

1 Sviluppo ad alte temperature

Consideriamo un reticolo quadrato L , con M segmenti orizzontali e M segmenti verticali congiungenti i suoi siti. Queste particolari connessioni, che coinvolgono solo i siti primi vicini, saranno d'ora in avanti chiamate *link*. Nel limite termodinamico in cui $M \rightarrow +\infty$, il numero di link M tende al numero di siti N del reticolo, come si può intuire guardando la figura 1, e in particolare i rapporti $\frac{M}{N}$ tra numero di link e di siti.

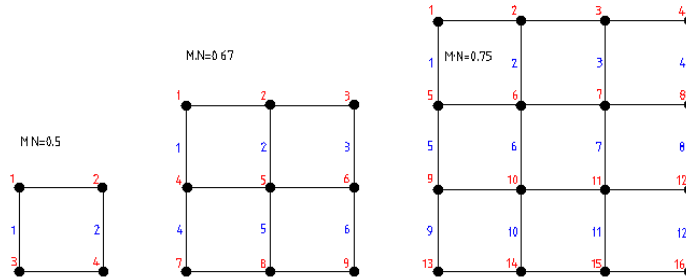


Figura 1: tre diversi reticoli

Consideriamo due costanti di accoppiamento J e J' rispettivamente per i link orizzontali e verticali. La funzione di partizione è dunque

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp[K \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + L \sum_{(i,k)} \sigma_i \sigma_k] \quad (1)$$

dove (i, j) sono i link orizzontali e (i, k) quelli verticali, mentre $K = \beta J$ e $L = \beta J'$. Tramite l'identità

$$\exp[x\sigma_i\sigma_j] = \cosh x(1 + \sigma_i\sigma_j \tanh x)$$

si può riscrivere Z_N come

$$Z_N = (\cosh K \cosh L)^M \sum_{\sigma} \left(\prod_{(i,j)} (1 + v\sigma_i\sigma_j) \prod_{(i,k)} (1 + w\sigma_i\sigma_k) \right) \quad (2)$$

dove $v = \tanh K$ e $w = \tanh L$, sempre $\leq 1 \forall T$. Inoltre per $T \rightarrow \infty$ v e w tendono a 0, e ciò ne giustificherà uno sviluppo in serie.

L'argomento tra parentesi tonde nella 2, risultato del prodotto delle due produttorie, è formato da 2^{2M} termini: ogni produttoria è composta da M termini (i link orizzontali o verticali) nella forma $(1 + v\sigma_i\sigma_j)$ o $(1 + w\sigma_i\sigma_k)$, una volta moltiplicati otteniamo ovviamente un prodotto di $2M$ termini nella stessa forma. Esplicitando il prodotto dei binomi tra parentesi si ottengono i 2^{2M} termini cercati, i cui primi termini sono

$$(1 + v\sigma_1\sigma_2)(1 + v\sigma_2\sigma_3)\dots(1 + v\sigma_j\sigma_{j+1})\dots(1 + w\sigma_1\sigma_2)\dots(1 + v\sigma_k\sigma_{k+1}) =$$

$$1 + v\sigma_1\sigma_2 + v\sigma_2\sigma_3 + \dots + v\sigma_j\sigma_{j+1} + \dots + w\sigma_1\sigma_2 + \dots + w\sigma_k\sigma_{k+1} + \dots$$

per passare via via a combinazioni più complesse, la cui generica è

$$(v\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\beta_1}) \times \dots \times (v\sigma_{\alpha_r}\sigma_{\beta_r}) \times (w\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\delta_1}) \times \dots \times (w\sigma_{\gamma_s}\sigma_{\delta_s}) \quad (3)$$

a seconda di quali elementi sto selezionando all'interno del prodotto. I valori estremi che può assumere la 3 sono 1 (se $r = s = 0$) e $(vw)^M \sigma_1^4 \sigma_2^4 \times \dots \times \sigma_M^4$ (se $r = s = M$). Di sicuro vale $r, s \leq M$.

A questo punto possiamo prendere un generico elemento nella forma 3 e, per ogni link orizzontale $(v\sigma_{\alpha_i}\sigma_{\beta_i})$ che trovo, lo accendo sul reticolo L . Stesso procedimento per i link verticali.

Se ad esempio dei 2^{2M} termini scelgo

$$(v\sigma_5\sigma_6)(v\sigma_6\sigma_7)(v\sigma_{11}\sigma_{12})(w\sigma_1\sigma_5)(w\sigma_{10}\sigma_{14}) \quad (4)$$

otterrò la figura 2 di sinistra.

Un'altra possibile combinazione, che nel capitolo successivo scopriremo essere molto interessante, potrebbe essere

$$(v\sigma_1\sigma_2)(v\sigma_5\sigma_6)(v\sigma_6\sigma_7)(v\sigma_{10}\sigma_{11})(w\sigma_1\sigma_5)(w\sigma_2\sigma_6)(w\sigma_6\sigma_{10})(w\sigma_7\sigma_{11}) \quad (5)$$

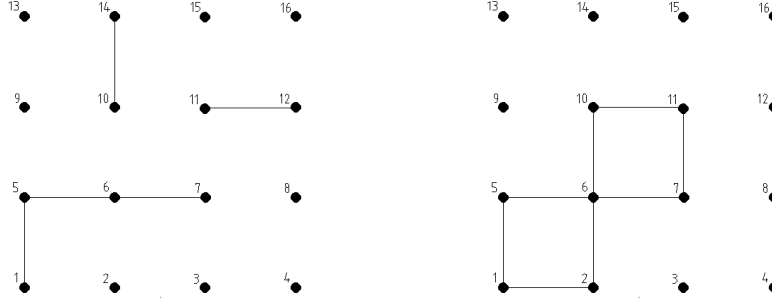


Figura 2: configurazioni grafiche sul reticolo della 4 e della 5

a cui corrisponde la configurazione grafica destra in figura 2.

Abbiamo ottenuto un risultato importante, in quanto siamo riusciti ad assegnare univocamente ad ogni elemento della sommatoria (un oggetto analitico) una configurazione grafica sul reticolo (un oggetto geometrico) e viceversa. Ora è anche chiaro perché avevamo introdotto due costanti di accoppiamento J e J' .

Possiamo riscrivere questa quantità in maniera più compatta come

$$v^r w^s \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \sigma_3^{n_3} \dots \quad (6)$$

dove r è il numero di link orizzontali accesi, s quelli verticali, e gli n_i il numero di link che partono o finiscono nel sito i -esimo. Il prezzo da pagare è che diventa molto più complicato (anche se a rigor di logica sempre possibile) capire come disegnare il grafico associato, in quanto non sappiamo più se un generico σ_i fosse associato ad un v o un w . Sottolineiamo però che questa non è una perdita di informazioni, diventa solo più difficile reperirle. A questo punto non dobbiamo dimenticarci che i termini discussi fin'ora erano in 2 argomento di una sommatoria estesa a tutte le configurazioni possibili degli spin sul reticolo, ovvero erano sommati al variare di tutte le possibili combinazioni di valori delle variabili $\sigma_i = \pm 1$. Questo implica che se uno o più esponenti n_i fosse dispari, il termine a cui appartengono non sopravviverebbe nella sommatoria, in quanto verrebbe eliminato dal suo opposto. In altre parole stiamo dicendo che solo i 6 simmetrici nelle variabili σ_i sopravvivono.

L'interpretazione geometrica è che le poligoni devono essere chiuse: non sopravvivono quelle che partono da un punto e arrivano in un altro, perché queste avrebbero $n_i = 1$ (o 3 se ripassa sul punto di partenza lungo il tagitto). Notiamo che è possibile che una configurazione grafica sia formata da più poligoni chiuse disgiunte, nel caso più semplice due quadrati, che

però non possono avere un lato in comune. A tal proposito nella figura 2 sopravviverebbe solo la configurazione di destra. Sul problema delle sovrapposizioni torneremo nel capitolo successivo.

Appurato ciò possiamo semplificare ulteriormente la 6 in

$$v^r w^s \quad (7)$$

e ne avremo 2^N per ogni valore di r e s .

Riscriviamo quindi 1 come

$$Z_N = 2^N (\cosh K \cosh L)^M \sum_P v^r w^s \quad (8)$$

con P insieme di tutte le poligoni chiuse che si possono accendere sul reticolo L .

A parte dei coefficienti (dipendenti dalla temperatura), la funzione di partizione è univocamente determinata dalla quantità

$$\Phi(v, w) = \sum_P v^r w^s \quad (9)$$

Scrivere esplicitamente la 9 è molto complicato all'aumentare di r e s , sia per quanto riguarda il calcolo della degenerazione, sia per il disegnare le configurazioni grafiche associate sul reticolo .

Se ci accontentiamo di sviluppare Φ ad alte temperature (quindi nelle variabili v e w , che ricordiamo essere piccole ad alte T), otteniamo

$$\sum_P v^r w^s = 1 + Nv^2w^2 + Nv^2w^4 + Nv^4w^2 + Nv^2w^6 + Nv^6w^2 + N^2v^4w^4 \quad (10)$$

Ogni termine ha associata, per quanto discusso prima, una ben definita configurazione grafica ed una degenerazione: vediamo alcune. 1 corrisponde a non aver tracciato nessun grafico, $(vw)^2$ sono gli N quadrati accendibili sul reticolo, si presentano poi i rettangoli con perimetro di 6 link con i lati maggiori verticali e orizzontali (anch'essi con degenerazione N), idem per quelli da 8. Il termine v^4w^4 porta le configurazioni grafiche di figura 3. La degenerazione dei quadrati è ovviamente N , dei quadrati senza uno spigolo $4N$ (N per ogni tipo), della coppia di quadrati $N(N-5)$, in quanto dopo aver disegnato il primo ho $N-5$ posti dove mettere il secondo. Non posso infatti nè sovrapporlo nè metterlo con dei lati adiacenti. Sommando ottengo il termine N^2 .

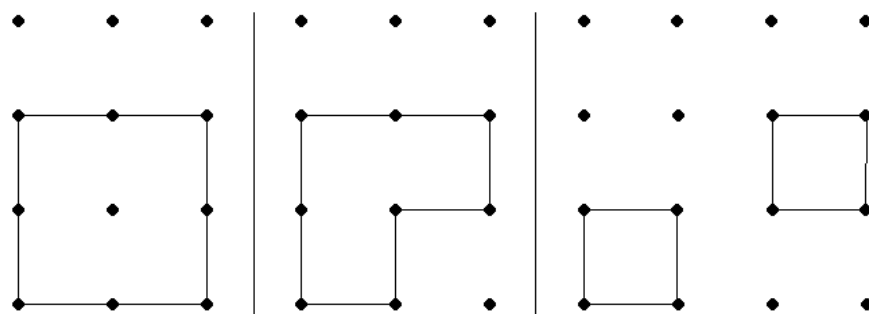


Figura 3: configurazioni grafiche sul reticolo di v^4w^4