1.

(a) 此 criterion $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\psi(f)|^2}{|f|} df < \infty$ 需滿足，小波轉換的 inverse 才會存在

(b) 低頻 function，類似 Haar transform 1^{st} row，其可簡化 inverse wavelet transform 之運算

2.

(a) $\psi(t) = \frac{d^{10}}{dt^{10}} e^{-\pi t^2}$

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)\, dt = FT\left(t^k \psi(t)\right)\Big|_{f=0}$$

已知 $FT(\psi(t)) = (j2\pi f)^{10} e^{-\pi f^2} = \Phi(f)$

则 $m_k = \left(\frac{1}{-j2\pi}\right)^k \frac{d^k}{df^k} \Phi(f)\Big|_{f=0}$

$$= \left(\frac{1}{-j2\pi}\right)^k \frac{d^k}{df^k}\left[(j2\pi f)^{10} e^{-\pi f^2}\right]\Big|_{f=0}$$

$$= 0 \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots 9$$

vanish moment $= 10$

(b) $G(f) = 1, \ |f| \leq \frac{1}{4}$

$G(f) = 0$, otherwise

$$\frac{d^k}{df^k} G(f)\Big|_{f=\frac{1}{2}} = \frac{d^k}{df^k} 0 \Big|_{f=\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{for any } k$$

vanish moment is infinity

(c) 2p 點的 symplet vanish moment 和 Daubechies 相同皆為 p，但較 Daubechies 對稱，故 12 點的 symplet，vanish moment = 6

(d) $H(f) = (1-e^{-j2\pi f})^4 \cos^2(\pi f)/16$

$$H(f)\Big|_{f=0} = 0$$

$$\frac{d}{df}H(f)\Big|_{f=0} = \Big[\frac{1}{16}\Big(4(1-e^{-j2\pi f})^3 \cdot j2\pi e^{-j2\pi f}\cos^2(\pi f) + \cdots\cdots\Big]\Big|_{f=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{df^2}H(f)\Big|_{f=0} = \Big[\frac{1}{16}\Big(12(1-e^{-j2\pi f})^2 \cdot (j2\pi)^2 e^{-j4\pi f}\cos^2(\pi f) + \cdots\cdots\Big]\Big|_{f=0} = 0$$

$$\frac{d^3}{df^3}H(f)\Big|_{f=0} = \Big[\frac{3}{4}\Big(2(1-e^{-j2\pi f}) \cdot (j2\pi)^3 e^{-j6\pi f}\cos^2(\pi f) + \cdots\Big]\Big|_{f=0} = 0$$

$$\frac{d^4}{df^4} H(f)\Big|_{f=0} = \Big[\frac{3}{2} e^{-j8\pi f} (-j2\pi)^4 \cos^2(\pi f) + \cdots \Big]\Big|_{f=0} \neq 0$$

上方各式 … 皆有 $(1-e^{-j2\pi f})$ 項乘其他項，故 … 部份皆 0，只需看前方能最快使 $(1-e^{-j2\pi f})$ 微分成 $e^{-j2\pi f}$ 即可

vanish moment $= 4$

3. 當 $\text{length}(x[n]) = N$, $\text{length}(g[n]) = L$

需做 2 次 FT 和一次 IFT, Complexity $= (N+L-1)\log_2(N+L-1)$

當 $N \gg L$, 使用 sectioned convolution

將 $x[n]$ 切 S 段, 每段長度 N_1

$$x[n] * g[n] = x_1[n] * g[n] + x_2[n] * g[n] + \dots + x_S[n] * g[n]$$

$$\text{complexity} = S(N_1+L-1)\log_2(N_1+L-1) \simeq SN_1\log_2(N_1+L-1)$$

$$= N\log_2(N_1+L-1)$$

$$\simeq N\log_2 N_1$$

因 N_1 為 fixed value

故 complexity 為 $O(N)$

4.

(a) 小波轉換可分解低頻及高頻成份，在高頻中設定threshold，若amplitude小於threshold，則認定為noise，將其去除，若大於threshold，則為edge，保留此成份，如此一來便能保留edge下，去除noise

(b) 做完2D小波轉換，兩軸皆經過low pass filter之輸出，此圖會保留原圖大多數資訊，但所需memory為原本之$\frac{1}{4}$，故可以以此做image compression

5.

(a) g[n] 最大值幾乎在中間，做小波轉換後，圖片偏移幅度很小

(b) 多考慮 scaling function 的 vanish moment，使其更像 low frequency function

6.

(a) $G(z) = \frac{4}{5} + az^{-1}$

$G^2(z) = \frac{16}{25} + \frac{8}{5}az^{-1} + a^2z^{-2}$

$G^2(-z) = \frac{16}{25} - \frac{8}{5}az^{-1} + a^2z^{-2}$

$G^2(z) - G^2(-z) = \frac{16}{5}az^{-1} = 2z^k$, k is odd
$k=-1$

$\frac{16}{5}a = 2$, $\underline{a = \frac{5}{8}}$ #

(b) $G(z) = \frac{4}{5} + az^{-1}$

$G(z^{-1}) = \frac{4}{5} + az$

$G(-z) = \frac{4}{5} - az^{-1}$

$G(-z^{-1}) = \frac{4}{5} - az$

$G(z)G(z^{-1}) + G(-z)G(-z^{-1})$

$= \frac{16}{25} + \frac{4}{5}az + \frac{4}{5}az^{-1} + a^2 + \frac{16}{25} - \frac{4}{5}az - \frac{4}{5}az^{-1} + a^2$

$= \frac{32}{25} + 2a^2 = 2$

$2a^2 = \frac{18}{25} \Rightarrow \underline{a = \pm\frac{3}{5}}$ #

Extra:尾數7

2點 Daubechies wavelet 為 Haar wavelet