Type Theory

Theory exercises

Alberto Lazari

II Semester A.Y. 2022-2023

Exercise 1

3.1 Singleton type and exercises

3. Show that the rule E-S) is derivable in the type theory T_1 replacing the rule E-S) elimination with the E-N_{1prog}) rule and adding the substitution and weakening rules and the sanitary checks rules set out in the previous sections.

- Rule E-S)

$$\text{E-S)}\ \frac{t \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma] \qquad M(z)\ type\ [\Gamma, z \in \mathsf{N}_1] \qquad c \in M(\star)\ [\Gamma]}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(t, c) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

- Rule E-N_{1prog})

$$\text{E-}\mathsf{N}_{1prog})\ \frac{D(w)\ type\ [\Sigma, w \in \mathsf{N}_1] \qquad d \in D(\star)\ [\Sigma]}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, d) \in D(w)\ [\Sigma, w \in \mathsf{N}_1]}$$

Solution

Assuming:

$\pi_1)\ \ t \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]$

$\pi_2)\ \ M(z)\ type\ [\Gamma, z \in \mathsf{N}_1]$

$\pi_3)\ \ c \in M(\star)\ [\Gamma]$

The rule E-S) is derivable:

$$\text{sub-ter)}\ \frac{\text{E-}\mathsf{N}_{1prog})\ \dfrac{\overset{\pi_2}{M(z)\ type\ [\Gamma, z \in \mathsf{N}_1]} \qquad \overset{\pi_3}{c \in M(\star)\ [\Gamma]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(z, c) \in M(z)\ [\Gamma, z \in \mathsf{N}_1]} \qquad \overset{\pi_1}{t \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(t, c) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

Exercise 2

3.2 Natural Numbers Type

3. Define the addition operation using the rules of the natural number type

$$x + y \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}]$$

such that $x + 0 = x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$.

Solution

The addition $x + y$ can be defined as:

$$\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(y, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z))$$

Let $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$;

$x + y \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}]$ is derivable:

$$\text{E-Nat)}\ \frac{\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{y \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \qquad \text{F-Nat)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\Gamma]} \qquad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{x \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \qquad \text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}]}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{z \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(y, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}$$

Where $\Gamma\ cont$ derivable, because $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$ and $x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}\ cont$ derivable:

$$\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}\ cont}$$

Correctness

The definition is correct, in fact:

Base case

$y = 0 \Rightarrow x + y = x + 0 = x$

This is true, because:

- $x + 0 = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z))$
- $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)) = x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$ derivable:

$$\text{C}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}]} \qquad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]} \qquad \text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{z \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)) = x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]}$$

Inductive case

$y = \mathsf{succ}(v)\ [v \in \mathsf{Nat}] \Rightarrow x + y = x + \mathsf{succ}(v) = \mathsf{succ}(x + v)$

This is true, because:

- $x + \mathsf{succ}(v) = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z))$
- $\mathsf{succ}(x + v) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)))$
- Let $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, v \in \mathsf{Nat}$;
  $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z))) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]$ derivable:

$$\text{C}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{v \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \qquad \text{F-Nat)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\Gamma]} \qquad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{x \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \qquad \text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\Gamma\ cont}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}]}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{z \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z)) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, x, (w, z).\, \mathsf{succ}(z))) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}$$

Where $\Gamma\ cont$ derivable, because $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, v \in \mathsf{Nat}$ and $x \in \mathsf{Nat}, v \in \mathsf{Nat}\ cont$ derivable:

$$
\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [x \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, v \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}
$$

Exercise 3

3.2 Natural Numbers Type

4. Define the addition operation using the rules of the natural number type

$$x + y \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}]$$

such that $0 + x = x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$.

Solution

The addition $x + y$ can be defined as:

$$\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(x, y, (w, z).\,\mathsf{succ}(z))$$

Let $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$;
$x + y \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}]$ is derivable:

$$
\text{E-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{x \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \quad \text{F-Nat)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{y \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]} \quad \text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}]}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{z \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(x, y, (w, z).\,\mathsf{succ}(z)) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}
$$

Where $\Gamma\ \mathit{cont}$ derivable, because $\Gamma = x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$ and $x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}$ derivable:

$$
\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [x \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}
$$

Correctness

The definition is correct, in fact:

Base case

$x = 0 \Rightarrow x + y = 0 + y = y$

Note that the exercise requires that $0 + x = x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$, but that is equivalent to proving that $0 + y = y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]$, by renaming y to x in the latter, and this is true, because:

- $0 + y = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, y, (w, z).\,\mathsf{succ}(z))$
- $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, y, (w, z).\,\mathsf{succ}(z)) = y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]$ derivable:

$$
\text{C}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{
\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [y \in \mathsf{Nat}]}
\qquad
\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]}
\qquad
\text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [y \in \mathsf{Nat}]}}{y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}]}}{y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{z \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}
}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z)) = y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]}
$$

Inductive case

$x = \mathsf{succ}(v)\ [v \in \mathsf{Nat}] \Rightarrow x + y = \mathsf{succ}(v) + y = \mathsf{succ}(v + y)$

This is true, because:

- $\mathsf{succ}(v) + y = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z))$
- $\mathsf{succ}(v + y) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z)))$
- Let $\Gamma = v \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$;
  $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z)) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z))) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]$ derivable:

$$
\text{C}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{
\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{v \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}
\qquad
\text{F-Nat)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\Gamma]}
\qquad
\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{y \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}
\qquad
\text{I}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}]}}{\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{z \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{succ}(z) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}
}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(v), y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z)) = \mathsf{succ}(\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(v, y, (w,z).\,\mathsf{succ}(z))) \in \mathsf{Nat}\ [\Gamma]}
$$

Where Γ *cont* derivable, because $\Gamma = v \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$ and $v \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}$ *cont* derivable:

$$
\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [\,]}}{v \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}}{\mathsf{Nat}\ \mathit{type}\ [v \in \mathsf{Nat}]}}{v \in \mathsf{Nat}, y \in \mathsf{Nat}\ \mathit{cont}}
$$

Exercise 4

> ## 3.2 Natural Numbers Type
>
> 6. Define the predecessor operator
>
> $$\mathbf{p}(x) \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$$
>
> such that
>
> $$\mathbf{p}(0) = 0$$
> $$\mathbf{p}(\mathsf{succ}(\mathbf{n})) = \mathbf{n}$$

Solution

The predecessor $\mathbf{p}(x)$ can be defined as:

$$\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(x, 0, (w,z).\,w)$$

$\mathbf{p}(x) \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]$ is derivable:

$$\text{E-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{x \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]} \quad \text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}]} \quad \text{I}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{0 \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}]}}{x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{w \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(x, 0, (w, z).\, w) \in \mathsf{Nat}\ [x \in \mathsf{Nat}]}$$

Correctness

The definition is correct, in fact:

Base case

$x = 0 \Rightarrow \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(0) = 0$

This is true, because:
- $\mathbf{p}(0) = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, 0, (w, z).\, w)$
- $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, 0, (w, z).\, w) = 0 \in \mathsf{Nat}\ [\,]$ derivable:

$$\text{C}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]} \quad \text{I}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{0 \in \mathsf{Nat}\ [\,]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [w \in \mathsf{Nat}]}}{w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{w \in \mathsf{Nat}\ [w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(0, 0, (w, z).\, w) = 0 \in \mathsf{Nat}\ [\,]}$$

Inductive case

$x = \mathsf{succ}(y)\ [y \in \mathsf{Nat}] \Rightarrow \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(\mathsf{succ}(y)) = y$

This is true, because:
- $\mathbf{p}(\mathsf{succ}(y)) = \mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(y), 0, (w, z).\, w)$
- $\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(y), 0, (w, z).\, w) = y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]$ derivable:

$$\text{C}_2\text{-Nat)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ cont}}{y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]} \quad \text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [y \in \mathsf{Nat}]} \quad \text{I}_1\text{-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{0 \in \mathsf{Nat}\ [\,]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Nat)}\ \dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{Nat}\ type\ [\,]}}{y \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [y \in \mathsf{Nat}]}}{y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}\ cont}}{\mathsf{Nat}\ type\ [y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}]}}{y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}\ cont}}{w \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}, w \in \mathsf{Nat}, z \in \mathsf{Nat}]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Nat}}(\mathsf{succ}(y), 0, (w, z).\, w) = y \in \mathsf{Nat}\ [y \in \mathsf{Nat}]}$$

Exercise 5

3.6 Martin-Löf's Intensional Propositional Equality

7. Prove that there exists a proof-term **pf** such that.

$$\mathbf{pf} \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [w \in \mathsf{N}_1]$$

is derivable.

Solution

There exists a proof-term $\mathbf{pf} = \mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)), (x).\, \mathsf{id}(x)\big)$, such that

$$\mathbf{pf} \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [w \in \mathsf{N}_1]$$

is derivable, in fact:

let $\Gamma = w \in \mathsf{N}_1$;
let $\Delta = z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)$;
$\mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)), (x).\, \mathsf{id}(x)\big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma]$ is derivable:

$$\text{E-Id)}\ \dfrac{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{type}\ [\Gamma, \Delta] \quad \text{I-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\star \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma] \quad \text{I-Id)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, x \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{x \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, x \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{id}(x) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, x)\ [\Gamma, x \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)), (x).\, \mathsf{id}(x)\big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]}$$

Where

1. $\Gamma\ \mathit{cont}$ derivable, because:
   - $\Gamma = w \in \mathsf{N}_1$
   - $w \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}$ derivable:

$$\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{[\,]\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\,]}}{w \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}$$

2. $\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{type}\ [\Gamma, \Delta]$ derivable:

$$\text{F-Id)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma, \Delta\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, \Delta]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma, \Delta\ \mathit{cont}}{z_1 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, \Delta]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma, \Delta\ \mathit{cont}}{z_2 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, \Delta]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{type}\ [\Gamma, \Delta]}$$

   Where $\Gamma, \Delta\ \mathit{cont}$ derivable, because:
   - $\Delta = z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)$
   - $\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{cont}$ derivable:

$$\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Id)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{z_1 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{z_2 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{cont}}$$

3. $\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]$ derivable:

$$
\text{E-S)}\;\dfrac{\text{var)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \qquad \text{F-Id)}\;\dfrac{\text{F-S)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{\mathsf{N}_1\ type\ [\Gamma]} \quad \text{I-S)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{\star \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ type\ [\Gamma]} \qquad \text{I-Id)}\;\dfrac{\text{I-S)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{\star \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{id}(\star) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, \star)\ [\Gamma]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]}
$$

Exercise 6

3.6 Martin-Löf's Intensional Propositional Equality

8. Prove that there exists a proof-term **pf** such that

$$\mathbf{pf} \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1]$$

is derivable.

Solution

There exists a proof-term $\mathbf{pf} = \mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\Big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big), (y).\, \mathsf{id}(y)\Big)$, such that

$$\mathbf{pf} \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1]$$

is derivable, in fact:

let $\Gamma = x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1$;
let $\Delta = z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)$;
$\mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\Big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big), (y).\, \mathsf{id}(y)\Big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma]$ is derivable:

$$
\text{E-Id)}\;\dfrac{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ type\ [\Gamma, \Delta] \quad \text{var)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{x \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma] \quad \text{I-Id)}\;\dfrac{\text{var)}\;\dfrac{\text{F-c)}\;\dfrac{\text{F-S)}\;\dfrac{\Gamma\ cont}{\mathsf{N}_1\ type\ [\Gamma]}}{\Gamma, y \in \mathsf{N}_1\ cont}}{y \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, y \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{id}(y) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, y, y)\ [\Gamma, y \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{Id}}\Big(\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big), (y).\, \mathsf{id}(y)\Big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma]}
$$

Where

1. $\Gamma\ cont$ derivable, because:
   - $\Gamma = x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1$
   - $x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1\ cont$ derivable:

$$
\text{F-c)}\;\dfrac{\text{F-S)}\;\dfrac{\text{F-c)}\;\dfrac{\text{F-S)}\;\dfrac{[\,]\ cont}{\mathsf{N}_1\ type\ [\,]}}{x \in \mathsf{N}_1\ cont}}{\mathsf{N}_1\ type\ [x \in \mathsf{N}_1]}}{x \in \mathsf{N}_1, w \in \mathsf{N}_1\ cont}
$$

2. $\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ type\ [\Gamma, \Delta]$ derivable:

$$
\text{F-Id)}\;\dfrac{\text{F-S)}\;\dfrac{\Gamma, \Delta\ cont}{\mathsf{N}_1\ type\ [\Gamma, \Delta]} \quad \text{var)}\;\dfrac{\Gamma, \Delta\ cont}{z_1 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, \Delta]} \quad \text{var)}\;\dfrac{\Gamma, \Delta\ cont}{z_2 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, \Delta]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ type\ [\Gamma, \Delta]}
$$

   Where $\Gamma, \Delta\ cont$ derivable, because:
   - $\Delta = z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)$
   - $\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ cont$ derivable:

$$\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-Id)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{z_1 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\text{F-c)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1\ \mathit{cont}}}{z_2 \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{type}\ [\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1]}}{\Gamma, z_1 \in \mathsf{N}_1, z_2 \in \mathsf{N}_1, z_3 \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, z_1, z_2)\ \mathit{cont}}$$

3. $\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma]$ derivable:

$$\text{E-S)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{x \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{F-Id)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{x \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ \mathit{type}\ [\Gamma]} \quad \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}\big(x, \mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star))\big) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, x, w)\ [\Gamma]}$$

Where $\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]$ derivable:

$$\text{E-S)}\ \dfrac{\text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{F-Id)}\ \dfrac{\text{F-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\mathsf{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]} \quad \text{I-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\star \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]} \quad \text{var)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{w \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ \mathit{type}\ [\Gamma]} \quad \text{I-Id)}\ \dfrac{\text{I-S)}\ \dfrac{\Gamma\ \mathit{cont}}{\star \in \mathsf{N}_1\ [\Gamma]}}{\mathsf{id}(\star) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, \star)\ [\Gamma]}}{\mathsf{El}_{\mathsf{N}_1}(w, \mathsf{id}(\star)) \in \mathsf{Id}(\mathsf{N}_1, \star, w)\ [\Gamma]}$$