Preliminares

Conjuntos

Propiedades de las operaciones sobre conjuntos

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) &\quad \text{Conmutividad de} \cup \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) &\quad \text{Conmutividad de} \cap \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) &\quad \text{Distributividad de } \cup \text{respecto a} \cap \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) &\quad \text{Distributividad de } \cap \text{respecto a} \cup \\
C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)) & \\
C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)) &
\end{aligned}
$$

Partes de un conjunto

$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$

Ejemplo: $A = \{a, b\}$ entonces $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Si A es un conjunto finito entonces $|P(A)| = 2^{|A|}$

Cadenas sobre un conjunto

A^* denota el **conjunto de cadenas** sobre A, también llamado *palabras* sobre el *alfabeto* A y está definido por:

1. λ es una cadena sobre A llamada **cadena vacia**
2. si ω es una cadena sobre A y $a \in A$ entonces ωa es una cadena sobre A
3. nada más es una cadena sobre A

Ejemplo: $A = \{a, b\}$ entonces $A^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$

Operaciones sobre cadenas:

- **Concatenación**: la concatenación de dos cadenas ω_1 y ω_2 es $\omega_1 \omega_2$
- **Inversión**: la inversión de $\omega = a_1 a_2 \dots a_k$ es $\omega^{inv} = a_k a_{k-1} \dots a_1$

Dadas dos cadenas ω_1 y ω_2, ω_1 es el **prefijo** y ω_2 el **sufijo** de $\omega_1 \omega_2$.

Relaciones y funciones

Una **relación binaria** R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

- Si $(a, b) \in R$ se dice que a y b están relacionados por R (se puede escribir aRb en vez de $(a, b) \in R$)
- Si $A = B$, R es una relación binaria en A

Una relación ~ en A es

- **reflexiva** si $a \sim a$, para todo $a \in A$
- **simétrica** si para todos los $a \in A, b \in A$ con $a \sim b$ se cumple $b \sim a$
- **antisimétrica** si para todos los $a \in A, b \in A$ con $a \sim b$ y $b \sim a$ se cumple $a = b$

- **transitiva** si para todos los $a \in A, b \in A, c \in A$ con a ~ b y b ~c se cumple a ~ c
- **de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva

Ejemplo: la relación de igualdad (=) en un conjunto A es una *relación de equivalencia*.

Usamos la notación $f : A \to B$ para indicar que f es una relación binaria entre A y B en la que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B.

A f se le llama **función** de A en B y se escribe $f(a) = b$.

Una función $f : A \to B$ es:

- **inyectiva** si para todos los $a_1, a_2 \in A$ se tales que $f(a_1) = f(a_2)$ se cumple que $a_1 = a_2$
- **exhaustiva** si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$
- **biyectiva** si es inyectiva y exhaustiva

Relación de equivalencia y conjunto cociente

Si R es una **relación de equivalencia** en A, se llama **clase de equivalencia** de $a\ modulo\ R$, denotaad por $[a]_R$, al subconjunto de A de todos los elementos x relacionados con a:

$$[a]_R = \{x \in A \mid a\ R\ x\}$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia $[a]_R$ es una partición de A llamada *conjunto cociente de* A *módulo* R y denotada $A/_R$:

$$A/_R = \{[a]_R \mid a\ \in\ A\}$$

Relaciones de orden

Una relación en un conjunto A es un **orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Una relación de orden $\leq$ en A es **total** si para todos los elementos $a, b \in A$ se cumple $a \leq b$ o bien $b \leq a$
.

Combinatoria

Número de *combinaciones* (subconjuntos) de m elementos de un conjunto A de n elementos:
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Número de *permutaciones* de A: $n!$

Demostraciones

Inducción

La demostración por *inducción* tiene dos pasos:

1. **Caso base**: Demostrar que la propiedad es cierta para 0
2. **Caso de inducción**: Para toda $i > 0$, si la propiedad es cierta para $i - 1$ entonces lo es para i

Contrarecíproco

Sirve para demostrar las propiedades del tipo "A implica B", ya que queremos demostrar que si A es cierta B también lo es.

Para ello demostramos que $\neg A \implies \neg B$ i.e. si B es falsa, entonces A también.

Ejemplo: Queremos demostrar que si el cuadrado de un número natural n es par, entonces n es par. El contrarecíproco dice que si n es impar, su cuadrado es impar. Como n es impar podemos decir que $n = 2k + 1$ para un natural k. Entonces $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, por lo tanto n^2 es impar.

Reducción al absurdo

Suponemos que la propiedad a demostrar es falsa y deducimos un **absurdo** o **contradicción**.

Por lo tanto la propiedad no puede ser falsa y debe ser verdadera.

Ejemplo: Queremos demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional, no hay hay naturales n y m que cumplsn que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. Negamos la propiedad y por tanto intentamos demostrar que $\sqrt{2}$ sí que es racional, existen n y m tal que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Vamos dividiendo n y m por 2 hasta que al menos uno sea impar. Por lo tanto podemos asumir que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ donde o n o m es impar.

Si $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, elevandolo al cuadrado obtenemos $2 = \frac{n^2}{m^2}$ y por lo tanto $n^2 = 2m^2$. Esto implica que n es par ($n = 2k$) y tenemos que $(2k)^2 = 2m^2$, es decir $m^2 = 2k^2$. Consecuentemente, m tiene que ser par ya que su cuadrado lo es.

CONTRADICCIÓN: al principio hemos visto que n o m es impar pero hemos llegado a la conclusión de que tanto n como m es par. Por lo tanto demostramos que la suposición de que $\sqrt{2}$ es racional es falsa y por lo tanto es irracional.