Maximum Flow i *Minimum cut*

Xarxes de Flux

Un xarxa de flux és un **graf dirigit** $G = (V, E)$ que té

- vèrtex font $s \in V$
- vèrtex destí $t \in V$
- arestes amb capacitat c

$c(u, v)$ representa la capacitat de l'aresta (u, v).

$f(u, v)$ ens dona el flux que passa per l'aresta (u, v).

S'apliquen les lleis de *Kirchoff*:

1. $\forall (u, v) \in E, 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
2. Conservació de flux $\rightarrow \forall v \in V - \{s, t\}, \sum_{u \in V} f(u, v) = \sum_{z \in V} f(v, z)$
3. Valor de flux $|f| = f(s, V) = f(V, t)$

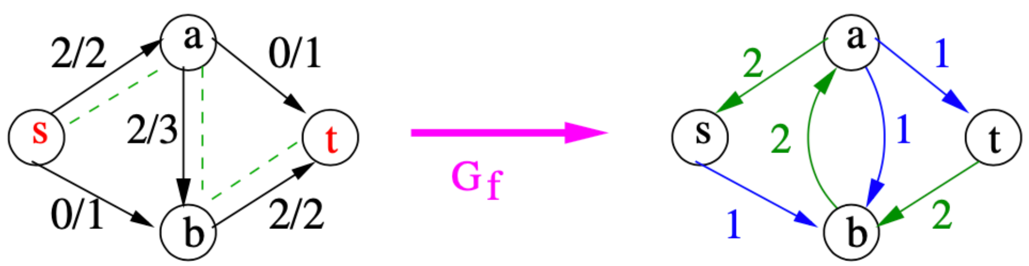
Diem que el ***max flow*** és la capacitat del ***min-cut*** de la xarxa.

Un **tall** $s - t$ succeeix quan donat un graf $G = (V, E)$ tenim una partició $V = S \cup T$ $(S \cap T = \emptyset)$ amb $s \in S$ i $t \in T$.

Xarxes Residuals

Donada una xarxa $G = (V, E), s, t, c$ amb flux f, la seva xarxa residual és $G_f = (V, E_f), c_f$ on

- si $c(u, v) - f(u, v) > 0$ llavors $(u, v) \in E_f$ i $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- si $f(u, v) > 0$ llavors $(v, u) \in E_f$ i $c_f(v, u) = f(u, v)$



Definim un ***Augmenting Path*** com un camí simple de s a t per G_f.

Ford-Fulkerson (FF)

Complexitat: $T(n) = O(Cm)$, on C és la capacitat del *min-cut* i m el nombre d'arestes.

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)
  for all (u,v) in E
    f(u,v) = 0
  end for
  Gf = G
  while exists(s-t path in Gf) do
    P = simple path in Gf (DFS)
    fA = Augment(f,P)
    Update f to fA
    Update Gf to GfA
  end while
  return f
```

Corresctesa:

Per qualsevol flux f i un tall (S,T) sabem que $|f| \leq c(S,T)$.

Tenim un flux f^* tal que $|f^*| = c(S^*,T^*)$, per un tall $(S^*,T^*) \implies f^*$ és el *max-flow*.

Com el flux retornat per FF és la capacitat del *min-cut* i acabem de veure que la capacitat d'un tall és el *max-flow*, el flux retornat per FF és el *max-flow*.

Edmonds-Karp (EK)

Complexitat: $T(n) = O(m^2 n)$, on $m = |E|$ i $n = |V|$

```
Edmonds-Karp(G,s,t,c)
  for all (u,v) in E
    f(u,v) = 0
  end for
  Gf = G
  while exists(s-t path in Gf) do
    P = simple path in Gf (BFS)
    fA = Augment(f,P)
    Update f to fA
    Update Gf to GfA
  end while
  return f

```

Level Graph

Donat un graf $G = (V,E)$, definim $L_G = (V, E_G)$ com el *level graph* de G en que:

- $l(v) =$ nombre d'arestes en el *shortest path* $s \rightsquigarrow v$ a G
- $L_G = (V, E_G)$ és el subgraf de G que conté només arestes $(v,w) \in E$ tal que $l(w) = l(v) + 1$

Utilitzant BFS podem computar L_G en temps $O(n+m)$.

A més una **propietat interesant** del *level graph* és que un camí P és el camí més curt $s \rightsquigarrow t$, si P està a L_G.

Dinic's

És un altre variació de FF, simplement utilitza un altre mètode per escollir el *augmentating path*.

Té una **complexitat** de $O(n^2m)$.

Ford-Fulkerson	Edmonds-Karp	Dinic's
$O(Cm)$	$O(m^2n)$	$O(n^2m)$