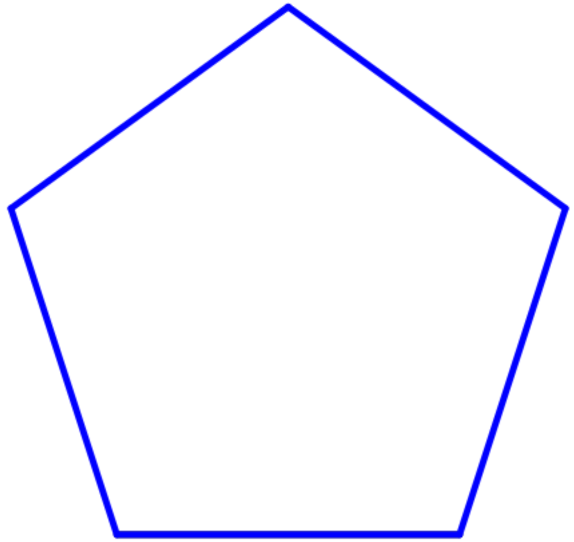
# Fünfeck

Ein **Fünfeck,** auch **Pentagon** (von altgriechisch πεντάγωνον *pentágōnon* „Fünfeck"), ist eine geometrische Figur. Es gehört zur Gruppe der Vielecke (Polygone) und ist durch fünf Punkte definiert.



Regelmäßiges Fünfeck

## Inhaltsverzeichnis



## Einteilung

Fünfecke können, wie alle Polygone, welche keine Dreiecke sind, unterteilt werden in:

- überschlagenes Fünfeck: Mindestens zwei Seiten schneiden einander.
- konkaves Fünfeck: mindestens ein Innenwinkel ist größer als 180°. Ein Fünfeck kann maximal zwei derartige Winkel haben.

- konvexes Fünfeck: alle Innenwinkel sind kleiner als 180°
- Sehnenfünfeck: alle Ecken liegen auf einem gemeinsamen Umkreis.
- regelmäßiges Fünfeck: Alle Seiten sind gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß. Regelmäßige Fünfecke können konvex oder überschlagen sein.

# Allgemeines Fünfeck

## Winkel

Die Summe der Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt 540°, also 3 mal 180°, und ergibt sich aus einer allgemeinen Formel für Polygone, in der für die Variable $n$ die Anzahl der Eckpunkte des Polygons eingesetzt werden muss (in diesem Fall $n = 5$):

$$\sum \alpha = (n-2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

## Fläche

Ein ebenes Fünfeck besitzt einen eindeutig bestimmbaren Flächeninhalt, welcher sich stets durch Zerlegen in Dreiecke berechnen lässt.

# Regelmäßiges Fünfeck

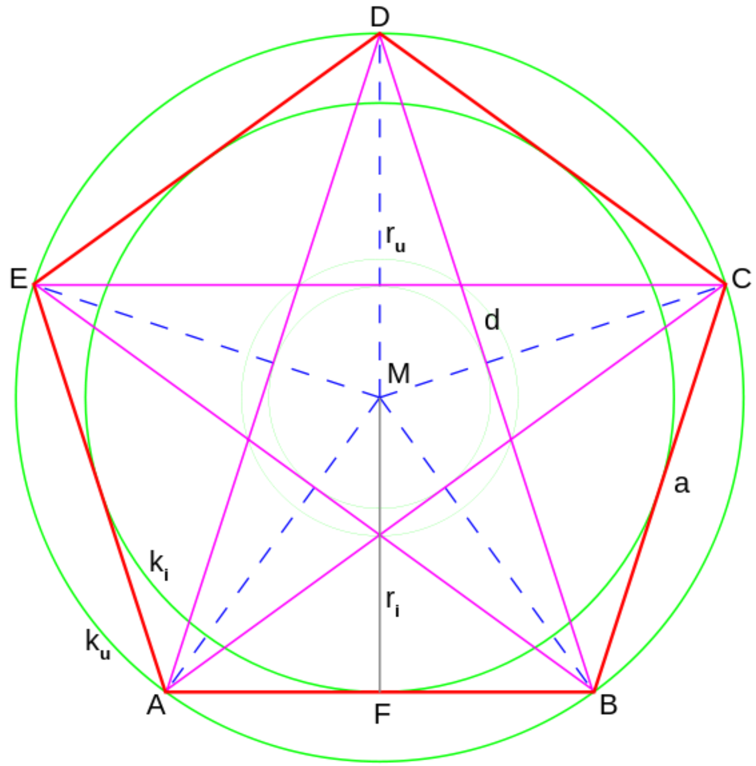
Größen eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge *a*

| | |
|---|---|
| **Umkreisradius** | $r_u = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} \approx a \cdot 0{,}8507$ |
| **Inkreisradius** | $r_i = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx a \cdot 0{,}6881$ |
| **Flächeninhalt** | $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx a^2 \cdot 1{,}7205$ |
| **Diagonale** | $d = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \approx a \cdot 1{,}6180$ |
| **Höhe** | $h = r_u + r_i = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \approx a \cdot 1{,}5388$ |
| **Innenwinkel** | $\alpha = 108^\circ$<br>$\cos\alpha = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)$ |

## Innenwinkel

Der Winkel, den zwei benachbarte Seiten im ebenen, regelmäßigen Fünfeck miteinander einschließen, beträgt (wiederum nach einer allgemeinen Formel für regelmäßige Polygone):

$$\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$$



Fünfeck mit seinen Größen

## Fläche

Die Fläche A eines regelmäßigen Fünfecks der Seitenlänge $a$ ist das Fünffache der Fläche eines von seinem Mittelpunkt und zwei seiner Eckpunkte aufgespannten Dreiecks.

$$A = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tan 54^\circ \cdot \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \cdot a^2 \cdot \tan 54^\circ \approx a^2 \cdot 1{,}7205.$$

Allgemein mit dem Umkreisradius $r_u$

$$A = \frac{5}{8} \cdot r_u^2 \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

oder auch

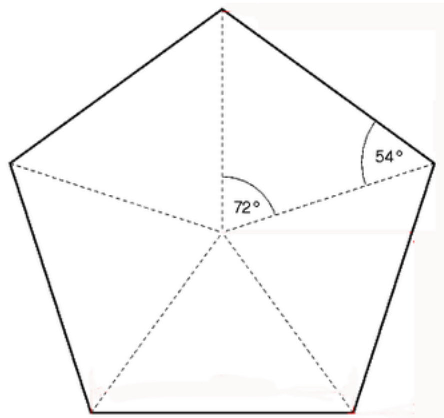
$$A = \frac{5}{2} \cdot r_u^2 \cdot \sin 72^\circ \approx r_u^2 \cdot 2{,}3776.$$

## Seitenlänge

$$a = 2 \cdot r_u \cdot \cos 54^\circ$$

oder auch:

$$a = r_u \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \approx r_u \cdot 1{,}1756$$

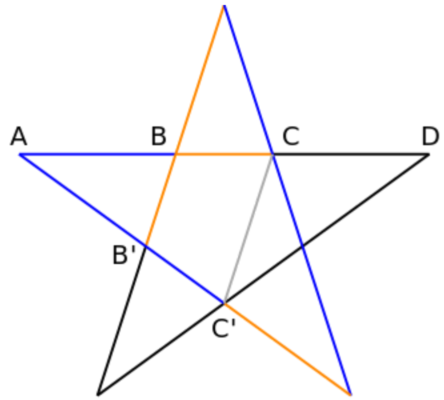


Anschauungshilfe zur Herleitung nebenstehender Aussagen über Winkel

zur Umrechnung siehe den Abschnitt über die als Quadratwurzeln angebbaren Sinus- und Cosinus-Werte.

## Der Goldene Schnitt im Fünfeck

Regelmäßiges Fünfeck und Pentagramm bilden eine Grundfigur, in der das Verhältnis des Goldenen Schnittes wiederholt auftritt. Die Seite des Fünfecks befindet sich im goldenen Verhältnis zu seinen Diagonalen. Die Diagonalen untereinander teilen sich wiederum im goldenen Verhältnis, d. h. $\overline{AD}$ verhält sich zu $\overline{BD}$ wie $\overline{BD}$ zu $\overline{CD}$. Der Beweis nutzt die Ähnlichkeit gewählter Dreiecke.

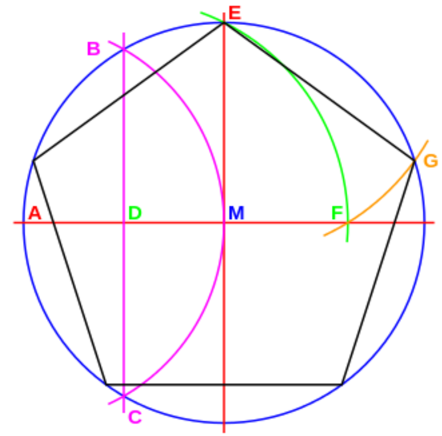



Pentagramm

## Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebenem Umkreis

Für das regelmäßige Fünfeck existiert eine mathematisch exakte Konstruktion zur Bestimmung der Seitenlänge. Im Folgenden die Erläuterungen zur nebenstehenden Abbildung (Bild anklicken zeigt Vergrößerung; die Farben dienen zur besseren Veranschaulichung):

1. Zeichne einen Kreis (späterer Umkreis, blau) mit Radius r um den Mittelpunkt M.
2. Zeichne zwei zueinander senkrechte Durchmesser (rot) ein.
3. Halbiere einen Radius (magenta, Punkt D).
4. Zeichne einen Kreis (grün) mit dem Radius $\overline{DE}$ um Punkt D. Er schneidet die Gerade $\overline{AM}$ im Punkt F. Die Strecke $\overline{EF}$ ist die Länge der Seite.
5. Zum Abtragen auf dem Umkreis einen weiteren Kreisbogen (orange) mit Radius $\overline{EF}$ um E zeichnen. Er schneidet den ersten Kreis (blau) in G. Vorgang entsprechend wiederholen.




Konstruktion eines Fünfecks in einem umschließenden Kreis

Berechnung zur Konstruktion:

$$\overline{EM} = r \cdot 1$$

$$\overline{DM} = r \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{DE} = r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = r \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{MF} = r \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

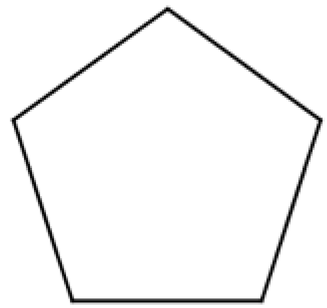
$$\overline{EF} = r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

Umformen des Faktors:

$$\frac{\overline{EF}}{r} = \sqrt{1 + \frac{5 - 2 \cdot \sqrt{5} + 1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{5 - 2 \cdot \sqrt{5} + 1}{4}}$$

$$\frac{\overline{EF}}{r} = \sqrt{\frac{4+5-2\cdot\sqrt{5}+1}{4}} = \sqrt{\frac{10-2\cdot\sqrt{5}}{4}}$$

$$\frac{\overline{EF}}{r} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$



Animation der Konstruktionsschritte

Das entspricht genau dem Faktor in der obigen Formel für die Seitenlänge.

Die Seitenkanten des Dreiecks MEF entsprechen exakt den Seitenlängen des regelmäßigen Sechsecks ($\overline{ME}$), des regelmäßigen Fünfecks ($\overline{EF}$) und des regelmäßigen Zehnecks ($\overline{FM}$) mit dem gegebenen Umkreisradius r.

Mathematisch ausgedrückt:

1. Einen Kreis mit beliebigem Radius r mit dem Mittelpunkt M zeichnen und auf dem Durchmesser die Mittelsenkrechte konstruieren.
2. Die Schnittpunkte des Durchmessers mit dem Kreis werden mit A und X bezeichnet, die der Mittelsenkrechten mit E und Y. (X und Y fehlen in der Darstellung)
3. Zirkel in A einsetzen und $\overline{AM}$=r auf dem Kreis abtragen. Die Schnittpunkte werden mit B und C bezeichnet. (magenta Kreis)
4. $\overline{BC}$ schneidet $\overline{AM}$ in D.
5. Zirkel in D einsetzen und $\overline{DE}$ auf $\overline{AX}$ abtragen, womit wir F erhalten.

$\overline{ME}$ ist die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks, $\overline{EF}$ die des regelmäßigen Fünfecks und $\overline{FM}$ die des regelmäßigen Zehnecks mit dem gegebenen Umkreisradius r.

## Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge

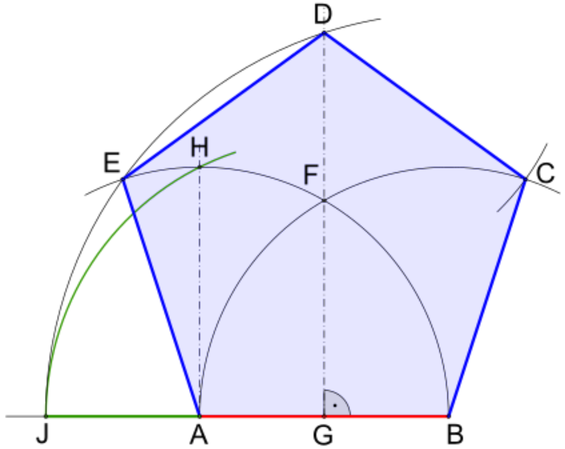
Mit Anwendung des goldenen Schnitts, äußere Teilung

1. Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ deren Länge die vorgegebene Seite des Fünfecks ist.
2. Verlängere die Strecke ab dem Punkt A um ca. drei Viertel der Strecke $\overline{AB}$
3. Zeichne einen Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{AB}$.
4. Zeichne einen Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AB}$, es ergibt sich der Schnittpunkt F.
5. Errichte eine Senkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt F, es ergibt sich der Punkt G
6. Zeichne eine Parallele zur Strecke $\overline{FG}$ ab dem Punkt A bis über den Kreisbogen um Punkt A, es ergibt sich der Schnittpunkt H.
7. Zeichne einen Kreisbogen um den Punkt G mit dem Radius $\overline{GH}$ bis zur Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$, es ergibt sich der Schnittpunkt J.
8. Zeichne einen Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BJ}$ bis über die Senkrechte die durch den Punkt F geht, es ergeben sich die Schnittpunkte D auf der Senkrechten und E mit dem Kreisbogen um Punkt A.
9. Zeichne einen Kreisbogen um den Punkt D mit dem Radius $\overline{BA}$ bis er den Kreisbogen um Punkt B schneidet, es ergibt sich der Schnittpunkt C.
10. Verbinde die Punkte B-C-D-E-A, somit ergibt sich das regelmäßige Fünfeck.

### Schlussfolgerung

Wie in der Konstruktion bei gegebenem Umkreis, ist auch hier der Goldene Schnitt der maßgebende Baustein.

Für den Vergleich der Konstruktionsvarianten sind die Punktebezeichnungen mit Indizes ergänzt: *u* für die Konstruktion mit gegebenem Umkreis, *s* für die Konstruktion mit gegebener Seitenlänge.



Fünfeck bei gegebener Seitenlänge

1. Seite des Fünfecks:

$$\overline{E_u F_u} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_s B_s}$$

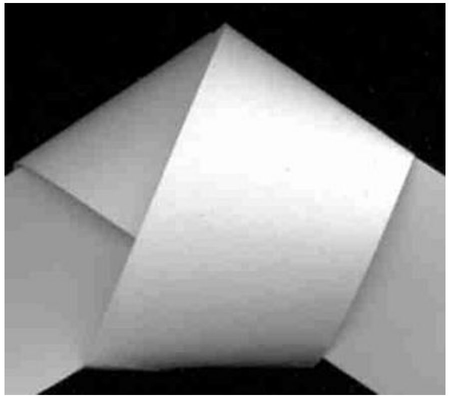
1.
2. Radius für den Goldenen Schnitt:

$$\overline{D_u E_u} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_s H_s}$$

1.
3. Streckenverhältnisse des Goldenen Schnitts:

$$\Phi = \frac{\overline{A_u F_u}}{\overline{A_u M_u}} = \frac{\overline{A_u M_u}}{\overline{M_u F_u}} \quad = \quad \frac{\overline{B_s J_s}}{\overline{A_s B_s}} = \frac{\overline{A_s B_s}}{\overline{A_s J_s}} \quad = \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

### Papierfaltung


Verknoteter Papierstreifen

Durch Zusammenziehen eines aus einem Papierstreifen geschlungenen Überhandknotens nimmt dieser die Form eines regulären Fünfecks an.

# Kachelung mit Fünfecken

Es gibt nur 15 verschiedene Fünfecke, mit denen sich eine Fläche lückenlos kacheln lässt (angenommen, dass nur eine Form von Kacheln benutzt wird). Den Beweis dafür lieferte der französische Mathematiker Michaël Rao erst 2017.[1][2]

# Vorkommen

### Natur

Die Okra- als auch die Sternfrucht hat im Querschnitt die Form eines Fünfecks. Die Blüten der Prunkwinde sind ebenfalls fünfeckig ausgebildet. Auch Seesterne und Schlangensterne weisen eine fünfstrahlige Symmetrie auf. Viele cyclische Verbindungen enthalten eine Fünfringstruktur (etwa Cyclopentan, γ-Butyrolacton, Furan, Furanosen etc.).

### Architektur und Festungsbau

Der Grundriss einer neuzeitlichen bastionierten Festung hat häufig die Form eines Fünfecks. So sind regelmäßige Fünfecke die vollständig wieder aufgebaute Festung Bourtange in den Niederlanden sowie Nyenschantz (heute in St. Petersburg), die Zitadelle von Jaca, die Zitadelle von Pamplona, die Festung Dömitz, die Zitadelle von Turin, die Zitadelle von ’s-Hertogenbosch, die Zitadelle von Straßburg, die Zitadelle von Amiens, die 1598 abgebrochene Zitadelle von Vitry-le-François von Girolamo Marini, die verschwundene Zitadelle von Antwerpen, die Zitadelle von Doullens (Picardie, nur in Teilen auf regelmäßigem Grundriss), die Zitadelle von Lille, das Harburger Schloss, die Zitadelle Vechta, die Zitadelle von Münster, das Fort Nieuw-Amsterdam, das Kastell von Kopenhagen, Tilbury Fort in Essex östlich von London, die Höhenfestung Wülzburg bei Weißenburg in Bayern und die Festung Goryōkaku in Japan.

Okrafrüchte

Den Typ des befestigten Palasts *(Palazzo in fortezza)* auf regelmäßig fünfeckigem Grundriss verkörpern die Villa Farnese, die Schlösser Krzyżtopór und Nowy Wiśnicz sowie die Befestigungen von Schloss Łańcut in Polen. Die Stadt Sathmar im heutigen Rumänien besaß eine fünfeckige Festung.

Der Hauptsitz des Verteidigungsministeriums der Vereinigten Staaten in Washington, D.C. wird wegen seines Grundrisses in Form des regelmäßigen Fünfecks *Pentagon* genannt.

Aufgeschnittene Sternfrucht

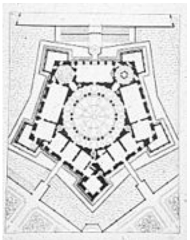
Ein Fünfeck liegt Kirchengebäuden wie der Corvinuskirche in Hannover, der Wallfahrtskirche Zelená Hora in der Tschechischen Republik oder der Kirche St. Michael in Detmold (Westfalen) zugrunde.

Auf fünfeckigem Querschnitt ist der aus Holz gefertigte Aussichtsturm auf der Hohenmirsberger Platte errichtet.

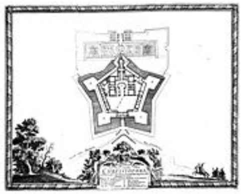
Der Fünfeckige Stein ist ein Grenzstein in Niederösterreich.

*Siehe auch: Fünfeckturm*

Zitadelle von Lille



Villa Farnese, Grundriss



Schloss Krzyżtopór

Satellitenaufnahme des Pentagons

Goryōkaku

# Einzelnachweise


1. Rao, M. (2017) Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane (https://arxiv.org/abs/1708.00274). arXiv.org, 1. Aug. 2017
2. Schütte, M. & Drösser, M. (2017) Kachel-Puzzle. Die Zeit, 3. Aug. 2017, S. 36


# Weblinks

**Commons: Fünfeck (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pentagons?uselang=de)** – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien
**Wiktionary: Fünfeck** – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen
**Wikibooks: Fünfeck** – Lern- und Lehrmaterialien