Albert Lunde, John Faxe Jensen

Pendul

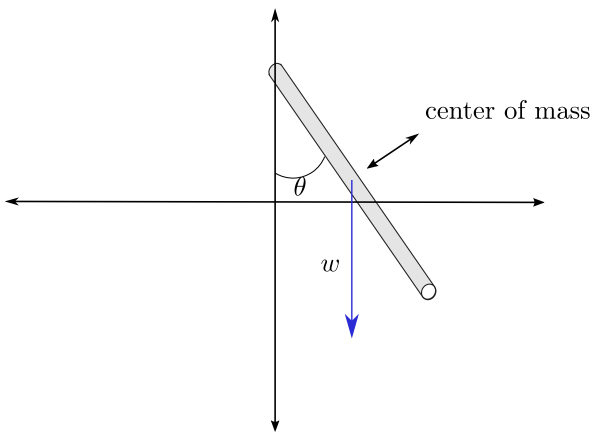

Figure 1: pendul

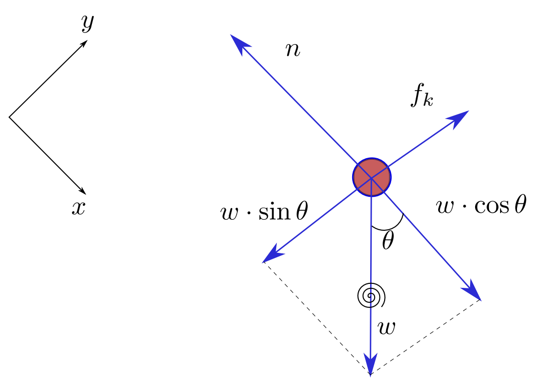

Figure 2: pendul2

(Pendul uden friktion, lille vinkel) ❉

Solution. Hvis vi antager at friktionskraften er 0. Vil der kun være én kraft på pendulet,

$$F = m \cdot g \cdot \sin\theta.$$

Kraftmomentet på pendulet vil være afstanden fra pivot-punktet til center of mass ganget med den vinkelrette komponent af kraften.

$$\tau = -(mg)\sin\theta \cdot R_{cm}.$$

Hvis jeg nu også laver en lille-vinkel antagelse,

$$\tau = -(mg) \cdot \theta \cdot R_{cm}.$$

Jeg ved desuden at kraftmomentet er,

$$I\frac{\mathbf{d}^2\theta}{\mathbf{d}t^2} = -(mg) \cdot \theta(t) \cdot R_{cm}.$$

Vi vil gerne finde en funktion $\theta(t)$, som opfylder denne ligning. Jeg betrager funktionen $\theta(t) = \frac{1}{I} \cdot \sin(t \cdot \sqrt{mgR_{cm}} + \lambda) + c$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}\theta^2}{\mathbf{d}t^2}\theta(t) &= \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{d}t}\frac{1}{I} \cdot \sqrt{mgR_{cm}}\left(-\cos(t \cdot \sqrt{mgR_{cm}} + \lambda\right) \\ &= \frac{-mgR_{cm}}{I}\sin(t \cdot \sqrt{mgR_{cm}} + \lambda)\end{aligned}$$

.

Og ser at denne funktion opfylder kriteriet. I en analyse $\sin(t)$ ser jeg at $\sin(t) = t$ approksimationen holder nogenlunde for vinkler mindre end 0.40 radianer.

(Pendul med friktion, lille vinkel)

Solution. Hvis vi nu antager at der yderligere er en friktionskraft som påvirker pendulet, ændres situation. Det er en rimelig antagelse at denne friktionskraft er proportionel med pendulets hastighed.

$$F_k = -b \cdot v = -b \cdot \omega R_{cm}.$$

Kraftmomentet den giver anledning til er så,

$$\tau_k = -b \cdot \omega \cdot R_{cm}^2.$$

Det totale kraftmoment bliver da,

$$\tau_{res} = I\frac{\mathbf{d}^2\theta}{\mathbf{d}t^2} = -(mg) \cdot \theta(t) \cdot R_{cm} - b \cdot \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{d}t} \cdot R_{cm}^2.$$

Denne differentialligning løses af funktionen,

$$\theta(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-bR_{cm}^2 t}{2I}\right)\cos(\omega t + \phi).$$

Hvor,

$$\omega = \sqrt{\frac{R_{cm}mg}{I} - \left(\frac{bR_{cm}^2}{2I}\right)^2}.$$

Vi ser her at friktionskraften, giver anledning til en faldende amplitude, og at vinkelfrekvensen dog stadig konstant, er mindre end den ville have været uden friktionskraften til stede.

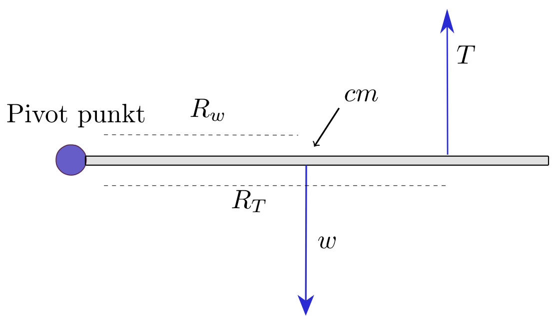

Figure 3: Massemidtpunkt

(Bestemmelse af massemidtpunktet) ⁕ *Her følger de teoretiske overvejelse, til bestemmelse af pendulets massemidtpunkt.*
Se figur 3. Der er 2 krafter på pendulet, en tension fra snoren og tyngdekraften. Tyngdekraften virker i pendulets massemidtpunkt, mens tension virker der hvor snoren sidder fast. Disse giver begge anledning til et kraftmoment, men da pendulet er i hvile vil det samlede kraftmoment være 0.

$$\tau = F_w R_w + F_T R_T.$$

Nu definerer jeg $R_T = R_0 + \Delta R$

$$\frac{1}{F_T} = \frac{-\left(R_0 + \Delta R\right)}{R_w F_w}$$
$$\frac{1}{F_T} = \frac{-R_0}{R_w F_w} - \frac{\Delta R}{R_w F_w}.$$