

1.

(a) S transform 從 Gabor transform 改良而來, Gabor 之清晰度比 STFT 高, S transform 又比 Gabor 高, 它比 Gabor 多了可調整 window 寬度, f 在高頻, window 變小, 時域解析好, 頻域差, f 在低頻, 頻域解析佳, 時域差, 此分析符合人類對低頻訊號更敏感特性, 故和 STFT 相比, 保留 Gabor 優點, 又多一 f 變數來調整 window 寬度, 來得到時域或頻域解析佳之情形

(b) Generalized spectrogram 是兩 Gabor 的乘積, 分別選擇 window 寬, 頻域解析佳, 及 window 窄, 時域解析佳, 兩者相乘後, 便可得到時頻解析都佳的時頻圖

(c) 3 parameters atom 之 basis 不像 Fourier series 的 basis 只站在特定頻率上, 由 σ 控制 basis 寬度, 在分析有限寬度的信號, 3 parameters atom 可用相比於 Fourier series, 較少 term, 達到更高準確度, 也比傅立葉分析有更好的壓縮效果

2.

此 3 種皆可表示成 S transform 的 general form

$$S_x(t, f) = |s(f)| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\pi(t-\tau)^2 s^2(f)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

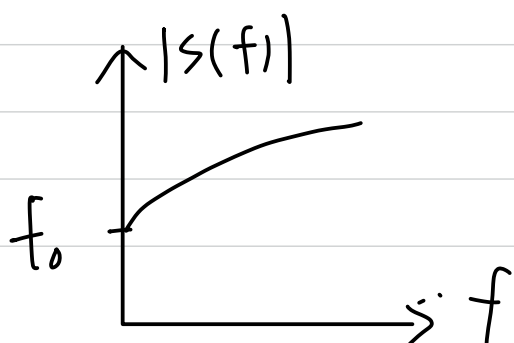
(a) $s(f) = f^2$

(b) $s(f) = \cos(f)$

(c) $s(f) = 1 + \frac{\sqrt{|f|}}{10}$

會希望 $s(f)$ 如下圖, 平緩成長, 使

f 在高頻不會使 window 過窄, 而只有一個取樣點, 且在 $f=0$, $s(f)=f_0 \neq 0$, window 無限寬
積分外的 $|s(f)|$ 使整項為 0 不希望



符合上述條件只有 (c) #

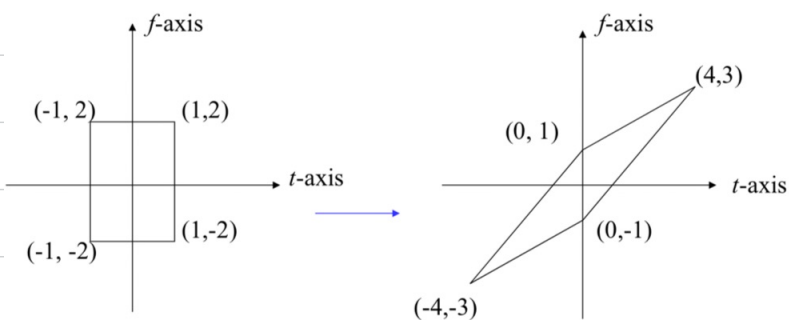
(a) 成長過快且 $f=0$, $s(f)=0$

(b) 持續振盪, 無平緩成長

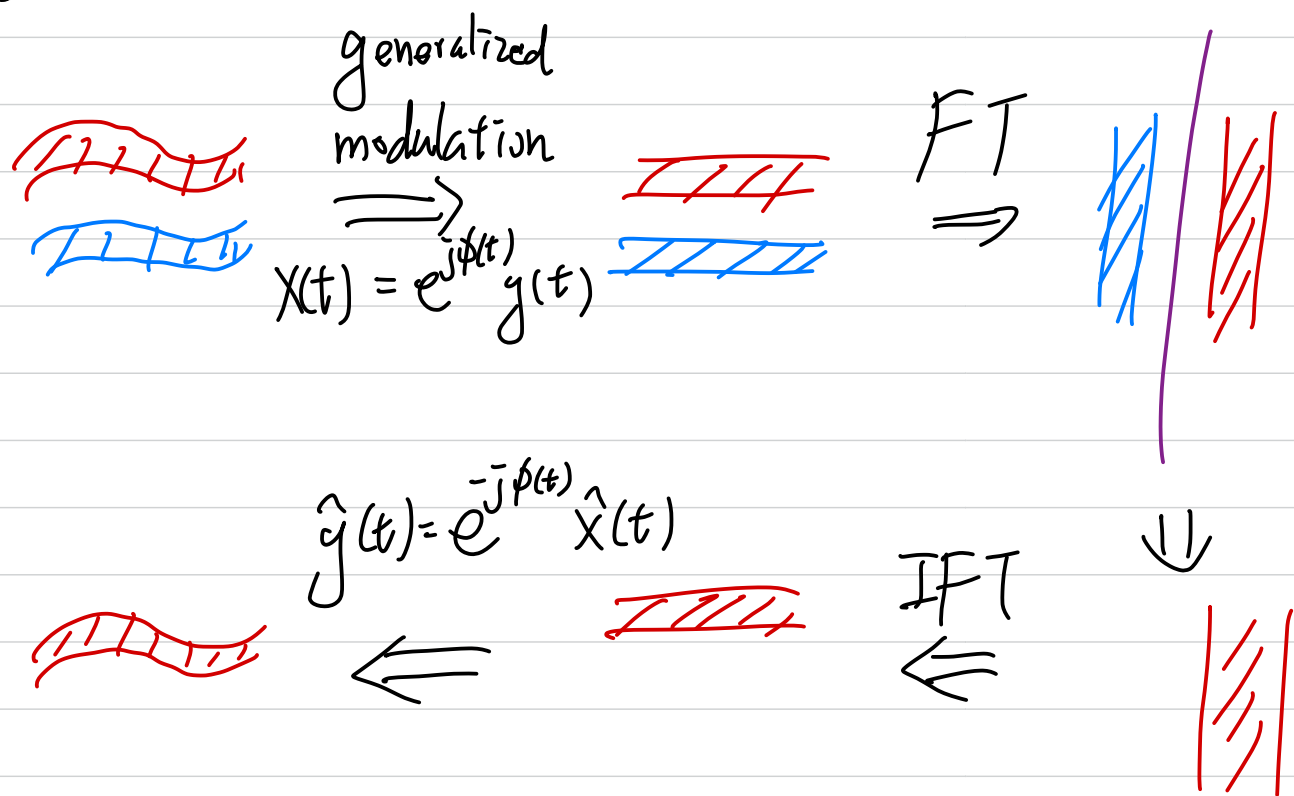
3.

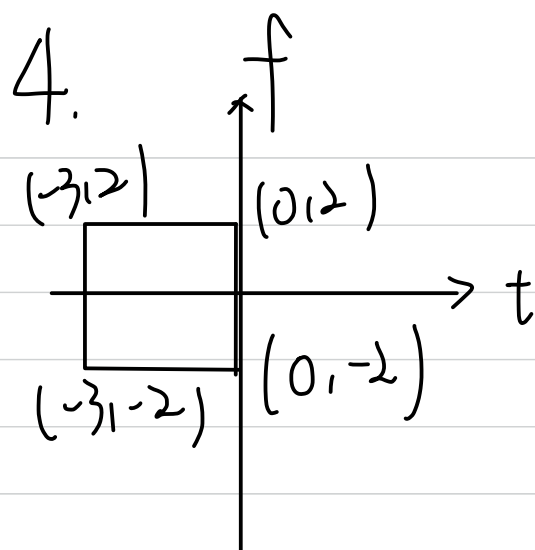
(a) FRFT 為 LCT 的一個特例, 可將信號在時頻圖上旋轉適當後, 用垂直 cutoff line 消除不想要的信號成份, 再轉回來, LCT 也可將信號進行扭曲, 再由垂直 cutoff line 切除不要的信號, 再將信號扭曲回來, 如同產生斜線方向之 cutoff line

LCT 扭曲 \longrightarrow



(b) generalized modulation 比 LCT 更加有彈性，
 可產生 cutoff curve，先將信號做 generalized
 modulation，將信號變平後，用 FT 轉成鉛垂
 方向後，用鉛垂之 cutoff line 切除不要的信號，
 再依序用 inverse FT，乘 $e^{-j\phi(t)}$ (generalized modulation
 的 inverse) 得到最後信號，整個過程如同
 產生曲線之 cutoff curve

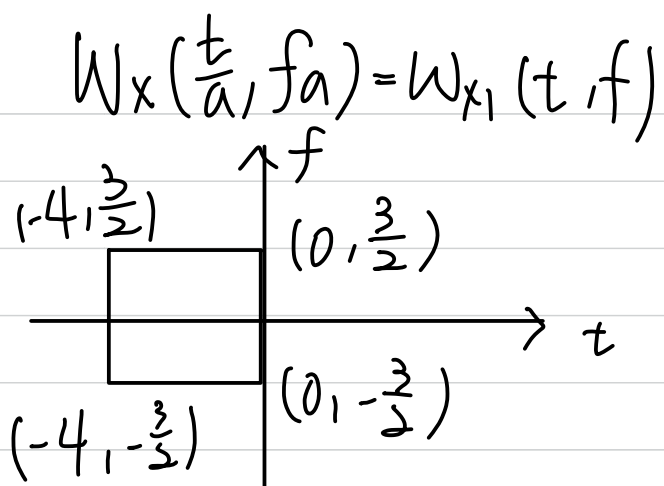




Scaling

$$\frac{1}{\sqrt{a}} X\left(\frac{t}{a}\right) = X_1(t)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

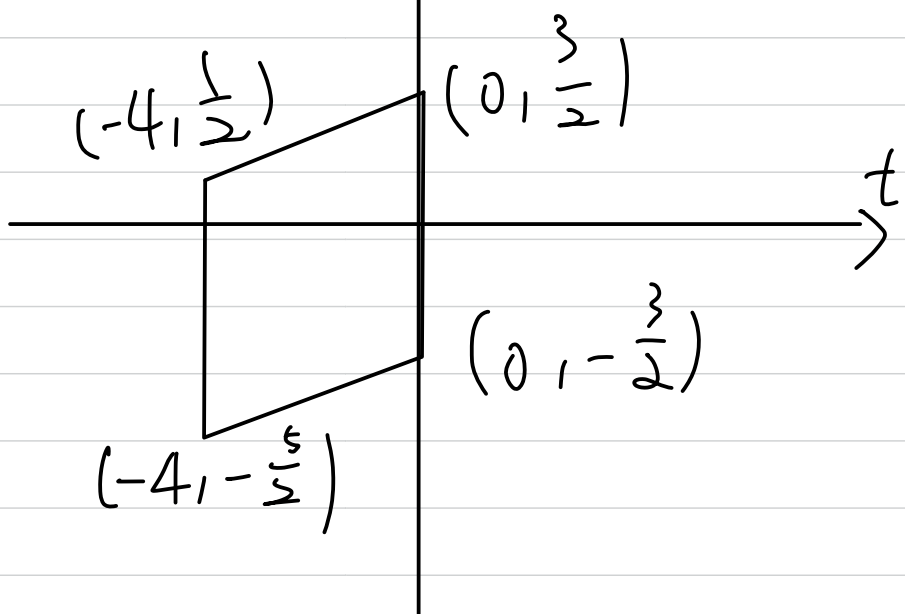


chirp multiplication

$$e^{j\pi a t^2} X_1(t) = X_2(t)$$

$$W_{X_1}(t, f - at) = W_{X_2}(t, f)$$

$$a = \frac{1}{4}$$

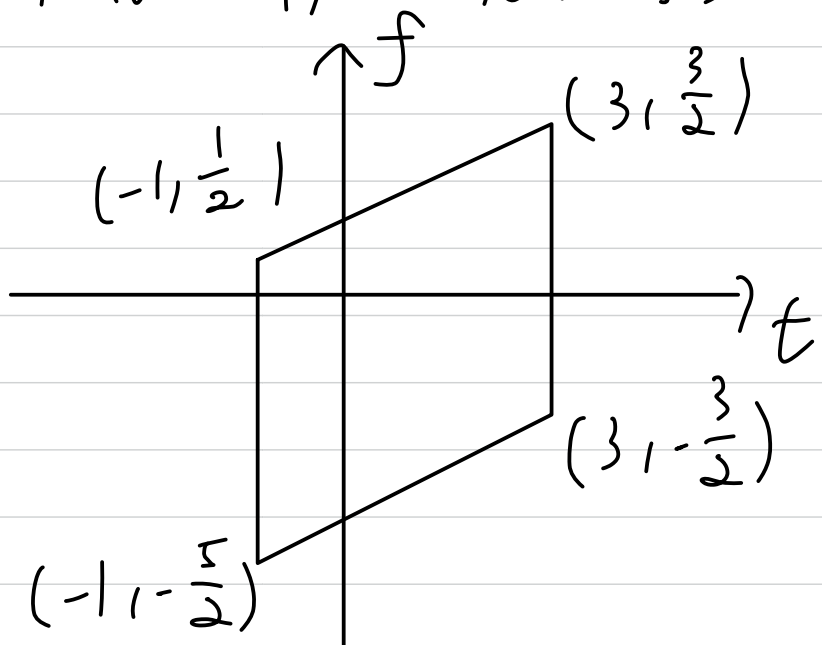


horizontal shift

$$X_2(t - t_0) = X_3(t)$$

$$W_{X_2}(t - t_0, f) = W_{X_3}(t, f)$$

$$t_0 = 3$$

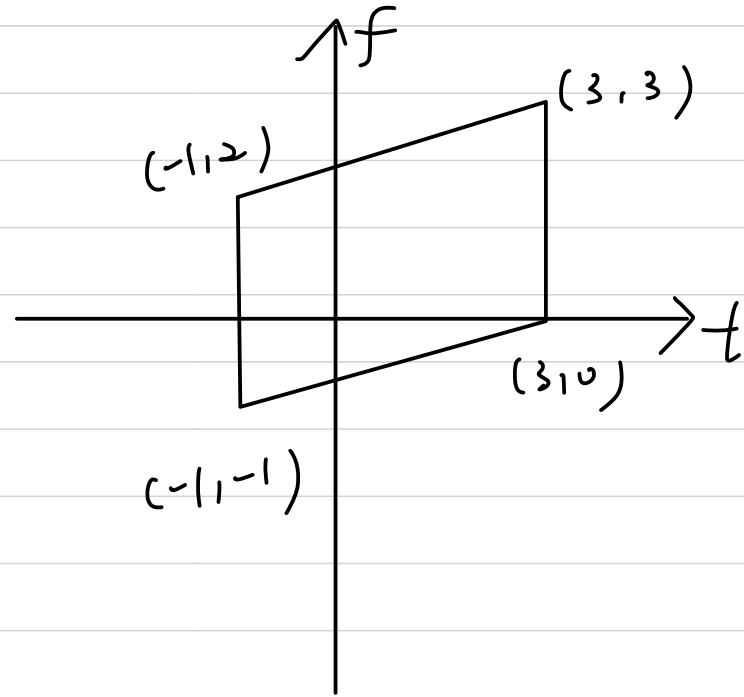


vertical shift

$$W_3(t, f - f_0) = W_{X_4}(t, f)$$

$$e^{-j2\pi f_0 t} X_3(t) = X_4(t)$$

$$f_0 = \frac{3}{2}$$



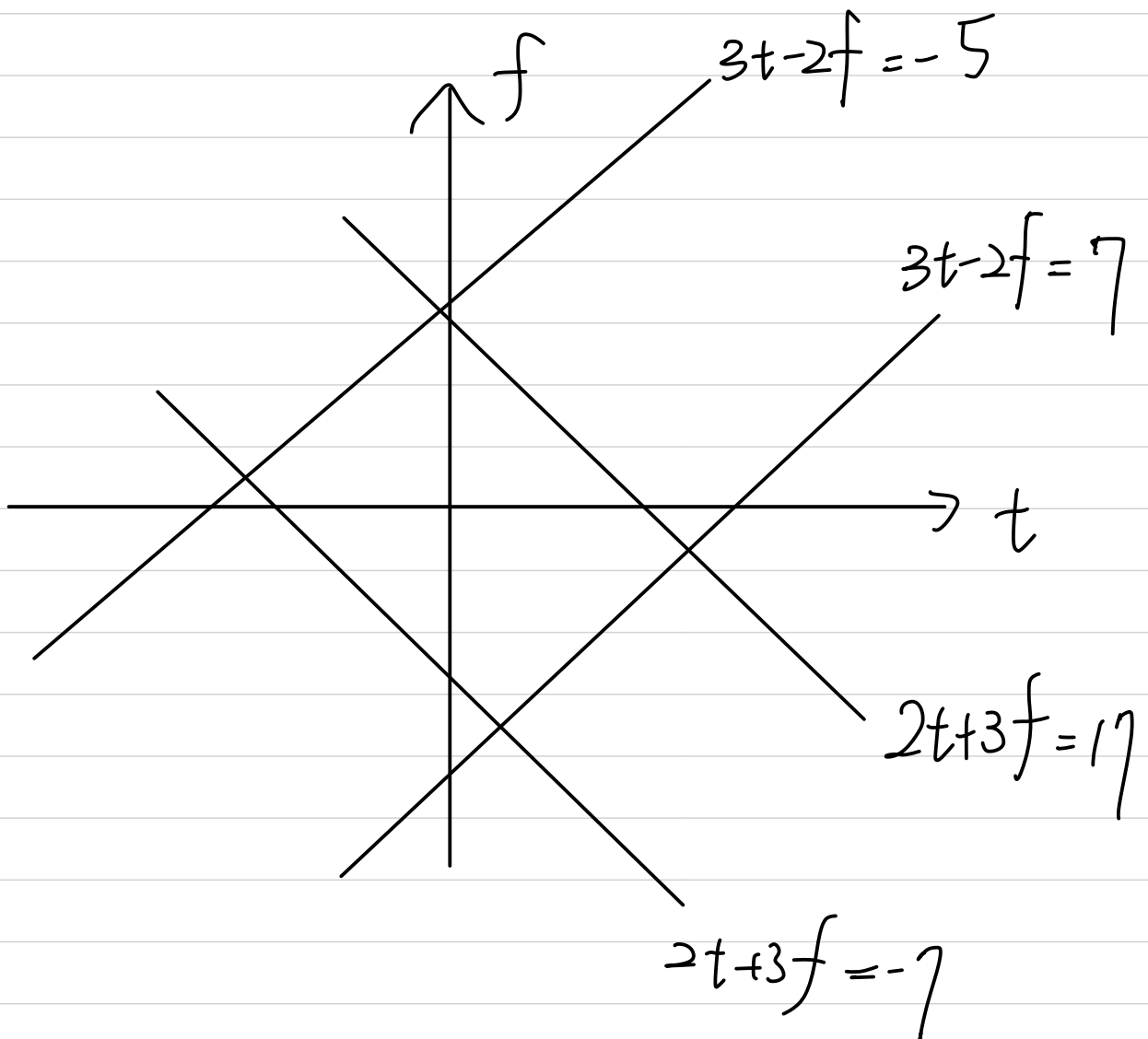
5.

$$-12 \leq 2t + 3f - 5 \leq 12$$

$$-7 \leq 2t + 3f \leq 17 \quad - \textcircled{1}$$

$$-6 \leq 3t - 2f - 1 \leq 6$$

$$-5 \leq 3t - 2f \leq 7 \quad - \textcircled{2}$$



4條 cutoff line 與兩軸交點 $(t_0, 0), (0, f_0)$

$$3t - 2f = 7 : \left(\frac{7}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{2}\right)$$

$$3t - 2f = -5 : \left(-\frac{5}{3}, 0\right), \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$2t + 3f = 17 : \left(\frac{17}{2}, 0\right), \left(0, \frac{17}{3}\right)$$

$$2t + 3f = -7 : \left(-\frac{7}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{3}\right)$$

ϕ 與 u_0 , ϕ 為順時針旋轉角度, $u_0 \geq 0$

$$3t - 2f = 7 : \phi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), u_0 = \frac{\frac{7 \times 7}{6}}{\sqrt{\frac{7 \times 7}{9} + \frac{7 \times 7}{4}}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$3t - 2f = -5 : \phi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), u_0 = \frac{\frac{5 \times 5}{6}}{\sqrt{\frac{5 \times 5}{9} + \frac{5 \times 5}{4}}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$2t + 3f = 17 : \phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right), u_0 = \frac{\frac{2 \times 9}{6}}{\sqrt{\frac{2 \times 9}{4} + \frac{2 \times 9}{9}}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$$

$$2t + 3f = -7 : \phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right), u_0 = \frac{\frac{7 \times 7}{6}}{\sqrt{\frac{7 \times 7}{4} + \frac{7 \times 7}{9}}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$X_{01} = O_F^{-\phi_1} \{ O_F^{\phi_1} [X(t)] H_1(u) \}, \phi_1 = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), H_1(u) = \begin{cases} 1, & -\frac{7}{\sqrt{13}} \leq u \leq \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$X_{02} = O_F^{-\phi_2} \{ O_F^{\phi_2} [X_{01}(t)] H_2(u) \}, \phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right), H_2(u) = \begin{cases} 1, & \frac{7}{\sqrt{13}} \leq u \leq \frac{17}{\sqrt{13}} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

運用 FFT 之兩 filter 之 ϕ 和 $H(\omega)$
如上, X_{o2} 為最後 output