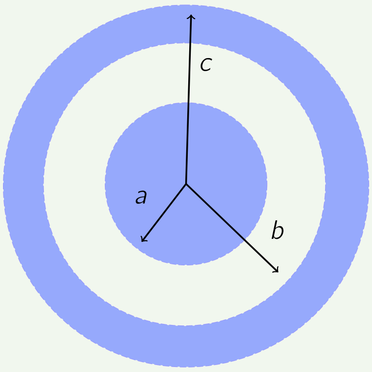
August - 2019

Exercise (Opgave 1).
Vi betragter det elektrostatiske arrangement vist på Figur 1. En metalkugle med radius a og centereret i origo bærer en ladning $Q(Q > 0)$. En metalskal, koncentrisk med kuglen og med indre radius b og ydre radius c, bærer en samlet ladning $2Q$. Der er vakuum i områdene $a < r < b$ og $r > c$, hvor r er afstanden til origo, og den dielektriske permittivitet er lig 0 overalt.



Subexercise (a).
(a) Angiv overfladeladningstætheden på overfladene $r = a$, $r = b$ og $r = c$. Bestem retningen og størrelsen af det elektriske felt i områderne $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ og $r > c$.

Solution: Alt ladning sidder på overfladen,

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}.$$

Ladningen på indersiden af den yderste sfære skal modsvarer ladningen i den inderste sfære. Da Q_enc skal være 0.

$$\sigma_b = \frac{-Q}{4\pi b^2}.$$

Den resterende ladning sidder i c.

$$\sigma_c = \frac{-Q}{4\pi c^2}.$$

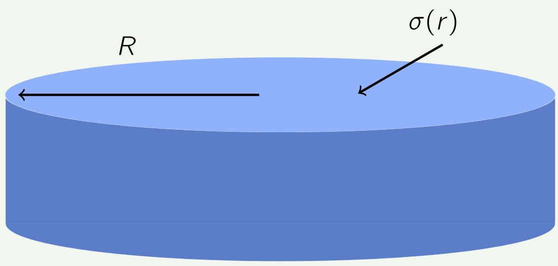
Det elektriske felt er radiært, eller med andre ord,

$$\vec{\mathbf{E}}(r) = E(r)\,\hat{r}.$$

E-feltet inde i en leder er altid 0, mens E-feltet udenfor en sfære eller sfærisk skal er identisk med E-feltet fra en punktpartikel.

$$\vec{\mathbf{E}}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{r^2} & r > c \end{cases}.$$

Exercise (Opgave 2).
En tynd ladet skive med radius R bærer på den ene side en overfladeladningstæthed $\sigma = \alpha r$, hvor α er en positiv konstant og r afstanden til skivens centrum O (Figur 2). Den dielektriske permittivitet er lig ϵ_0 overalt.



Subexercise (a).
Bestem den totale ladning båret af skiven, såvel som det elektriske potential i skivens centrum (udtrykt ved α, R og ϵ_0).

Solution: Jeg betragter dQ-elementer i en afstand r og integrerer fra $0 \to R$. Ladningen i ét element,

$$dQ = 2\pi r\rho(r)\,\mathbf{d}r.$$

Nu integrerer jeg,

$$Q = 2\pi\alpha\int_0^R r^2\,\mathbf{d}r = \frac{2\pi\alpha}{3}r^3.$$

Til at bestemme det elektriske potentiale, bruger jeg følgende formel fra bogen, som stammer fra eksempel 23.11,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Som er det elektriske i en afstand x fra en ring med ladning Q. Jeg betragter nu ringe med radius r og sætter $x = 0$, da jeg er interesseret i at finde potentialet i origo. Mine $\mathbf{d}V$ elementer bliver dermed,

$$\mathbf{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{d}Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\alpha r^2\mathbf{d}r}{r}.$$

Jeg integrerer dette fra $0 \to R$.

$$V = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\epsilon_0}\int_0^R r\,\mathbf{d}r = \frac{\alpha}{4\epsilon_0}R^2.$$

Exercise (Opgave 3)**.**
Vi betragter det elektriske kredsløb vist på Figur 3. Kredsløbet består af en variabel emk kilde, der leverer en periodisk spænding $v(t) = V\cos(\omega t)$, hvor V er spændingens maksimale værdi og ω vinkelfrekvensen. Kilden er koblet til to modstande med modstand $2R$, to kapacitorer med kapacitans $C/2$ og en ideel induktor med induktans$L$. Vi ser bort fra fælles induktans effekter.

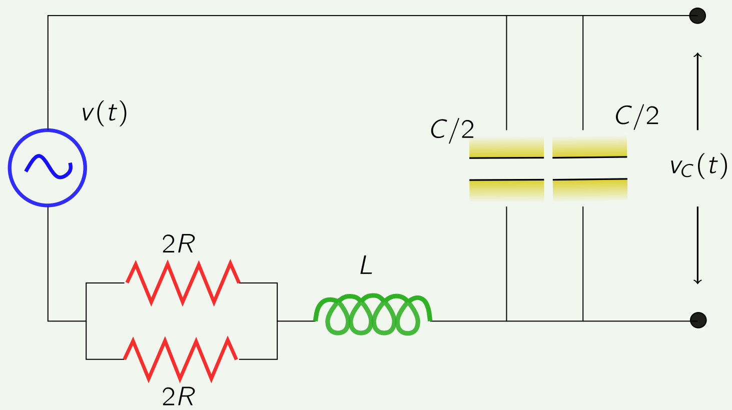


Figure 1: Opgave3

Subexercise (a)**.**
Forsimpl kredsløbet, angiv dens impedans og bestem V_C/V , hvor V_C er den maksimale værdi af spændingen over kapacitorerne, $v_C(t)$. Hvilken

slags frekvensfilter fås ved at måle spændingen over kapacitorerne?

Solution: Det forsimplede kredsløb, indeholder én kapacitor og én resistor. De ækvivalente størrelser er,

$$C_{eq} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$$
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = R.$$

Impedansen, findes ved af hjælp af formel (31.23),

$$Z = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}.$$

Jeg bruger nu følgende formler til at bestemme V_C/V,

$$V_C = \frac{I}{\omega C}$$
$$I = \frac{V}{Z}.$$

og får at,

$$\frac{V_C}{V} = \frac{1}{\omega C Z}.$$

Exercise (Opgave 4).
Vi betragter det magnetostatiske arrangement vist på Figur 4a. En uendelig lang og tynd ledning, hvori en konstant strøm I løber i den positive z-retning, ligger langs z-aksen. En rektangulær sløjfe med sidelændger w og h, hvori en konstant strøm I_0 løber i retningen mod uret, ligger stationært i (yz)-planen. Den magnetiske permeabilitet er lig μ_0 overalt.

Subexercise (a).
Bestem retningen og størrelsen af den magnetiske kraft udøvet på sløjfen af ledningen.

Solution: Den magnetiske kraft på en leder er givet ved,

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{I}}L \times \vec{\mathbf{B}}.$$

En uendelig ledning med strøm I inducerer et magnetfelt af størrelsen,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

I dette tilfælde peger det inducerede magnetfelt den positive x-retning. Jeg bemærker at pr. symmetri er kraften på de 2 horisontale sider i kredsløb identiske

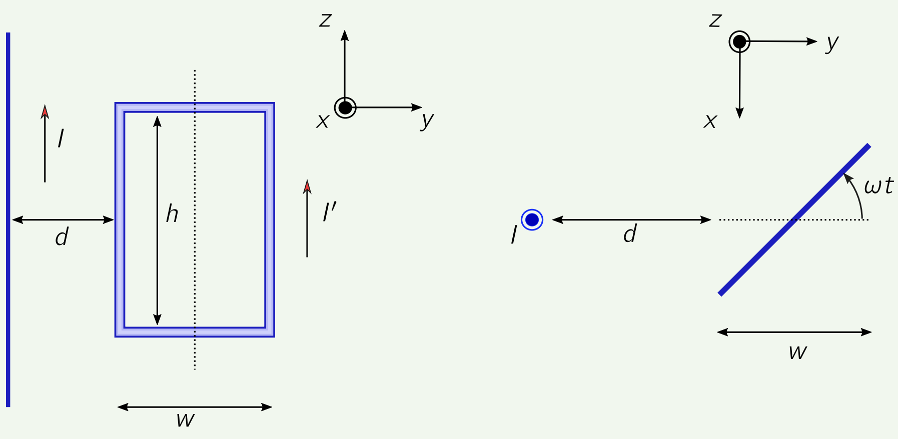


Figure 2: Opgave4

med modsat fortegn. Disse går dermed ud. Kraften på de 2 vertikale sider peger hver deres vej. Den inderste bliver påvirket af en kraft i y-retningen mens den yderste er i $-y$-retningen. Den resulterende kraft bliver dermed,

$$\vec{\mathbf{F}} = I'L\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+w}\right).$$

Subexercise (b)**.**
Vi betragter nu et lignende arrangement, men hvor der kun løber en konstant strøm I i ledningen og hvor sløjfen roterer med konstant vinkelhastighed omkring dens symmetriakse parallel med z-aksen (stiplet linje i Figur 4a), således at vinklen mellem sløjfens plan og y-aksen til tiden t er ωt (se Figur 4b). Vi antager, at sløjfens dimensioner h og w er meget små i forhold til afstanden til ledningen d og kan betragte det magnetiske felt fra ledningen til at være homogent ved sløjfen. Vi ser bort fra selvinduktans effekter og sløjfens modstand er R.
Bestem retningen og størrelsen af den inducerede strøm i sløjfen til tiden t hvor $t \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$

Solution: Vi er interesseret i at bestemme den magnetiske flux til tiden t, da der netop gælder at,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathbf{d}\Phi_B}{\mathbf{d}t}.$$

Den magnetiske flux er,

$$\Phi_B = \int B \cdot dA.$$

Da kredsløbet rotererer er den ortogonale del af arealet til tiden t,

$$A(t) = \cos(\omega t)\, wh.$$

Den magnetiske flux er dermed,

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cos(\omega t)\, wh.$$

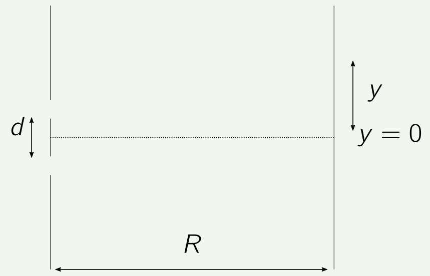
Den tidsafledte bliver,

$$\frac{\mathbf{d}\Phi_B}{\mathbf{d}t} = -\frac{mu_0 I\omega wh}{2\pi d} \sin(\omega t)\,.$$

Strømmen bliver dermed,

$$I = \frac{mu_0 I\omega wh}{2\pi d}\frac{\sin(\omega t)}{R}.$$

Exercise (Opgave 6)**.**
Lys med bølgelængden $\lambda = 500$ nm sendes ind mod en skærm med to spalter placeret i en indbyrdes afstand $d = 500\ \mu$m (Fig. 6). En afbildningsskærm er anbragt bag den første i afstanden $R = 1$ m.



Subexercise (a)**.**
Løs følgende,

- Opskriv et udtryk for den resulterende intensitet på afbildningsskærmen som funktion af positionen y på skærmen, idet det oplyses at intensiteten ved y_0, er 1 mW. Der kan ses bort fra diffraktions effekter pga. den endelige udstrækning af de to spalter.
- Skitser intensiteten som funktion af y og opgiv positionen af det 5.maximum, $y_{1,5max}$, og det 6. minimum, $y_{1,6min}$, fra centerlinjen ved $y = 0$.
- Bestem den bølgelængde λ_2 for hvilken det 5. interferens maximum, $y_{2,5max}$ er sammenfaldende med $y_{1,6min}$

Solution: Funktionen bestemmes med formel,

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}.$$

hvor,

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta.$$

Da vi har med små vinkler at gøre er,

$$\sin\theta = \frac{y}{R}.$$

Dette sættes ind og jeg får,

$$I\left(y\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda R}\right).$$

Med et script bestemmes alle minima og maksima i intensiteten med formelen,

$$y_m = \frac{Rm\lambda}{d}.$$

I den sidste opgave sættes,

$$y_{2,5max} = y_{1,6min}.$$

og der isoleres for λ_2