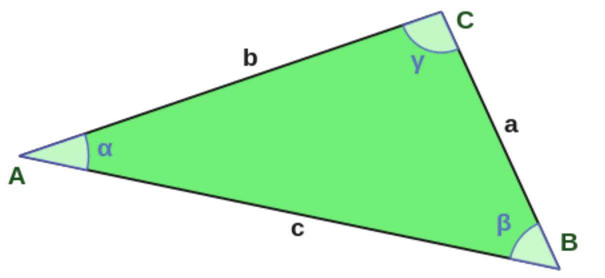
WIKIPEDIA

Dreieck

Ein **Dreieck** (veraltet auch Triangel[1], lateinisch: triangulum) ist ein Polygon und eine geometrische Figur. Es handelt sich innerhalb der euklidischen Geometrie um die einfachste Figur in der Ebene, die von geraden Linien begrenzt wird. Seine Begrenzungslinien bezeichnet man als *Seiten*. In seinem Inneren spannen sich drei Winkel, die sogenannten Innenwinkel auf. Die Scheitel dieser Winkel bezeichnet man als *Eckpunkte* des Dreiecks. Auch eine Verallgemeinerung des Dreiecksbegriffes auf nichteuklidische Geometrien ist möglich; in diesem Fall müssen die Begrenzungslinien Geodäten sein.

In der Trigonometrie, einem Teilgebiet der Mathematik, spielen Dreiecke die wesentliche Rolle. Siehe dazu insbesondere Dreiecksgeometrie.



allgemeines Dreieck

Inhaltsverzeichnis

Einteilung

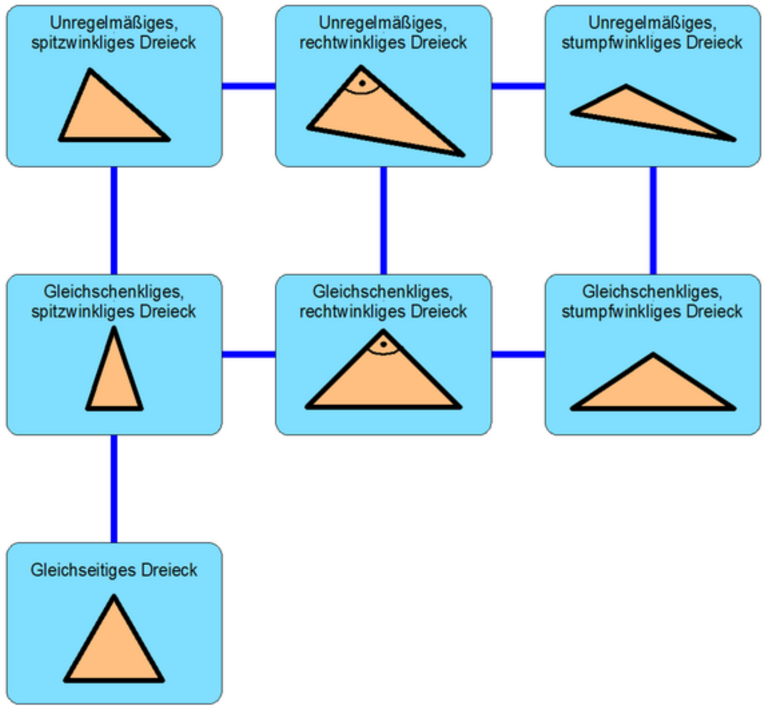
Nach Seitenlängen

- Unregelmäßiges Dreieck
- Gleichschenkliges Dreieck
- Gleichseitiges Dreieck

Nach Winkeln

- Spitzwinkliges Dreieck
- Rechtwinkliges Dreieck
- Stumpfwinkliges Dreieck

Spitz- und stumpfwinklige Dreiecke werden auch unter dem Namen *schiefwinkliges Dreieck* zusammengefasst.



Einteilung der Dreiecke

Das allgemeine (beliebige) Dreieck

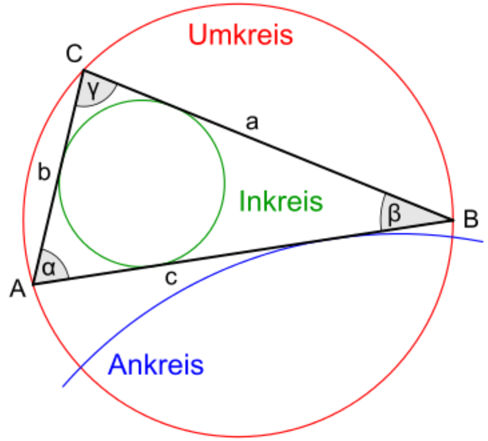
Definition und Eigenschaften

Ein Dreieck wird durch drei Punkte definiert, die nicht auf einer Geraden liegen. Sie werden *Ecken* des Dreiecks genannt. Die Verbindungsstrecken zwischen je zwei Ecken heißen *Seiten* des Dreiecks. Das Dreieck unterteilt die Ebene in zwei Bereiche, das *Äußere* und das *Innere* des Dreiecks. Der von je zwei an einem Eckpunkt zusammentreffenden Seiten gebildete Winkel ist eine wichtige Größe zur Charakterisierung des Dreiecks.

In der Geometrie werden die Eckpunkte des Dreiecks in der Regel mit A, B und C bezeichnet, üblicherweise so wie abgebildet, gegen den Uhrzeigersinn. Die Seite, die einer Ecke gegenüberliegt, wird analog a, b bzw. c genannt. Damit liegt z. B. die Seite a dem Eckpunkt A gegenüber, verbindet also die Punkte B und C. Häufig wird mit a, b und c auch stattdessen die Länge der jeweiligen Seite BC, CA oder AB bezeichnet. Die Winkel werden α, β und γ genannt; α ist der Winkel am Eckpunkt A, β liegt am Eckpunkt B und γ liegt am Eckpunkt C

- Die Summe der Innenwinkel in einem planaren (ebenen) Dreieck beträgt immer 180°.
- Die Summe der Außenwinkel beträgt entsprechend 360°. Dabei wird für jeden Eckpunkt nur ein Außenwinkel in die Summe aufgenommen. Da es sich bei den beiden Außenwinkeln eines Eckpunktes um Scheitelwinkel handelt, sind diese immer gleich groß. Die Summe *aller* Außenwinkel beträgt demnach genau genommen 2 · 360° = 720°.
- Die Gesamtlänge zweier Seiten eines Dreiecks ist immer größer als die Länge der dritten Seite. Diese Beziehungen lassen sich in der so genannten Dreiecksungleichung ausdrücken.

Diese intuitiv einsichtigen Eigenschaften ebener Dreiecke folgen aus den Axiomen der euklidischen Geometrie.



Dreieck mit seinen Ecken, Seiten und Winkeln sowie Umkreis, Inkreis und Teil eines Ankreises in der üblichen Form beschriftet

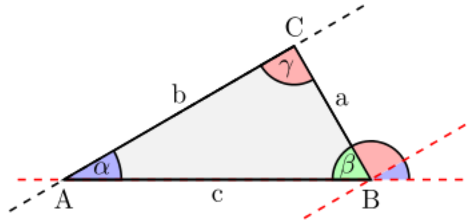
Ausgezeichnete Kreise, Geraden und Punkte

→ *Hauptartikel: Kreise am Dreieck und Ausgezeichnete Punkte im Dreieck*

Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis, das heißt einen Kreis, der durch seine drei Eckpunkte verläuft. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten; das sind die Lotgeraden durch die Mittelpunkte der Seiten.

Die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel schneiden sich ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt, nämlich im Mittelpunkt des Inkreises. Dieser berührt die drei Seiten von innen. Die drei Kreise, die jeweils eine Seite von außen und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren, heißen Ankreise des Dreiecks.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der gemeinsame Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, also der jeweiligen Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Der Schwerpunkt teilt dabei die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.



Die Summe der Innenwinkel in einem planaren (ebenen) Dreieck beträgt immer 180°.

Auch die drei Höhen, also die Lote der Eckpunkte auf die jeweils gegenüberliegende Seite, schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Höhenschnittpunkt. Mit Hilfe der Höhen kann der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden (siehe Dreiecksfläche).

Ein weiterer bekannter Kreis am Dreieck ist der Feuerbachkreis. Er wird auch *Neunpunktekreis* genannt, da er durch die drei Seitenmittelpunkte, die drei Fußpunkte der Höhen und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte verläuft. Sein Mittelpunkt liegt wie der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt auf der eulerschen Geraden.

Berechnung eines beliebigen Dreiecks

Ein Dreieck besitzt drei Seiten und drei Innenwinkel. Liegen drei Angaben zur Größe dieser Seiten oder Winkel vor, kann man daraus die jeweils fehlenden übrigen Seiten oder Winkel berechnen, es sei denn es sind nur die drei Winkel gegeben.

Je nachdem, welche Kombination bekannter Seiten und/oder Winkel dabei im Einzelnen gegeben ist, ist das Ergebnis entweder ein- oder mehrdeutig (siehe nebenstehende Abb.).

So liefern die Kongruenzsätze zunächst einmal drei stets eindeutig lösbare Konstellationen, die man symbolisch mit *SSS*, *SWS* und *WSW* bezeichnet, wobei *S* für eine bekannte Seite und *W* für einen bekannten Winkel steht.

SSW- oder WSS-Fall

Der *SSW- oder WSS-Fall* dagegen ist nur dann eindeutig, wenn der bekannte Winkel der *größeren* der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt (SsW-Fall) – liegt er der *kleineren* Seite gegenüber (sSW-Fall), gibt es meist zwei verschiedene Dreiecke, die die Ausgangsbedingungen erfüllen. Dies allerdings muss nicht immer so sein, wie der Sonderfall mit dem Seitenverhältnis 1 : 2 und dem Winkel 30° zeigt, bei dem es genau dann gleichwohl nur ein so bestimmtes Dreieck gibt, wenn der Winkel gegenüber der *längeren* Seite 90° beträgt. Zu erwähnen ist schließlich die rein rechnerisch mögliche Situation, dass gar kein Dreieck die Ausgangsbedingungen erfüllt, nämlich dann, wenn sich für den Sinus des der *längeren* Seite gegenüberliegenden Winkels ein Wert > 1 ergibt (bei real existierenden Dreiecken allerdings ist dieser Fall naturgemäß ausgeschlossen).

WWS- oder SWW-Fall

Der *WWS- oder SWW-Fall* kann (wie nebenstehender Abbildung zu entnehmen) auf zweierlei Weise gelöst werden: Entweder man berechnet mittels des Sinussatzes zunächst einmal eine der beiden noch fehlenden Seiten und rechnet dann weiter wie im *SSW-Fall*, oder aber man bestimmt, was wesentlich bequemer ist, mittels der Winkelsumme im Dreieck den noch fehlenden dritten Winkel und verfährt dann weiter wie im *WSW-Fall*.

SSS-Fall

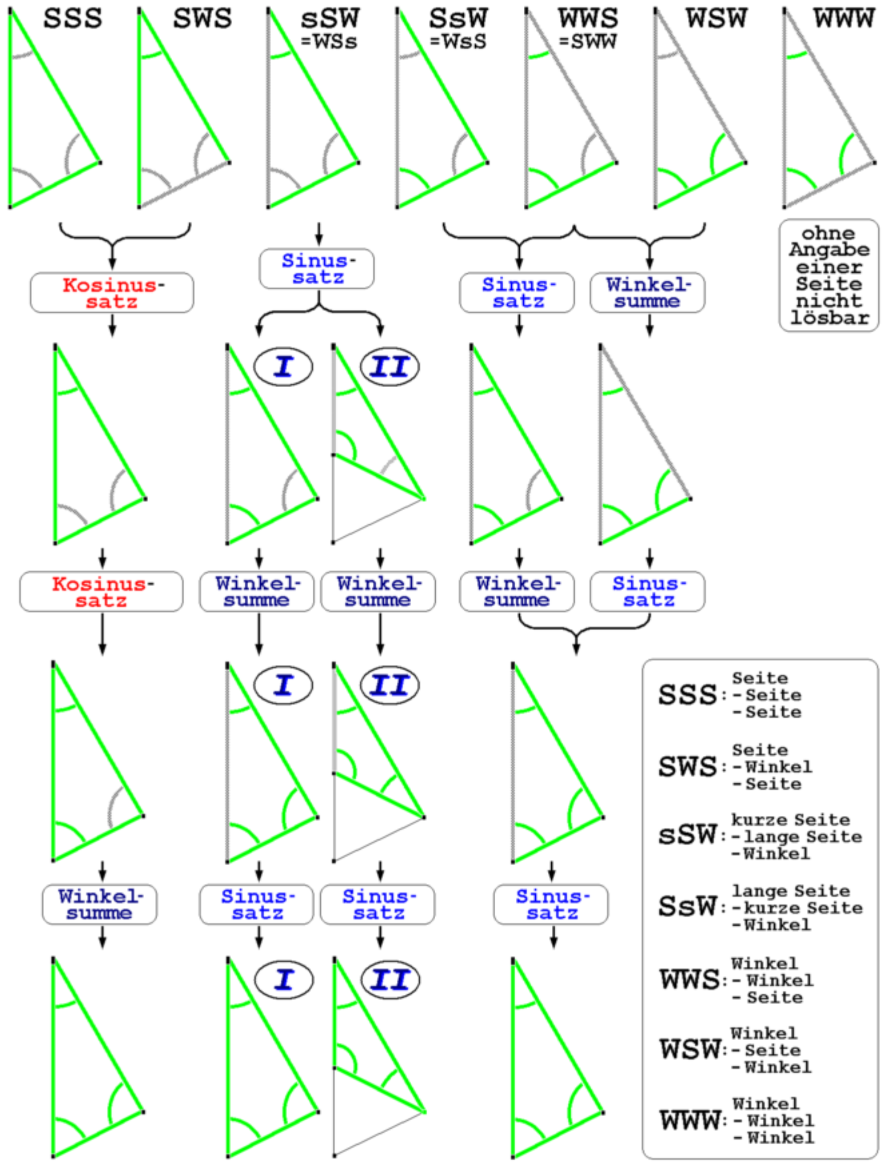
Wenn die größte der drei Seiten kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten ist, dann ist das Dreieck (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt. Ansonsten gibt es kein Dreieck mit den vorgegebenen drei Seiten. Die Innenwinkel des Dreiecks lassen sich z. B. mit dem Kosinussatz berechnen.

WWW-Fall

Der *WWW-Fall* ist bei ebenen Dreiecken überhaupt nicht eindeutig lösbar, weil in diesem Fall in Wirklichkeit nur zwei voneinander unabhängige Angaben vorliegen, die Größe des dritten Winkels dagegen stets zwangsläufig aus der Größe der beiden anderen resultiert. Ohne eine gegebene Seite ist zwar die *Form* des gesuchten Dreiecks gegeben, seine *Größe* aber bleibt unbestimmt.

Sinussatz und Kosinussatz

Die wichtigsten Werkzeuge für die Berechnung eines beliebigen Dreiecks sind neben der Winkelsumme im Dreieck der Sinus- und der Kosinussatz, denen gegenüber die weiteren Dreieckssätze wie der Projektionssatz und Tangentensatz sowie die Halbwinkelsätze nur eine untergeordnete Rolle spielen.



Übersicht über die Rechenwege und zu benutzenden Werkzeuge bei der Berechnung eines beliebigen Dreiecks

Das rechenaufwändigste, aber auch leistungsfähigste der drei Werkzeuge ist dabei der Kosinussatz, da man mit ihm als einzigem für ein Dreieck ohne alle Winkelangaben einen ersten Winkel berechnen (und sich anschließend mit dem einfacheren Sinussatz sowie der Winkelsumme im Dreieck weiterhelfen) kann. Dementsprechend verwendet man den Kosinussatz im hier diskutierten Zusammenhang nur zu Beginn der Berechnung eines Dreiecks vom Typ *SSS* oder *SWS*, während alles übrige einfacher und schneller per Sinussatz und Winkelsumme erledigt wird.

Wie nachfolgend zu sehen, beginnt der Kosinussatz genauso wie der Satz des Pythagoras, und in der Tat kann man diesen als einen Sonderfall des Kosinussatzes auffassen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$

Wird nämlich der von zwei gegebenen Seiten eines Dreiecks eingeschlossene Winkel ein rechter, wird damit sein Kosinus gleich Null, und was dann von dem betreffenden Kosinussatz übrigbleibt, ist nichts anderes als eine weitere Version des „Pythagoras".

Kennt man von einem Dreieck nur seine drei Seiten a, b und c, lassen sich seine Innenwinkel unter Zuhilfenahme der Arkuskosinusfunktion (arccos) wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right), \end{aligned}$$

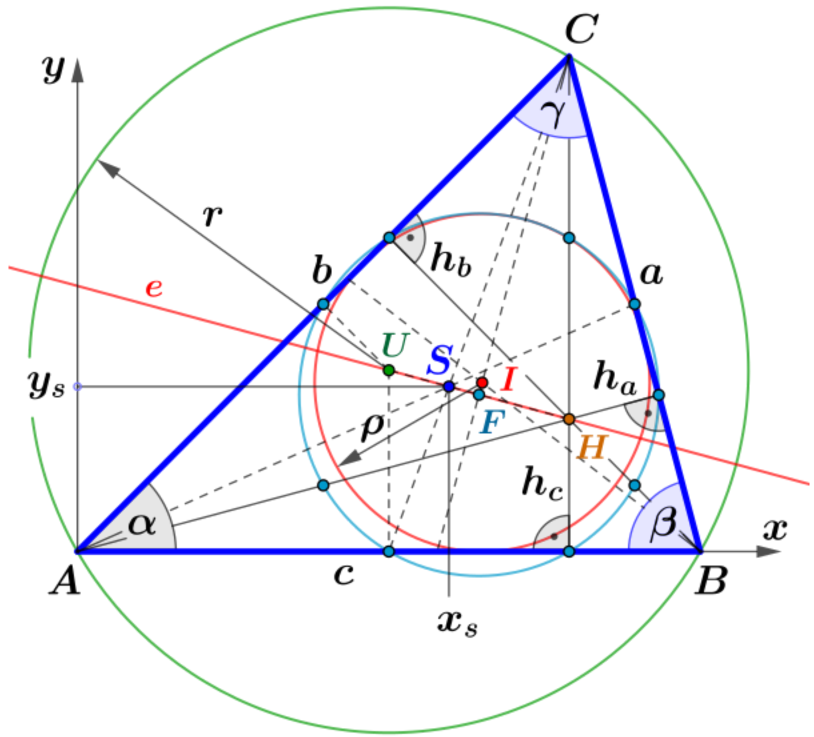
$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right). \end{aligned}$$

Den Sinussatz gibt es in drei Varianten, die sich wie folgt zusammenfassen lassen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \text{ [= Umkreisdurchmesser]}$$

Wie zu sehen, ist der Sinussatz rechnerisch wesentlich unkomplizierter: Kennt man einen der drei Brüche, kennt man damit automatisch auch alle übrigen. Dafür allerdings muss hier stets wenigstens einer der drei Innenwinkel schon bekannt sein, und, wenn nicht, zunächst einmal auf den Kosinussatz zurückgegriffen werden (s. o.).

Umkreisradius:	$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$
Umfang (Dreieck):	$u = 8r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = a + b + c$
Inkreisradius:	$\rho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2A}{u}$
Höhenformeln:	$h_a = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$
	$h_b = a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha$
	$h_c = b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$
Höhe aus Seitenlängen:	$h_a = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}/(2a)$
	$h_b = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}/(2b)$
	$h_c = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}/(2c)$
Flächeninhalt: (s. a. Dreiecksfläche)	$A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
	$16A^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$
	$16A^2 = 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2$
	Heronsche Flächenformel: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ wobei $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{u}{2}$ ist
Flächenschwerpunkt:	$x_s = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$
	$y_s = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

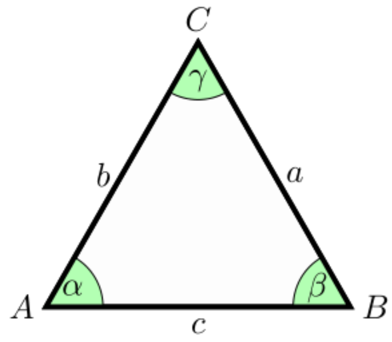


Dreieck mit den *Größen* der nebenstehenden Tabelle, den *ausgezeichneten Punkten* *Umkreismittelpunkt* U (grün), *Inkreismittelpunkt* I (rot), *Flächenschwerpunkt* S (dunkelblau), *Höhenschnittpunkt* H (hellbraun), der *Euler-Geraden* e (rot) und dem *Feuerbachkreis* mit Mittelpunkt F und dessen (nicht bezeichneten) *neun Punkten* (hellblau).

Spezielle Dreiecke

Gleichseitige Dreiecke

→ *Hauptartikel: Gleichseitiges Dreieck*



Ein gleichseitiges Dreieck.
Es gilt: $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma$

Eigenschaften

Ein Dreieck, bei dem alle drei Seiten gleich lang sind, wird gleichseitiges Dreieck genannt. Alle drei Innenwinkel sind gleich groß und betragen folglich 60° (es ist folglich ein spitzwinkliges Dreieck). Damit gehören die gleichseitigen Dreiecke zu den regelmäßigen Polygonen.

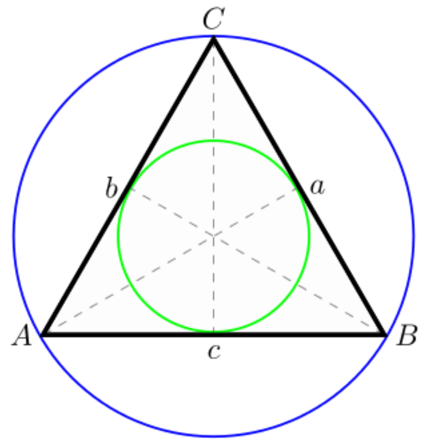
Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich und genau dann kongruent, wenn ihre Seitenlängen gleich sind. Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende und Höhe zu einer Seite sowie Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Winkels fallen bei einem gleichseitigen Dreieck jeweils aufeinander. Entsprechendes gilt für den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt, den Schwerpunkt und den Höhenschnittpunkt des gleichseitigen Dreiecks, sodass dieser Punkt häufig einfach *Mittelpunkt* genannt wird.

Formeln

Für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a gilt:

Fläche	$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
Höhe	$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r_u + r_i$
Umkreisradius	$r_u = \frac{a}{3}\sqrt{3}$
Inkreisradius	$r_i = \frac{a}{6}\sqrt{3}$
Umfang	$u = 3a$

Beweis siehe Weblinks unten.



Gleichseitiges Dreieck mit
Umkreis und Inkreis

Gleichschenklige Dreiecke

→ *Hauptartikel: Gleichschenkliges Dreieck*

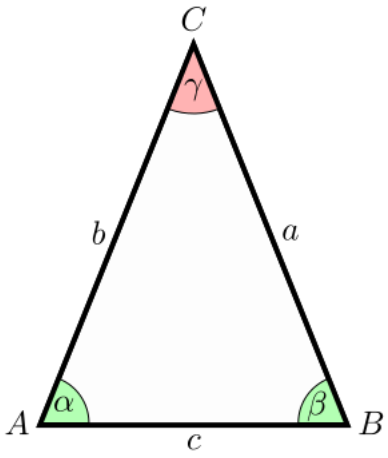
Ein gleichschenkliges Dreieck ist nach moderner Auffassung ein Dreieck, bei dem *mindestens* zwei Seiten gleich lang sind. Diese Seiten werden als *Schenkel* bezeichnet, die dritte Seite heißt *Basis* des gleichschenkligen Dreiecks. Die beiden Winkel an der Basis (*Basiswinkel*) sind gleich groß. Der Punkt, an dem beide *Schenkel* zusammentreffen, wird *Spitze* genannt, der dortige Winkel ist der *Winkel an der Spitze*.

Bei einem Geodreieck handelt es sich um ein Lineal in Form eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks.

In einem gleichschenkligen Dreieck fallen die Mittelsenkrechte der Basis, die Seitenhalbierende der Basis und die Höhe auf der Basis sowie die Winkelhalbierende des Spitzenwinkels aufeinander. Man kann die Länge dieser Strecke, also insbesondere die Höhe h_c, bestimmen, indem man den Satz des Pythagoras auf eine Hälfte des Dreiecks anwendet. Es ergibt sich $h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$.

Rechtwinklige Dreiecke

→ *Hauptartikel: Rechtwinkliges Dreieck*

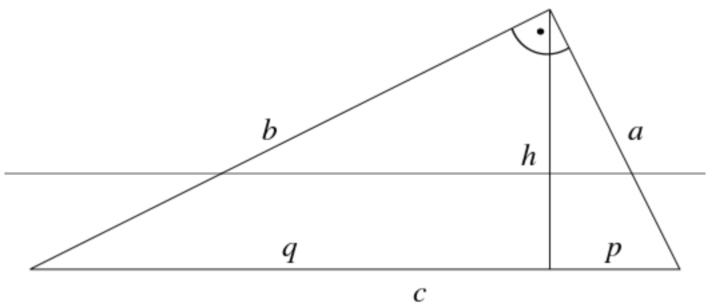


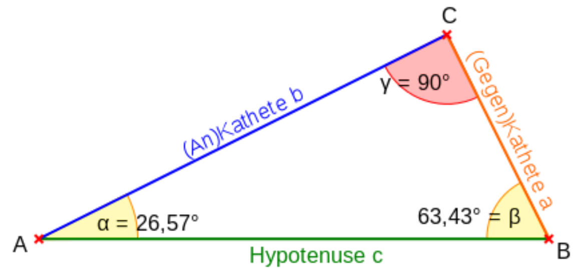
Ein gleichschenkliges Dreieck.
Es gilt: $a = b$ und $\alpha = \beta$

Ein rechtwinkliges Dreieck ist ein Dreieck, das einen 90°-Winkel, also einen rechten Winkel besitzt. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die längste Seite des Dreiecks und wird *Hypotenuse* genannt. Die beiden anderen Seiten heißen *Katheten*. In Bezug auf einen der spitzen Winkel des Dreiecks bezeichnet man die dem Winkel anliegende Kathete als *Ankathete* und die dem Winkel gegenüberliegende Kathete als *Gegenkathete*.

Die Längen der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden durch den Satz des Pythagoras in Beziehung gebracht: Das Quadrat der Länge der Hypotenuse (in der Grafik als c bezeichnet) ist gleich der Summe der Quadrate der Längen der Katheten (a und b). Umgekehrt ist ein Dreieck, bei dem die Seitenlängen in der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ zueinander stehen, ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c.

Die Höhe $h = h_c$ eines rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypotenuse in zwei Teile p und q, sodass die beiden Teildreiecke mit den Seiten p, a, h und q, h, b wiederum rechtwinklig sind. Bei Kenntnis zweier der sechs Angaben (a, b, c, p, q und h) lassen sich die fehlenden vier anderen Werte aus den in folgender Tabelle aufgeführten Formeln berechnen.

Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2$	
Kathetensatz von Euklid	$a^2 = c \cdot p$	
	$b^2 = c \cdot q$	
Höhensatz von Euklid	$h^2 = p \cdot q$	



Rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt C

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Durch das Verhältnis zwischen Katheten und Hypotenuse lassen sich auch die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks eindeutig bestimmen. Die folgenden sechs Funktionen werden *Winkelfunktionen* oder trigonometrische Funktionen genannt.

→ *Hauptartikel: Trigonometrische Funktion*

Funktion	Berechnung
Der Sinus des Winkels α ist dabei als das Verhältnis zwischen der Gegenkathete (hier: a) und der Hypotenuse (hier: c) definiert.	$\sin\alpha = \frac{GK}{HYP} = \frac{a}{c}$
Der Kosinus des Winkels α ist das Verhältnis zwischen der Ankathete (hier: b) und der Hypotenuse (hier: c).	$\cos\alpha = \frac{AK}{HYP} = \frac{b}{c}$
Der Tangens ist durch das Verhältnis zwischen Gegenkathete und Ankathete gegeben.	$\tan\alpha = \frac{GK}{AK} = \frac{a}{b}$

Aus den obigen können die folgenden durch Kehrwertbildung dargestellt werden.

Funktion	Berechnung
Der Kotangens ist das Verhältnis zwischen Ankathete und Gegenkathete, also der Kehrwert des Tangens.	$\cot\alpha = \frac{AK}{GK} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$
Der Sekans ist das Verhältnis der Hypotenuse zur Ankathete, also der Kehrwert des Kosinus.	$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$
Der Kosekans ist das Verhältnis der Hypotenuse zur Gegenkathete, also der Kehrwert des Sinus.	$\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$

Die Umkehrfunktionen der genannten Winkelfunktionen werden Arkussinus, Arkuskosinus, Arkustangens usw. genannt – ihre Hauptanwendung ist es dementsprechend, zu gegebenen Sinus-, Kosinus- oder Tangenswerten die dazugehörigen Winkel zu liefern.

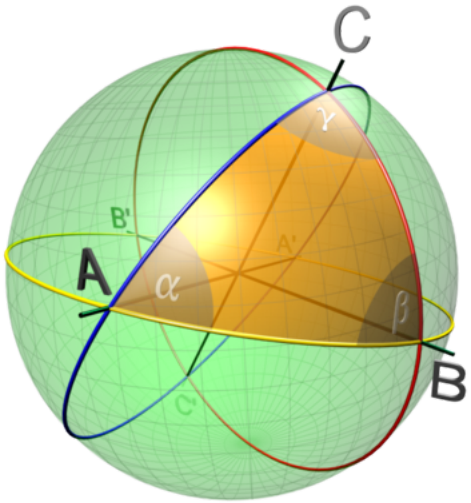
Unregelmäßige Dreiecke

- Alle drei Seiten sind unterschiedlich lang.
- Alle drei Winkel sind unterschiedlich groß.

Dreiecke der nichteuklidischen Geometrie

Sphärische Dreiecke

→ *Hauptartikel: Kugeldreieck*



Sphärisches Dreieck (Kugeldreieck)

Dreiecke auf einer Kugel, deren drei Seiten Teile von Großkreisen sind, nennt man sphärische Dreiecke oder Kugeldreiecke. Ihre Seitenlängen werden nicht in der Dimension einer Länge angegeben (Meter, Zentimeter o. ä.), sondern als zugehöriger Winkel im Kugelmittelpunkt.

Ein sphärisches Dreieck hat eine Winkelsumme größer als 180°. Der „Überschuss“ wird sphärischer Exzess genannt und in Formeln meist mit ε bezeichnet:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon.$$

Der maximale Exzess von 360° tritt bei einem „Dreieck“ mit drei auf 180° gestreckten Winkeln auf. Dieses zum Großkreis entartete Dreieck hat die Winkelsumme 540° (drei mal 180°) und $\varepsilon = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

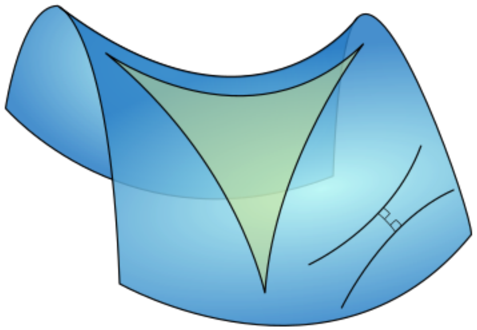
Der Exzess hängt direkt mit dem Flächeninhalt F des Dreiecks zusammen:

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2}\text{, bzw. in Grad } \varepsilon = \frac{180^\circ F}{\pi R^2},$$

wobei R den Kugelradius und π die Kreiszahl 3,14159… bedeutet.

Sphärische Dreiecke können analog den ebenen Dreiecken berechnet werden, wofür es in der Geodäsie z. B. den sphärischen Sinussatz, den Kosinussatz, den Projektionssatz und verschiedene Halbwinkelsätze gibt – siehe Sphärische Trigonometrie.

Hyperbolische Dreiecke



Sattelfläche und geodätisches Dreieck

Zur nichteuklidischen Geometrie – in der das Parallelenaxiom nicht gilt – zählen auch Dreiecke auf einer Sattelfläche. Während eine Kugel überall konvex gekrümmt ist, haben Sattel- und andere hyperbolische Flächen sowohl konvexe als auch konkave Krümmung (ihr Produkt, das Krümmungsmaß, ist *negativ*).

Entsprechend ist auch der Exzess negativ – d. h. die Winkelsumme eines Dreiecks auf einer Sattelfläche ist *kleiner* als 180°. Die Kongruenzsätze machen Aussagen über die Dreiecksgrößen (Seitenlänge, Winkel), die notwendig sind, um ein Dreieck eindeutig zu bestimmen.

Sätze rund um das Dreieck

- Ähnlichkeitssätze
- Kongruenzsätze
- Satz des Pythagoras
- Satz des Heron
- Satz des Thales
- Satz von Stewart
- Satz von Routh
- Kreise am Dreieck: Umkreis, Inkreis, Ankreise, Feuerbachkreis
- Eulersche Gerade
- Simsonsche Gerade
- Symmedianen und Lemoinepunkt
- Fermat-Punkt
- Höhenfußpunktdreieck
- Morley-Dreieck
- Napoleon-Dreieck und Napoleon-Punkt
- Ungleichung von Pedoe
- Formelsammlung Trigonometrie

Dreieck als Symbol

→ *Hauptartikel: Dreieck (Symbol)*

Das Dreieck wird als Symbol verwendet, zum Beispiel in der Theologie, als ideologisches Symbol, als mathematisches Symbol und auch in Schildern.

Siehe auch

- Stützdreieck – Hilfsdreieck zur Bestimmung einer wahren Länge in der Darstellenden Geometrie
- Pascalsches Dreieck – Zahlenpyramide aus Binomialkoeffizienten
- Penrose-Dreieck („*Tribar*“) – eine optische Täuschung
- Reuleaux-Dreieck – einfachstes nicht triviales Beispiel eines Gleichdicks
- Sierpiński-Dreieck – ein Fraktal
- Kobon-Dreiecke – aus sich schneidenden Geraden
- Charakteristisches Dreieck der Differentialrechnung
- Triangulation, Trilateration – Verfahren zur Positionsbestimmung
- Baryzentrische Koordinaten: Baryzentrische Koordinaten in der Dreiecksgeometrie

Literatur

- Max Koecher, Aloys Krieg: *Ebene Geometrie*. 3. Auflage. Springer, Berlin 2007, ISBN 978-3-540-49327-3, S. 71–91, 108–135, 143–197.
- Joseph von Radowitz: *Die Formeln der Geometrie und Trigonometrie*. Ferdinand Dümmler, Berlin 1827 (eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=afU2AAAAMAAJ) in der Google-Buchsuche).

Weblinks

- **Wikiquote: Dreieck** – Zitate
- **Commons: Triangles (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Triangles?uselang=de)** – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien
- **Wiktionary: Dreieck** – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen
- **Wikibooks: Mathematik: Schulmathematik: Trigonometrie** – Lern- und Lehrmaterialien
- **Wikibooks: Dreieckkonstruktion** – Lern- und Lehrmaterialien
- Eric W. Weisstein: *Triangle*. (http://mathworld.wolfram.com/Triangle.html) In: *MathWorld* (englisch).

Einzelnachweise

1. Autorenkollektiv: *Meyers Konversationslexikon*. 4. Auflage. Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig und Wien. Retrobibliothek (http://www.retrobibliothek.de/retrobib/seite.html?id=104523)