(8.2)

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ appartiene ad } H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$z = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

s.t.

ATSP max

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\dots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\dots,n \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in R} \sum_{j \in V \setminus R} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall R \subset V \text{ tale che } r \in R \qquad (4)$$

(b) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \leq d \qquad (5)$$

(c) $$\sum_{(i,j) \in S} x_{ij} \geq \sum_{(i,j) \in T} x_{ij} \qquad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n \qquad (7)$$

dove r è un vertice qualsiasi di V

1) Rilassamento lagrangiano dei vincoli (5) e (6): ($\lambda \geq 0, \sigma \geq 0$)

$$z(\lambda,\sigma) = \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + \lambda\Big(d - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}\Big) + \sigma\Big(\sum_{(i,j)\in S} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in T} x_{ij}\Big)$$

$$= \lambda d + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij} - \lambda t_{ij})x_{ij} + \sigma\sum_{(i,j)\in S} x_{ij} - \sigma\sum_{(i,j)\in T} x_{ij}$$

$$= \lambda d + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{p}_{ij}x_{ij} \qquad (1')$$

con
$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij} - \lambda t_{ij} + \sigma \qquad (i,j)\in S$$
$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij} - \lambda t_{ij} - \sigma \qquad (i,j)\in T$$
$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij} - \lambda t_{ij} \qquad (i,j)\in A \setminus (S\cup T)$$
$O(n^2)$

s.t. (2), (3), (4), (7)

(1'), (2), (3), (4), (7) rappresenta il modello matematico di una istanza dell'ATSP in forma di massimo con "costo" dell'arco (i,j) pari a $\tilde{p}_{ij}$ $\forall (i,j)\in A$.

2) Eliminazione dei vincoli di connessione (4):
"Assignment Problem" in forma di massimo: tempo $O(n^3)$.

3) Eliminazione o Rilassamento ~~lagrangiano~~ dei vincoli (2):
"r - Longest Spanning Arborescence Relaxation" =
(Longest S.A. con radice r) + (arco a peso max entrante in r): $O(n^2)$

2) * Elementi del "Vettore subgradiente":

- $s_1(x) = d - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$, : vincolo (5) violato : $s_1(x) < 0$

- $s_2(x) = \sum_{(i,j) \in S} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in T} x_{ij}$, vincolo (6) violato : $s_2(x) < 0$

* Inizializzazione: $UB := \infty$, $\lambda := 0$, $\sigma := 0$

* Ad ogni iterazione:
  - si risolve il Problema Rilassato con i valori attuali di λ, σ e si ottiene $\bar{x}$ e $\overline{UB}$ (= valore funzione obiettivo);
  - $UB := \min\{UB, \overline{UB}\}$;
  - si calcolano $s_1(\bar{x})$ e $s_2(\bar{x})$; $\beta := \dots$
  - $\lambda := \max\{0, \lambda - \beta * s_1(\bar{x})\}$,
    $\sigma := \max\{0, \sigma - \beta * s_2(\bar{x})\}$;
  - * numero max di iterazioni = costante.

4) • Se vincolo (2) eliminato : come risposta 2);
- Se vincolo (2) rilassato in modo Lagrangiano, si aggiornano i corrispondenti moltiplicatori come per "Z-SSA Relaxation" vista a lezione per ATSP;
- * numero max di iterazioni = $O(n)$

Esercizio 9

Sono dati n "depositi" ed m "clienti". Ciascun cliente i ($i = 1, \dots, m$) ha un "potenziale profitto" non negativo p_i. Ciascun deposito j ($j = 1, \dots, n$) ha un "costo" non negativo c_j ed e` in grado di "servire" un sottoinsieme $R_j$ degli m clienti. In particolare, per ogni coppia [deposito j , cliente i] (con $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$) e` nota una quantita` $a_{i,j}$ , con $a_{i,j} = 1$ se il deposito j e` in grado di servire il cliente i e $a_{i,j} = 0$ in caso contrario.

Per ogni sottoinsieme S dei depositi, il corrispondente "profitto globale" e` dato dalla differenza tra (la somma dei profitti dei clienti che possono essere serviti dai depositi di S) e (la somma dei costi dei depositi di S).

Si vuole determinare un sottoinsieme S^* degli n depositi in modo che:

a) S^* contenga al massimo d depositi (con d valore prefissato maggiore di 0 e minore o uguale ad n);

b) il profitto globale di S^* sia massimo;

c) il costo totale dei depositi di S^* sia non inferiore ad un valore prefissato non negativo b.

Si denoti con h il numero di elementi della matrice ($a_{i,j}$) aventi valore 1 (con $h >= n$, $h >= m$). $h = \sum_{j=1}^{n} |R_j|$

Calcolare 'buoni" upper bound basati sui seguenti rilassamenti:

1)- 3 rilassamenti di tipo "Lagrangiano" diversi risolubili in tempo O(h).

2)- un rilassamento di tipo "surrogato" risolubile in tempo O(h) nel caso in cui tutti i clienti debbano essere serviti.

3) Per almeno 2 rilassamenti considerati alla domanda 1), descrivere le corrispondenti procedure di tipo "subgradiente".

Possibile modello di Programmazione Lineare Intera per il problema dato.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il deposito } j \text{ viene utilizzato } (j \in S^*) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } i \text{ è servito dai depositi di } S^* \\ 0 & 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$(1) \quad \max \; z = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$(2) \quad \sum_{j \in B_i} x_j \; \cancel{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}} x_j \geq y_i \qquad i = 1, \dots, m \quad (2')$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq d \; ; \quad (4) \; \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq b$$

$$(5) \quad x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$(6) \quad y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m$$

$$B_i = \{ j : i \in R_j \} \qquad i = 1, \dots, m$$

$$O(h)$$

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i| = h$$

9.3

da R_j $j=1 \ldots n$ definire $B_i = \{ j : i \in R_j \}$ $\Rightarrow O(R)$

nel modello matematico esprimere il vincolo (2) così:

$$\sum_{j \in B_i} x_j \geq y_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad (2')$$

1)

1) Rilassamento Lagrangiano dei vincoli (2') e (3) in $O(R)$

$(\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m; \ \sigma \geq 0)$

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j \in B_i} x_j - y_i \right) + \sigma \left(d - \sum_{j=1}^{n} x_j \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \sigma d + \max \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \right)$$

dove

$$\tilde{p}_i = p_i - \lambda_i \quad i = 1, \ldots, m \ ; \qquad \tilde{c}_j = c_j - \sum_{i \in R_j} \lambda_i + \sigma \quad j = 1, \ldots, n \ \Rightarrow O(R)$$

s.t. $O(m)$

(4), (5), (6)

Soluzione

Il problema può essere decomposto in due sottoproblemi

a) $\max \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i y_i$

s.t. $y_i \in \{0, 1\}$ $\quad i = 1, \ldots, m$ $\Rightarrow$

risolubile in tempo $O(m)$:
for $i = 1 \ldots m$
if $\tilde{p}_i > 0$ then $y_i = 1$
else $y_i = 0$

b) $\max - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j = - \min \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$

if $\tilde{c}_j \leq 0 : x_j := 1$ else $x_j := 0$

$N1 := \{ j : \tilde{c}_j \leq 0 \}$, $\bar{N} := N \setminus N1$

se $\sum_{j \in N1} c_j \geq b$ stop.

$- \min \sum_{j \in \bar{N}} \tilde{c}_j x_j$

$\sum_{j \in \bar{N}} c_j x_j \geq \bar{b}$ $\qquad \bar{b} := b - \sum_{j \in N1} c_j$ $\Rightarrow$ KP-01-MIN: Rilassamento Continuo risolubile in tempo $O(n)$ con B-Z

$x_j \in \{0, 1\}$ $\quad j \in \bar{N}$

1.2 Rilassamento Lagrangiano dei vincoli (2) e (4) in $O(R_2)$ 9.4

$(\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \ \alpha \geq 0)$

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sum_{j \in B_i} x_j - y_i \Big) + \alpha \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - b \Big) =$$

$$\Rightarrow \tilde{z} = -\alpha b + \max \Big(\sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \Big)$$

dove

$$\tilde{p}_i = p_i - \lambda_i \, ; \quad \tilde{c}_j = c_j - \sum_{i \in R_j} \lambda_i - \alpha c_j \quad \Rightarrow O(R_2)$$

$i = 1, \dots, m \quad O(m)$ $\qquad j = 1, \dots, n$

s.t.

(3), (5), (6)

Soluzione

Il problema può essere decomposto in due sottoproblemi

(a) vedi 1.1 $\Rightarrow O(m)$

(b) $\max - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j = \max \sum_{j \in \bar{N}} (-\tilde{c}_j) x_j$

s.t. $\sum_{j \in \bar{N}} x_j \leq d$

$x_j \in \{0, 1\} \quad j \in \bar{N}$

if $\tilde{c}_j \geq 0 : x_j := 0$

$N0 := \{ j : \tilde{c}_j \geq 0 \}, \ \bar{N} := N \setminus N0$

$\Rightarrow$ Rilassamento continuo di KP-01-MIN risolubile in Tempo $O(n)$ con B.7 (con pesi unitari)

1.3) Rilassamento Lagrangiano dei vincoli (2), (3), (4) in $O(P_2)$: $(\lambda_i \geq 0 \; i=1,\dots,m;\; \sigma \geq 0;\; \alpha \geq 0)$ 9.5

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sum_{j \in B_i} x_j - y_i \Big) + \sigma \Big(d - \sum_{j=1}^{n} x_j \Big) + \alpha \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - b \Big)$$

$$\Rightarrow \quad z = \sigma d - \alpha b + \max \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$$

dove

$$\tilde{p}_i = p_i - \lambda_i$$

$$\tilde{c}_j = c_j - \sum_{i \in R_j} \lambda_i - \alpha c_j + \sigma \quad \Rightarrow O(R)$$

s.t.

(5), (6)

Soluzione

Il problema può essere decomposto

(a) vedi 1.1 $\Rightarrow O(m)$

(b) se $\tilde{c}_j \leq 0$: $x_j := 1$

altrimenti $x_j := 0$ $\quad O(n)$

2 . <u>Rilassamento Surrogato nel caso in $O(n)$</u>

9.6

$$\max z = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \iff -\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ (*)

2) $\sum_{j \in B_i} x_j \geq 1 \quad i=1,\dots,m \qquad \alpha_i$

3) $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq d \qquad \beta \implies -\sum_{j=1}^{n} x_j \geq -d$

4) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq b \qquad \gamma$

(5) $x_j \in \{0,1\} \quad j=1,\dots,n$ (*)

<u>$(\alpha_i \geq 0 \ i=1,\dots,m;\ \beta \geq 0;\ \gamma \geq 0)$</u>

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j \in B_i} x_j\right) - \beta \sum_{j=1}^{n} x_j + \gamma \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \beta d + \gamma b$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j x_j \geq \tilde{c}$$ (*)

dove

$$\tilde{w}_j = \beta - \gamma c_j + \sum_{i \in R_j} \alpha_i \implies O(n)$$

$\tilde{c} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \beta d + \gamma b$ • <u>se $\tilde{c} \leq 0$: stop $(x_j := 0 \ j=1,\dots,n)$</u>

• <u>se $\tilde{w}_j \leq 0$: $x_j := 0$; $NO := \{j : \tilde{w}_j \leq 0\}$; $\bar{N} := N \setminus NO$</u>

(*) con $j \in \bar{N}$ }

KP-01 min $\implies$ <u>Rilassamento Lineare</u>

Risolubile in tempo $O(n)$ con B-Z

1.a) <u>Rilassamento Lagrangiano del vincolo (a)</u> $(\lambda \geq 0)$

$$L(\lambda) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda \left(a - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)$$

$$L(\lambda) = \lambda a + \min \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \quad (\tilde{c}_j = c_j - \lambda p_j; \; j = 1, \dots, n) \quad O(n)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \geq b \qquad (b)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \qquad (c)$$

<u>Soluzione:</u>

1) ordina gli oggetti secondo $\tilde{c}_j$ non decrescenti $(O(n \log n))$

2) $L(\lambda) := \lambda a$, $\bar{b} := 0$

3) <u>for</u> $j = 1, \dots, n$ <u>do</u>

<u>if</u> $(\tilde{c}_j \leq 0$ <u>or</u> $\bar{b} < b)$ <u>then</u> $x_j(\lambda) := 1$;
$L(\lambda) := L(\lambda) + \tilde{c}_j$;
$\bar{b} := \bar{b} + 1$

$O(n)$ <u>else</u> $x_j(\lambda) := 0$.

<u>Procedura Subgradiente</u> $(\lambda := 0; LB := 0)$

* $s(\lambda) := a - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j(\lambda)$; $LB := \max\{LB, L(\lambda)\}$;

* $\lambda := \max\left\{0, \lambda + \beta \dfrac{UB - LB}{s(\lambda)^2} s(\lambda)\right\}$

N.B. Il problema rilassato si potrebbe risolvere in tempo <u>$O(n)$</u> (algoritmo analogo a Balas-Zemel con "pesi" unitari).

3.1.b) Rilassamento Lagrangiano del vincolo (b) $(\lambda \geq 0)$

$(R(\lambda))$ $z(\lambda) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda \left(b - \sum_{j=1}^{n} x_j \right)$

$z(\lambda) = \lambda b + \min \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \quad (\tilde{c}_j = c_j - \lambda;\ j = 1, \dots, n)$ $O(n)$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \geq a \quad (a)$

(KP-01-Min) $\quad x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n$

Soluzione del Rilassamento Continuo di $(R(\lambda))$

1) for $j \in N$ do $\quad (N = \{1, \dots, n\})$

if $\tilde{c}_j \leq 0$ then $x_j(\lambda) := 1$

$O(n)$ else $x_j(\lambda) := 0$. $O(n)$

2) $S := \{j \in N : x_j(\lambda) = 0\}$, $\bar{a} := a - \sum_{j \in N \setminus S} p_j$;

if $\bar{a} \leq 0$ then vai al passo 3; $O(n)$

$O(n \log n)$ Risolvi C(KP-01-Min) corrispondente agli oggetti in S, aventi costo $\tilde{c}_j$ e peso p_j, con termine noto $\bar{a}$. Sia $x_j(\lambda)$ la soluzione ottima corrispondente (Dantzig).

3) $L(\lambda) := \lambda b + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j(\lambda)$

Procedura Subgradiente $(\lambda := 0, LB := 0)$

* $s(\lambda) := b - \sum_{j=1}^{n} x_j(\lambda)$; $LB := \max\{LB, L(\lambda)\}$;

* $\lambda := \max\left\{0, \lambda + \beta \frac{UB - LB}{s(\lambda)^2} s(\lambda)\right\}$

N.B. C(KP-01-Min) si potrebbe risolvere in tempo $O(n)$ (B-Z)

1.2) <u>Rilassamento Surrogato dei vincoli (a) e (b)</u>

- $S(\alpha, \gamma) \quad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\alpha \geq 0, \gamma \geq 0)$

s.t.

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \gamma \sum_{j=1}^{n} x_j \geq \alpha a + \gamma b$$

- $$\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j x_j \geq d \qquad (\overbrace{\tilde{p}_j = \alpha p_j + \gamma}^{\geq 0}, \quad \underline{O(n)}$$
$$d = \alpha a + \gamma b)$$

- $x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$

  - KP-01 Min
  - Rilassamento continuo con il metodo di Balas-Zemel ($O(n)$). Sia $L(\alpha, \gamma)$ il corrispondente lower bound.

<u>Procedura Subgradiente</u> ($\alpha := 1$, $\overset{\gamma}{\cancel{\beta}} := 1$, $LB := 0$)

$(x_j(\alpha, \gamma))$ = soluzione ottima del rilassamento continuo

* $s(\alpha) := a - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j(\alpha, \gamma)$

* $s(\gamma) := b - \sum_{j=1}^{n} x_j(\alpha, \gamma)$; $LB := \max\{LB, L(\alpha, \gamma)\}$

* $$\alpha := \max\left\{0, \alpha + \beta \frac{UB - LB}{(s(\alpha)^2 + s(\gamma)^2)} s(\alpha)\right\}$$

* $$\gamma := \max\left\{0, \gamma + \beta \frac{UB - LB}{(s(\alpha)^2 + s(\gamma)^2)} s(\gamma)\right\}$$

Possibile Modello Matematico

Definire la matrice binaria $(a_{i,j})$ con:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se viaggio } j \in V_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n \quad i = 1, \dots, m$$

Variabili decisionali binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se viaggio } j \text{ scelto (cioè } j \in S) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n$$

Modello PLI:

$$Z = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (a)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \geq 1 \qquad \cancel{i = 1, \dots, m \quad (b)}$$

(oppure

$$\sum_{j \in V_i} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, m) \quad (b)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \geq d \qquad (c)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n \quad (d)$$

* Nel modello matematico non utilizzare la matrice (a_{ij}) (la sua definizione richiede tempo $O(mn) > O(t+n)$)

* Dai sottoinsiemi V_i $(i=1,\dots,m)$ definire i sottoinsiemi

$B_j := \{i : j \in V_i,\ i=1,\dots,m\}$ contenente, per ogni viaggio j $(j=1,\dots,n)$, i clienti serviti da j:

i) for $j=1,\dots,n$ do $B_j := \emptyset$; $\qquad O(n)$

ii) for $i=1,\dots,m$ do

for $j \in V_i$ do $B_j := B_j \cup \{i\}$ $\qquad O(t)$

Tempo di calcolo per definire tutti i B_j: $O(t+n)$
(se $B_j = \emptyset$ si elimina il viaggio j, quindi $n \le t$)

3.1.a Rilassamento Lagrangiano degli m vincoli (b)

$(u_i \ge 0 \quad i=1,\dots,m)$

$$z(u) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(1 - \sum_{j \in V_i} x_j\right)$$

$$z(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i + \min \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \qquad \left(\bar{c}_j := c_j - \sum_{i \in B_j} u_i;\ j=1,\dots,n\right)$$

tempo $O(t)$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \ge d \qquad (c)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\dots,n \qquad (d)$$

* Soluzione (tempo $O(t)$)

Analoga alla soluzione di 1.1.b) che richiede tempo $O(n)$ utilizzando l'algoritmo di Balas-Zemel per il Rilassamento Continuo del corrispondente KP-01-Min.

* Procedura Subgradiente analoga a quella vista a lezione per il Set Covering Problem.

3.1.b) Rilassamento lagrangiano del vincolo (c) ($\lambda \geq 0$)

$$z(\lambda) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda \left(d - \sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right)$$

$$z(\lambda) = \lambda d + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \qquad (\tilde{c}_j := c_j - \lambda t_j;\ j = 1, \dots, n)$$

(tempo $O(n)$)

s.t.

$$\sum_{j \in V_i} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, m \qquad (b)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n \qquad (d)$$

* Soluzione

i) for $j = 1, \dots, n$ if $\tilde{c}_j \leq 0$ then $x_j(\lambda) := 1$
else $x_j(\lambda) := 0$. $O(n)$

ii) relativamente alle variabili $x_j(\lambda)$ aventi $\tilde{c}_j > 0$ ed ai vincoli (b) non soddisfatti dalle variabili aventi $\tilde{c}_j \leq 0$, il problema rilassato è un Set Covering Problem con $O(n)$ colonne ed $O(z)$ elementi uguali ad 1 nella matrice dei coefficienti.
Si può utilizzare qualsiasi rilassamento del Set Covering Problem avente complessità $O(z+n)$:
- rilassamento lagrangiano dei vincoli (b),
- rilassamento continuo del rilassamento surrogato dei vincoli (b) (utilizzando l'alg. di Balas-Zemel)

* Procedura Subgradiente analoga a quella utilizzata per la soluzione di 1.1.a), tenendo conto del rilassamento utilizzato per i vincoli (b).

3.2 Rilassamento surrogato dei vincoli (b) e (c)

$(u_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m; \ \lambda \geq 0)$

- $$z = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (a)$$

s.t. $$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j \in V_i} x_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} u_i + \lambda d$$

cioè: $$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i \in B_j} u_i + \lambda t_j \Big) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} u_i + \lambda d$$

cioè:

- $$\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j x_j \geq \tilde{d} \qquad (bc)$$

con $\tilde{p}_j = \sum_{i \in B_j} u_i + \lambda t_j, \ j = 1, \ldots, n; \quad \tilde{d} = \sum_{i=1}^{m} u_i + \lambda d \quad O(z)$

- $$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (d)$$

- (a), (bc), (d) definiscono un KP-01 Min

* Rilassamento continuo con il metodo di Balas-Zemel ($O(n)$).

* Procedura subgradiente simile a quella utilizzata per la soluzione di 1.2.

4.1 Rilassamento Surrogato degli n vincoli (2)

$(\pi_i = 1 \; ; \; i=1,\dots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (2')$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq c \qquad \left(\text{con } c = \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \qquad (2')$$

(tempo $O(n)$)

Posto $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ si ottiene il Modello Matematico:

$$\bar{z} = \max \sum_{j=1}^{m} p_j y_j \qquad (1')$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j \leq c \qquad (2')$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \leq \bar{k} \qquad (\text{con } \bar{k} = k-1) \qquad (4')$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\dots,m \qquad (5')$$

Il problema (1'), (2'), (4') e (5') è un problema Subset Sum con vincolo aggiuntivo (4') (quindi NP-Difficile).

Tale problema è "equivalente" al problema considerato nell'Esercizio 1, si possono quindi utilizzare i due rilassamenti Lagrangiani ed il rilassamento Surrogato definiti in 1.1.a, 1.1.b ed 1.2 e le corrispondenti procedure subgradiente. (tempo $O(m)$)

4.3 Rilassamento Lagrangiano dei vincoli (3) e (4')

$(\lambda_j \geq 0;\ j = 1, \dots, m;\ \sigma \geq 0)$

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) + \sigma\left(\bar{k} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)$$

(con $\bar{k} = k - 1$)

$$\max \sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sigma \bar{k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j x_{ij} \qquad (1'')$$

(con $\bar{p}_j = p_j - \lambda_j - \sigma$; $j = 1, \dots, m$) (tempo $O(m)$)

s.t. (2) e (5)

* Solluzione

- for $j = 1, \dots, m$ if $\bar{p}_j \leq 0$ then $x_{ij} := 0$ for $i = 1, \dots, n$
- Il problema definito da (1''), (2) e (5) relativo ~~veicoli~~ agli articoli $j \in \bar{M}$ aventi $\bar{p}_j > 0$ richiede la soluzione di n KP-01 distinti (uno per ciascun veicolo $i = 1, \dots, n$) della forma

$$\bar{z}_i = \max \sum_{j \in \bar{M}} \bar{p}_j \bar{x}_j^{(i)} \qquad (KP\text{-}01^{(i)})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in \bar{M}} p_j \bar{x}_j^{(i)} \leq a_i$$

$$\bar{x}_j^{(i)} \in \{0, 1\} \qquad j \in \bar{M} \quad (\text{con } |\bar{M}| \leq m)$$

- Il valore del corrispondente Upper Bound è dato da:

$$UB(\lambda, \sigma) := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sigma \bar{k} + \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i$$

- La complessità richiesta si può ottenere risolvendo (in tempo $O(m)$) il Rilassamento Continuo di $(KP\text{-}01^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$.

(4.5)

Procedura Subgradiente per il punto **4.2**

- for $j=1,\dots,m$ do $\lambda_j := 0$;
- $G := 0$; $UB := +\infty$.

* $s(\lambda_j) := 1 - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad (j=1,\dots,m)$

$s(G) := \bar{K} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$

* $UB := \min(UB, UB(\lambda, G))$;

* $\lambda_j := \max\{0, \lambda_j - t\, s(\lambda_j)\} \quad (j=1,\dots,m)$

con $t = \beta \dfrac{UB - LB}{\sum_{j=1}^{m} s(\lambda_j)^2 + s(G)^2}$

* $G := \max\{0, G - t\, s(G)\}$

- Se $s(\lambda_j) < 0 \Rightarrow$ vincolo (3) per j violato

$\Downarrow$

λ_j aumenta $\Rightarrow \bar{p}_j$ diminuisce (a parità di G)

$\Downarrow$

tendenza $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'articolo } j \text{ viene inserito in un} \\ \text{numero inferiore di veicoli} \\ (\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \text{ diminuisce) e quindi} \\ \text{il vincolo (3) per } j \text{ è meno violato} \end{array} \right.$

- Se $s(G) < 0 \Rightarrow$ vincolo (4) violato

$\Downarrow$

G aumenta $\Rightarrow$ tutti i $\bar{p}_j$ diminuiscono (a parità di λ_j)

$\Downarrow$

tendenza $\left\{ \begin{array}{l} \text{un numero inferiore di oggetti} \\ \text{viene inserito nei contenitori (se} \\ \bar{p}_j < 0 \text{ l'oggetto } j \text{ viene eliminato) e} \end{array} \right.$

5.1 Rilassamento Lagrangiano dei vincoli (c) con eliminazione dei vincoli di connessione (e). (λ_i qualsiasi, $i=1,\dots,n$)

$$LB(\lambda) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \right)$$

$$LB(\lambda) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \qquad (a')$$

con $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \lambda_i - \lambda_j$, $i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$) $O(n^2)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (b)$$

$$\sum_{i \in R_h} y_i \geq 1 \qquad h=1,\dots,K \qquad (d)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n$$

- Si può usare al max un arco (i,j) per ogni vertice i (vincolo (b)).

for $i=1,\dots,n$ do $\bar{c}_i := \tilde{c}_{i,j(i)} := \min_{j=1,\dots,n} \{\tilde{c}_{ij}\}$ $O(n^2)$

$$LB(\lambda) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_i x_{ij}$$

$$LB(\lambda) = \min \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$LB(\lambda) = \min \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y_i \qquad (a'')$$

s.t.

$$\sum_{i \in R_h} y_i \geq 1 \qquad h=1,\dots,K \qquad (d)$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n \qquad (f)$$

* Soluzione: (5.4)

- **for** $i=1,\dots,n$ **do**
  $y_i := 0;$
  for $j=1,\dots,n$ **do** $\qquad O(n^2)$
  $x_{ij} := 0;$

- **for** $i=1,\dots,n$ **do**
  if $\bar{c}_i \leq 0$ **then** $y_i := 1,\ x_{i,j(i)} := 1$ $\qquad O(n)$

- **for** $h=1,\dots,k$ **do**
  if $\sum_{i \in R_k} y_i = 0$ **then**
  sia l tale che $\bar{c}_l = \min\{\bar{c}_i : i \in R_h\}$;
  $y_l := 1;\ x_{l,j(l)} := 1.$ $\qquad O(n)$

Procedura Subgradiente

(**for** $i=1,\dots,n$ **do** $\lambda_i := 0;\ LB := 0$) $LB = \max\{LB, L(\lambda)\}$

- $s(\lambda_i) := \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji}$ $\qquad (i=1,\dots,m)$

$$\lambda_i := \lambda_i + \beta \frac{UB - LB}{\sum_{i=1}^{n} s(\lambda_i)^2} s(\lambda_i) \qquad (i=1,\dots,m)$$

- Se $s(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \Rightarrow$ vincolo (6) per vertice i violato

(numero archi uscenti da i < numero archi entranti in i)

$\Downarrow$ $\qquad \tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \lambda_i - \lambda_j$

λ_i diminuisce $\Rightarrow$ il costo $\tilde{c}_{ij}$ degli archi uscenti da i diminuisce

$\Downarrow$

vengono utilizzati più archi uscenti da i (vincolo (6) per i meno violato)

5.1) <u>Rilassamento Lagrangiano, dei vincoli (b) e (c) con eliminazione dei vincoli di connessione (e)</u> (α_i e λ_i qualsiasi, $i=1,\dots,n$)

$$LB(\alpha,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-y_i\Big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}x_{ji}\Big)$$

$$LB(\alpha,\lambda)=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$$

con $\tilde{c}_{ij}=c_{ij}+\alpha_i+\lambda_i-\lambda_j$ $\quad(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$ $\quad O(n^2)$

s.t.
$$\sum_{i\in R_h} y_i \ge 1 \qquad h=1,\dots,K \qquad (d)$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n$$
$$y_i\in\{0,1\} \qquad i=1,\dots,n$$

- 2 problemi indipendenti (y_i), (x_{ij}) $\Big\{ LB(\alpha,\lambda)= L'(x)-L''(y)$

$*$ (y_i) $L''(y)=\max\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$

s.t. $\sum_{i\in R_h} y_i\ge 1 \quad h=1,\dots,K \quad (d)$

$y_i\in\{0,1\} \quad i=1,\dots,n$

<u>for</u> $i=1,\dots,n$ <u>do</u>
  <u>if</u> $\alpha_i\ge 0$ <u>then</u> $y_i:=1$ <u>else</u> $y_i:=0$;

<u>for</u> $h=1,\dots,k$ <u>do</u>
  <u>if</u> $\sum_{i\in R_k} y_i=0$ <u>then</u>
    sia ℓ tale che $\alpha_\ell=\max\{\alpha_i : i\in R_h\}$ $\quad O(n)$
    $y_\ell:=1$.

$*$ (x_{ij}) <u>for</u> $i=1,\dots,n$ <u>do</u>
  <u>for</u> $j=1,\dots,n$ <u>do</u>
    <u>if</u> $\tilde{c}_{ij}\le 0$ <u>then</u> $x_{ij}:=1$ <u>else</u> $x_{ij}:=0$ $\quad O(n^2)$

5.2 Il circuito elementare visita esattamente un vertice di ciascuna delle K regioni

Il vincolo (d) diventa:

$$\sum_{i \in R_h} y_i = 1 \qquad h = 1, \dots, K \qquad (d')$$

* Si consideri ancora il Rilassamento lagrangiano dei vincoli (c) con eliminazione dei vincoli (e).

* Il problema rilassato è definito da (a''), (d'), (f).

Soluzione

- **for** $i = 1, \dots, n$ **do** $\qquad O(n^2)$
  - $y_i := 0$;
  - **for** $j = 1, \dots, n$ **do**
    - $x_{i,j} := 0$;
- **for** $h = 1, \dots, K$ **do**
  - sia ℓ tale che $\bar{c}_\ell = \min \{ \bar{c}_i : i \in R_h \}$;
  - $y_\ell := 1$; $x_{\ell, j(\ell)} := 1$. $\qquad O(n)$

* Procedura Subgradiente simile a quella considerata per il punto 5.1.