Deducción en Lógica de Primer Orden (LPO)

Formas normales y cláusulas

Una cláusula en LPO es

Subfórmulas de una fórmula F:

- si F es un átomo entonces F es su única subfórmula
- si F es de la forma $\neg G$ o $\forall x G$ o $\exists x G$, entonces las subfórmulas de F son F y las subfórmulas de G
- si F es de la forma $(G \wedge H)$ o $(G \vee H)$, etonces las subfórmulas de F son F y las subfórmulas de G y H

Transformación a forma clausal

1. **Movimiento de negaciones hacia dentro:** Aplicamos esta regla exhaustivamente hasta que todas las negaciones se apliquen directamente a los átomos.

   Ejemplo: $\neg \exists x F \implies \forall x \neg F$ o $\neg \forall x F \implies \exists x \neg F$
2. **Eliminación de conflictos de nombre:** Por ejemplo $\forall x P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)$ se puede convertir a la fórmula equivalente $\forall x P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)$.

   Es necesario empezar el reemplazamiento de nombre por las fórmulas más internas.
3. **[OPCIONAL] Movimiento de cuantificadores hacia dentro:** Este paso no es imprescindible pero nos ayudará para la *Skolemización*.

   Por ejemplo $\forall x(F \vee G) \implies \forall x F \vee G \quad \text{si } x \text{ no aparece en } G$
4. ***Skolemización:*** consiste en reemplazar una subfórmula $\exists y G$ por otra G' sin la variable y. Reemplazamos y por un término t donde:
   - t es una constante fresca c_y, si y no se encuentra en el ámbito de ninguna variable universalmente cuantificada

     Ejemplo: $\exists y \forall x \ p(x, y)$ pasa a ser $\forall x \ p(x, c_y)$
   - t es $f_y(x_1, \ldots, x_n)$, donde f_y es un símbolo de función fresco, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto no-vacío de las variables universalmente cuantificadas en cuyo ámbito se encuentra y.

     Ejemplo: $\forall x \exists y \ p(x, y)$ pasa a ser $\forall x \ p(x, f_y(x))$
5. **Movimiento de cuantificadores universales hacia fuera:** Después de aplicar esta regla exhaustivamente, la fórmula tendra todos los cuantificadores universales al principio.

   Por ejemplo: $(\forall x F) \vee G \implies \forall x(F \vee G)$
6. **Distribución de $\wedge$ sobre $\vee$:** Por ejemplo $(F \wedge G) \vee H \implies (F \vee H) \wedge (G \vee H)$

Siguiendo todos estos pasos, tendremos una expresión de la forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \ ((l_{11} \vee \ldots \vee l_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{m1} \vee \ldots \vee l_{mn_m}))$$

Habitualmente no pondremos los cuantificadores universales pues se sabe y se asume que en una cláusula todas las variables están universalmente cuantificadas.