $Ax = b$ és compatible determinat si i només si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A\,|\,b) = n$.

   b) El sistema $Ax = b$ és ompatible indeterminat si i només si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A\,|\,b) \neq n$.

Sistemes, mètode de Gauss i regla de Cramer

1) Sistemes amb matriu de coeficients esglaonada per files. Si $Ax = b$ és un sistema on A és una matriu esglaonada per files aleshores, el sistema és compatible si i només si $b_i = 0$ quan $F_i(A) = 0$. En aquest cas, la solució del sistema es pot determinar fent substitució cap enrera.

2) Sistemes d'equacions lineals i mètode de Gauss. Si transformem per Gauss $(A\,|\,b) \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} (A'\,|\,b')$, aleshores el sistema $Ax = b$ és compatible (determinat o indeterminat) si i només si ho és el sistema $A'x = b'$. A més, en aquest cas, els dos sistemes d'equacions lineals tenen les mateixes solucions. Per tant, per resoldre el sistema d'equacions $Ax = b$, podem aplicar el mètode de Gauss i transformar $(A\,|\,b) \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} (A'\,|\,b')$ fins obtenir una matriu esglaonada per files A' i aleshores, en el cas compatible, aplicar la substitució cap enrera per determinar la solució.

3) Regla de Cramer. Sigui $Ax = b$ un sistema compatible determinat de n equacions i n incògnites. Aleshores, la única solució del sistema $Ax = b$ és $x = A^{-1}b$. Per tant, per a $1 \leqslant i \leqslant n$ es té que $x_i = \det(A_{i,b})/\det(A)$, on $A_{i,b}$ és la matriu que s'obté al substituir la i-èsima columna de la matriu A pel terme independent del sistema (és a dir, si $A = (C_1,\ldots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\ldots,C_n)$, aleshores $A_{i,b} = (C_1,\ldots,C_{i-1},b,C_{i+1},\ldots,C_n)$).

Estructura de les solucions

1) Solucions dels sistemes homogenis. Els sistemes homogenis són compatibles. Els graus de llibertat de les solucions del sistema homogeni és la diferència entre el nombre d'incògnites i el rang de la matriu del sistema.

2) Principi de superposició. Si x_b és una solució del sistema $Ax = b$ i si x_c és una solució del sistema $Ax = c$, aleshores $x_b + x_c$ és una solució del sistema $Ax = b + c$. En particular, la suma de solucions d'un sistema homogeni és una solució del sistema.

3) Solucions del sistema complet i solucions del sistema homogeni associat. Sigui $Ax = b$ un sistema compatible de m equacions i n incògnites. Sigui x_p una solució particular del sistema $Ax = b$ i sigui x_h la solució general del sistema homogeni associat $Ax = 0$. Aleshores la solució general del sistema $Ax = b$ és $x_g = x_p + x_h$.

Càlcul de la matriu inversa: mètode de Gauss-Jordan

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Aleshores la matriu A és invertible si i només si aplicant el mètode de Gauss podem transformar $(A\,|\,\mathrm{Id}_n) \overset{\mathcal{G}}{\rightsquigarrow} (\mathrm{Id}_n\,|\,B)$. A més, en aquesta situació es té que $B = A^{-1}$.

2.2 Exercicis

2.1 Calculeu, en el cas en què sigui possible, la matriu suma $A+B$ i la matriu producte AB de les matrius següents.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2.2 Siguin A, B i C matrius quadrades. Proveu que les propietats següents són falses donant un contraexemple.

1) $AB = BA$.
2) Si $AB = 0$, aleshores $A = 0$ o $B = 0$.
3) Si $AB = AC$, aleshores $A = 0$ o bé $B = C$.
4) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
5) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
6) $(AB)^T = A^T B^T$.
7) $\operatorname{rang}(A+B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.
8) $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A)\operatorname{rang}(B)$.
9) $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(BA)$.
10) $\operatorname{rang}(\lambda A) = \lambda \operatorname{rang}(A)$, on λ és un escalar.
11) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
12) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, on λ és un escalar.

2.3 Siguin A i B matrius i $\lambda \in \mathbb{K}$. Suposem que els ordres de les matrius són els adequats per tal que es puguin fer les operacions indicades. Demostreu les propietats següents:

1) $(A^T)^T = A$.

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3) La matriu A és invertible si i només si la matriu A^T ho és. En aquest cas, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.4 Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n. Demostreu que $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

2.5 Sigui J la matriu $n \times n$ que té tots els seus elements iguals a 1. Calculeu la matriu J^k, per a cada natural $k \geqslant 1$.

2.6 Calculeu els determinants següents.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

2) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$.

4) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d+1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a^2 & (a-2)^2 & (a-4)^2 & (a-6)^2 \\ b^2 & (b-2)^2 & (b-4)^2 & (b-6)^2 \\ c^2 & (c-2)^2 & (c-4)^2 & (c-6)^2 \\ d^2 & (d-2)^2 & (d-4)^2 & (d-6)^2 \end{vmatrix}$.

5) $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$, on la matriu és quadrada d'ordre n.

6) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$, on la matriu és quadrada d'ordre n.

2.7 Calculeu els determinants següents:

1) $\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z \\ z & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$, on $z \in \mathbb{C}$ és una arrel cúbica de la unitat (és a dir, $z^3 = 1$).

2) $\begin{vmatrix} z & 1 & z \\ 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & z^2 \end{vmatrix}$, on $z \in \mathbb{C}$ és una arrel quarta de -1 (és a dir, $z^4 = -1$).

2.8 Calculeu el determinant de la matriu $C^{-1}ACB^2A^{-1}$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.9 Calculeu el determinant de la matriu $A = (a_{ij})$ definida per $a_{ij} = 2^{ij}$, $1 \le i, j \le 3$.

2.10 Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3, on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes, tal que $\det(A) = 2$. Expresseu, en cada cas, la matriu B com a producte de la matriu A i matrius elementals per columnes i calculeu $\det(B)$.

1) $B = (C_1 + 2C_2, C_1, C_1 + C_2 + C_3)$.

2) $B = (C_1 + C_2, C_1, C_1 + C_2 + 2C_3)$.

3) $B = (C_1 + C_2 + C_3, C_1 + C_2, C_2 + C_3)$.

4) $B = (C_3 - C_1 - C_2, C_1 - C_2 - C_3, C_2 - C_1 - C_3)$.

2.11 Sigui $A = (F_1, F_2, F_3)^T$ una matriu 3×3, on F_1, F_2, F_3 són les seves files, tal que $\det(A) = 2$. Expresseu, en cada cas, la matriu B com a producte de la matriu A i matrius elementals per files i calculeu $\det(B)$.

1) $B = (F_1 + 2F_2, F_1, F_1 + F_2 + F_3)^T$.

2) $B = (F_1 + F_2, F_1, F_1 + F_2 + 2F_3)^T$.

3) $B = (F_1 + F_2 + F_3, F_1 + F_2, F_2 + F_3)^T$.

4) $B = (F_3 - F_1 - F_2, F_1 - F_2 - F_3, F_2 - F_1 - F_3)^T$.

2.12 Sigui $A = (C_1, C_2, C_3) = (F_1, F_2, F_3)^T$ una matriu 3×3, on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes i F_1, F_2 i F_3 són les seves files. Demostreu que si A és invertible, aleshores també ho és la matriu B donada per:

1) $B = (C_1, C_2 + 4C_1, C_3 + 2C_2 + 8C_1)$.

2) $B = (C_1, C_2 + 9C_1, C_3 + 3C_2 + 27C_1)$.

3) $B = (F_1, F_2 + 4F_1, F_3 + 2F_2 + 8F_1)^T$.

4) $B = (F_1, F_2 + 9F_1, F_3 + 3F_2 + 27F_1)^T$.

2.13 Calculeu el rang de les matrius següents.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -7 & 4 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.14 Calculeu les matrius inverses de les matrius següents.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1+2i & 1 \\ 2+i & 2 & 0 \\ -i & 2-i & -1+i \end{pmatrix}$.

2.15 Resoleu els sistemes següents pel mètode de Gauss.

1) $\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 5z = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - 5z = 2 \\ x - 3y + 6z = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 8 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \\ x + 3y + 2z + t = 4 \\ 3x + 5y - 4z - t = -6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + z + t + u = 1 \\ x - y + z - t - u = 2 \\ x + y - z + t - u = -1 \end{cases}$

2.16 Discutiu els sistemes d'equacions següents segons els valors dels paràmetres reals a, b, k, m.

1) $\begin{cases} a^2x + y + z = 3 \\ x + a^2y + z = 4 - a \\ x + y + a^2z = 2 + a^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 3(k + m) \\ x - y = 2(k + m) + 1 \\ mx + ky = m^2 - k^2 - 6 \\ kx + my = k^2 - m^2 + 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + (1 - m)z = m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$

2.17 Resoleu les equacions matricials $AX = B$ següents.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

2.18 Definim la representació matricial $M(z)$ d'un nombre complex $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, com la matriu real d'ordre dos donada per:

$$M(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Demostreu que la representació matricial d'un nombre complex verifica les propietats següents.

1) $M(z_1 + z_2) = M(z_1) + M(z_2)$, per a tot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2) $M(z_1z_2) = M(z_1)M(z_2)$, per a tot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3) $M(\lambda z) = \lambda M(z)$, per a tot $z \in \mathbb{C}$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) Un complex z és un nombre real si i només si existeix un real λ tal que $M(z) = \lambda\,\mathrm{Id}$.

5) $|z|^2 = \det(M(z))$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

6) $M(\overline{z}) = M(z)^T$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

7) $M(z^{-1}) = M(z)^{-1}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

2.19 Resoleu els sistemes següents sistemes. [Al primer apartat podeu tenir en compte l'apartat 3 del problema 2.14.]

1) $\begin{cases} x + (1+2i)y + z = 0 \\ (2+i)x + 2y = 145 \\ -ix + (2-i)y + (-1+i)z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (-1+3i)x - (1+3i)y + 3z = 2-i \\ 5x + 5y + 2z = i \\ (2-i)x + (2+i)y = 0 \end{cases}$

2.20 Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre complex a.

$$a^2x + y + z = 3$$
$$x + a^2y + z = 4 - a$$
$$x + y + a^2z = 2 + a^2$$

2.3 Solucions

2.1

1) $A+B=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&-1&1\\1&3&1\end{pmatrix}$.

2) $A+B$ no es pot calcular, $AB=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&-1\\1&3\end{pmatrix}$.

3) $A+B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$, AB no es pot calcular.

4) No es pot calcular ni $A+B$ ni AB.

2.2

1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

8) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\lambda=2$.

11) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\lambda=2$.

2.5 $J^k=n^{k-1}J$.

2.6

1) 9, 18.

2) -264, 22.

3) $(a-b)(a-c)(b-c)$, $4abc$.

4) $abcd+abc+abd+acd+bcd$, 0.

5) $(a-1)^{n-1}(a-1+n)$.

6) 0.

2.7

1) El determinant val 0.

2) El determinant val $-2i$.

2.8 El determinant val 121.

2.9 $\det(A)=2^{10}3$.

2.10

1) $\det(B) = -4$. 2) $\det(B) = -4$. 3) $\det(B) = 2$. 4) $\det(B) = -8$.

2.11

1) $\det(B) = -4$. 2) $\det(B) = -2$. 3) $\det(B) = 2$. 4) $\det(B) = -8$.

2.12 En quasevol cas, tenim $\det(B) = \det(A)$.

2.13 Les dues tenen rang 2.

2.14

1) $\begin{pmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\frac{1}{145}\begin{pmatrix} 2+34i & 40-45i & -16+18i \\ 15-35i & 10+25i & 25-10i \\ 58-29i & 0 & -29-58i \end{pmatrix}$.

2.15

1) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1 - 4z$, $y = 3 + 7z$.

2) Sistema incompatible.

3) Sistema compatible determinat. Solució: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, $t = 3$.

4) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1/2 + u$, $y = -1/2 - u - t$, $z = 1 - u$.

2.16 Posem: CD: compatible determinat, CI: compatible indeterminat, I: incompatible

1) $a \neq \pm 1$: CD.
$a = 1$: CI.
$a = -1$: I.

2) $a \neq 1, -3$: CD, per a tot b.
$a = 1$, $b = 1$: CI.
$a = 1$, $b \neq 1$:I.
$a = -3$, $b = -1$: CI.
$a = -3$, $b \neq -1$: I

3) $k = 6$, $m = -6$: CD.
En cas contrari: I.

4) $m \neq 0, \pm 2$: CD.
$m = 0$ o $m = -2$: CI.
$m = 2$: I.

2.17

1) Solució única: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2) Solució única: $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3) No té solució.

4) Infinites solucions. La solució general és: $X = \begin{pmatrix} 1-a & -3-b \\ -a & -2-b \\ a & b \end{pmatrix}$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

2.19

1) Compatible determinat. Solució: $x = 40 - 45i$, $y = 10 + 25i$, $z = 0$.

2) Compatible determinat. Solució: $x = (6 + 13i)/10$, $y = (-14 - 3i)/10$, $z = 2 - 2i$.

2.20 Si $a \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}\,i$, aleshores el sistema és compatible determinat. Si $a = 1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat. Si $a = -1, \pm\sqrt{2}\,i$, aleshores el sistema és incompatible.

TEMA 3

L'ESPAI REAL I COMPLEX n-DIMENSIONAL

3.1 Resum teòric

Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.1.1 Estructura vectorial: operacions, escalars i vectors

1) En $\mathbb{K}^n$ definim les dues operacions següents:

   a) Suma de vectors: si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ i $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, aleshores definim la suma $v + w$ com $v + w = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Per tant, $v + w \in \mathbb{K}^n$.

   b) Producte d'un vector per un escalar: si $\lambda \in \mathbb{K}$ i $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, aleshores definim el producte λv com $\lambda v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Per tant, $\lambda v \in \mathbb{K}^n$.

2) Aquestes operacions determinen l'estructura usual de $\mathbb{K}^n$ com espai vectorial sobre $\mathbb{K}$.

3) Els elements de $\mathbb{K}^n$ s'anomenen vectors i els elements de $\mathbb{K}$ s'anomenen escalars.

Combinacions lineals de vectors

1) Diem que un element $w \in \mathbb{K}^n$ és combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ si existeixen escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tals que $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$.

   Notem per $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ el conjunt de les combinacions lineals dels vectors $v_1, \ldots, v_r$.

2) Caracterització matricial.

   a) Considerem la matriu $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ amb coeficients en $\mathbb{K}$, on l'element $a_{i,j}$ de la matriu és la i-èsima component del vector v_j. És a dir, A és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}$$

on $v_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ per a $1 \leqslant j \leqslant r$. Observem que, informalment, la matriu A es pot pensar com "la matriu dels vectors posats en columna"; és a dir:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Si $w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, aleshores:

$$w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \iff A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Per tant, el vector w és combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_r$ si i només si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|w)$, on $(A|w)$ és la matriu de n files i $n+1$ columnes que s'obté de la matriu A afegint la columna corresponent al vector w:

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} & b_n \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_r & w \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

c) A més, en aquest cas, els escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ que ens proporcionen les expressions de w com combinacions lineals $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ dels vectors $v_1, \dots, v_r$ es poden determinar solucionant el sistema que té matriu ampliada $(A|w)$. És a dir, els escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són les solucions del sistema:

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Relacions de dependència lineal de vectors

1) Una relació de dependència lineal entre els vectors $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ és una expressió del tipus $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$, on $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. La relació de "dependència trivial" és la que s'obté fent $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

2) Caracterització matricial. Considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ que "té per columnes" els vectors $v_1, \dots, v_r$. És a dir, si $v_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$, aleshores la matriu A és:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}.$$

En aquesta situació, les relacions de dependència lineal dels vectors $v_1, \dots, v_r$ es determinen solucionant el sistema homogeni de matriu A. És a dir, els escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tals que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ són les solucions del sistema homogeni de n equacions i r incògnites:

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vectors linealment dependents i linealment independents

1) Dependència lineal. Diem que $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ són vectors linealment dependents si existeixen combinacions lineals nul·les no trivials d'aquests vectors.

   Les condicions següents són equivalents:

   a) Els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són linealment dependents.
   b) Un dels vectors del conjunt $\{v_1, \ldots, v_r\}$ s'expressa com combinació lineal dels altres vectors.
   c) Existeixen vectors $w \in \mathbb{K}^n$ que s'expressen de dues o més maneres diferents com a combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_r$.

2) Independència lineal. Diem que $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ són vectors linealment independents si l'única combinació lineal nul·la d'aquests vectors és la trivial.

   Les condicions següents són equivalents:

   a) Els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són vectors linealment independents.
   b) Cap dels vectors del conjunt $\{v_1, \ldots, v_r\}$ s'expressa com combinació lineal dels altres vectors.
   c) Si un vector w de $\mathbb{K}^n$ s'expressa com a combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_r$, aleshores aquesta expressió és única.

3) Caracterització matricial. Considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ que "té per columnes" els vectors $v_1, \ldots, v_r$. És a dir, si $v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$, aleshores:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}.$$

   a) Els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són linealment dependents si i només si $\operatorname{rang}(A) \neq r$ si i només si $\operatorname{rang}(A) < r$.
   b) Els vectors $v_1, \ldots, v_r$ són linealment independents si i només si $\operatorname{rang}(A) = r$.

Sistema de generadors de l'espai

1) Diem que $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ si tot vector de $\mathbb{K}^n$ s'expressa com a combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_r$. És a dir, si per a tot vector $w \in \mathbb{K}^n$, existeixen escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tal que $w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$. Per tant, $v_1, \ldots, v_r$ és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ si i només si $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \mathbb{K}^n$.

2) Caracterització matricial. Considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ que "té per columnes" els vectors $v_1, \ldots, v_r$. És a dir, si $v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$, aleshores:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}.$$

   Els vectors $v_1, \ldots, v_r$ determinen un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ si i només si $\operatorname{rang}(A) = n$.

Bases de l'espai. Dimensió

1) Base de l'espai.

   a) Diem que un conjunt $B \neq \emptyset$ de vectors de $\mathbb{K}^n$ és una base de $\mathbb{K}^n$ si és un sistema de generadors linealment independent de $\mathbb{K}^n$.

   b) Per tant, un conjunt $B \neq \emptyset$ de vectors de $\mathbb{K}^n$ és una base de $\mathbb{K}^n$ si i només si tot element de l'espai $\mathbb{K}^n$ s'expressa, de manera única, com a combinació lineal dels vectors de B.

2) Caracterització matricial. Siguin $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ i considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ que "té per columnes" aquests vectors. És a dir, si $v_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$, aleshores:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}.$$

   Els vectors $v_1, \dots, v_r$ determinen una base de $\mathbb{K}^n$ si i només si $r = n$ i $\mathrm{rang}(A) = n$. És a dir, els vectors $v_1, \dots, v_r$ determinen una base de $\mathbb{K}^n$ si i només si $r = n$ i $\det(A) \neq 0$.

3) La base canònica de l'espai $\mathbb{K}^n$. La base canònica de $\mathbb{K}^n$ és $B_e = \{e_1, \dots, e_n\}$, on $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

4) Bases, sistemes de generadors i vectors linealment independents.

   a) Si $v_1, \dots, v_r$ és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$, aleshores existeix una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $B \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$. És a dir, tot sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ conté una base de l'espai.

   b) Si $v_1, \dots, v_r$ és un conjunt de vectors linealment independents de $\mathbb{K}^n$ aleshores, existeix una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq B$. És a dir, tot conjunt de vectors linealment independents de $\mathbb{K}^n$ es pot completar a una base de l'espai.

   c) Si L és un conjunt de vectors linealment independents de $\mathbb{K}^n$ i si S és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ aleshores, existeix un subconjunt $L' \subseteq S$ tal que $B = L \cup L'$ és una base de $\mathbb{K}^n$. És a dir, afegint certs vectors d'un sistema de generadors podem completar un conjunt de vectors linealment independents a una base de l'espai.

5) Dimensió de l'espai $\mathbb{K}^n$. Totes les bases de l'espai $\mathbb{K}^n$ tenen n elements. Diem que n és la dimensió de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ i notem $n = \dim(\mathbb{K}^n)$.

   a) La dimensió de $\mathbb{K}^n$ és el màxim nombre de vectors linealment independents. És a dir, si $v_1, \dots, v_r$ és un conjunt de vectors linealment independents, aleshores $r \leqslant n$, i es té la igualtat si i només si $\{v_1, \dots, v_r\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

   b) La dimensió de $\mathbb{K}^n$ és el nombre mínim d'elements que determinen un sistema de generadors de l'espai. És a dir, si $v_1, \dots, v_r$ és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$, aleshores $r \geqslant n$, i es té la igualtat si i només si $\{v_1, \dots, v_r\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

   c) Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$, amb $r > n$, aleshores $v_1, \dots, v_r$ són linealment dependents.

   d) Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$, amb $r < n$, aleshores $v_1, \dots, v_r$ no són un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$.

   e) Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$, aleshores $v_1, \dots, v_n$ són linealment independents si i només si $v_1, \dots, v_n$ determinen un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

Coordenades

1) Coordenades en una base. Siguin $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ i $w \in \mathbb{K}^n$. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ els únics escalars tals que $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

   a) Diem que λ_i és la i-èsima coordenada de v en la base B de $\mathbb{K}^n$.
   b) Diem que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ són les coordenades de v en la base B de $\mathbb{K}^n$.
   c) Notem $w_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   d) Les coordenades depenen de l'ordre en que escrivim els vectors de la base. Per tant, quan parlem de coordenades en la base B hem de pensar el conjunt B com un conjunt ordenat. En aquestes notes, si no diem el contrari, l'ordenació del conjunt B és l'associada als subíndexs.

2) Coordenades en la base canònica. Sigui $B_e = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canònica de $\mathbb{K}^n$.

   a) Observem que si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, aleshores $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
   b) Per tant, les coordenades de l'element $w = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ en la base canònica de $\mathbb{K}^n$ són $w_{B_e} = (x_1, \dots, x_n)$. És a dir, tenim la igualtat $w = w_{B_e}$. Per tant, podem "identificar" els vectors de $\mathbb{K}^n$ amb les seves coordenades en la base canònica de $\mathbb{K}^n$.

3) Operacions amb coordenades. Sigui $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$.

   a) Les operacions dels vectors de $\mathbb{K}^n$ expressats en coordenades en la base B es corresponen a les operacions dels elements de $\mathbb{K}^n$ que aquestes coordenades determinen.
   b) És a dir, si $v, w \in \mathbb{K}^n$ tenen coordenades $v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i $w_B = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ en la base B, aleshores $(v + w)_B = (\lambda_1 + \mu_1, \cdots, \lambda_n + \mu_n)$; i si $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores $(\lambda v)_B = (\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n)$.
   c) Per tant, si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ són arbitraris, aleshores les nocions de combinacions lineals dels vectors, de relacions de dependència lineal dels vectors, de dependència i independència lineal dels vectors, de sistemes de generadors i de bases també es poden caracteritzar matricialment fent servir "la matriu que té per columnes" les coordenades dels vectors $v_1, \dots, v_r$ en la base B.

Coordenades i canvi de base

1) Canvi de coordenades entre una base i la base canònica de $\mathbb{K}^n$.

   a) Sigui $B_u = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ i considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ que "té per columnes" aquests vectors. És a dir, si $u_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$, aleshores:

   $$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_j & \dots & u_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

   Sigui $w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ un vector arbitrari i sigui $w_{B_u} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Aleshores:

   $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) La matriu A és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de $\mathbb{K}^n$ en la base B_u en les coordenades del vector w en la base canònica B_e de $\mathbb{K}^n$. Notarem $A = M(B_u \to B_e)$.

c) La matriu A és una matriu invertible i la matriu A^{-1} és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de $\mathbb{K}^n$ en la base canònica B_e de $\mathbb{K}^n$ en les coordenades del vector w en la base B_u. És a dir, $M(B_e \to B_u) = M(B_u \to B_e)^{-1} = A^{-1}$.

2) Canvi de coordenades entre dues bases arbitràries de $\mathbb{K}^n$. Siguin $B_u = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$ dues bases de $\mathbb{K}^n$.

a) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriu quadrada que "té per columnes" les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_n$ en la base B_v. És a dir, si $u_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})_{B_v}$, aleshores:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (u_1)_{B_v} & \cdots & (u_j)_{B_v} & \cdots & (u_n)_{B_v} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Siguin $w \in \mathbb{K}^n$ un vector arbitrari, $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ les coordenades de w en la base B_u i $(\mu_1', \dots, \mu_n')$ les coordenades de w en la base B_v. En aquesta situació, es té:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ \mu_n' \end{pmatrix}.$$

b) La matriu A és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de $\mathbb{K}^n$ en la base B_u en les coordenades del vector w en la base B_v. Notarem $A = M(B_u \to B_v)$.

c) La matriu A és una matriu invertible i la matriu A^{-1} és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de $\mathbb{K}^n$ en la base B_v en les coordenades del vector w en la base B_u. És a dir $M(B_v \to B_u) = M(B_u \to B_v)^{-1} = A^{-1}$.

3.1.2 Els subespais vectorials de l'espai real i complex n-dimensional

La noció de subespai

1) Diem que un subconjunt $F \subseteq \mathbb{K}^n$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$ si es verifiquen les propietats següents:

a) $0 \in F$.

b) Per a tot $u, v \in F$, es té que $u + v \in F$.

c) Per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$ i per a tot $w \in F$, es té que $\lambda w \in F$.

2) Subespais trivials. Diem que $F = \{0\}$ i que $F = \mathbb{K}^n$ són els subespais vectorials trivials de $\mathbb{K}^n$.

3) Subconjunts i subespais.

a) Els subconjunts de $\mathbb{K}^n$ no són, en general, subespais vectorials.

b) Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$, aleshores $\{v_1, \dots, v_r\}$ no és, en general, un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

c) Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$, aleshores $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Subespais associats a una matriu

1) Subespais vectorials definits per una matriu. Sigui $A \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{K})$. Associats a la matriu A considerem el subconjunt $\mathrm{Col}(A)$ dels vectors de $\mathbb{K}^s$ que són combinació lineal de les columnes de la matriu A, i el subconjunt $\mathrm{Nul}(A)$ dels vectors de $\mathbb{K}^t$ que són solucions del sistema homogeni de matriu associada A. És a dir:

$$\mathrm{Col}(A) = \left\{ (b_1, \ldots, b_s) \in \mathbb{K}^s : \text{ existeixen } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{K} \text{ amb } A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathrm{Nul}(A) = \left\{ (x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{K}^t : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{K}^s$ és un subespai de l'espai vectorial s-dimensional $\mathbb{K}^s$.

b) $\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathbb{K}^t$ és un subespai de l'espai vectorial t-dimensional $\mathbb{K}^t$.

c) Siguin $A_1 \in \mathcal{M}_{s,t_1}(\mathbb{K})$ i $A_2 \in \mathcal{M}_{s,t_2}(\mathbb{K})$. Aleshores:

$$\mathrm{Col}(A_1) = \mathrm{Col}(A_2) \iff \mathrm{rang}(A_1) = \mathrm{rang}(A_2) = \mathrm{rang}(A_1 \,|\, A_2).$$

d) Siguin $A_1 \in \mathcal{M}_{s_1,t}(\mathbb{K})$ i $A_2 \in \mathcal{M}_{s_2,t}(\mathbb{K})$. Aleshores:

$$\mathrm{Nul}(A_1) = \mathrm{Nul}(A_2) \iff \mathrm{rang}(A_1) = \mathrm{rang}(A_2) = \mathrm{rang}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

e) Siguin $A_1 \in \mathcal{M}_{s,\ell_1}(\mathbb{K})$ i $A_2 \in \mathcal{M}_{\ell_2,s}(\mathbb{K})$. Aleshores:

$$\mathrm{Col}(A_1) = \mathrm{Nul}(A_2) \iff A_2A_1 = 0 \text{ i } \mathrm{rang}(A_1) + \mathrm{rang}(A_2) = s.$$

Descripció dels subespais vectorials

1) Subespais vectorials, vectors i matrius. Si F és un subconjunt no buit de $\mathbb{K}^n$, aleshores les condicions següents són equivalents:

a) El subconjunt F és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

b) Existeix una matriu $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ tal que $F = \mathrm{Col}(A)$.

c) Existeixen vectors $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ tals que $F = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

2) Subespais vectorials, equacions i matrius. Si F és un subconjunt no buit de $\mathbb{K}^n$, aleshores les condicions següents són equivalents:

a) F és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

b) Existeix una matriu $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tal que $F = \mathrm{Nul}(A)$.

c) F és el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions homogeni amb m equacions i n incògnites.

Sistemes de generadors, bases i dimensió d'un subespai

1) Sistema de generadors i base d'un subespai. Sigui F un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$. Diem que els vectors $v_1,\dots,v_r$ de $\mathbb{K}^n$ determinen un sistema de generadors del subespai F si $F = \langle v_1,\dots,v_r\rangle$. Diem que el conjunt de vectors $\{v_1,\dots,v_r\}$ és una base del subespai F si és un sistema de generadors de F i són linealment independents.

   a) Si $v_1,\dots,v_r$ és un sistema de generadors de F, aleshores existeix una base B de F tal que $B \subseteq \{v_1,\dots,v_r\}$. És a dir, tot sistema de generadors de F conté una base del subespai F.
   b) Si $v_1,\dots,v_r$ és un conjunt de vectors linealment independents de F, aleshores existeix una base B de F tal que $\{v_1,\dots,v_r\} \subseteq B$. És a dir, tot conjunt de vectors linealment independents de F es pot completar a una base del subespai F.
   c) Si $\{v_1,\dots,v_r\}$ i $\{w_1,\dots,w_s\}$ són dues bases de F, aleshores $r = s$. És a dir, totes les bases del subespai F tenen el mateix nombre d'elements.

2) Dimensió d'un subespai. Diem que un subespai vectorial F de $\mathbb{K}^n$ té dimensió r si F té una base de r elements (on entenem que $r = 0$ si i només si $F = \{0\}$). Notem $\dim(F)$ la dimensió del subespai vectorial F.

   a) La dimensió de F és el màxim nombre de vectors linealment independents que té F. És a dir, si $v_1,\dots,v_r \in F$ és un conjunt de vectors linealment independents, aleshores $r \leq \dim(F)$ i es té la igualtat si i només si $\{v_1,\dots,v_r\}$ és una base de F.
   b) La dimensió de F és el nombre mínim d'elements que determinen un sistema de generadors del subespai F. És a dir, si $v_1,\dots,v_r$ és un sistema de generadors de F, aleshores $r \geq \dim(F)$ i es té la igualtat si i només si $\{v_1,\dots,v_r\}$ és una base de F.

3) Dimensió d'un subespai i rang de matrius. Sigui $F \subseteq \mathbb{K}^n$ és un subespai.

   a) Si $F = \mathrm{Col}(A)$, amb $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, aleshores $\dim(F) = \mathrm{rang}(A)$.
   b) Si $F = \mathrm{Nul}(A)$, amb $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, aleshores $\dim(F) = n - \mathrm{rang}(A)$.

Inclusió i igualtat de subespais

1) Dimensió d'un subespai i dimensió de l'espai. Si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$, aleshores $\dim(F) \leq n$. A més, $\dim(F) = n$ si i només si $F = \mathbb{K}^n$.

2) Dimensió, inclusió i igualtat de subespais.

   a) Si F_1, F_2 són dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$ tals que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $\dim(F_1) \leq \dim(F_2)$. El recíproc d'aquesta implicació no és cert.
   b) Si F_1, F_2 són dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$ tals que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $F_1 = F_2$ si i només si $\dim(F_1) = \dim(F_2)$.

3) Inclusió de subespais i matrius. Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$.

   a) Si $F_1 = \mathrm{Col}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Col}(A_2)$, aleshores: $F_1 \subseteq F_2 \iff \mathrm{rang}(A_2) = \mathrm{rang}(A_1 \,|\, A_2)$.
   b) Si $F_1 = \mathrm{Nul}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Nul}(A_2)$, aleshores: $F_1 \subseteq F_2 \iff \mathrm{rang}(A_1) = \mathrm{rang}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$.
   c) Si $F_1 = \mathrm{Col}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Nul}(A_2)$, aleshores: $F_1 \subseteq F_2 \iff A_2 A_1 = 0$.

Operacions amb subespais: suma i intersecció

1) Els subespais suma i intersecció. Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$. Definim el subespai vectorial suma $F_1 + F_2$ i el subespai vectorial intersecció $F_1 \cap F_2$ d'aquests subespais com:

$$F_1 + F_2 = \{u \in \mathbb{K}^n : \text{ existeixen } u_1 \in F_1, u_2 \in F_2 \text{ tals que } u = u_1 + u_2\}.$$
$$F_1 \cap F_2 = \{u \in \mathbb{K}^n : u \in F_1 \text{ i } u \in F_2\}.$$

2) Relació entre els subespais, la seva suma i la seva intersecció. Si F_1 i F_2 són dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$, aleshores:

   a) $F_1 \cap F_2 \subseteq F_i \subseteq F_1 + F_2$, per a $i = 1, 2$.

   b) $F_1 = F_1 + F_2$ si i només si $F_2 \subseteq F_1$.

   c) $F_1 = F_1 \cap F_2$ si i només si $F_1 \subseteq F_2$.

   d) $F_1 \cap F_2 = F_1 + F_2$ si i només si $F_1 = F_2$.

3) Sistemes de generadors i bases dels subespais suma i intersecció.

   a) Si $F_1 = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ i $F_2 = \langle w_1, \ldots, w_s \rangle$ són dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$, aleshores la seva suma és $F_1 + F_2 = \langle v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \rangle$. Per tant, el conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ conté una base del subespai $F_1 + F_2$.

   b) Si $F_1 = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ i $F_2 = \langle w_1, \ldots, w_s \rangle$ són dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$, aleshores una base de la intersecció $F_1 \cap F_2$ es pot determinar si coneixem les relacions de dependència lineal del conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$.

4) Dimensions dels subespais suma i intersecció. Fórmula de Grassmann. Si F_1, F_2 són dos subespais de $\mathbb{K}^n$, aleshores $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2)$.

5) Suma, intersecció i matrius. Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$.

   a) Si $F_1 = \mathrm{Col}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Col}(A_2)$, aleshores $F_1 + F_2 = \mathrm{Col}(A_1 \mid A_2)$.

   b) Si $F_1 = \mathrm{Nul}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Nul}(A_2)$, aleshores $F_1 \cap F_2 = \mathrm{Nul}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$.

Subespais complementaris. Suma directa

1) Diem que dos subespais vectorials F_1, F_2 de $\mathbb{K}^n$ són subespais complementaris o suplementaris l'un de l'altre si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ i $F_1 + F_2 = \mathbb{K}^n$. En aquest cas, notarem $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus F_2$ i dirm que l'espai $\mathbb{K}^n$ és suma directa dels subespais vectorials F_1 i F_2.

2) Existència i dimensió dels complementaris d'un subespai.

   a) Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$. Aleshores F_1 i F_2 són subespais complementaris si i només si $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(F_1 + F_2) = n$.

   b) Si F és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$, aleshores existeix un complementari de F. En general, el complementari de F no és únic, però tots ells tenen dimensió $n - \dim(F)$.

3) Caracterització matricial. Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$.

   a) Si $F_1 = \mathrm{Col}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Col}(A_2)$, aleshores els subespais F_1 i F_2 són complementaris si i només si $\mathrm{rang}(A_1) + \mathrm{rang}(A_2) = \mathrm{rang}(A_1 \,|\, A_2) = n$.

   b) Si $F_1 = \mathrm{Nul}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Nul}(A_2)$, aleshores els subespais F_1 i F_2 són complementaris si i només si $\mathrm{rang}(A_1) + \mathrm{rang}(A_2) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n$.

4) L'espai com suma directa de subespais.

   a) Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$. Aleshores $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus F_2$ si i només si per a tot $u \in \mathbb{K}^n$ existeixen uns únics elements $u_1 \in F_1$ i $u_2 \in F_2$ tal que $u = u_1 + u_2$.

   b) Si $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus F_2$ i B_i és una base de F_i, aleshores $B = B_1 \cup B_2$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

5) Generalització a tres o més subespais.

   a) Siguin $F_1, \ldots, F_r$ subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$. Diem que $\mathbb{K}^n$ és suma directa dels subespais $F_1, \ldots, F_r$, i ho notem $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, si i només si per a tot $u \in \mathbb{K}^n$ existeixen uns únics elements $u_i \in F_i$ tals que $u = u_1 + \cdots + u_r$.

   b) Si $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ i si B_i és una base de F_i, aleshores $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

3.1.3 Estructura euclidiana de l'espai real n-dimensional

Producte escalar, norma i distància

1) Producte escalar. Si $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim el producte escalar de u i v com:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

   El producte escalar és una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que és lineal en cada factor, simètrica i definida positiva i no degenerada. És a dir:

   a) Per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

   b) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

   c) Per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

   d) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

   e) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.

   f) Per a tot $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, u \rangle \geqslant 0$ i, a més, $\langle u, u \rangle = 0$ si i només si $u = 0$.

2) Norma. Si $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definim la norma de u com:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

   La norma és una aplicació $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfà:

a) Per a tot $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| \geqslant 0$ i, a més, $\|u\| = 0$ si i només si $u = 0$.

b) Per a tot $u \in \mathbb{R}^n$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.

c) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$. (Desigualtat triangular.)

3) Distància. Si $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim la distància de u a v com:

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

La distància és una aplicació $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfà:

a) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}$, $d(u,v) \geqslant 0$ i, a més, $d(u,v) = 0$ si i només si $u = v$.

b) Per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$, $d(u,v) = d(v,u)$.

c) Per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$. (Desigualtat triangular.)

Algunes igualtats. Desigualtat de Cauchy-Schwarz. Angle entre vectors

1) Norma de sumes i de diferències. Relació entre el producte escalar i les normes. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, aleshores:

a) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$.

b) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$.

c) Si $\langle u,v\rangle = 0$, aleshores $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. (Teorema de Pitàgoras.)

d) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. (Llei del paral·lelogram.)

e) $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

2) Desigualtat de Cauchy-Schwarz. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, aleshores $|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$. A més, $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|$ si i només si els vectors u, v són linealment dependents.

3) Angle entre vectors. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ són vectors no nuls, aleshores existeix un únic $\varphi \in [0,\pi]$ tal que $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\varphi$. Diem que φ és l'angle entre u i v, i ho notem $\varphi = \widehat{u,v}$. Per tant:

a) $\widehat{u,v} = 0, \pi$ si i només si els vectors u, v són linealment dependents.

b) $\widehat{u,v} = \pi/2$ si i només si $\langle u,v\rangle = 0$.

Vectors ortogonals i vectors ortonormals. Mètode de Gram-Schmidt

1) Diem que un element $u \in \mathbb{R}^n$ és unitari si $\|u\| = 1$. Diem que els vectors $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ són ortogonals si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, per a $i \neq j$. Diem que els vectors $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ són ortonormals si són ortogonals i unitaris.

2) Ortogonalitat, ortonormalitat i independència lineal.

a) Si $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ són vectors ortogonals i no nuls, aleshores $u_1, \dots, u_m$ són vectors linealment independents.

b) Si $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^n$ són vectors ortogonals i no nuls, aleshores $\frac{1}{\|u_1\|}u_1,\dots,\frac{1}{\|u_m\|}u_m$ són vectors ortonormals i linealment independents.

3) Mètode de Gram-Schmidt. Siguin $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Definim $w_1 = v_1$ i, per a $k \in \{2,\dots,m\}$, definim el vector w_k com $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} w_i$, on $\lambda_{k,i} = \langle v_k, w_i\rangle / \langle w_i, w_i\rangle$. Els vectors $w_1,\dots,w_m \in \mathbb{R}^n$ definits així satisfan les propietats següents:

a) Per a $1 \leqslant k \leqslant m$, $w_1,\dots,w_k$ són ortogonals, $\langle w_1,\dots,w_k\rangle = \langle v_1,\dots,v_k\rangle$, i $w_1,\dots,w_k \neq 0$ si i només si $v_1,\dots,v_k$ són linealment independents.

b) Si $v_1,\dots,v_k$ són linealment independents, aleshores el conjunt de vectors $\{w_1,\dots,w_k\}$ és una base ortogonal del subespai $\langle v_1,\dots,v_k\rangle$, i el conjunt de vectors $\{\frac{1}{\|w_1\|}w_1,\dots,\frac{1}{\|w_k\|}w_k\}$ és una base ortonormal del subespai $\langle v_1,\dots,v_k\rangle$.

Coeficients de Fourier. Coordenades en una base ortogonal

1) Coeficients de Fourier. Sigui $B = \{u_1,\dots,u_n\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Per a $1 \leqslant i \leqslant n$, definim el i-èsim coeficient de Fourier d'un vector w de $\mathbb{R}^n$ respecte de la base ortogonal B com l'escalar $c_i(w) = \langle w, u_i\rangle / \langle u_i, u_i\rangle$.

2) Coordenades en una bases ortogonal. Si $B = \{u_1,\dots,u_n\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$, aleshores les coordenades d'un element $w \in \mathbb{R}^n$ en la base B són $(c_1(w),\dots,c_n(w))$. És a dir:

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i(w) u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle w, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i.$$

Complementari ortogonal d'un subespai

1) Subespais ortogonals. Diem que dos subespais F_1, F_2 de $\mathbb{R}^n$ són ortogonals si per a tot $u \in F_1$ i per a tot $v \in F_2$ es té que $\langle u, v\rangle = 0$. Notem $F_1 \perp F_2$.

a) Si $F_1 \perp F_2$, aleshores $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

b) Si $F_1 = \langle u_1,\dots,u_r\rangle$ i $F_2 = \langle v_1,\dots,v_s\rangle$, aleshores: $F_1 \perp F_2 \iff \langle u_i, v_j\rangle = 0$, per a tot i, j.

c) Si $F_1 = \mathrm{Col}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Col}(A_2)$, aleshores: $F_1 \perp F_2 \iff A_2^T A_1 = 0 \iff A_1^T A_2 = 0$.

d) Si $F_1 = \mathrm{Nul}(A_1)$ i $F_2 = \mathrm{Nul}(A_2)$, aleshores: $F_1 \perp F_2 \iff A_2 A_1^T = 0 \iff A_1 A_2^T = 0$.

2) Ortogonal d'un subespai. Definim el subespai ortogonal $F^\perp$ d'un subespai vectorial F de l'espai $\mathbb{R}^n$ com $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v\rangle = 0, \text{ per a tot } v \in F\}$.

a) El subespai $F^\perp$ és el més gran dels subespais ortogonals a F. És a dir, si G és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ aleshores, $G \perp F$ si i només si $G \subseteq F^\perp$.

b) Si $F = \langle u_1,\dots,u_r\rangle$, aleshores $F^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, u_i\rangle = 0, \text{ per a tot } i\}$. (Equacions normals.)

c) Si $\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_n\}$ és una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ i $\{u_1,\dots,u_r\}$ és una base ortogonal de F, aleshores $\{u_{r+1},\dots,u_n\}$ és una base ortogonal de $F^\perp$.

d) $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$.

e) Si $F = \mathrm{Col}(A)$, aleshores $F^\perp = \mathrm{Nul}(A^T)$.

f) Si $F = \mathrm{Nul}(A)$, aleshores $F^\perp = \mathrm{Col}(A^T)$.

3) Complementari ortogonal d'un subespai.

a) Si F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, aleshores els subespais F i $F^\perp$ són subespais ortogonals i complementaris. És a dir, $F \perp F^\perp$ i a més $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$.

b) El subespai $F^\perp$ és l'únic complementari ortogonal de F. És a dir, si G és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ i tal que $G \perp F$, aleshores $G = F^\perp$.

Projecció i component ortogonal

1) Sigui F un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Sigui $w \in \mathbb{R}^n$ i siguin $P_F(w) \in F$ i $C_F(w) \in F^\perp$ els únics vectors tals que $w = P_F(w) + C_F(w)$. En aquesta situació, es diu que $P_F(w)$ és la projecció ortogonal de w sobre F i que $C_F(w)$ és la seva component ortogonal.

2) Càlcul amb els coeficients de Fourier. Siguin F un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $w \in \mathbb{R}^n$.

a) Si $\{u_1, \dots, u_r\}$ és una base ortogonal de F, aleshores $P_F(w) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$, on $\lambda_i = \langle w, u_i \rangle / \langle u_i, u_i \rangle$, i $C_F(w) = w - P_F(w)$.

b) Si $\{v_1, \dots, v_s\}$ és una base ortogonal de $F^\perp$, aleshores $P_F(w) = w - C_F(w)$ i $C_F(w) = \sum_{i=1}^s \mu_i v_i$, on $\mu_i = \langle w, v_i \rangle / \langle v_i, v_i \rangle$.

3) Càlcul matricial.

a) Siguin F un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Suposem que $F = \mathrm{Col}(A)$, amb $A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$. En aquesta situació, es té:

$$P_F(w) = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, \quad C_F(w) = w - P_F(w),$$

on $v_1, \dots, v_r$ són els vectors definits per les columnes de la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots\dots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix},$$

i on $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són les solucions del sistemea d'equacions:

$$A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Siguin F un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Suposem que $F = \mathrm{Nul}(A)$, amb $A \in \mathscr{M}_{s,n}(\mathbb{R})$. En aquesta situació, es té:

$$P_F(w) = w - C_F(w), \quad C_F(w) = \sum_{i=1}^s \mu_i u_i,$$

on $u_1, \dots, u_s$ són els vectors definits per les files de la matriu A; és a dir, per les columnes de la matriu transposada A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots\dots & u_s \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix},$$

i on $\mu_1, \dots, \mu_s$ són les solucions del sistemea d'equacions:

$$AA^T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Aproximació òptima

1) Caracterització de la projecció ortogonal. Siguin F un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n$ i $w' \in F$. Aleshores: $w' = P_F(w) \iff w - w' \in F^\perp \iff \|w - w'\| \leqslant \|w - u\|$, per a tot $u \in F$.

2) Aproximació òptima. Distància a un subespai. Siguin F un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $w \in \mathbb{R}^n$. Aleshores: $\|C_F(w)\| = d(w, P_F(w)) \leqslant d(w, u)$, per a tot $u \in F$. Per tant:

   a) La projecció ortogonal $P_F(w)$ és la aproximació òptima de w per vectors de F.

   b) La norma de la component ortogonal $\|C_F(w)\|$ és la distància del vector w al subespai F.

3.2 Exercicis

3.1 Digueu quines de les proposicions següents són certes (per $\mathbb{K}$ entenem $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

1) El conjunt $\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 : x+y+z=0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.

2) El conjunt $\{(\lambda+\mu,\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^3 : \lambda,\mu\in\mathbb{K}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.

3) El conjunt $\{(\lambda+2,\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^3 : \lambda,\mu\in\mathbb{K}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.

4) El conjunt $\{(\lambda+\mu,\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^3 : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{C}^3$.

5) El conjunt $\{(x_1,x_2,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^4 : x_1,x_2\in\mathbb{Z}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.

6) El conjunt $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{K}^4 : x_3+2x_4=7\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^4$.

7) El conjunt $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1<x_2\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

8) El conjunt $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : x_1^2+x_2^2=0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

9) El conjunt de les solucions d'un sistema compatible $Ax=b$ de m equacions i n incògnites amb coeficients en $\mathbb{K}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

3.2 Considerem els subespais vectorials $U=\langle(1,2,1),(3,1,5)\rangle$ i $V=\langle(1,2,1),(3,1,5),(3,-4,7)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. És cert que $U=V$?

3.3 Trobeu una base del subespai vectorial $F=\langle(2,1,-1),(8,-5,1),(1,-4,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ i amplieu-la a una base de $\mathbb{R}^3$.

3.4 Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$ definits per $F=\langle(1,2,1,3),(2,0,3,2)\rangle$ i $G=\langle(-1,6,-3,5),(0,4,-1,4),(3,2,1,-1)\rangle$. Comproveu que $F\subseteq G$, trobeu una base de F i amplieu-la a una base de G.

3.5 Doneu la dimensió i una base del subespai vectorial F de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

3.6 Sigui $\{u_1,u_2,u_3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$. Considerem els vectors $v_1=u_1$, $v_2=au_2+u_3$ i $v_3=u_1+u_2+bu_3$, on $a,b\in\mathbb{K}$. Calculeu una base i la dimensió del subespai vectorial generat per v_1, v_2 i v_3. Per a quins escalars a,b és el conjunt de vectors $\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de l'espai $\mathbb{K}^3$?

3.7 Considerem els vectors $u_1=(1,-3,-2,5)$, $u_2=(3,-2,-4,9)$ i $u_3=(4,-7,2,3)$ de $\mathbb{R}^4$. Pertany el vector $v=(10,1,6,-2)$ al subespai $\langle u_1,u_2,u_3\rangle$? És $\{u_1,u_2,u_3\}$ una base d'aquest subespai? En cas afirmatiu, trobeu les components de v en aquesta base.

3.8 Trobeu, en cada cas, una base i la dimensió dels subespais vectorials U, V, $U+V$ i $U\cap V$. Determineu, en cada cas, si $U=V$, si l'espai total és suma dels subespais U i V i si l'espai total és suma directa dels subespais U i V.

1) En $\mathbb{R}^3$: $U = \langle (1,2,-1),(2,-3,2) \rangle$ i $V = \langle (4,1,3),(-3,1,2) \rangle$.

2) En $\mathbb{R}^4$: $U = \langle (1,-1,1,1),(2,0,1,0),(1,2,1,2) \rangle$ i $V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b+c=0, b+d=0\}$.

3) En $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\}$ i $V = \{(\lambda a + a(2+a)\mu, 0, 0, \lambda+\mu) \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

3.9 Siguin $F = \langle (0,i,1),(0,1,i) \rangle$ i $G = \langle (1-2i, 1+2i, 1),(5,-3+4i,1+2i) \rangle$ subespais de $\mathbb{C}^3$. És cert que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$?

3.10 Determineu per a quins valors del paràmetre real a els subespais vectorials $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : ix + (1+i)y = (1-i)x - iy + (1+ai)z = 0\}$ i $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x + ay + (a+i)z = 0\}$ de $\mathbb{C}^3$ tenen intersecció nul·la.

3.11 Sigui $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Comproveu que $B_2 = \{u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3\}$ també és una base de $\mathbb{R}^3$. Si un vector té coordenades (a,b,c) en la base B_1, quines coordenades té en la base B_2?

3.12 Demostreu, en cada cas, que el conjunt de vectors $\{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{C}^3$, i trobeu les components del vector v en aquesta base.

1) $u_1 = (1, 2+i, -i)$, $u_2 = (1+2i, 2, 2-i)$, $u_3 = (1, 0, -1+i)$, $v = (-3+6i, 3+4i, 9-3i)$.

2) $u_1 = (1, 2i, -i)$, $u_2 = (2, 1+i, 1)$, $u_3 = (-1, 1, -i)$, $v = (1,2,0)$.

3.13 En $\mathbb{R}^3$ considerem les bases $B_1 = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ i $B_2 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$. Sigui $v \in \mathbb{R}^3$ un vector amb coordenades (x,y,z) en la base B_1 i amb coordenades (x',y',z') en la base B_2. Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z'.

3.14 Sigui u, v, w una base de $\mathbb{R}^3$. Si les coordenades dels vectors $(1,1,2)$, $(2,0,3)$ i $(1,1,0)$ en aquesta base són, respectivament, $(2,1,0)$, $(2,0,2)$ i $(1,1,-2)$, calculeu quins són els vectors u, v i w.

3.15 Considerem en $\mathbb{R}^4$ les famílies de vectors $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, on $u_1 = (0,1,1,0)$, $u_2 = (-1,0,0,-1)$, $u_3 = (2,0,1,0)$, $u_4 = (0,0,1,1)$, $v_1 = 2u_1 + u_2$, $v_2 = -u_1 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_2 - 2u_3$, i $v_4 = 3u_4$.

1) Demostreu que B i B' són bases de $\mathbb{R}^4$.

2) Sigui $x \in \mathbb{R}^4$ el vector que té components $(-1,0,1,0)$ en la base B. Trobeu les seves components en la base B' i en la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

3) Sigui e_1 el primer vector de la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Trobeu les coordenades de e_1 en la base B i en la base B'.

3.16 Considerem les famílies de vectors $B_1 = \{(1,-1,0),(2,1,3)\}$ i $B_2 = \{(1,5,6),(1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Demostreu que el subespai vectorial generat per B_1 coincideix amb el subespai vectorial generat per B_2. Notem per F aquest subespai.

2) Trobeu, en l'espai vectorial F, la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2.

3) Trobeu les coordenades del vector $v = (-5,-7,-12) \in F$ en la base B_1 i en la base B_2.

3.17 Siguin $u, v \in \mathbb{R}^n$. Proveu les propietats següents.

a) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.

b) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$.

c) Si $\langle u, v\rangle = 0$, aleshores $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. (Teorema de Pitàgoras.)

d) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. (Llei del paral·lelogram.)

e) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

3.18 Trobeu un vector de $\mathbb{R}^3$ que sigui ortogonal als vectors $u = (1,2,1)$ i $v = (1,1,0)$.

3.19 Demostreu que els vectors $u_1 = (2/3,-2/3,1/3)$, $u_2 = (1/3,2/3,2/3)$, $u_3 = (2/3,-1/3,-2/3)$ formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Doneu les coordenades del vector $v = (2,3,-1)$ en aquesta base (coeficients de Fourier).

3.20 Siguin $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ tals que $\|u\| = \|v\| = 1$, $\|w\| = 2$, $\widehat{u,w} = \widehat{v,w} = \pi/3$ i $\widehat{u,v} = \pi/2$. Calculeu el producte escalar $\langle u+v, v+w\rangle$.

3.21 Trobeu una base ortonormal dels subespais que s'indiquen.

1) $F_1 = \langle (1,2,-1,0),(2,3,2,1),(1,0,1,0)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

2) $F_2 = \langle (1,1,1,1,0),(1,0,1,1,1),(1,1,0,0,1),(0,0,1,1,1)\rangle$ de $\mathbb{R}^5$.

3) $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

3.22 Trobeu una base del complement ortogonal dels subespais següents.

1) $F_1 = \langle (2,-1,5),(1,2,8)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

2) $F_2 = \langle (1,2,3,-1,2),(2,4,7,2,-1)\rangle$ de $\mathbb{R}^5$.

3) $F_3 = \langle (1,0,2,1),(0,1,-2,1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

4) $F_4 = \{(x,y,z) : \mathbb{R}^3 : x+8y-4 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5) $F_5 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1+x_2+3x_3-x_4 = 0, 3x_1+2x_2-2x_4 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

3.23 Calculeu el complement ortogonal $F^\perp$ del subespai $F = \langle (1,2,1,0),(0,1,1,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$ i escriviu el vector $v = (0,1,2,1)$ com a suma d'un vector de F i un vector de $F^\perp$.

3.24 Trobeu, en cada cas, la projecció ortogonal i la component ortogonal del vector u respecte del subespai H.

1) $u = (2,1,0,3)$ i $F_1 = \langle(-1,0,1,0),(2,1,0,0)\rangle$.

2) $u = (4,-1,-3,4)$ i $F_2 = \langle(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\rangle$.

3) $u = (2,1,0,3)$ i $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + 3z + t = 0\}$.

4) $u = (7,-4,-1,2)$ i $F_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0\}$.

3.3 Solucions

3.1 Són certes les proposicions: 1; 2; 8, només per a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; i 9, només si el sistema és homogeni.

3.2 Sí.

3.3 Una base de F és $\{(2,1,-1),(1,-4,2)\}$ i el vector $(0,0,1)$ completa aquesta base a una de $\mathbb{R}^3$.

3.4 $G = \langle(1,2,1,3),(2,0,3,2),(3,2,1,-1)\rangle$.

3.5 És un subespai de dimensió 1. Una base de F és $(-2,-1,1)$.

3.6 La dimensió és 2 si $a,b \in \mathbb{K}$ són tals que $ab = 1$ i, en aquest cas, els vectors v_1, v_2 determinen una base del subespai. La dimensió val 3 si $a,b \in \mathbb{K}$ són tals que $ab \neq 1$ i, en aquest cas, els vectors v_1, v_2, v_3 determinen una base del subespai. Per tant, els vectors v_1, v_2, v_3 determinen una base de $\mathbb{K}^3$ si, i només si, $ab \neq 1$.

3.7 Sí, v pertany a aquest subespai. Sí, $\{u_1, u_2, u_3\}$ és una base del subespai que generen aquests vectors. Les components de v en aquesta base són $(-7,3,2)$.

3.8

1) Tenim que $\dim(U) = \dim(V) = 2$, $\dim(U+V) = 3$ i $\dim(U \cap V) = 1$. En particular, $U \neq V$, $\mathbb{R}^3 = U + V$, però la suma no és directa. Bases: $U = \langle(1,2,-1),(2,-3,2)\rangle$, $V = \langle(4,1,3),(-3,1,2)\rangle$, $U \cap V = \langle(7,0,1)\rangle$.
2) Tenim que $\dim(U) = 3$ i el sistema de generadors donat és una base de U; $\dim(V) = 2$ i una base de V és $\{(0,-1,1,1),(1,-1,0,1)\}$. Per tant, $U \neq V$. Intersecció: $U \cap V = \langle(1,-3,2,3)\rangle$ i, per tant, $\dim(U \cap V) = 1$. El subespai $U+V$ té dimensió 4, $U + V = \mathbb{R}^4$, i la suma no és directa.
3) Tenim que $\dim(U) = 3$ i els vectors $(1,0,0,-1)$, $(0,1,0,-1)$, $(0,0,1,-1)$ formen una base de U. Si $a \neq 0,-1$, aleshores $\dim(V) = 2$ i els vectors $(a,0,0,1)$, $(a(2+a),0,0,1)$ constitueixen una base de V. En aquest cas, $U \neq V$, $U+V = \mathbb{R}^4$, però la suma no és directa, i $U \cap V$ és un subespai de dimensió 1 generat pel vector $(-1,0,0,1)$. Si $a = -1$, aleshores $V = \langle(-1,0,0,1)\rangle$. En aquest cas, $U + V = U$ i $U \cap V = V$. Si $a = 0$, aleshores $\{(0,0,0,1)\}$ és una base de V. En aquest cas, $U + V = \mathbb{R}^4$, $U \cap V = \{0\}$ i, per tant, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

3.9 Sí.

3.10 $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ si i només si $a \neq 1$.

3.11 $(a-b, b-c, c)$.

3.12

1) $(i, 2+i, -3)$.
2) $((-4-7i)/15, (12+i)/15, (1-i)/3)$.

3.13 $x = (x'-y'+z')/2$, $y = (-x'+y'+z')/2$, $z = (x'+y'-z')/2$.

3.14 $u = (2,0,1)$, $v = (-3,1,0)$, $w = (-1,0,1/2)$.

3.15

1) —
2) Les components de x en la base B' són $(0,1,0,-1/3)$ i en la base canònica x té components $(2,-1,0,0)$.
3) $(e_1)_B = (0,-1/3,1/3,-1/3)$, $(e_1)_{B'} = (-1/12,-1/6,-1/4,-1/18)$.

3.16

1) —

2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $v_{B_1} = (3,-4)$, $v_{B_2} = (1,-6)$.

3.18 Qualsevol vector múltiple de $(1,-1,1)$.

3.19 Els coeficients de Fourier del vector $v = (2,3,-1)$ en la base donada són $(-1/3,2,1)$.

3.20 $\langle u+v, v+w\rangle = 3$.

3.21

1) $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(1,2,-1,0)$, $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(1,1,3,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(2,-1,0,-1)$.

2) $\frac{1}{2}\cdot(1,1,1,1,0)$, $\frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot(1,-3,1,1,4)$, $\frac{1}{\sqrt{91}}\cdot(5,-4,-4,5)$, $\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot(-4,2,1,1,2)$.

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-1,-1,2)$.

3.22

1) $F_1^{\perp} = \langle(-18,-11,5)\rangle$.

2) $F_2^{\perp} = \langle(-17,0,5,0,1),(13,0,-4,1,0),(-2,1,0,0,0)\rangle$.

3) $F_3^{\perp} = \langle(-1,-1,0,1),(-2,2,1,0)\rangle$.

4) $F_4^{\perp} = \langle(1,8,-4)\rangle$.

5) $F_5^{\perp} = (2,1,3,-1),(3,2,0,-4)\rangle$.

3.23 Base ortogonal de F: $(1,2,1,0),(-1,0,1,4)$. Base ortogonal de $F^{\perp}$: $(4,-2,0,1),(-1,-3,7,-2)$. $P_F(v) = (1/3,4/3,1,4/3)$, $P_{F^{\perp}}(v) = (-1/3,-1,1,-1/3)$.

3.24

1) Base ortogonal de F_1: $(-1,0,1,0)$, $(1,1,1,0)$. $P_{F_1}(u) = (2,1,0,0)$. $C_{F_1}(u) = u - P_{F_1}(u) = (0,0,0,3)$.

2) Base ortogonal de F_2: $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,-2)$. $P_{F_2}(u) = (1,-2,-2,7)$. $C_{F_2}(u) = u - P_{F_2}(u) = (3,1,-1,-3)$.

3) Base ortogonal de F_3: $(-1,0,0,2)$, $(-6,0,5,-3)$, $(-2,14,-3,-1)$. $P_{F_3}(u) = (2/5,-7/15,-8/15,53/15)$. $C_{F_3}(u) = u - P_{F_3}(u) = (8/5,22/15,8/5,-8/15)$.

4) Base ortogonal de F_4: $(-5,-11,15,2)$. $P_{F_4}(u) = (2/75,22/375,-2/25,-4/375)$. $C_{F_4}(u) = u - P_{F_4}(u) = (523/75,-1522/375,-23/25,754/375)$.

TEMA 4

TRANSFORMACIONS LINEALS

4.1 Resum teòric

4.1.1 Matrius i aplicacions lineals de l'espai n-dimensional

Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aplicació lineal. Matriu de l'aplicació

1) Diem que una aplicació $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és lineal si satisfà les propietats següents:

   a) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, per a tot $u, v \in \mathbb{K}^n$.

   b) $f(\alpha w) = \alpha f(w)$, per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$ i tot $w \in \mathbb{K}^n$.

   Un endomorfisme de $\mathbb{K}^n$ és una aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

2) Caracterització.

   a) Una aplicació $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és lineal si i només si existeixen escalars $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ tals que $f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j\right)$, per a tot $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

   b) Per tant, una aplicació $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és lineal si i només si existeix una matriu $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tal que:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m) \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

3) Matriu de l'aplicació. Amb les notacions de l'apartat anterior, diem que la matriu $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és la matriu de l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Notem $A = M(f)$.

4) Igualtat d'aplicacions lineals. Si $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ són aplicacions lineals, aleshores: $f = g \iff M(f) = M(g)$.

Operacions entre aplicacions lineals i operacions amb matrius

1) Suma. La suma d'aplicacions lineals és una aplicació lineal. És a dir, si $f,g:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ són lineals, aleshores $f+g:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definida per $(f+g)(v)=f(v)+g(v)$, és lineal. Matricialment, $M(f+g)=M(f)+M(g)$.

2) Producte per escalar. El producte d'una aplicació lineal per un escalar és una aplicació lineal. És a dir, si $\alpha \in \mathbb{K}$ i $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és lineal, aleshores $\alpha f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definida per $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, és lineal. Matricialment, $M(\alpha f)=\alpha M(f)$.

3) Composició. La composició d'aplicacions lineals és una aplicació lineal. És a dir, si $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ i $g:\mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^m$ són lineals, aleshores $g\circ f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definida per $(g\circ f)(v)=g(f(v))$, és lineal. Matricialment, $M(g\circ f)=M(g)M(f)$.

4) Inversa. La inversa d'una aplicació lineal, si existeix, també és una aplicació lineal. És a dir, si $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és lineal i bijectiva, aleshores $f^{-1}:\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ és lineal i bijectiva. Matricialment, $M(f^{-1})=M(f)^{-1}$.

Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Sigui $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i sigui $A=M(f)$ la matriu de f.

1) Definim el nucli i la imatge de f, que respectivament notem per $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$, com:

$$\mathrm{Ker}(f)=\{u\in\mathbb{K}^n : f(u)=0\}, \qquad \mathrm{Im}(f)=\{f(u): u\in\mathbb{K}^n\}.$$

2) Descripció matricial. El nucli i la imatge de l'aplicació f són els subsepais associats a la matriu $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Concretament:

   a) $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Nul}(A)\subseteq\mathbb{K}^n$. Per tant, $\dim\mathrm{Ker}(f)=n-\mathrm{rang}(A)$.
   b) $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Col}(A)\subseteq\mathbb{K}^m$. Per tant, $\dim\mathrm{Im}(f)=\mathrm{rang}(A)$.

3) En particular, $\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)=n$.

4) Propietats.

   a) f és injectiva $\iff$ $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ $\iff$ $\mathrm{rang}(A)=n$.
   b) f és exhaustiva $\iff$ $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{K}^m$ $\iff$ $\mathrm{rang}(A)=m$.
   c) f és bijectiva $\iff$ $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}\wedge\mathrm{Im}(f)=\mathbb{K}^m$ $\iff$ $n=\mathrm{rang}(A)=m$.
   d) f injectiva $\Rightarrow n\leqslant m$.
   e) f exhaustiva $\Rightarrow n\geqslant m$.
   f) f bijectiva $\Rightarrow n=m$.
   g) Si $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ és un endomorfisme, aleshores: f és injectiva $\iff$ f és exhaustiva $\iff$ f és bijectiva.

5) Diem f és un epimorfisme si f és exhaustiva; que és un monomorfisme si f és injectiva; i que és un isomorfisme si f és bijectiva. A més, si f és un endomorfisme bijectiu, aleshores diem que f és un automorfisme.

Aplicacions lineals i sistemes d'equacions lineals

1) Antiimatges per una aplicació lineal i sistemes d'equacions lineals. Siguin $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i $b \in \mathbb{K}^m$. Aleshores calcular les antiimatges de b per f és resoldre l'equació $f(x) = b$. Si $A = M(f)$ és la matriu de f, aleshores les antiimatges del vector $b = (b_1, \dots b_m) \in \mathbb{K}^m$ per f són les solucions del sistema d'equacions lineals:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2) Existència d'antiimatges. Unicitat.

   a) Siguin $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i $b \in \mathbb{K}^m$. Aleshores existeix, com a mínim, un element $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(x_0) = b$ si i només si $b \in \operatorname{Im}(f)$.

   b) Suposem que $x_p \in \mathbb{K}^m$ és una antiimatge de b per f i sigui $x \in \mathbb{K}^n$. Aleshores $f(x) = b$ si i només si existeix $x_h \in \operatorname{Ker}(f)$ tal que $x = x_p + x_h$.

   c) Per tant, existeix una única antiimatge de b per f si i només si $b \in \operatorname{Im}(f)$ i $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

3) Principi de superposició. Siguin $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal, $b, c \in \mathbb{K}^m$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si x_b és una antiimatge de b per f i x_c és una antiimatge de c per f, aleshores $\lambda x_b + \mu x_c$ és una antiimatge de $\lambda b + \mu c$ per f.

Aplicacions lineals i l'estructura vectorial de l'espai

1) Aplicacions lineals, combinacions lineals i dependència i independència lineal. Siguin $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^n$.

   a) Si $w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$, aleshores $f(w) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_r f(u_r)$.

   b) Si $u_1, \dots, u_r$ són linealment dependents en $\mathbb{K}^n$, aleshores $f(u_1), \dots, f(u_r)$ són linealment dependents en $\mathbb{K}^m$. A més, es conserven les relacions de dependència lineal.

   c) Si $f(u_1), \dots, f(u_r)$ són linealment independents en $\mathbb{K}^m$, aleshores $u_1, \dots, u_r$ són linealment independents en $\mathbb{K}^n$.

2) Aplicacions lineals i bases. Siguin $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$.

   a) Si coneixem $f(u_1), \dots, f(u_n)$, aleshores podem calcular $f(u)$, per a tot $u \in \mathbb{K}^n$. És a dir, l'aplicació lineal f està unívocament determinada per les imatges dels vectors d'una base.

   b) La imatge de f és el subespai $\operatorname{Im}(f) = \langle f(u_1), \dots, f(u_n)\rangle$. És a dir, la imatge de l'aplicació lineal f és el subespai vectorial generat pel vectors $f(u_1), \dots, f(u_n)$. Per tant, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Col}(M)$, on $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és la matriu que "té per columnes" els vectors $f(u_1), \dots, f(u_n)$. És a dir, si $f(u_j) = (m_{1,j}, \dots, m_{m,j})$, aleshores:

$$M = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ f(u_1) & \dots & f(u_j) & \dots & f(u_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{m,1} & \cdots & m_{m,j} & \cdots & m_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3) El nucli de f és el subespai $\text{Ker}(f) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = 0\right\}$. És a dir, el nucli de l'aplicació lineal f el podem determinar si coneixem les relacions de dependència lineal del conjunt de vectors $\{f(u_1),\ldots,f(u_n)\}$. Per tant, $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(M)$, on $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és la matriu de l'apartat anterior.

4) Propietats.

   a) f és exhaustiva $\iff$ $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ és un sistema de generadors de $\mathbb{K}^m$.

   b) f és injectiva $\iff$ $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ són vectors linealment independents de $\mathbb{K}^m$.

   c) f és bijectiva $\iff$ $\{f(u_1),\ldots,f(u_n)\}$ és una base de $\mathbb{K}^m$.

5) Aplicacions lineals i subespais vectorials. Sigui $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal.

   a) Si $u_1,\ldots,u_r \in \mathbb{K}^n$, aleshores $f(\langle u_1,\ldots,u_r\rangle) = \langle f(u_1),\ldots,f(u_r)\rangle$.

   b) Si $F \subseteq \mathbb{K}^n$ és un subespai, aleshores $f(F) \subseteq \mathbb{K}^m$ és un subespai i $\dim f(F) \leqslant \dim F$.

   c) Si $A = M(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és la matriu de f i $N \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ verifica que $F = \text{Col}(N)$, aleshores $f(F) = \text{Col}(AN)$ i, per tant, $\dim f(F) = \text{rang}(AN)$.

4.1.2 Matrius equivalents. Matrius semblants

Matriu associada a una aplicació lineal en unes bases

1) Matriu associada a una aplicació lineal. Siguin $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal, $B_1 = \{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ i $B_2 = \{v_1,\ldots,v_m\}$ una base de $\mathbb{K}^m$.

   a) Existeix una única matriu $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tal que si $x \in \mathbb{K}^n$ té coordenades $x_{B_1} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ en la base B_1 de $\mathbb{K}^n$ i $y \in \mathbb{K}^m$ té coordenades $y_{B_2} = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ en la base B_2 de $\mathbb{K}^m$, aleshores:

$$f(x) = y \iff M\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_m\end{pmatrix}.$$

   b) És a dir, si M és la matriu que "té per columnes" les coordenades de $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ en la base B_2 de $\mathbb{K}^m$. És a dir, si $f(u_j)_{B_2} = (m_{1,j},\ldots,m_{m,j})$, aleshores:

$$M = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (f(u_1))_{B_2} & \ldots & (f(u_j))_{B_2} & \ldots & (f(u_n))_{B_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{m,1} & \cdots & m_{m,j} & \cdots & m_{m,n} \end{pmatrix}.$$

   c) Diem que M és la matriu associada a f en la bases B_1 de $\mathbb{K}^n$ i en la base B_2 de $\mathbb{K}^m$. Ho notem $M = M(f;B_1,B_2)$.

   d) Observem que si B_1 és la base canònica de $\mathbb{K}^n$ i B_2 és la base canònica de $\mathbb{K}^m$, aleshores $M(f;B_1,B_2) = M(f)$.

2) Matriu associada a un endomorfisme. Siguin $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un endomorfisme i $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$. Diem que M és la matriu associada a l'endomorfisme f en la base B de $\mathbb{K}^n$ si $M = M(f;B,B)$. Ho notem $M(f;B) = M(f;B,B)$.

Matriu associada a una aplicació lineal i canvis de bases

1) Matrius associades a l'aplicació identitat i matrius canvi de coordenades.

   a) Si B és una base de $\mathbb{K}^n$, aleshores $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n};B) = \mathrm{Id}_n$.

   b) Si B i B' són dues bases de $\mathbb{K}^n$, aleshores $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n};B,B') = M(B \to B')$. És a dir, $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n};B,B')$ és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector de $\mathbb{K}^n$ en la base B en les coordenades del vector en la base B'.

2) Matriu associada a una aplicació lineal i canvis de bases. Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és una aplicació lineal, B_1, B_1' són dues bases de $\mathbb{K}^n$ i B_2, B_2' són dues bases de $\mathbb{K}^m$, aleshores:

$$M(f;B_1',B_2') = M(B_2 \to B_2') \cdot M(f;B_1,B_2) \cdot M(B_1' \to B_1).$$

3) Matriu associada a un endomorfisme i canvis de bases. Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ és un endomorfisme i B i B' són dues bases de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$, aleshores:

$$M(f;B') = M(B \to B')M(f;B)M(B' \to B).$$

Matrius semblants

1) Direm que dues matrius $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són semblants si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A' = P^{-1}AP$.

2) Matrius semblants: matriu d'un endomorfisme i canvi de base.

   a) Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ és un endomorfisme i B i B' són dues bases de $\mathbb{K}^n$, aleshores les matrius associades $M(f;B)$ i $M(f;B')$ són matrius semblants.

   b) Dues matrius són semblants si i només si defineixen el mateix endomorfisme. És a dir, $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són semblants si i només si existeixen dues bases B, B' de $\mathbb{K}^n$ i un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$ tals que $A = M(f;B)$ i $A' = M(f;B')$.

4.1.3 Diagonalització de matrius

Matrius diagonalitzables

1) Diem que una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si és semblant a una matriu diagonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. És a dir, A és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si existeixen una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i una matriu diagonal $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tals que $D = P^{-1}AP$.

2) Matrius i endomorfismes. Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'endomorfisme definit per A. És a dir, $A = M(f) = M(f;B_c)$, on B_c és la base canònica de $\mathbb{K}^n$, per exemple. Aleshores A és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si existeix una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ tal que la matriu associada a l'endomorfisme f en aquesta base és una matriu diagonal. A més, en aquest cas, $A = PDP^{-1}$, on la matriu diagonal D és $D = M(f;B)$ i on la matriu invertible P és la matriu canvi de base $P = M(B \to B_c)$.

Vectors propis i valors propis

1) Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un vector no nul i $\lambda \in \mathbb{K}$. Diem que v és un vector propi de la matriu A de valor propi λ si:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

És a dir, $v \in \mathbb{K}^n$ és un vector propi de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de valor propi $\lambda \in \mathbb{K}$ si i només si $f(v) = \lambda v$, on f és l'endomorfisme de $\mathbb{K}^n$ definit per A.

2) Diagonalització, vectors i valors propis.

   a) Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si existeix una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de la matriu A.

   b) En aquest cas, $A = PDP^{-1}$, on P és la matriu que "té per columnes els vectors propis" i on D és la matriu que "en la diagonal té els valors propis". És a dir, si $v_j = (m_{1,j}, \dots, m_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ és el vector propi i si $\mu_j \in \mathbb{K}$ és el seu valor propi, aleshores $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ i:

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

3) Vectors propis de valors propis diferents. Els vectors propis d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de valors propis diferents són linealment independents. És a dir, si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ són vectors propis de A de valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, amb $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, aleshores $v_1, \dots, v_r$ són vectors linealment independents.

4) Vectors propis de valor propi fixat. Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$.

   a) Els vectors propis de A associats al valor propi λ són els elements no nuls del subespai $\mathrm{Nul}(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$; és a dir, són els vectors no nuls del subespai $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$, on f és l'endomorfisme de $\mathbb{K}^n$ definit per A.

   b) Per tant, el màxim nombre de vectors propis de valor propi λ linealment independents de la matriu A és $\dim \mathrm{Nul}(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$.

   c) A més, $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de la matriu A si i només si $\mathrm{Nul}(A - \lambda \mathrm{Id}_n) \neq \{0\}$ si i només si $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$.

Polinomi característic

1) El polinomi característic d'una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és $p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}_n) \in \mathbb{K}[x]$. És a dir, si $A = (a_{i,j})_{i,j}$, aleshores:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - x & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} - x \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[x].$$

2) Grau i coeficients del polinomi característic. Sigui $A \in \mathcal{M}_n \in (\mathbb{K})$ i suposem que el seu polinomi característic és:

$$p_A(x) = \sum_{i\geqslant 0} a_i x^i = a(x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (x-\lambda_r)^{n_r}.$$

   a) El grau de $p_A(x)$ és $n = n_1 + \cdots + n_r$.
   b) El coeficient dominant de $p_A(x)$ és $a = a_n = (-1)^n$.
   c) El coeficient del terme de grau $n-1$ de $p_A(x)$ és $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A) = n_1\lambda_1 + \cdots + n_r\lambda_r$.
   d) El terme independent de $p_A(x)$ és $a_0 = \det(A) = \lambda_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_r^{n_r}$.

3) Polinomi característic, valors propis i vectors propis. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   a) Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de A si i només si λ és una arrel del polinomi característic de A.
   b) La matriu A té, com a molt, n valors propis.
   c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores podem afirmar que A té un valor propi, com a mínim, i, per tant, podem afirmar que la matriu A té, com a mínim, té un vector propi.
   d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i n és senar, aleshores podem afirmar que la matriu A té, com a mínim, un valor propi i, per tant, podem afirmar que la matriu A té, com a mínim, un vector propi.

4) Multiplicitats dels valors propis. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   a) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de A, aleshores $1 \leqslant \dim \operatorname{Nul}(A - \lambda \operatorname{Id}_n) \leqslant n_\lambda$, on n_λ és la multiplicitat de λ com a arrel del polinomi característic $p_A(x)$.
   b) Diem que $\dim \operatorname{Nul}(A - \lambda \operatorname{Id}_n)$ és la multiplicitat geomètrica del valor propi λ i que n_λ és la multiplicitat algebraica del valor propi λ.

Teoremes de diagonalització

1) Teorema de diagonalització. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Les condicions següents són equivalents:

   a) La matriu A és $\mathbb{K}$-diagonalitzable.
   b) Existeix una base de $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de la matriu A.
   c) El polinomi característic de la matriu A descompon en factors lineals en $\mathbb{K}[x]$ i la multiplicitat algebraica de cada valor propi de A coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica. És a dir, es verifiquen les dues condicions següents:
      i) $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$, amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ diferents dos a dos.
      ii) $n_i = \dim \operatorname{Nul}(A - \lambda_i \operatorname{Id}_n)$, per a tot $i \in \{1, \ldots, r\}$.

2) Si es compleixen les condicions del teorema de diagonalització i si $B_i = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i}\}$ és una base del subespai $\operatorname{Nul}(A - \lambda_i \operatorname{Id}_n)$, aleshores $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r = \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,n_r}\}$ és una base de l'espai $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de la matriu A i, per tant, $A = PDP^{-1}$, on P és la matriu que "té per columnes" els vectors de la base B, i D és la matriu diagonal $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \overset{n_1}{\ldots}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \overset{n_r}{\ldots}, \lambda_r)$.

3) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té n valors propis diferents en $\mathbb{K}$, aleshores A és $\mathbb{K}$-diagonalitzable.

4) Teorema espectral. Tota matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simètrica és diagonalitzable en una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ amb valors propis reals. És a dir, existeixen una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i una matriu ortogonal $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tals que $A = PDP^T$.

   Per definició, una matriu $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és ortogonal si és invertible i la seva inversa és la seva transposada; és a dir, $P^T P = \mathrm{Id}_n$. Equivalentment, una matriu és orotogonal si és la matriu de canvi de base entre dues bases ortonormals.

5) Teorema de Cayley-Hamilton. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $p_A(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ el seu polinomi característic. Aleshores:

$$p_A(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 \,\mathrm{Id}_n = 0.$$

4.1.4 Descomposició en valors singulars

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerem les aplicacions lineals definides per A i la seva transposta A^T, que notem igual: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Aleshores $A^T A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $AA^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

1) Les matrius AA^T i $A^T A$ són simètriques. Per tant, pel teorema espectral de matrius simètriques, aquestes dues matrius diagonalitzen en bases ortonormals.

2) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

3) $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A^T A) = \mathrm{rang}(AA^T)$.

4) Les matrius AA^T i $A^T A$ tenen els mateixos valos propis no nuls.

5) Els valors propis no nuls de $A^T A$ i de AA^T són estrictament positius.

6) Diem que $\sigma > 0$ és un valor singular de la matriu A si σ^2 és un valor propi no nul de la matriu $A^T A$ (o de la matriu AA^T).

7) Teorema de descomposició en valors singulars. Existeixen matrius ortogonals $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ i $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tals que $A = U\Sigma V^T$, on $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ és la matriu que té zeros a tot arreu excepte a la diagonal principal, que té els valors singulars de A en ordre decreixent: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

8) Si $A = U\Sigma V^T$ és la descomposició en valors singulars de la matriu A, aleshores $A^T = V\Sigma^T U^T$ és la descomposició en valors singulars de la matriu A^T.

4.2 Exercicis

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

4.1 Digueu quines de les aplicacions següents són lineals.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, 0)$.

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (7, x + y)$.

5) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, $f(x, y, z) = (x + 3y, x - y + z)$.

6) $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$.

7) $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x, y) = (x + y + 3, x - y + 3)$.

8) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x - y + z^2)$.

9) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (ix, (1 + i)x + (2 + 3i)y)$.

10) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x, y, z) = (ix, |y|, \overline{z})$.

4.2 Per a cada una de les aplicacions $\mathbb{K}$-lineals següents $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, doneu la matriu associada a f en les bases canòniques; digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva; calculeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f; i determineu l'aplicació inversa f^{-1} en cas que existeixi.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (x + y, -y)$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y) = (x - y, 2x + 3y, 3x + 2y)$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$.

4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, on $f(x, y) = ((1 + i)x + 2y, x + (1 - i)y)$.

5) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, on $f(x, y, z) = (x + iy + (1 + i)z, ix - y - (1 - i)z)$.

6) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, on $f(x, y, z) = ((1 + 2i)x, -iy, (1 - 2i)z)$.

4.3 Per a les aplicacions lineals següents f_1 i f_2, calculeu les matrius de f_1, de f_2 i de $f_2 \circ f_1$ i digueu si l'aplicació composició $f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

1) $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y, z, t) = (x + t, y + t, z + t)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

2) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y, z) = (x + y, z, x + y)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

3) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f_1(x, y) = (x, x + y, x - y)$, $f_2(x, y, z) = (x, x - y, x + y + z, x - z)$.

4) $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f_1(x,y) = (iy, -ix, x+y)$, $f_2(x,y,z) = (x+z, iy+iz, y+z)$.

5) $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $f_1(x,y) = (x, ix+y, iy)$, $f_2(x,y,z) = (x+iy, y+iz)$.

6) $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $f_1(x,y) = (x+3y, y, y)$, $f_2(x,y,z) = (x-y-z, y-z)$.

4.4 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x,y) = (x/2+y, x/4+y/2)$. Demostreu que $f^2 = f$, on $f^2 = f \circ f$.

4.5 Demostreu que l'aplicació conjugació és un $\mathbb{R}$-automorfisme dels complexos. Calculeu l'automorfisme invers.

4.6 Siguin f_1 i f_2 els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ definits per:

$$f_1(x,y,z) = (x+y+2z, 2x+y+z, x+2y+z), \qquad f_2(x,y,z) = (2y+z, x+3y+z, x+y).$$

Existeixen vectors no nuls $v \in \mathbb{R}^3$ tals que $f_1(v) = f_2(v)$? En cas afirmatiu, determineu-los.

4.7 Considerem l'aplicació lineal $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_a(x,y,z) = (ax-z, x+y+z, 2y)$, on $a \in \mathbb{R}$. Trobeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f_a segons els valors de a. Per a quins valors $a \in \mathbb{R}$ és f_a és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme?

4.8 Siguin $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre i f_a l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f_a(x,y,z) = ((a-2)x - y + 2z, 2x + (1-a)y + (a+1)z, ax - 3y + 2az).$$

1) Per a quins valors de a és f_a un epimorfisme, un monomorfisme o un isomorfisme?

2) Per a quins valors de a el subespai vectorial $f_a^{-1}\langle(1,2,3)\rangle$ té dimensió no nul·la?

4.9 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(x,y,z) = (x-y+z, 0, x-z)$. Demostreu que els vectors $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-2,3)$, $v_3 = (2,0,-1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$, i trobeu la matriu associada a f en aquesta base. Determineu un vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(w) = 14v_1 + 7v_2 - 4v_3$.

4.10 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{C}^3$ donat per $f(x,y,z) = (8x-9y+25z, 2y-5z, -2x+3y-8z)$. Demostreu que els vectors $v_1 = (-1+3i, 5, 2-i)$, $v_2 = (-1-3i, 5, 2+i)$, $v_3 = (3,2,0)$ determinen una base de $\mathbb{C}^3$ i trobeu la matriu associada a f en aquesta base. Calculeu $f(-iv_1 + iv_2 + \frac{1}{2}v_3)$.

4.11 Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(u_1) = u_1 + u_2 + u_3$, $f(u_2) = 2u_1 - u_3$, $f(u_3) = f(u_1 - u_2)$. Comproveu que els vectors $v_1 = u_1 - u_2$, $v_2 = u_2 + u_3$, $v_3 = 2u_1 - u_3$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$ i doneu la matriu associada a f en aquesta base.

4.12 Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Sigui f un $\mathbb{C}$-endomorfisme de $\mathbb{C}^3$ del qual sabem que $f(u_1) = u_1 + u_2$, que $f(u_3) = iu_1$, i que $\operatorname{Ker}(f) = \langle u_1 + u_2 \rangle$. Comproveu que els vectors $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = (1+i)u_1 + u_2$, $v_3 = iu_1 + iu_2$ determinen una base de $\mathbb{C}^3$ i doneu la matriu associada a f en aquesta base.

4.13 Siguin $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ i $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(e_1) = v_1 + 2v_2 + v_3$, $f(e_2) = v_2 + v_3$, $f(e_3) = v_1 + v_2$, $f(e_4) = v_1 - v_2$.

1) Trobeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f.

2) Comproveu que els vectors $u_1 = e_1 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_3$, $u_3 = e_1 + e_2$, $u_4 = e_1 - e_2 - e_3$ determinen una base de $\mathbb{R}^4$ i que els vectors $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$, $w_3 = f(u_3)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu associada a f en aquestes bases.

4.14 Raoneu si existeix algun endomorfisme que verifiqui les condicions que s'especifiquen. En cas que existeixi, és únic? En cas que existeixi, determineu-lo.

1) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(i,i) = (5i,i)$ i $f(4i,8) = (6+17i,8)$.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,2,3) = (4,-6,5)$, $f(2,4,-1) = (0,0,7)$, $f(3,-1,0) = (-5,5,8)$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(3,1,0) = (0,1,1)$, $f(-2,1,1) = (1,0,1)$, $f(-1,3,2) = (1,1,0)$.

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,-1,3) = (1,1,1)$, $f(0,2,1) = (0,-2,-2)$, $f(1,1,4) = (1,-1,-1)$.

5) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x+y+z = 0\}$.

4.15 Raoneu si existeix una única aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que transformi $(3,4)$ en $(-1,3,2)$ i $(2,3)$ en $(3,-4,1)$. En cas afirmatiu, calculeu la matriu M associada a f respecte a les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i de $\mathbb{R}^3$, i la matriu N associada a f en les bases $B_1 = \{(1,2),(2,5)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $B_2 = \{(-3,31,-2),(2,-19,1),(-1,11,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

4.16 Trobeu els valors i vectors propis de les matrius següents. Digueu quines d'elles són diagonalitzables i, si ho són, determineu una base on la matriu tingui forma diagonal.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} -16+i & 35 & -24 \\ 0 & i & 0 \\ 12 & -26 & 18+i \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}$.

4.17 Determineu els valors reals dels paràmetres per als quals les matrius següents són diagonalitzables sobre $\mathbb{R}$ i, en aquest cas, doneu la seva forma diagonal.

1) $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} -2a+3 & -4a+5 & 4a-9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -a+1 & -2a+2 & 2a-3 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} -2a+3 & 3a-3 & -8a-b+10 \\ -2a+2 & 3a-2 & -8a+2b+7 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

4.18 Trobeu una matriu $A \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que tingui vectors propis $(1,2,-1)$, $(1,0,1)$ i $(0,1,-2)$ amb valors propis -2, 1 i 2, respectivament.

4.19 Determineu a, b, c, p, q, r i els valors propis de la matriu A, sabent que $(1,1,0)$, $(-1,0,2)$ i $(0,1,-1)$ són vectors propis de A.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}.$$

4.20 Calculeu els valors i els vectors propis dels endomorfismes següents i digueu quins d'ells són diagonalitzables. En cas que l'endomorfisme sigui diagonalitzable determineu una base respecte de la qual la matriu associada a l'endomorfisme tingui forma diagonal.

1) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = (x-2y+3z-3t, -y+3z-3t, 2z-3t, -t)$.

2) $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x,y,z) = (8x-9y+25z, 2y-5z, -2x+3y-8z)$.

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (4x-20z, 2x-10z, x-y-2z)$.

4) $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x,y,z) = (4x+y-4z, -3x+3z, 3x+y-3z)$.

4.21 Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i $f_{a,b}$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f_{a,b}(x,y,z) = (x+ay+bz, 3y, bx+z).$$

Determineu per a quins valors de $a, b \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme $f_{a,b}$ és diagonalitzable i té, exactament, dos valors propis diferents.

4.22 Siguin $a \in \mathbb{C}$, $f_a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfisme definit per:

$$f_a(x,y,z) = (2y, a^2x+az, -2ay)$$

i $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x+z=0\}$. Per a quins valors de $a \in \mathbb{C}$ es satisfà que $f_a(F) \subseteq F$?

4.23 Siguin $a \in \mathbb{R}$ i f_a l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$f_a(x,y,z) = (x+ay+az, -x+y-z, x+2z).$$

1) Determineu els valors de $a \in \mathbb{R}$ per als quals l'endomorfisme f_a és diagonalitzable. Per a aquests valors de a doneu una base respecte de la qual la matriu tingui forma diagonal.

2) Sigui $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$. Determineu els valors de $a \in \mathbb{R}$ per als quals es satisfà que $f_a(F) \subseteq F$.

4.24 Per a cada matriu de la llista següent:

a) calculeu la descomposició en valors singulars de la matriu A;

b) digueu quins són els valos singulars, els vectors singulars per la dreta i els vectors singulars per l'esquerra de A;

c) doneu bases ortonormals dels subespais $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Col}(A^T)$ i $\mathrm{Nul}(A^T)$;

d) descomposeu la matriu A com a suma de matrius de rang 1.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3 Solucions

4.1 Només són lineals les aplicacions dels apartats 1, 3, 5, 6 i 9.

4.2

1) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$. f és bijectiva. $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\}$ i té dimensió 0. $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ i té dimensió 2. $f^{-1}=f$.

2) $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right)$. f és injectiva però no és exhaustiva. $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\}$ i té dimensió 0. $\mathrm{Im}(f)=\langle(1,2,3),(-1,3,2)\rangle$ i té dimensió 2. No existeix l'aplicació inversa.

3) $\left(\begin{smallmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$. f és bijectiva. $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}$ i té dimensió 0. $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ i té dimensió 3. L'aplicació inversa és $f^{-1}(x,y,z)=(x/3,x/3-y,-x+y+z)$.

4) $\left(\begin{smallmatrix}1+i & 2\\ 1 & 1-i\end{smallmatrix}\right)$. f no és ni injectiva ni exhaustiva. $\mathrm{Ker}(f)=\langle(-2,1+i)\rangle$ i té dimensió 1. $\mathrm{Im}(f)=\langle(1+i,1)\rangle$ i té dimensió 1. L'aplicació f no té inversa.

5) $\left(\begin{smallmatrix}1 & i & 1+i\\ i & -1 & -1+i\end{smallmatrix}\right)$. f no és ni injectiva ni exhaustiva. $\mathrm{Ker}(f)=\langle(-i,1,0),(1+i,0,-1)\rangle$ i té dimensió 2. $\mathrm{Im}(f)=\langle(1,i)\rangle$. f no té inversa.

6) $\left(\begin{smallmatrix}1+2i & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 1-2i\end{smallmatrix}\right)$. f és bijectiva. Per tant, el nucli és trivial i la imatge és $\mathbb{C}^3$. L'aplicació inversa és $f^{-1}(x,y,z)=((1-2i)x/5,iy,(1+2i)z/5)$.

4.3

1) $f_2\circ f_1:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$. $M(f_1)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_2)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_2\circ f_1)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 2. Per tant, $f_2\circ f_1$ no és injectiva, però si exhaustiva.

2) $f_2\circ f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. $M(f_1)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_2)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_2\circ f_1)=\left(\begin{smallmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 2. Per tant, $f_2\circ f_1$ no és injectiva, però si exhaustiva.

3) $f_2\circ f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$. $M(f_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $M(f_2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $M(f_2\circ f_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 2. Per tant, $f_2\circ f_1$ és injectiva, però no exhaustiva.

4) $f_2\circ f_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$. $M(f_1)=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M(f_2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & i & i\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $M(f_2\circ f_1)=\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 1+i & i\\ 1-i & 1\end{pmatrix}$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 2. Per tant, $f_2\circ f_1$ és injectiva, però no exhaustiva.

5) $f_2\circ f_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$. $M(f_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & 1\\ 0 & i\end{pmatrix}$, $M(f_2)=\left(\begin{smallmatrix}1 & i & 0\\ 1 & 0 & i\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_1)=\left(\begin{smallmatrix}0 & i\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 2. Per tant, $f_2\circ f_1$ és injectiva i exhaustiva. És a dir, $f_2\circ f_1$ és bijectiva.

6) $f_2\circ f_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$. $M(f_1)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $M(f_2)=\left(\begin{smallmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$, $M(f_2\circ f_1)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. El rang de $M(f_2\circ f_1)$ és 1. Per tant, $f_2\circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva.

4.4 Pista: comproveu que $M^2=M$, on M és la matriu de f.

4.6 Els vectors que satisfan la condició són exactament els vectors del subespai $\langle(2,2,-1)\rangle$.

4.7 Si $a\neq -1$, f_a és un isomorfisme. Si $a=-1$, el nucli és $\langle(-1,0,1)\rangle$ i la imatge és $\langle(-1,0,0),(0,1,2)\rangle$.

4.8

1) f_a és un isomorfime si i només si $a\neq -1$ i $a\neq 3$.

2) La dimensió és no nul·la sempre.

4.9 La matriu de f en la base canònica és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matriu de f en la base B donada és: $\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 36 & -4 \end{pmatrix}$. El vector w que satisfà la condició és $w = 130v_1 - \frac{39}{2}v_2 = (221/2, 169, 143/2)$.

4.10 La matriu de f en la base canònica és $\begin{pmatrix} 8 & -9 & 25 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. La matriu de f en la base donada és $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Finalment, $f(-iv_1 + iv_2 + \frac{1}{2}v_3) = v_1 + v_2 + v_3 = (1, 12, 4)$.

4.11 La matriu de f en la nova base és $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.12 La matriu de f en la nova base és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.13

1) La matriu de f en les bases donades és $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que té rang 3. A més, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{Ker}(f) = \langle(-1, 1, 1, 0)\rangle$.
2) La matriu de f en les bases $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ i $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.14

1) Existeix i és únic, perquè $\{(i, i), (4i, 8)\}$ és una base de $\mathbb{C}^2$.
2) Existeix i és únic, perquè $\{(1, 2, 3), (2, 4, -1), (3, -1, 0)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.
3) No existeix cap endomorfisme que cumpleixi aquestes condicions.
4) Existeixen infinits endomorfismes satisfent les condicions.
5) Existeixen infinits endomorfismes satisfent la condició.

4.15 Existeix una única aplicació lineal satisfent les condicions donades. La matriu de f en bases canòniques és $M = \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ 25 & -18 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. La matriu de f en las bases B_1 i B_2 és $N = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 45 & 157 \\ 118 & 489 \\ 28 & 224 \end{pmatrix}$.

4.16 Notem per A la matriu de l'enunciat. En cas que A diagonalitzi, es safisfà $PAP^{-1} = D$.

1) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.
3) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
5) Els valors propis són -3 (simple), 0 (doble). No diagonalitza.
6) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2-i & i & 1 \\ -2+i & -i & 1 \end{pmatrix}$.
7) Diagonalitza. $D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8) Els valors propis són $2 + i$ (simple), i (doble). No diagonalitza.
9) Els valors propis són 0 (simple), 2 (triple). No diagonalitza.

4.17

1) Diagonalitza si i només si $a = k\pi$, amb $k \in \mathbb{Z}$. La forma diagonal és Id_2, si k és parell, i $-\mathrm{Id}_2$, si k és senar.

2) Diagonalitza si i només si $a = 0$. En aquest cas, la forma diagonal és $\mathrm{Diag}(1,1,2)$.

3) Diagonalitza si i només si $a \neq 5, -1$ o bé si $a = -1$ i $b = 0$. Si diagonalitza, la forma diagonal és $\mathrm{Diag}(5,-1,a)$.

4) No diagonalitza per a cap valor del paràmetre.

5) Diagonalitza si i només $a > 0$. La forma diagonal és $\mathrm{Diag}(-1, -\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

6) Diagonalitza si i només si $a \neq b$. La forma diagonal és $\mathrm{Diag}(1, a, b)$.

4.18 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.19 La matriu és $\begin{pmatrix} 7/3 & 1 & 1 \\ 4/3 & 2 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$ i els valors propis són 3, 4/3 i 1/3.

4.20

1) Diagonalitza. $D = \mathrm{Diag}(2,-1,-2,1)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonalitza. $D = \mathrm{Diag}(2, i, -i)$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1+i & -1-i \\ 2 & 2+i & 2-i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) No diagonalitza.

4) No diagonalitza.

4.21 Per a $b = 0$ i a arbitrari.

4.22 Per a $a = 1$.

4.23

1) f_a diagonalitza si i només si $a = 0$. En aquest cas, la forma diagonal és $D = \mathrm{Diag}(2,1,1)$ i la matriu de canvi de base és $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Per a $a = 2$.

4.24 La descomposició en valors singulars de les matrius donades és:

1) $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2\sqrt{2} \\ 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4) $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{35} & 0 & 5 \\ 2\sqrt{10} & 0 & -\sqrt{14} & -4 \\ \sqrt{10} & -\sqrt{35} & 0 & 5 \\ \sqrt{10} & 0 & 2\sqrt{14} & -2 \end{pmatrix}$.

5) $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{6} & -1 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{6} & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6) Consulteu el document d'exàmens resolts per a veure una solució completa.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) $U = \begin{pmatrix} 0.261 & 0.657 & -0.707 \\ 0.929 & -0.369 & 0 \\ 0.261 & 0.657 & 0.707 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 2.358 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.199 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0.394 & -0.308 & -0.707 & -0.408 & -0.289 \\ 0.615 & 0.788 & 0 & 0 & 0 \\ 0.394 & -0.308 & 0 & 0 & 0.866 \\ 0.394 & -0.308 & 0. & 0.816 & -0.289 \\ 0.394 & -0.308 & 0.707 & -0.408 & -0.289 \end{pmatrix}.$