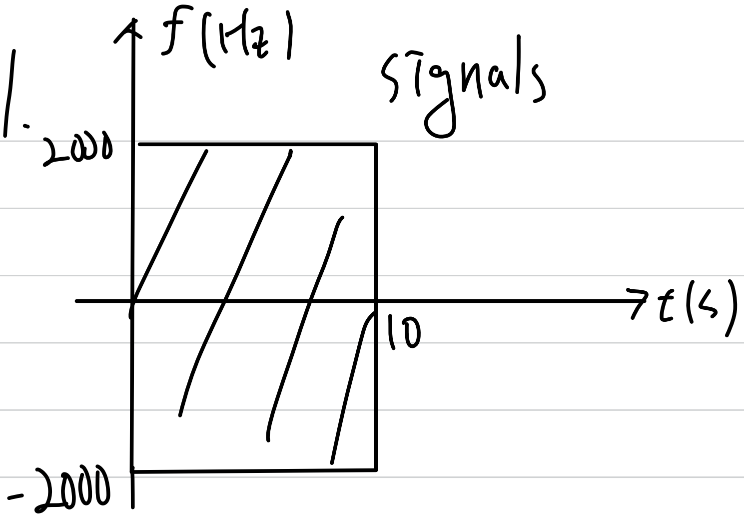
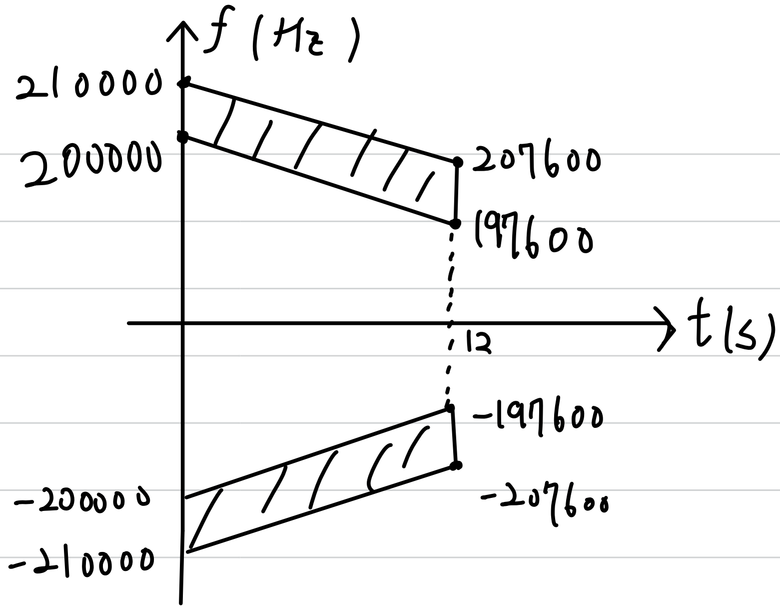
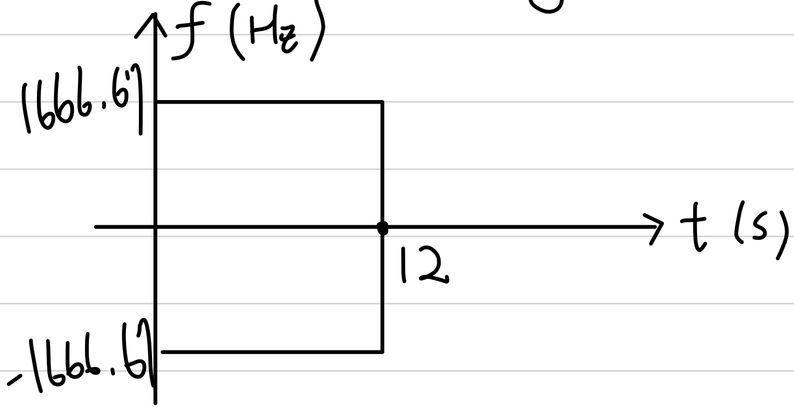
1.




① 先將 6 個 signals 做 scaling, $x(t) \xrightarrow[a=1.2]{} \frac{1}{\sqrt{a}} x(\frac{t}{a})$



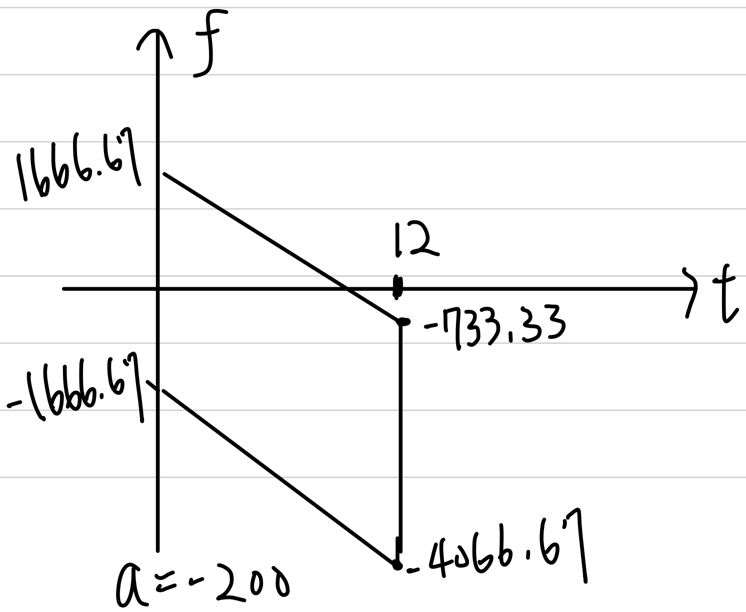

② 再對 6 個 signals 乘 chirp function 做 shearing

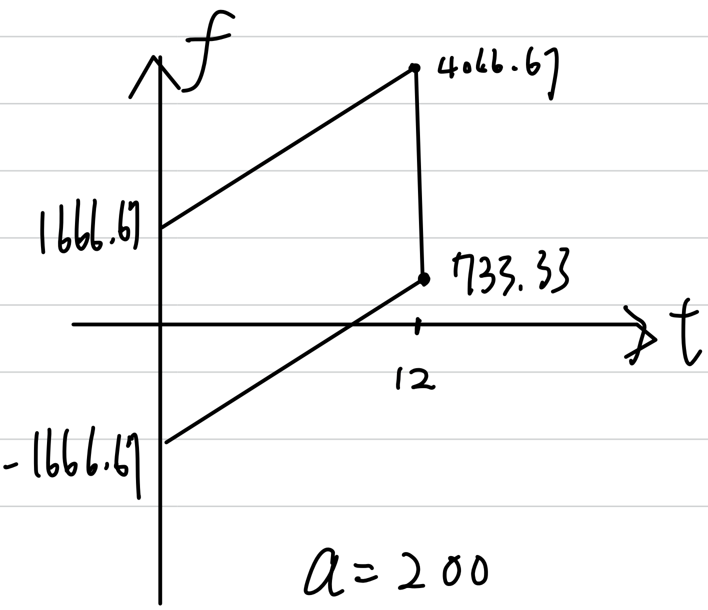
Chirp: $e^{j\pi a t^2}$      t, f-at.

-733.33 +200

24

前 3 個 a=-200, 後 3 個 a=200



③ 將6個 signals 做 modulation，在f軸 shift

乘 $e^{j2\pi f_0 t}$

前3個上步驟 $a=-200$ 的 signals，分別的

$f_0 = 208333.33,\ 205000,\ 201666.67$ (Hz)

後3個上步驟 $a=200$ 的 signals，分別的

$f_0 = -208333.33,\ -205000,\ -201666.67$ (Hz)

6個 signals 做完上述步驟即在 channel 上，

也不重疊，可順利傳輸

2. 已知 $x(t)$ 為 stationary random process，其 WDF 延著 t 軸為 constant

(i) 做 modulation 等同在 f 軸上做 shift，不改其 WDF 延著 t 軸為 constant，故此為 stationary random process

(ii) 乘 chirp 等同在時頻圖上延f軸做 shearing，可能會使 WDF 延 t 軸不為 constant，故此不是

(iii) 等同時頻圖上旋轉，若旋轉角度為 180° 的整數倍，則仍然是 stationary，若不是 180° 之整數倍，則不是 stationary

(iv) Frenel transform 等同對 chirp 做 convolution，在時頻圖上延著 t 軸做 shearing，因原 $x(t)$ 已是 stationary random process，延著 t 軸 shearing 不改變其延著 t 軸是 constant 特性，故此為 stationary random process

3.

(a) IMF 和 sinusoid function 相比，振幅和頻率不一定是固定，可以隨時間改變

(b)

(i) $f(t) = (2+\cos(10\pi t))\cos(2\pi t)$

$$= 2\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}\cos(12\pi t) + \frac{1}{2}\cos(8\pi t)$$

$$f'(t) = -4\pi\sin(2\pi t) - 6\pi\sin(12\pi t) - 4\pi\sin(8\pi t)$$

$$f''(t) = -8\pi^2\cos(2\pi t) - 72\pi^2\cos(12\pi t) - 32\pi^2\cos(8\pi t)$$

$t=\frac{1}{2}$

$$f(t) = -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$f'(t) = 0 - 0 - 0 = 0$$

$$f''(t) = 8\pi^2 - 72\pi^2 - 32\pi^2 < 0$$

在 $t=\frac{1}{2}$，$f'(t)=0$ 及 $f''(t)<0$ 表有 local maximum，但 $f(t)=-1$，並未滿足 local maximum 皆大於 0，故 $f(t)$ 非 IMF

(ii) $t^3$ 為連續，在任何 $t$ 皆有值，$\cos(t^3)$ 可視為 $\cos(t)$ 在 $t$ 軸上縮放，故 $\cos(t^3)$ 極大值皆為 1，極小值皆為 $-1$，因 $\cos(t^3)$ 為連續，由中間值定理可知，在極大值 1 和極大值 $-1$ 間，必存在一點使 $\cos(t^3)$ 為 0，故滿足第一個條件

$\cos(t^3)$ 極大值皆 1，極小值皆 $-1$，故上下封包平均為 0，滿足第二個條件

$\Rightarrow \cos(t^3)$ 是 IMF

4.

(a) modulation過程，常常有多個訊號，為了不產生 cross term，用 Gabor 較佳

(b) random process 定義即和 WDF 相關

$$E[W_x(t,f)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t+\tfrac{\tau}{2})x^*(t-\tfrac{\tau}{2})]e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

故用 WDF

(c) climate data 會隨時間變化，整體趨勢改變，有 trend 的資料適合用 HHT

(d) 在 Sampling 中有不同階段，在前面還有多個成份時使用 Gabor 來避免 cross term，後面階段只有單一成份時，使用 WDF 來使清晰度提高

5.

(a) 可以快速得到信號不同 scale 和不同位置的高頻成份，在影像處理中，高頻常常是指邊緣

(b) 已知

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N \otimes [1,1] \\ I_N \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

$H_{16}$ 的 $7^{th}$ row 為

$$\left[\, 0\cdot[1,1] \quad 0[1,1] \quad 0[1,1] \quad 0[1,1] \quad 1[1,1] \quad -1[1,1] \quad 0[1,1] \quad 0[1,1] \,\right]$$

$$= [\, 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \; 1 \; -1 \; -1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \,]$$

6.

(a) Vanish moment 可量測出信號是偏高頻還是低頻成份，可輔助選擇 mother wavelet，使其為高頻 function

(b)

$k=0$ , $\int_{-2}^{2}(1+at+bt^2)\,dt = \left[t+\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{3}bt^3\right]\Big|_{-2}^{2}$

$= 2+\cancel{2a}+\frac{8}{3}b+2-\cancel{2a}+\frac{8}{3}b$

$= 4+\frac{16}{3}b = 0$

$\underline{b=-\frac{3}{4}}$ #

$k=1$ , $\int_{-2}^{2}t(1+at+bt^2)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{4}bt^4\right]\Big|_{-2}^{2}$

$= \cancel{2}+\frac{8}{3}a+\cancel{4b}-\cancel{2}+\frac{8}{3}a-\cancel{4b}$

$0 = \frac{16}{3}a$

$\underline{a=0}$ #

代入最後一項驗證

$k=2$ , $\int_{-2}^{2}t^2(1+at+bt^2)\,dt = 2\int_{0}^{2}(t^2+bt^4)\,dt$

$= 2\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}bt^5\right]\Big|_{0}^{2} = 2\left[\frac{8}{3}+\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)\times 32\right]$

$= 2\left(\frac{8}{3}-\frac{24}{5}\right)$

$= -\frac{64}{15} \neq 0$

Extra:

若 $x(t)$ 是 stationary random process, 其 WDF 在時頻分佈上, 延著 $t$ 軸是常數, 延著 $f$ 軸不是常數