

Mètodes Numèrics

Pràctica 2: Estudi de la trajectòria d'un gos pastor guiant un ramat d'ovelles

Mariona Aguilera

Jaume Capdevila

Albert Estop

Marc Garcia

Gener de 2020

Índex

1	Introducció	3
2	Modelització del problema	3
2.1	Aproximació i equació diferencial	3
2.2	Normalització	4
2.3	Mètode numèric	5
2.4	Determinació dels paràmetres	6
3	Resultats	7
4	Conclusió	8
5	Annex	9
5.1	Normalització	9
5.2	Forces parametritzades	10

1 Introducció

L'objectiu d'aquesta pràctica és escriure un programa que modelitzi el comportament d'un ramat d'ovelles entrant a la seva cleda guiades per un gos pastor. Estudiarem diferents casos on variarem la trajectòria que seguirà el gos, i buscarem quina és la trajectòria òptima que ha de seguir per tal de ficar totes les ovelles dins la cleda minimitzant al màxim el temps de treball, i discutirem i compararem els resultats obtinguts per veure com varia l'eficiència al canviar la seva trajectòria.

2 Modelització del problema

Primer de tot presentarem les aproximacions que hem tingut en compte, així com equacions amb les quals hem modelitzat totes les forces que actuen sobre les ovelles i buscarem una normalització adient per a poder treballar amb el nostre mètode numèric. Un cop fet el programa estudiarem diferents casos concrets per a trobar els paràmetres que s'ajustin al màxim al comportament real d'un ramat.

2.1 Aproximació i equació diferencial

El primer pas a dur a terme és aproximar el cas real a un cas més simple que sigui coherent de modelitzar amb un programa. Per a fer-ho, primerament hem reduït l'espai de una a dues dimensions, ja que les ovelles només caminen i es pot entendre com que es mouen en un pla que és el terra. Nosaltres hem utilitzat el pla $z = 0$ i per comoditat expressarem les components dels vectors utilitzats d'ara en endavant com x, y , definint un vector \mathbf{r}_i com $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y$. Per altra banda, hem reduït les ovelles a partícules puntuals per a poder seguir amb la nostre modelització com en un problema de N cossos. La massa d'aquestes partícules serà de $m = 70\text{kg}$, que és el pes mig d'una ovella adulta. Pel que fa al gos, aquest serà una altre partícula puntual que es mourà a una velocitat que definirem al voltant de $v = 3\text{m/s}$, que és aproximadament la velocitat mitjana a la qual es mou mentre està pastorant. Finalment, la cleda serà una tanca que s'extengui infinitament al llarg de l'eix de les Y amb un forat al voltant de la posició $y = 6\text{m}$, amb un forat entre $y = 4\text{m}$ i $y = 8\text{m}$ per on podran passar les ovelles. Per evitar que taponin l'entrada a la cleda i causin altres problemes, les ovelles que entrin dins la tanca s'ignoraran.

Tot seguit hem modelitzat i definit les forces que actuaran sobre les ovelles. La primera d'aquestes forces serà la força d'interacció entre les ovelles, és a dir la força que faran les ovelles entre elles. Aquesta força haurà de ser de repulsió si estan més a prop d'una posició d'equilibri que determinarem un cop establerts els paràmetres, i d'atracció si es troben més lluny d'aquesta distància. De manera que al final arribin a un equilibri estable. Aquesta funció serà una gaussiana modulada per x^2 i serà una suma de la força que faci cadascuna de les ovelles sobre la ovella i .

$$\mathbf{F}_{\text{Ovelles}} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ji}} \left(\frac{cr_{ji}^2}{d^2} e^{-\frac{r_{ji}^2}{d^2}} + ae^{-\frac{r_{ji}^2}{b^2}} \right) \right] \quad (1)$$

on \mathbf{r}_i és el vector posició de l'ovella que pateix les forces, \mathbf{r}_j és el vector posició de les diferents ovelles que exerciran les forces, r_{ji} és el mòdul de la distància entre les ovelles $r_{ji} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$; a, b, c i d seràn quatre constants que definiran la intensitat i la varianza de la força d'atracció, i la intensitat i varianza de la força de repulsió entre les ovelles respectivament. Conseqüentment, a serà un paràmetre negatiu i c un paràmetre positiu.

Però, al tenir en compte només aquesta força es pot observar com les partícules comencen a orbitar i a impulsar-se les unes amb les altres, fent que el nostre sistema sigui totalment caòtic i incoherent. Per a poder arribar a un equilibri on les ovelles estiguin més o menys quietes, movent-se lleugerament al voltant

d'una posició guardant el ramant, però sense agafar molta inèrcia, hem definit també una força de fregament en funció del paràmetre γ proporcional a la velocitat de cadascuna de les ovelles \mathbf{v} .

$$\mathbf{F}_{\text{Fregament}} = -\gamma \mathbf{v} \quad (2)$$

Seguidament hem modalitzat la força de la cleda. Aquesta força serà de repulsió i augmentarà en funció de lo a prop que estigui l'ovella de la cleda, i per tant hem triat una gaussiana, on μ defineixi la força de repulsió que fa la tanca i k defineixi a partir de quina distància aquesta força és considerable, és a dir, la variança de la funció. Aquesta força nomès tindrà component \mathbf{e}_x positiva, ja que l'entenem com una força que actua perpendicularment a la direcció de la tanca i que sempre impulsarà a les ovelles en el sentit positiu de les x , ja que no poden travessar-la. Per tal de que les ovelles puguin entrar a la cleda, si el valor de la component \mathbf{e}_y de la seva posició està entre $y = 6 - \frac{1}{3}6 = 4\text{m}$ i $y = 6 + \frac{1}{3}6 = 8\text{m}$ aquesta força no es tindrà en compte per permetre que les ovelles puguin entrar a la cleda.

$$\mathbf{F}_{\text{Tanca}} = \mu e^{-\frac{x_i^2}{k^2}} \mathbf{e}_x \quad (3)$$

Finalment hem definit la força del gos també com a una gaussiana, ja que serà una força de repulsió que més augmenta quant més a prop es trobat aquest d'una ovella.

$$\mathbf{F}_{\text{Gos}} = \frac{\mathbf{r}_{\text{gos}} - \mathbf{r}_i}{r_{\text{gos},i}} \alpha e^{-\frac{r_{\text{gos},i}^2}{\beta^2}} \quad (4)$$

on \mathbf{r}_{gos} serà el vector posició del gos, $r_{\text{gos},i}$ serà el mòdul de la distància entre l'ovella que pateix la força i el gos $r_{\text{gos},i} = |\mathbf{r}_{\text{gos}} - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(x_{\text{gos}} - x_i)^2 + (y_{\text{gos}} - y_i)^2}$. Per altra banda, α serà un paràmetre que definirà la intensitat de la força que exerceixi el gos sobre la ovella i , i com és una força de repulsió haurà de ser negatiu, i β definirà la variança de la gaussiana, és a dir, a quina distància comença a ser considerable la força de repulsió que exerceix el gos.

Un cop establides totes les forces hem obtingut l'expressió de la força total que actua sobre una ovella i , i aplicant les expressions anteriors i combinant-les amb la primera llei de Newton obtenim l'expressió diferencial que dictarà la dinàmica de les nostres ovelles:

$$\mathbf{F}_{\text{T}(i)} = \underbrace{\sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ji}} \left(\frac{c r_{ji}^2}{d^2} e^{-\frac{r_{ji}^2}{d^2}} - a e^{-\frac{r_{ji}^2}{b^2}} \right) \right]}_{F \text{ entre ovelles}} - \underbrace{\gamma \mathbf{v}}_{F \text{ fregament}} + \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{\text{gos}} - \mathbf{r}_i}{r_{\text{gos},i}} \alpha e^{-\frac{r_{\text{gos},i}^2}{\beta^2}}}_{F \text{ gos}} - \underbrace{\mu e^{-\frac{x_i^2}{k^2}} \mathbf{e}_x}_{F \text{ tanca}} = m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \quad (5)$$

a , α i μ seran paràmetres negatius ja que expressen forces de repulsió, i conseqüentment c serà un paràmetre positiu ja que expressa una força d'atracció.

2.2 Normalització

Un cop obtinguda l'equació que regeix el moviment del sistema hem procedit a normalitzar-la, ja que és convenient per treballar amb magnituds adimensionals i amb menys paràmetres, i hem obtingut l'expressió que mostrem a continuació. El passos realitzats per arribar a l'equació normalitzada es mostren a l'annex ja que no son motiu d'aquest informe.

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - \frac{\Omega_{atr}}{\eta_{atr}^2} R_{ij}^2 e^{-\frac{R_{ij}^2}{\eta_{atr}^2}} \right) \right] - \Omega_{fr} \mathbf{U} + \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{\text{gos}}}{R_{i,\text{gos}}} \Omega_{\text{gos}} e^{-\frac{R_{i,\text{gos}}^2}{\eta_{\text{gos}}^2}} + \mathbf{x} \Omega_{par} e^{-\frac{x_i^2}{\eta_{par}^2}} \quad (6)$$

Per obtenir l'equació normalitzada hem fet els següents canvis:

$$\tau \equiv \frac{t}{t_0}, \quad l' \equiv \frac{l}{l_0}$$

on, per reduir el nombre de paràmetres amb els quals treballarem, hem definit t_0 i l_0 com

$$l_0 = b, \quad t_0 = \sqrt{\frac{bm}{a}},$$

Fets aquests canvis s'han redefinit les següents variables:

$$\mathbf{R}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{l_o} = \frac{x_i}{l_o} \mathbf{e}_x + \frac{y_i}{l_o} \mathbf{e}_y = X_i \mathbf{e}_x + Y_i \mathbf{e}_y \quad R_{ji} = \frac{r_{ji}}{l_0} = \left| \frac{\mathbf{r}_j}{l_0} - \frac{\mathbf{r}_i}{l_0} \right| = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{v}}{l_o}, \quad U = \sqrt{\left(\frac{t_o}{l_o}\right)^2 v_x^2 + \left(\frac{t_o}{l_o}\right)^2 v_y^2} = \frac{l_0}{t_0} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{l_0}{t_0} v,$$

I hem obtingut uns nous paràmetres que queden definits per les següents igualtats:

$$\Omega_{atr} = \frac{c}{a}, \quad \Omega_{gos} = \frac{\alpha}{a}, \quad \Omega_{par} = \frac{\mu}{a}, \quad \Omega_{fr} = \gamma \sqrt{\frac{b}{am}}, \quad \eta_{atr} = \frac{d}{b}, \quad \eta_{gos} = \frac{\beta}{b}, \quad \eta_{par} = \frac{k}{b}$$

2.3 Mètode numèric

Per resoldre aquesta equació diferencial normalitzada numèricament hem emprat el mètode numèric Runge Kutta-4 (RK-4), un mètode iteratiu per a l'aproximació de solucions de sistemes d'equacions diferencials ordinàries.

Però, aquest mètode serveix per resoldre equacions diferencials de primer ordre i conseqüentment hem hagut de transformar la nostra equació diferencial en un sistema de dues equacions de primer ordre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} &= f(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_{gos}, \mathbf{U}) \\ \frac{d\mathbf{R}_i}{d\tau} &= \mathbf{U} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

on

$$f(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_{gos}, \mathbf{U}) = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - \frac{\Omega_{atr}}{\eta_{atr}^2} R_{ij}^2 e^{-\frac{R_{ij}^2}{\eta_{atr}^2}} \right) \right] - \Omega_{fr} \mathbf{U} + \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{gos}}{R_{i,gos}} \Omega_{gos} e^{-\frac{R_{i,gos}^2}{\eta_{gos}^2}} + \mathbf{x} \Omega_{par} e^{-\frac{x_i^2}{\eta_{par}^2}}.$$

Per utilitzar aquest mètode hem de calcular 4 constants per a cadascuna de les equacions diferencials del sistema, obtenint les vuit equacions que es mostren a continuació, que ens permetran calcular la posició i la velocitat de l'ovella i al temps $t + h$, on h serà l'interval de temps que passi a cada iteració temporal. No explicarem ni demostrarem com hem arribat a aquestes equacions així com tampoc explicarem aquest mètode numèric amb profunditat ja que no s'escau en aquest informe. Per a més informació es poden consultar els apunts teòrics del curs Mètodes Numèrics II.

$$\begin{aligned} k1 &= h\mathbf{U} & l1 &= hf(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_{gos}, \mathbf{U}) \\ k2 &= h(\mathbf{U} + \frac{1}{2}l1) & l2 &= hf(\mathbf{R}_i + \frac{1}{2}k1, \mathbf{R}_j + \frac{1}{2}k1, \mathbf{R}_{gos} + \frac{1}{2}k1, \mathbf{U} + \frac{1}{2}l1) \\ k3 &= h(\mathbf{U} + \frac{1}{2}l2) & l3 &= hf(\mathbf{R}_i + \frac{1}{2}k1, \mathbf{R}_j + \frac{1}{2}k1, \mathbf{R}_{gos} + \frac{1}{2}k1, \mathbf{U} + \frac{1}{2}l2) \\ k4 &= h(\mathbf{U} + l3) & l4 &= hf(\mathbf{R}_i + k3, \mathbf{R}_j + k3, \mathbf{R}_{gos} + k3, \mathbf{U} + l3) \\ \mathbf{R}_i(t+h) &= \mathbf{R}_i(t) + \frac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) & \mathbf{U}(t+h) &= \mathbf{U}(t) + \frac{1}{6}(l1 + 2l2 + 2l3 + l4) \end{aligned}$$

2005/06/

Per poder aplicar el mètode Runge Kutta-4 hem de projectar les nostres equacions als eixos X i Y, obtenint 4 equacions diferencials, i finalment 16 paràmetres a calcular per poder trobar la posició i la velocitat de cadascuna de les ovelles a la següent iteració. Les quatre equacions diferencials seran:

$$\frac{d\mathbf{U}_x}{d\tau} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - \frac{\Omega_{atr}}{\eta_{atr}^2} R_{ij}^2 e^{-\frac{R_{ij}^2}{\eta_{atr}^2}} \right) \right] - \Omega_{fr} \mathbf{U}_x + \frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{gos}}{R_{i,gos}} \Omega_{gos} e^{-\frac{R_{i,gos}^2}{\eta_{gos}^2}} + \mathbf{x} \Omega_{par} e^{-\frac{x_i^2}{\eta_{par}^2}} \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_y}{d\tau} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - \frac{\Omega_{atr}}{\eta_{atr}^2} R_{ij}^2 e^{-\frac{R_{ij}^2}{\eta_{atr}^2}} \right) \right] - \Omega_{fr} \mathbf{U}_y + \frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{gos}}{R_{i,gos}} \Omega_{gos} e^{-\frac{R_{i,gos}^2}{\eta_{gos}^2}} \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{d\tau} = \mathbf{U}_x \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_i}{d\tau} = \mathbf{U}_y. \quad (11)$$

Finalment, hem de definir les condicions inicials. Pel que fa a les posicions, disposarem les ovelles en posicions aleatòries dins d'un cercle de radi $r = 6\text{m}$, amb centre al punt $\mathbf{P} = (6,6)\text{m}$ separades entre elles una distància $d > 1\text{m}$, i establim que les velocitats inicials de totes les ovelles siguin nul·les.

2.4 Determinació dels paràmetres

Un cop obtinguda l'equació amb la qual treballarem hem procedit a determinar els paràmetres de manera que s'ajustin al màxim amb el comportament d'un ramat d'ovelles real. Ja que treballarem en intervals de temps de l'ordre del s i en espais de l'ordre del m , hem triat per comoditat $t_0 = 1\text{s}$ i $l_0 = 1\text{m}$ com a temps i longituds característics de la nostre normalització.

El primer que hem fet ha sigut deixar evolucionar el sistema tenint en compte només la força entre les ovelles i la força de fregament, és a dir, establint $\Omega_{gos} = 0$, $\Omega_{par} = 0$. Un cop anulada la força del gos i la del fregament hem anat variant els tres paràmetres restants, Ω_{atr} , η_{atr} i Ω_{fr} fins a obtenir una animació coherent amb el comportament d'un ramat d'ovelles al qual res no perturba. Hem obtingut introduint els paràmetres $\Omega_{atr} = 0.04$, $\eta_{atr} = 15$ i $\Omega_{fr} = 1.5$.

Un cop fet això hem afegit la força de les tanques i li hem introduït al ramat una velocitat inicial $\mathbf{U} = -0.3\mathbf{e}_y$ i hem anat variant el valor de Ω_{par} i η_{par} fins a establir-les a $\Omega_{par} = 50$, $\eta_{par} = 0.1$, on les ovelles al topar-se amb el tancat frenaven imitant el comportaven d'unes ovelles reals.

Finalment hem introduït al gos, una altra partícula puntal, i hem fet que es mogui verticalment creuant el ramat d'ovelles pel mig, i de nou hem buscat els paràmetres amb els quals obteniem un comportament més semblant al d'un ramat real. Hem establert $\Omega_{gos} = 1.3$ i $\eta_{gos} = 3.5$.

Amb tots els paràmetres adimensionals definits, juntament amb els valors de l_0 i t_0 , hem obtingut els valors dels paràmetres inicials, amb el que han quedat totalment definides les forces entre els elements de la nostre modelització.

$$a = 2.89\text{kgm/s}^2, \quad b = 1.00\text{m}, \quad c = 0.12\text{kgm/s}^2, \quad d = 15.00\text{m}, \quad \alpha = 3.76\text{kgm/s}^2, \\ \beta = 3.50\text{m}, \quad \kappa = 0.10\text{m}, \quad \mu = 144.65\text{kgm/s}^2, \quad \gamma = 21.35\text{m}$$

Un cop establerts els paràmetres, han quedat definides les forces del sistema que hem modalitzat, graficades a la Figura 8 de l'annex, obtenint entre d'altres coses la posició d'equilibri entre dues ovelles, d'uns 2m.

3 Resultats

Un cop obtinguts els paràmetres amb els quals el sistema es comporta d'una manera coherent hem investigat diferents trajectòries que pot seguir el gos per tal de trobar la més eficient.

La primera d'aquestes trajectòries ha sigut una línia recta en el sentit negatiu de l'eix de les x , a l'alçada de la porta del tancat, com es pot veure a la Figura 1, de manera que el gos empenyia al ramat cap a la porta. Hem variat la velocitat del gos entre $v = 7\text{m/s}$, que és aproximadament la velocitat màxima a la qual pot arribar un gos pastor, i $v = 0.5\text{m/s}$, i hem pogut observar com al disminuir la velocitat del gos augmentava el nombre d'ovelles que entraven a la cleda, com es mostra a la Figura 2. Però, com era d'esperar, tot i canviar la velocitat del gos, ha estat impossible ficar totes les ovelles a la cleda. El ramat d'ovelles es dividia per deixar passar al gos pel mig, quedant el ramat partit en dos i la majoria d'ovelles fora del tancat.

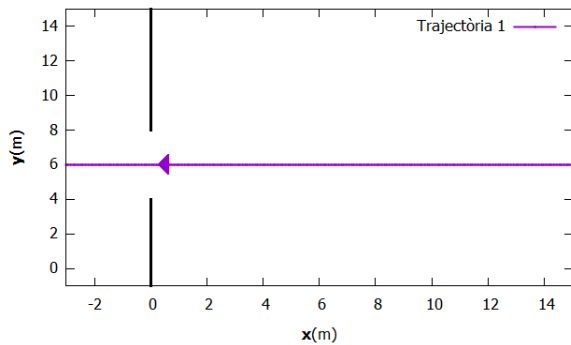


Figura 1: Trajectòria 1 seguida pel gos. Les dues línies verticals negres es corresponen a la tanca.

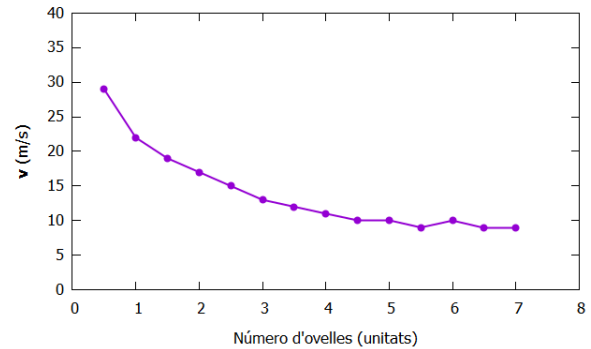


Figura 2: Número d'ovelles que han entrat a la cleda en funció de la velocitat del gos.

Per a les trajectòries que segueixen la velocitat del gos ha sigut de $v = 3\text{m/s}$, com havíem establert inicialment. Un cop vist que aquesta trajectòria no era útil per ficar les ovelles a la cleda hem canviat la trajectòria del gos de manera que es moguéss paral·lelament a la tanca, apropant-se progressivament, començant des de la posició $x = 15\text{m}$, com es pot observar a la Figura 3. Des del principi hem pogut observar com al seguir aquesta trajectòria el gos ficava més ovelles que el cop anterior dins la cleda. Hem anat variant el paràmetre lon des de $lon = 6\text{m}$ fins a $lon = 1\text{m}$ i com es mostra a la Figura 4 hem pogut veure com a mesura que disminuïem aquest paràmetre anaven augmentant el nombre d'ovelles introduïdes a la cleda. Com es pot observar, quan $lon < 2\text{m}$ la funció s'estabilitza i per molt que seguim disminuint la velocitat el nombre d'ovelles que acaben entrant dins la tanca roman constant, deixant-ne sempre dues o tres fora de la cleda.

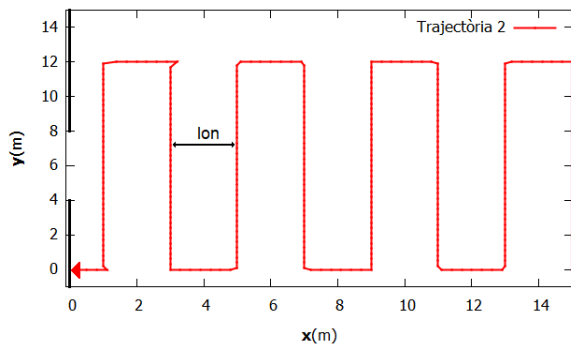


Figura 3: Trajectòria 2 seguida pel gos. Les línies verticals negres es corresponen amb la tanca.

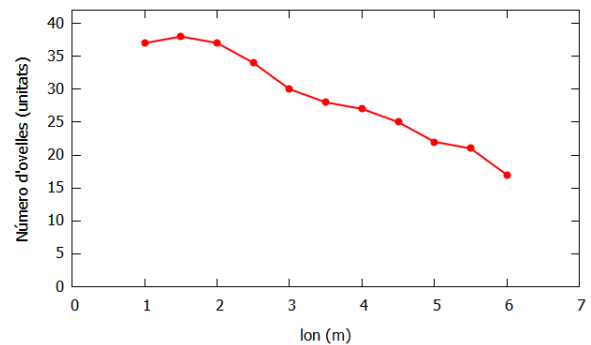


Figura 4: Nombre d'ovelles introduïdes pel gos a la cleda en funció del paràmetre lon .

Finalment, hem definit una òrbita el·líptica de radi horitzontal $ax = 9\text{m}$ i radi vertical $by = 12\text{m}$, que s'anava apropant concèntricament a la porta de la tanca una distància $x = lon$ m cada cop, com es mostra a la Figura 5. Aquesta vegada hem anat variant el paràmetre lon des de $lon = 4\text{m}$ fins a $lon = 1\text{m}$. Com es pot veure a la Figura 6, per $lon < 1.2\text{m}$ el gos ficava totes les ovelles a la cleda. Evidentment i com es pot observar a la Figura 7, quant més disminuïem el valor de lon més temps tardava el gos a ficar a

totes les ovelles dins la tanca, obtenint així la trajectòria útil més eficient, sent aquesta la trajectòria 3 amb $lon = 1.2m$.

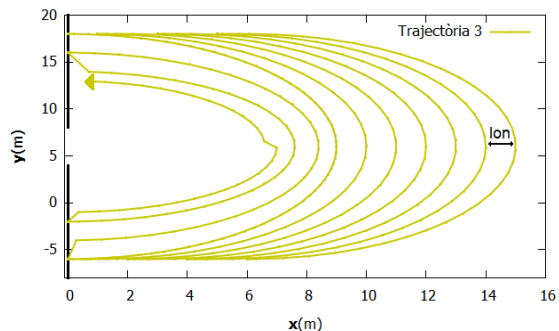


Figura 5: Trajectòria 3 seguida pel gos. Les línies negres verticals corresponen al tancat.

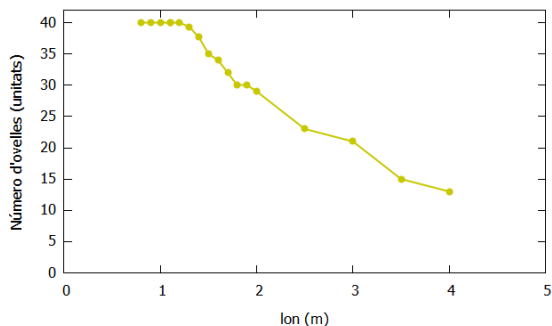


Figura 6: Nombre d'ovelles que han entrat al tancat en funció del paràmetre lon .

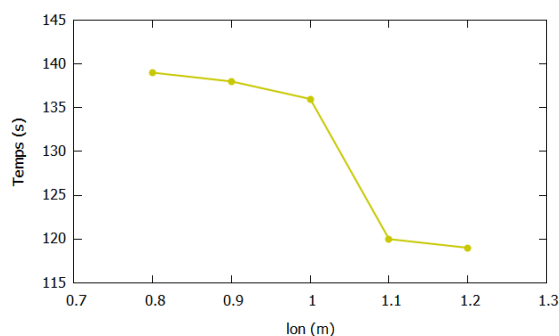


Figura 7: Temps que tarda el gos a ficar totes les ovelles al tancat en funció del paràmetre lon .

Després d'haver estudiat diferents trajectòries possibles, hem pogut observar com independentment dels paràmetres establerts l'única d'aquestes amb les quals el gos acabava ficant totes les ovelles dins el tancat era la trajectòria 3, tot i ser la més lenta. Però, hem pogut observar com només s'acabaven ficant totes les ovelles quan la distància amb la qual els cercles concèntrics disminueixen cada cop era menor a $lon = 1.2m$. Evidentment, quan més gran era aquesta distància menys tardava el gos a ficar totes les ovelles a la cleda ja que hi arribava abans, obtenint així a la trajectòria òptima per minimitzar la feina del gos com ens havíem proposat inicialment, essent aquesta la trajectòria 3 amb $lon = 1.2m$.

Comparant aquest resultat amb la trajectòria seguida per un gos real a l'hora de guiar al ramat veiem que són força similars, ja que el gos real corre al voltant del ramat en semicercles desviant-se en alguns moments, una trajectòria força similar al nostre resultat.

4 Conclusió

Hem assolit el principal objectiu d'aquest informe, analitzant diferents trajectòries a seguir per un gos que guia al seu ramat dins la cleda, trobant quines d'aquestes són útils i finalment trobant la més eficient, obtenint un resultat prou similar amb la trajectòria d'un gos pastor real.

5 Annex

5.1 Normalització

Per tal de normalitzar l'equació (1) hem emprat el següents canvis de variables:

$$\mathbf{R}_i \equiv \frac{\mathbf{r}_i}{l_0}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_0},$$

Reparametitzem els valors de R_{ij} i v de l'equació (1):

$$R_{ij} \equiv \frac{r_{ij}}{l_0} = \left| \frac{\mathbf{r}_i}{l_0} - \frac{\mathbf{r}_j}{l_0} \right| = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{l_0}{t_0} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{l_0}{t_0} U,$$

on $X_i = \frac{x_i}{l_0}$, $j = \frac{x_j}{l_0}$, $Y_i = \frac{y_i}{l_0}$ i $Y_j = \frac{y_j}{l_0}$.

L'equació diferencial normalitzada serà:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}(i)} = m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{ml_0}{t_0^2} \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2} \quad (12)$$

Substituint a (2) l'equació (1) obtenim:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{ij}}{\left(\frac{t_0^2 a}{l_0 m} e^{-l_0^2 b \mathbf{R}_{ij}^2} - \frac{t_0^2 c l_0}{m} R_{ij}^2 e^{-l_0 d R_{ij}^2} \right)} \right] - \frac{t_0^2}{ml_0} \gamma \frac{l_0^2}{t_0^2} U \mathbf{U} + \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{\mathbf{gos}}}{R_{i, \mathbf{gos}}} \frac{t_0^2}{l_0 m} e^{-l_0 \beta R_{i, \mathbf{gos}}^2} + \frac{t_0^2 \mu}{l_0 m} e^{-l_0^2 k X_i^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (13)$$

Simplificant i escollint

$$l_0 = b, \quad t_0 = \sqrt{\frac{bm}{a}},$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - R_{ij}^2 \frac{mc}{a\sqrt{b}\sqrt{bm}} e^{-\frac{d}{b} R_{ij}^2} \right) \right] - \frac{\gamma}{m\sqrt{b}} U \mathbf{U} + \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{\mathbf{gos}}}{R_{i, \mathbf{gos}}} \frac{1}{a} e^{-\frac{\beta}{b} R_{i, \mathbf{gos}}^2} + \frac{\mu}{a} e^{-\frac{k}{b} X_i^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (14)$$

Definim les següents variables per tal de simplificar l'equació:

$$\Omega_{atr} = \frac{c}{b}, \quad \Omega_{gos} = \frac{\alpha}{a}, \quad \Omega_{pr} = \frac{\mu}{a}, \quad \Omega_{fr} = \gamma \sqrt{\frac{\beta}{am}}, \quad \eta_{atr} = \frac{d}{b}, \quad \eta_{gos} = \frac{\beta}{b}, \quad \eta_{pr} = \frac{k}{b},$$

L'equació normalitzada i parametritzada és:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1} \left[\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}} \left(e^{-R_{ij}^2} - \frac{\Omega_{atr}}{\eta_{atr}^2} R_{ij}^2 e^{-\frac{R_{ij}^2}{\eta_{atr}^2}} \right) \right] - \Omega_{fr} \mathbf{U} + \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{\mathbf{gos}}}{R_{i, \mathbf{gos}}} \Omega_{gos} e^{-\frac{R_{i, \mathbf{gos}}^2}{\eta_{gos}^2}} + \mathbf{x} \Omega_{par} e^{-\frac{x_i^2}{\eta_{par}^2}} \quad (15)$$

5.2 Forces parametritzades

Un cop establerts tots els paràmetres hem obtingut les funcions de cadascuna de les forces com es pot observar a continuació:

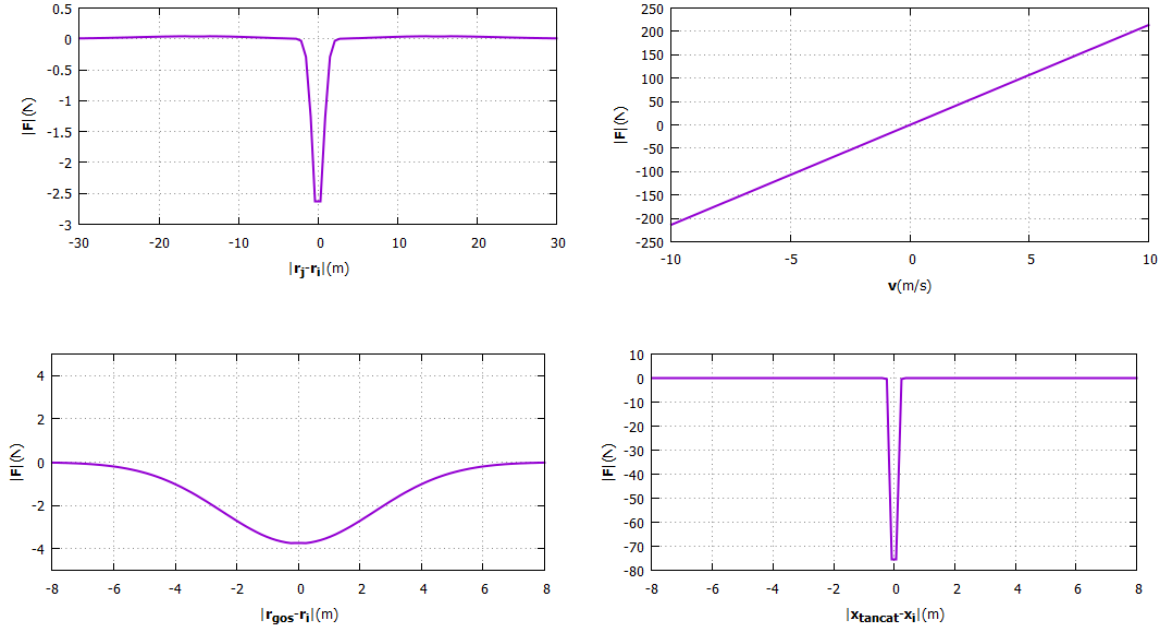


Figura 8: Les quatre forces que modelitzen el nostre sistema. A dalt a l'esquerra la força entre dues ovelles, $\mathbf{F}_{\text{Ovelles}} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ji}} \left(\frac{cr_{ji}^2}{d^2} e^{-\frac{r_{ji}^2}{d^2}} + ae^{-\frac{r_{ji}^2}{b^2}} \right)$, a dalt a la dreta la força de fregament, $\mathbf{F}_{\text{Fregament}} = -\gamma \mathbf{v}$, a baix a l'esquerra la força del gos: $\mathbf{F}_{\text{Fregament}} = -\gamma \mathbf{v}$, i a baix a la dreta la força del tancat: $\mathbf{F}_{\text{Tanca}} = \mu e^{-\frac{x_i^2}{k^2}} \mathbf{e}_x$.