

# **Tutorato Matematica Discreta**

## **Capitolo 6**

---

Alberto Paparella<sup>1</sup>

15 Maggio 2025

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Ferrara

## Esercizio 1

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la seguente applicazione:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x + 2y + 11z, x + 3z, 2x - y + 5z).$$

- Verificare che  $f$  è lineare
- Scrivere la matrice  $A$  associata a  $f$  rispetto alle basi canoniche
- Trovare una base per  $\text{Imm}(f)$  e la dimensione di  $\text{Ker}(f)$
- Discutere l'appartenenza del vettore  $(\alpha + 1, \alpha, \alpha, \alpha)$  all' $\text{Imm}(f)$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

## Esercizio 2

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + y + 3z, -x + 2y + z)$$

- Trovare la matrice  $A$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$
- Calcolare la dimensione dell' $Imm(f)$
- Trovare una base per  $Ker(f)$
- Per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $(2, 3, h) \in Imm(f)$
- Dire se l'applicazione  $f$  è iniettiva, suriettiva e biettiva

## Esercizio 3

---

Sia data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Si determinino le equazioni dell'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avente  $A$  quale matrice rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$
- Si determinino una base per  $\text{Ker}(f)$  e la dimensione di  $\text{Imm}(f)$
- Si verifichi se posti  $\vec{v} = (2, 0, 4)$  e  $\vec{w} = (-3, 1, 3)$  valga  $\text{Imm}(f) = [\vec{v}, \vec{w}]$
- Si determini  $\dim(\text{Imm}(F) \cap \text{Ker}(f))$

## Esercizio 4

---

Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

definita da 
$$\begin{pmatrix} k+1 & -3 & k \\ 1 & -k & 2 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'applicazione  $f$  **non** è iniettiva
- Per i valori di  $k$  trovati al punto precedente si determini una base per  $\text{Ker}(f)$  e una per  $\text{Imm}(f)$
- Si dimostri che  $\mathbb{R}^3 = \text{Imm}(f) \oplus \text{Ker}(f)$

## Esercizio 5

Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un'applicazione lineare definita da  
 $f(x, y, z, t) = (x + z, y, 2x + 2z - y, -3y + x + z)$

- Si determinino una base e la dimensione di  $\text{Ker}(f)$
- Si determinino una base e la dimensione di  $\text{Imm}(f)$