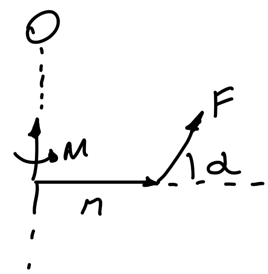
Momento de uma Força

- Rotação da força
- Torque da força

$M = F \cdot d$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$M = F\,sen(\alpha)$



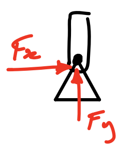
Equações de Equilíbrio

Para isso acontecer:

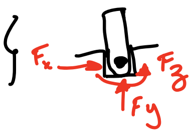
- A resultante de forças e de momento devem ser igual a zero

Roletes
Suporte Basculante
Superfície sem Atrito

Pino sem atrito/articulação
Superfície Rugosa

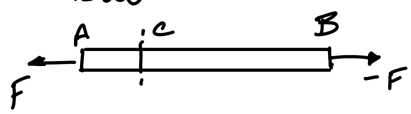


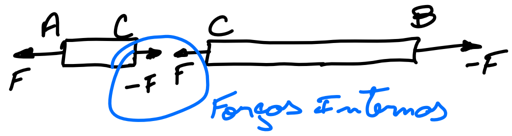
Engaste

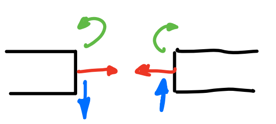


Forças Internas

- Conjunto de forças e momentos que atuam no interior do corpo e são necessárias para manter o corpo unido quando submetido a cargas externas







M - Momento fletor
V - Cortante
N - Normal

Força Normal (F) → É criada sempre que forças externas tendem a empurrar ou puxar as duas partes do corpo

Força Cortante (V) → É criada quando as cargas externas tendem a provocar o deslizamento das duas partes do corpo

Momento Fletor (M) → Provocado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo

Conceito de tensão / Tensão Normal

↳ A intensidade da força, ou força por unidade de área, que age paralelamente à seção de área A, é definida como tensão normal.

$$\sigma = \frac{|F|}{A}$$

Fator de Segurança

↳ Razão entre a tensão de ruptura e a tensão atuante no componente

$$F_s = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma}$$ } Quanto + perto do 1 mais crítico o objeto se encontra

Deformação Longitudinal

$$\epsilon = \frac{u}{L} \qquad \sigma = E\epsilon \qquad u = \frac{FL}{EA}$$

F: Força externa aplicada
L: comprimento da barra
A: Área da seção transversal da barra
E: Módulo de elasticidade longitudinal do material da barra

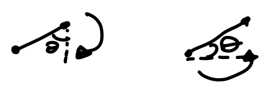
Métodos dos Elementos Finitos

- Determinação dos graus de liberdade
- Montagem da matriz de rigidez local e global
- Resolução das forças ($\{F\} = [K] \cdot \{u\}$)
- Determinação da deformação e tensão dos elementos

$c = \cos(\theta)$ $\quad L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$s = \text{sen}(\theta)$

θ → Depende do sentido adotado



$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

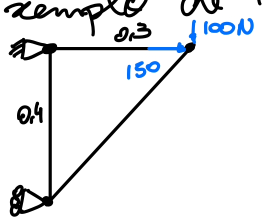
Deformação

$$\epsilon = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Tensão

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

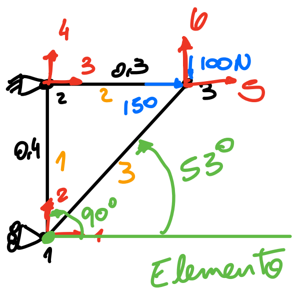
Exemplo de Resolução:



Módulo de elasticidade longitudinal: 210 GPa

Área da seção transversal: $A = 2 \cdot 10^{-4} m$

1. Definir a origem do sistema de referência e numerar nós, elementos, GDL



Como escolher o ângulo:

Escolhe um nó como origem e gira ele até o elemento a ser analisado

Elemento 2 paralelo, ou seja, 0°

2. Montar a matriz de rigidez de cada elemento

Exercício 1

OBS: Os senos (s) e cossenos (c), assim como o comprimento do elemento, devem ser calculados usando-se as coordenadas dos nós.

Informações dos nós		
Número do nó	x (m)	y (m)
1	0	0
2	0	0,4
3	0,3	0,4

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$s = \sin(\theta) = (y_2 - y_1)/L$$
$$c = \cos(\theta) = (x_2 - x_1)/L$$

Propriedades dos elementos										
Nº do Elemento	Incidência (nós que formam o elemento)	Área (m²)	Módulo de elasticidade (Pa)	c	s	L (m)	Numeração dos graus de liberdade			
1	1-2	2e-4	210 E9	0	1	0,4	1	2	3	4
2	2-3	2e-4	210 E9	1	0	0,3	3	4	5	6
3	3-1	2e-4	210 E9	-0,6	-0,8	0,5	5	6	1	2

OBS: A numeração dos graus de liberdade é arbitrária. No entanto, **é importante numerar sempre a direção x e depois a direção y, em cada nó.**

Insper

$$[k_e] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$k_2 = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

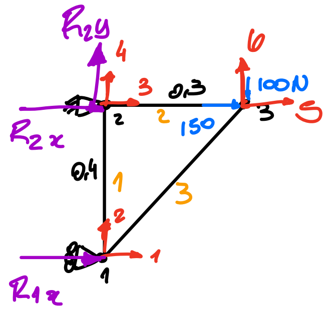
$$k_3 = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

3. Montar a matriz global

$$k_g = 10^8 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 & 0 & -0,3 & -0,4 \\ 0,4 & 1,59 & 0 & -1,05 & -0,4 & -0,54 \\ 0 & 0 & 1,4 & 0 & -1,4 & 0 \\ 0 & -1,05 & 0 & 1,05 & 0 & 0 \\ -0,3 & -0,4 & -1,4 & 0 & 1,7 & 0,4 \\ -0,4 & -0,54 & 0 & 0 & 0,4 & 0,54 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

4. Montar o vetor global de forças

$$P_G = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ 0 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 150 \\ -100 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



5. Aplicar as condições de contorno (eliminar linha e coluna do grau de liberdade com restrição

$$K_G = 10^8 \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & \quad 5 & \quad 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1,59 & -0,4 & -0,54 \\ -0,4 & 1,7 & 0,4 \\ -0,54 & 0,4 & 0,54 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad P_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \\ -100 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

6. Resolver o sistema de equação para a obtenção dos deslocamentos

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \\ -100 \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,59 & -0,4 & -0,54 \\ -0,4 & 1,7 & 0,4 \\ -0,54 & 0,4 & 0,54 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1,59 u_2 - 0,4 u_5 - 0,54 u_6) \cdot 10^8 = 0 \\ (-0,4 u_2 + 1,7 u_5 + 0,4 u_6) \cdot 10^8 = 150 \\ (-0,54 u_2 + 0,4 u_5 + 0,54 u_6) \cdot 10^8 = -100 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} u_2 = -9,52 \cdot 10^{-7} \\ u_5 = 1,60 \cdot 10^{-6} \\ u_6 = -4,00 \cdot 10^{-6} \end{matrix}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9,52 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \\ 1,6 \cdot 10^{-6} \\ -4,0 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

7. Determinar a tensão e a deformação em cada elemento

$$\epsilon = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad \sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

① $$\frac{1}{0,4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -9,52 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2,38 \cdot 10^{-6} \quad \frac{210 \cdot 10^9}{0,4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -9,52 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 5,0 \cdot 10^5$$

② $$\frac{1}{0,3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,6 \cdot 10^{-6} \\ -4,0 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = 5,36 \cdot 10^{-6} \quad \frac{210 \cdot 10^9}{0,3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,6 \cdot 10^{-6} \\ -4,0 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = 1,125 \cdot 10^6$$

③ $$\frac{1}{0,5} \begin{bmatrix} -0,6 & -0,8 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,6 \cdot 10^{-6} \\ -4,0 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ -9,52 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix} = -2,98 \cdot 10^{-6} \quad \frac{210 \cdot 10^9}{0,5} \begin{bmatrix} -0,6 & -0,8 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,6 \cdot 10^{-6} \\ -4,0 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ -9,52 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix} = -6,25 \cdot 10^5$$

8. Determinar as reações de apoio nos nós com restrição

$$10^8 \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}59 & 0 & -1{,}05 & -0{,}4 & -0{,}54 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 0 & -1{,}4 & 0 \\ 0 & -1{,}05 & 0 & 1{,}05 & 0 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & -1{,}4 & 0 & 1{,}7 & 0{,}4 \\ -0{,}4 & -0{,}54 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}54 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -9{,}52 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}6 \cdot 10^{-6} \\ -4{,}0 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 0 \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ 150 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

$R_{1x} = 75\,N \qquad R_{2x} = -225\,N \qquad R_{2y} = 100\,N$

Método Iterativo para Solução de Sistemas de Equações

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

A partir disso assumimos que os valores do x's são 0 e ficamos iterando até chegarmos em um valor estável

Estabilidade de Elemento Estrutural

↳ Capacidade de um elemento suportar uma dada carga sem apresentar mudança brusca

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \qquad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

Como saber se é tração ou compressão

Se o valor for negativo é compressão

Se o valor for positivo é tração