

時頻分析與小波轉換  
期末書面報告

Time-frequency analysis and  
frequency-hopping signals

姓名：陳昱仁

學號：R10943117

系級：電子所碩一

## 摘要

本文探討一種基於信號分解的時頻分析方法，分析 frequency-hopping signals。該方法先將 multi- component 跳頻信號通過 band pass filter 變成多個 single- component 信號，再將每個 component 的 Wigner-Ville 分佈(WVD) 線性疊加得到新的時頻分佈。此提出的時頻分析方法能有效 frequency-hopping signals 的 cross-term 干擾，與現有方法相比。具有更高的時頻分辨率，更適合 frequency-hopping signals 的時頻分析。

## 一.簡介

Frequency-hopping signals 技術是通信抗噪中非常有效的方法，此法應用於軍事和民用通信中。在通信對抗和無線電領域，frequency-hopping signals 分析也自然成為一項重要的研究內容。由於 frequency-hopping signals 的頻率隨時間不斷變化，屬於典型的非平穩信號，單純的時域或頻域分析方法很難對其精確分析。

Wigner-Ville 分佈(WVD)是雙線性時頻分佈的代表之一，它不但具有理論上最高的時頻分辨率，且具有時頻分析漂亮的數學性質。然而，對於 multi-component 信號，WVD 在嚴重的 cross-term 干擾。使其應用受到限制。為改善時頻分佈的性能，同時又能保持較高的時頻分辨率，本文討論一種基於信號分解的時頻分析方法。首先在頻域將 multi-component 信號逐一分解為 single-component 信號，然後再對每一 component 的 WVD 進行線性疊加，以抑制 cross-term。針對 frequency-hopping signals 的特性，對不同的信號 component 設計相應的濾波器，通過對信號 component 進行濾波來達到信號分解的目的。

## 二. 背景知識

### 2.1 WVD 簡介

WVD 是應用最多的雙線性時頻分佈，以信號  $x(t)$  為例，其 WVD 可表示為

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

WVD 在測不準原理中，是在 lower bound 的地方，因而在時頻分佈中具有理論上最高的時頻清晰度。但是對於 multi-component 信號，WVD 會產生 cross-term 干擾，會嚴重影響我們的分析，此為 WVD 的缺點。

Cross-term 的來源是因為一組信號中有多個 component 交互影響，會在時頻圖上產生多餘的信號，是時頻分析中的干擾項。

### 2.2 Frequency-hopping signals 之 WVD

此種信號是指頻率在一定範圍內隨時間 pseudo random 改變的一種信號，他的模型如下

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{rect}(t - kT_h - T_0) e^{j2\pi f_k(t - kT_h - T_0)}$$

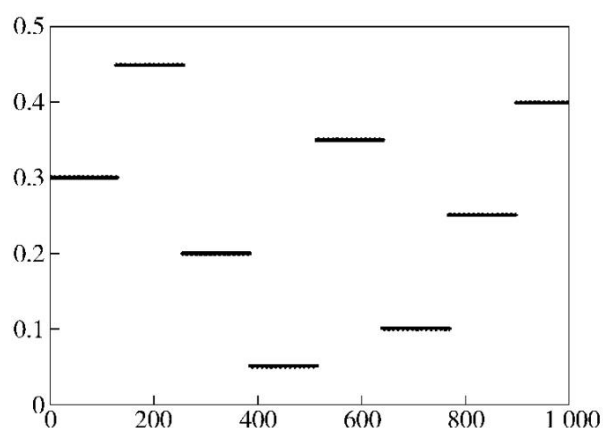
其中， $0 \leq t \leq T$ ， $T$  為觀測時間

$\text{rect}(t)$  在 0 到  $T_h$  間值為 1，其他皆 0，為一長方形

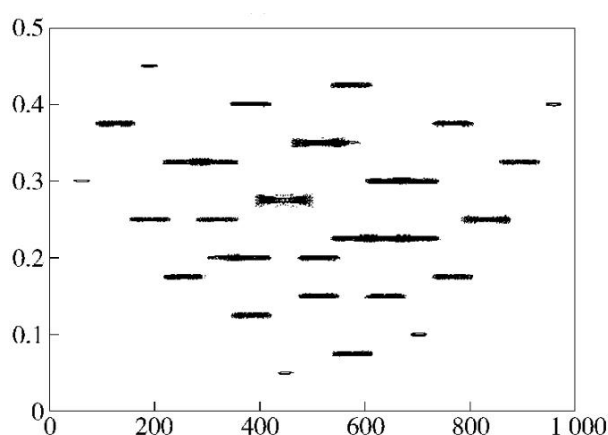
$T_0$  為起跳時間， $f_k$  是跳動頻率， $N$  是跳動頻率數

根據上述定義產生一段跳頻信號,包含 8 個跳動週期，1024 個 sample，跳動頻頻率為{30, 45, 20, 5, 35, 10, 25, 40} kHz，sample frequency 為 100 kHz，跳動週期為 128 個採樣點，從  $t=0$  開始起跳。其時頻圖如圖一所示，而其 WVD 如圖二所示。由圖可知，Frequency-hopping signals 的 WVD 存在大量的 Cross-term 干擾，難以觀察到實際的信號。由於 cross-term 對信號份量的正確判斷產生了嚴重干擾，因此 WVD 對 Frequency-hopping signals 的時頻分析存在很大

影響。



圖一



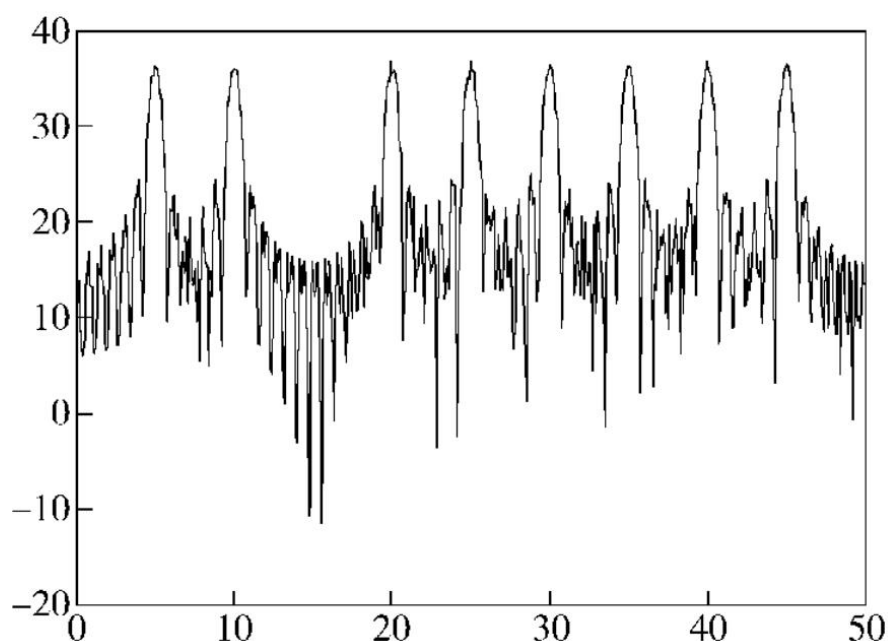
圖二

### 三. 使用信號分解之 frequency-hopping signals 分析

由上方的分析可以發現到，cross-term 的干擾對分析相當嚴重。若可以將 multi-component 信號逐一分解為 single-component 信號，在個別對每個 single-component 信號分析 WVD，即可去除 cross-term 的影響。

信號的分解方法有多種，如匹配追蹤法、自適應分解法、經驗模式分解法等。這些方法涉及對多個參數的估計問題，運算非常複雜，且它們與 frequency-hopping signals 時頻結構並不相符，因此不適用於跳 frequency-hopping signals 的時頻分析。

Frequency-hopping signals 的數學式可以得到如圖三所示的頻譜圖。由圖三可見，frequency-hopping signals 的頻譜由多個頻率 component 組成，每個頻率 component 表示一跳信號的頻譜。由此推論，通過一組 band pass filter 將 frequency-hopping signals 的各個頻率 component 取出，即可將其 multi-component 信號逐一分解為 single - component 信號，並分別計算其 WVD，再將各 WVD 求和，得到新的時頻分佈。



圖三

這種方法的關鍵是如何確定 band pass filter 數並設計匹配各 component 的 band pass filter，實際上就是如何正確估計信號 component 數及每個信號 component 的頻率和頻寬。通過搜索信號頻譜中的所有 peaks，可估計  $N$ ，通過對峰值頻率的估計，可得各信號 component 的頻率值  $f_k$ ，通過對各信號 component 頻寬的估計，則可將 2 個峰值間的最小頻率間隔作為  $\sigma$  的估值。band pass filter 的設計正是依據參數  $f_k$  及  $\sigma$ ，匹配於第  $k$  個 component 的 band pass filter，在頻域為如下高斯函數

$$H_k(f) = e^{\frac{-[2\pi(f-f_k)]^2}{\sigma^2}}$$

其中 $f_k$ 為 band pass filter 的 central frequency， $\sigma$ 控制該濾波器的頻寬。

雖然也可選擇其他濾波器形式，但是高斯函數有一個很好的優點，即有最高的時頻清晰度，在測不準原理中，高斯函數在 lower bound，故時域和頻域都有很好的清晰度。根據 WVD 的性質，2 個信號在時域 convolution 後的 WVD，是這 2 個信號各自的 WVD 在時域上 convolution 的結果。由於高斯函數的高清晰度，可以減小信號與濾波器 convolution 後在時頻平面上的擴展程度，使信號保持較高的時頻分辨率。

將信號分解的步驟如下

**Step1.** 將信號做 Fourier transform，得到  $S(f)$

**Step2.** 估計信號的峰值數、峰值頻率及頻寬，假設有  $N$  個峰值，對應  $N$  個信號 component

**Step3.** 對第  $k=1$  個峰值，設計相應的 band pass filter  $H_k(f)$ ，並濾出第  $k$  個信號 component，得到  $S_k(f) = S(f)H_k(f)$

**Step4.** 對 $S_k(f)$ 做 Inverse Fourier transform，得到 $s_k(t)$

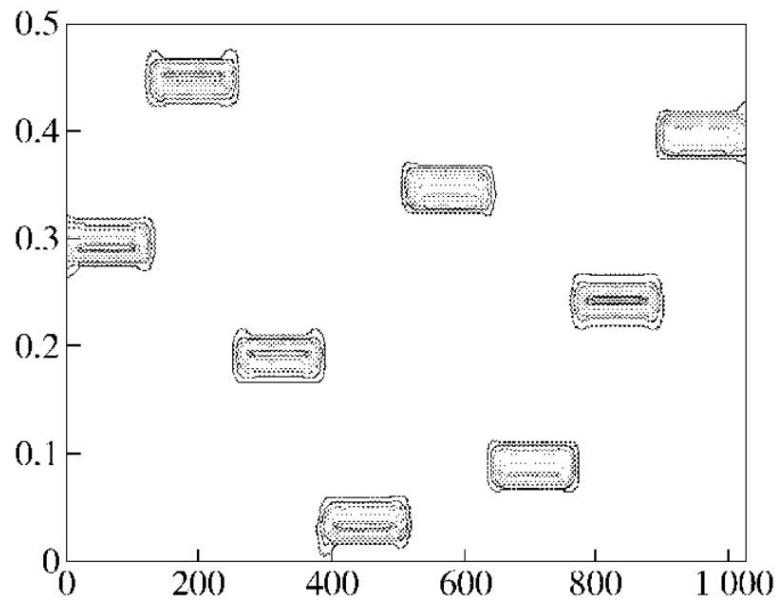
**Step5.** 計算 $s_k(t)$ 的 WVD，得到 $W_k(t, f)$

**Step6.**  $k = 2, 3, \dots, N$ ，重複 step3~5

**Step7.** 對所有 $W_k(t, f)$ 加總，得到總時頻分佈  $T(t, f) = \sum_{k=1}^N W_k(t, f)$

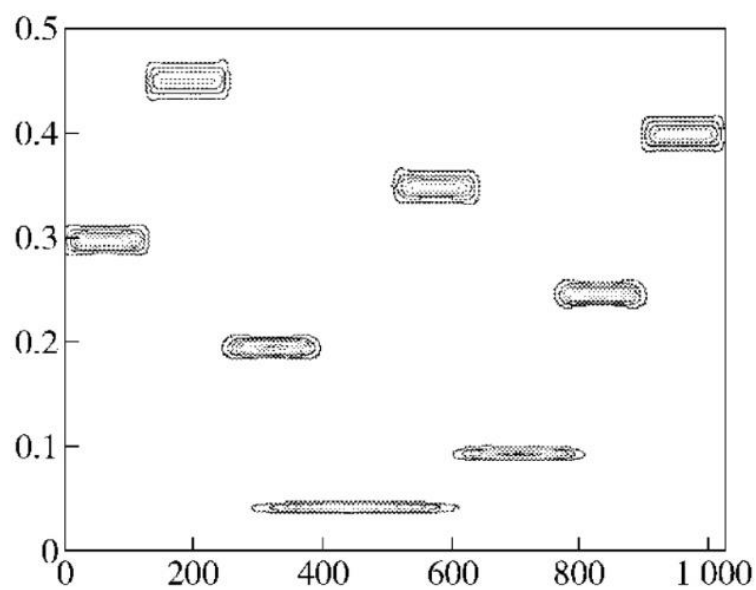
下面仍以圖 1 所示的跳頻信號為例，對本文算法進行模擬分析，其結果如圖 4 所示。作為比較，同時給出 frequency-hopping signals 的 STFT、WT 及 SPWVD 的模擬結果。

圖四為 frequency-hopping signals 的 STFT 時頻分析，它雖然不含 cross-term 干擾，但受測不準原理的限制，其時間分辨率和頻率分辨率不可兼得，採用長度為 63 個 sample points 作為 window 的情況下，此時頻分析的時間分辨率較高，但頻率分辨率較差。



圖四

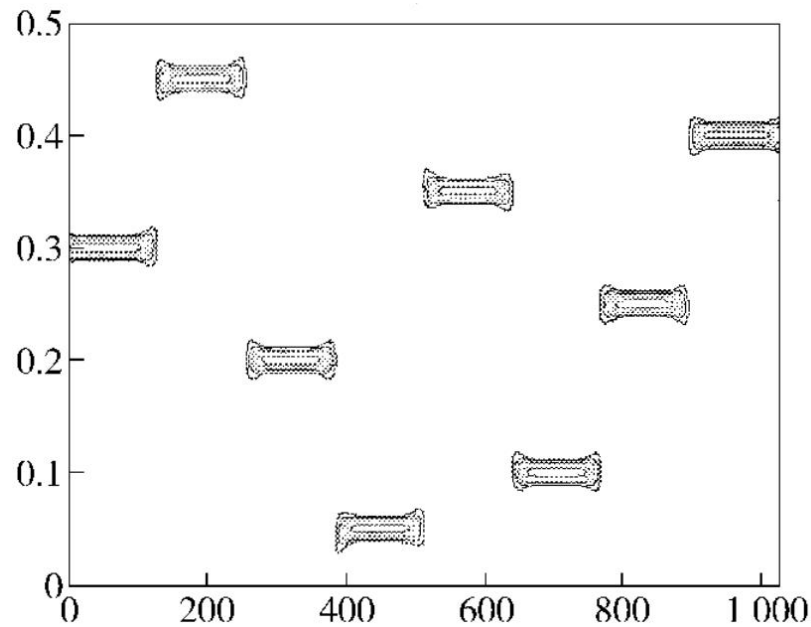
圖五為 frequency-hopping signals 的 WT。WT 是一種多分辨率的分析方法。同樣受測不準原理的限制。WT 在頻率低端雖然具有較高的頻率分辨率，但時間分辨率較差；在頻率高端雖然具有較高的時間分辨率，但頻率分辨率較差。



圖五

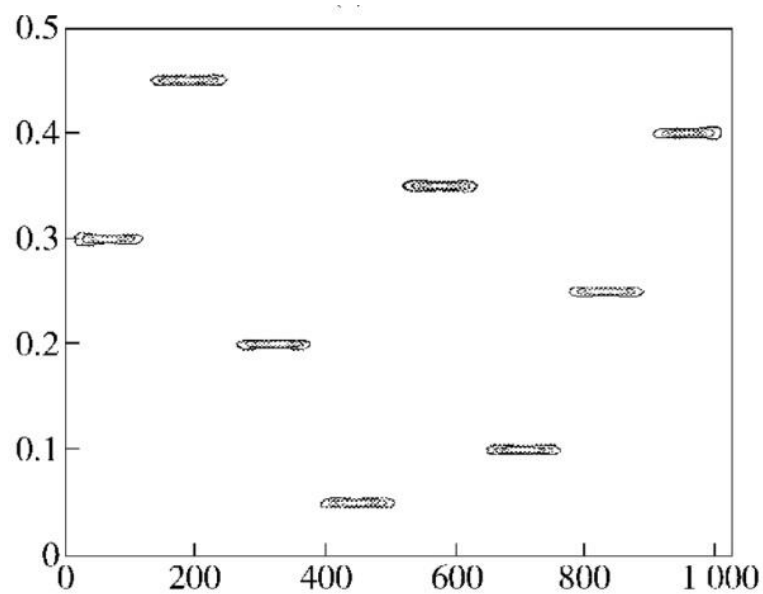


圖六為 frequency-hopping signals SPWVD，時頻的 window，長度分別為 63 和 31 個 sample points。由於時頻平滑作用，SPWVD 能抑制 frequency-hopping signals 的交叉項干擾，但是也降低了信號的時頻分辨率。



圖六

圖七為本文中基於信號分解的時頻分佈，由於信號的多個 component 被分解為單個 component，因而有效避免了交叉項干擾，且保留了 WVD 的高時頻分辨率。

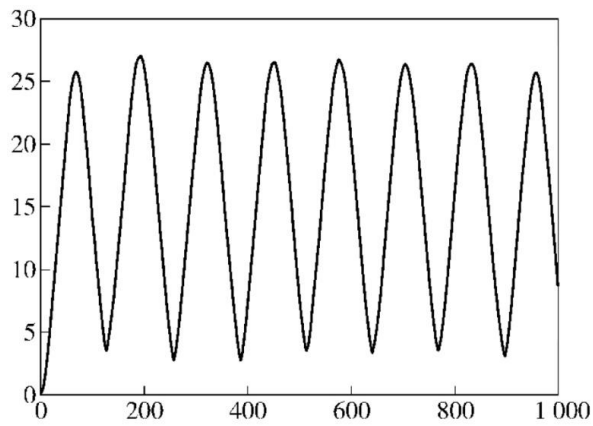


圖七

#### 四.參數與性能分析

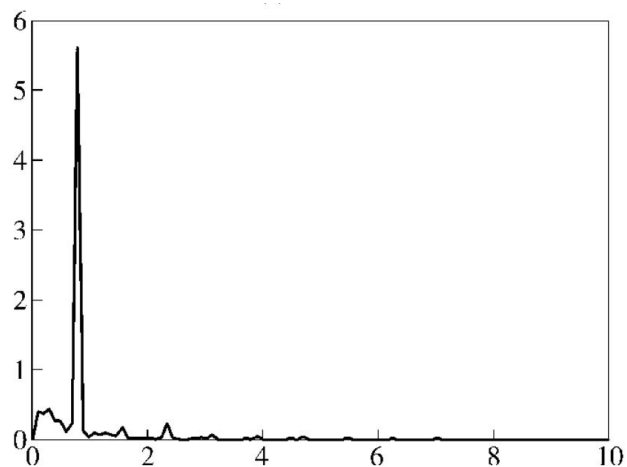
根據 frequency-hopping signals 的頻譜和時頻分佈，可進一步估計各項參數。跳頻頻率即 frequency-hopping signals 頻譜中的峰值頻率，因此跳頻頻率的估計就是對跳頻信號峰值頻率的估計。估計出跳頻頻率後，按上方信號分解步驟求得 frequency-hopping signals 的時頻分佈，觀察時頻譜圖可得，在每個完整跳頻週期的時間中心均存在一個峰值。

取時頻分佈在每一時刻沿頻率軸的最大值。得到如圖八所示的信號。該信號具有週期性，週期即為跳週期，頻率即為跳頻速率。



圖八

對此信號做 Fourier transform，得到如圖九所示的頻譜，圖中線譜對應的頻率即為跳頻速率，取其倒數即可得到跳週期。



圖九

## 五.結語

本篇探討基於 frequency-hopping signals 的特性，選用一較符合其特性的時頻分析方法，能有效消除 frequency-hopping signals 的 cross-term 干擾，同時保持較高的時頻分辨率。且應用新的時頻分布能在較低信噪比下估計各項跳頻參數，因此適用於跳頻信號的時頻分析。

## 六.參考資料

1.Frequency-hopping signals WIKI: [Frequency-hopping spread spectrum - Wikipedia](#)

2.一種基於時頻矩的跳頻參數估計算法:  
<http://html.rhhz.net/yykj/html/202001003.htm>

3.Parameter Estimation of Multi Frequency Hopping Signals Based on Space-Time-Frequency Distribution