



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Tecniche combinatorie nel Modello di Ising bidimensionale

Candidato

Alberto BOTTO POALA

Relatore

Prof. Marco BILLÒ

14.04.14

Tecniche combinatorie nel Modello di Ising bidimensionale

Alberto Botto Poala
Relatore Prof. Marco Billò

14.04.14

1 Sviluppo ad alte temperature

1.1 Il reticolo e l'Hamiltoniana

Consideriamo un reticolo quadrato $L \times L$ periodico, con N segmenti orizzontali e N segmenti verticali congiungenti i suoi N siti. Queste particolari connessioni, che coinvolgono solo i primi vicini, saranno d'ora in avanti chiamate *link*. Si veda a titolo di esempio la figura 1.

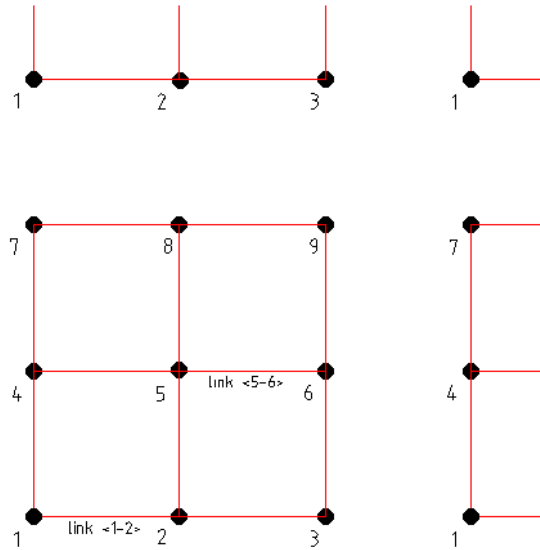


Figura 1: Esempio di reticolo quadrato periodico 3×3

Consideriamo due costanti di accoppiamento J e J' rispettivamente per i link orizzontali e verticali. La funzione di partizione è dunque

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp \left[K \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + K' \sum_{(i,k)} \sigma_i \sigma_k \right] \quad (1)$$

dove (i,j) sono i link orizzontali, (i,k) quelli verticali, mentre $K = \beta J$ e $K' = \beta J'$. Le variabili di spin σ_i assumono i due valori ± 1 .

Tramite l'identità

$$\exp[x \sigma_i \sigma_j] = \cosh x (1 + \sigma_i \sigma_j \tanh x)$$

si può riscrivere Z_N come

$$Z_N = (\cosh K \cosh K')^N \sum_{\sigma} \left(\prod_{(i,j)} (1 + v \sigma_i \sigma_j) \prod_{(i,k)} (1 + w \sigma_i \sigma_k) \right) \quad (2)$$

dove $v = \tanh K$ e $w = \tanh K'$, sempre $\leq 1 \forall T$. Inoltre per $T \rightarrow \infty$ v e w tendono a 0, e ciò ne giustificherà uno sviluppo in serie.

1.2 Lo sviluppo in serie

L'argomento tra parentesi tonde nell'equazione 2, risultato del prodotto delle due produttorie, è formato da 2^{2N} termini: ogni produttoria è composta da N termini (i link orizzontali o verticali) nella forma $(1 + v \sigma_i \sigma_j)$ o $(1 + w \sigma_i \sigma_k)$, una volta moltiplicati otteniamo ovviamente un prodotto di $2N$ termini nella stessa forma. Esplicitando il prodotto dei binomi tra parentesi si ottengono i 2^{2N} termini cercati, i primi sono:

$$(1 + v \sigma_1 \sigma_2)(1 + v \sigma_2 \sigma_3) \dots (1 + v \sigma_j \sigma_{j+1}) \dots (1 + w \sigma_1 \sigma_2) \dots (1 + v \sigma_k \sigma_{k+1}) =$$

$$1 + v \sigma_1 \sigma_2 + v \sigma_2 \sigma_3 + \dots + v \sigma_j \sigma_{j+1} + \dots + w \sigma_1 \sigma_2 + \dots + w \sigma_k \sigma_{k+1} + \dots$$

per passare via via a combinazioni più complesse, la cui forma generica è

$$(v \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\beta_1}) \times \dots \times (v \sigma_{\alpha_r} \sigma_{\beta_r}) \times (w \sigma_{\gamma_1} \sigma_{\delta_1}) \times \dots \times (w \sigma_{\gamma_s} \sigma_{\delta_s}) \quad (3)$$

a seconda di quali elementi si stiano selezionando all'interno del prodotto. I valori estremi che può assumere l'equazione 3 sono 1 (se $r = s = 0$) e $(vw)^M \sigma_1^4 \sigma_2^4 \times \dots \times \sigma_M^4$ (se $r = s = N$). Di sicuro vale $r, s \leq N$.

A questo punto possiamo prendere un generico elemento nella forma dell'espressione 3 e, per ogni link orizzontale $(v \sigma_{\alpha_i} \sigma_{\beta_i})$ che trovo, lo evidenzio sul

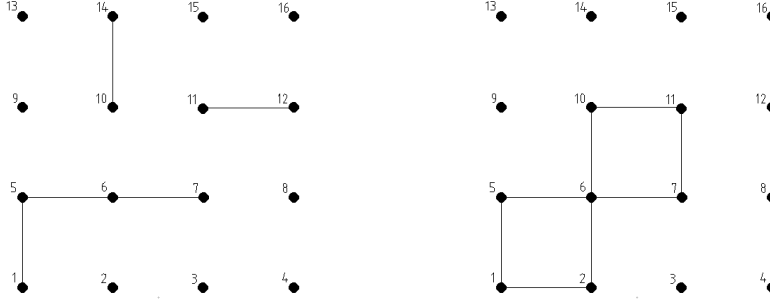


Figura 2: configurazioni grafiche sul reticolo rispettivamente dell'equazione 4 e 5

reticolo. Stesso procedimento per i link verticali.
Se ad esempio dei 2^{2N} termini scegliamo

$$(v\sigma_5\sigma_6)(v\sigma_6\sigma_7)(v\sigma_{11}\sigma_{12})(w\sigma_1\sigma_5)(w\sigma_{10}\sigma_{14}) \quad (4)$$

otteniamo la figura 2 di sinistra.

Un'altra possibile combinazione, di un tipo che in seguito scopriremo essere molto interessante, potrebbe essere

$$(v\sigma_1\sigma_2)(v\sigma_5\sigma_6)(v\sigma_6\sigma_7)(v\sigma_{10}\sigma_{11})(w\sigma_1\sigma_5)(w\sigma_2\sigma_6)(w\sigma_6\sigma_{10})(w\sigma_7\sigma_{11}) \quad (5)$$

a cui corrisponde la configurazione grafica destra in figura 2.

Abbiamo ottenuto un risultato importante, in quanto siamo riusciti ad assegnare univocamente ad ogni elemento della sommatoria (un oggetto analitico) una configurazione grafica sul reticolo (un oggetto geometrico) e viceversa. Ora è anche chiaro perché avevamo introdotto due diverse costanti di accoppiamento J e J' .

Possiamo riscrivere questa quantità in maniera più compatta come

$$v^r w^s \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \sigma_3^{n_3} \dots \quad (6)$$

dove r è il numero di link orizzontali accesi, s quelli verticali, e gli n_i il numero di link che partono o finiscono nel sito i -esimo. Il prezzo da pagare è che diventa molto più complicato (anche se a rigor di logica sempre possibile) capire come disegnare il grafico associato, in quanto non sappiamo più se un generico σ_i fosse associato ad un v o un w . Sottolineiamo però che questa non è una perdita di informazioni, diventa solo più difficile reperirle.

1.3 Simmetria della funzione di partizione

A questo punto non dobbiamo dimenticarci che i termini discussi fin'ora erano nell'equazione 2 argomento di una sommatoria estesa a tutte le configurazioni possibili degli spin sul reticolo, ovvero erano sommati al variare di tutte le possibili combinazioni di valori delle variabili $\sigma_i = \pm 1$. Questo implica che se uno o più esponenti n_i fossero dispari, il termine a cui appartengono non sopravviverebbe nella sommatoria, in quanto verrebbe eliminato dal suo opposto. In altre parole stiamo dicendo che sopravvivono solo le espressioni 6 simmetriche nelle variabili σ_i .

L'interpretazione geometrica è che le configurazioni grafiche devono essere chiuse: non sopravvivono quelle che partono da un punto e arrivano in un altro, perché queste avrebbero $n_i = 1$ (o 3 se ripassa sul punto di partenza lungo il tragitto). Notiamo che è possibile che una configurazione grafica sia formata da più poligoni chiuse disgiunte, nel caso più semplice due quadrati, che però non possono avere un lato in comune. A tal proposito nella figura 2 sopravviverebbe solo la configurazione di destra. Il problema delle sovrapposizioni verrà affrontato nella soluzione proposta da Vdovichenko, che vedremo in seguito.

Appurato ciò possiamo semplificare ulteriormente la 6 in

$$v^r w^s \quad (7)$$

e ne avremo 2^N per ogni valore di r e s .

Riscriviamo quindi l'equazione 1 come

$$Z_N = 2^N (\cosh K \cosh L)^M \sum_P v^r w^s \quad (8)$$

con P insieme di tutte le poligoni chiuse che si possono accendere sul reticolo.

A parte dei coefficienti (dipendenti dalla temperatura), la funzione di partizione è univocamente determinata dalla quantità

$$\Phi(v, w) = \sum_P v^r w^s \quad (9)$$

Scrivere esplicitamente l'espressione 9 è molto complicato all'aumentare di r e s , sia per quanto riguarda il calcolo della degenerazione, sia per il disegnare le configurazioni grafiche associate sul reticolo.

Se ci accontentiamo di sviluppare Φ ad alte temperature (quindi nelle va-

riabili v e w , che ricordiamo essere piccole ad alte T), otteniamo

$$\begin{aligned}\Phi(v, w) &= \sum_P v^r w^s = \\ &= 1 + Nv^2w^2 + Nv^2w^4 + Nv^4w^2 + \\ &\quad + Nv^2w^6 + Nv^6w^2 + \frac{1}{2}N(N+5)v^4w^4 \dots\end{aligned}\tag{10}$$

Ogni termine ha associata, per quanto discusso prima, una ben definita configurazione grafica ed una degenerazione. Vediamone alcune:

- 1 corrisponde a non aver tracciato nessun grafico
- $(vw)^2$ sono gli N quadrati accendibili sul reticolo
- si presentano poi i rettangoli con perimetro di 6 link con i lati maggiori verticali e orizzontali (anch'essi con degenerazione N). Idem per quelli da 8
- Il termine v^4w^4 porta le configurazioni grafiche di figura 3. La degenerazione dei quadrati è ovviamente N , dei quadrati senza uno spigolo $4N$ (N per ogni tipo). Quella della coppia di quadrati $N(N-5)/2$, in quanto dopo aver disegnato il primo ho $N-5$ posti dove mettere il secondo. Non posso infatti nè sovrapporlo nè metterlo con dei lati adiacenti. Sommando il questi tre termini ottengo $N(N+5)/2$

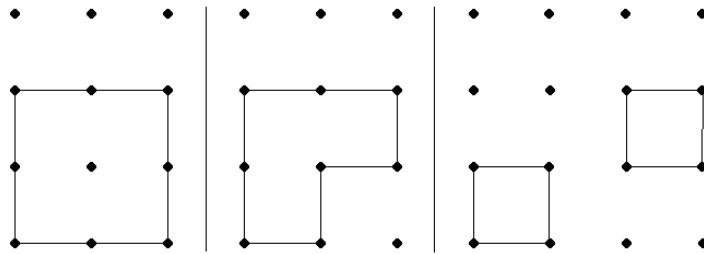


Figura 3: configurazioni grafiche sul reticolo di v^4w^4

2 Soluzione combinatoria di Vdovichenko

2.1 Configurazioni grafiche e cammini chiusi

Vediamo ora la *soluzione combinatoria di Vdovichenko*, che si prefigge l'obiettivo di calcolare tutti i termini della serie. Stiamo quindi per affrontare una soluzione esatta e non una semplice approssimazione.

Nel capitolo precedente avevamo considerato due diverse costanti di accoppiamento J e J' con il solo scopo di separare le variabili v e w , il ch   ci ha permesso di comprendere meglio la configurazione grafica dei termini $v^r w^s$ sul reticolo.

D'ora in poi per semplicit   considereremo $J = J'$ e quindi $v = w$: stiamo dicendo che i termini $v^4 w^2$ e $v^2 w^4$ nell'equazione 10 ora compaiono tutti come v^6 , con degenerazione $2N$.

Definiamo inoltre come *maglia* una sola poligonale chiusa, come *grafico* l'unione di una o pi   maglie disgiunte.

La funzione di partizione diventa dunque

$$Z_N = 2^N (1 - v^2)^{-N} \Phi(v) \quad (11)$$

con

$$\Phi(v) = \sum_r g_r v^r \quad (12)$$

dove g_r    il numero di *grafici* non necessariamente connessi con perimetro r disegnabili sul reticolo.

Il primo obiettivo di questo capitolo    scrivere questi grafici che avevamo evidenziato sul reticolo nello sviluppo ad alte temperature come dei *cammini chiusi*. Il problema sorge davanti alle ambiguit   come quella in figura 4, che pu   essere interpretata nei tre modi descritti.

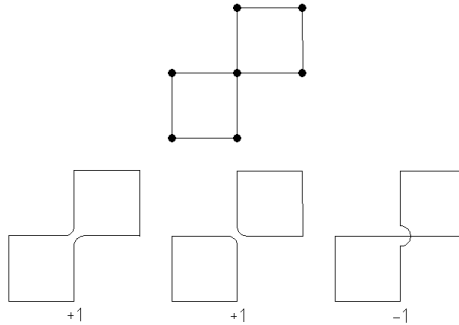


Figura 4: tre diversi grafici di v^8 con identica configurazione sul reticolo

In particolare la configurazione sul reticolo di v^8 può essere letta come sovrapposizione di due maglie di v^4 , oppure come un'unica maglia di v^8 , con o senza intersezione.

Si intuisce però che ogni autointersezione di una configurazione sul reticolo ha tutte e sole le interpretazioni di figura 4, e questo risolve subito il problema: è sufficiente pesare ogni grafico con un fattore $(-1)^n$, dove n è il numero di autointersezioni. In questo modo il primo e il terzo contano come $+1$ e il secondo come -1 , e la somma rimane invariata.

Vi è un ulteriore vantaggio nel pesare i grafici nel modo sopra descritto. Come accennato precedentemente non è ammissibile come configurazione grafica sul reticolo di v^8 quella formata da due quadrati con un lato in comune: i due siti centrali avrebbero un numero dispari di ingressi/uscite, σ_i sarebbe elevata al cubo, ed essendo antisimmetrica verrebbe, come già spiegato, eliminata. Nel caso però venissero contati, se pesati con il fattore $(-1)^n$ non darebbero comunque contributo, in quanto si eliminerebbero a vicenda. Si veda la figura 5 per capire come.

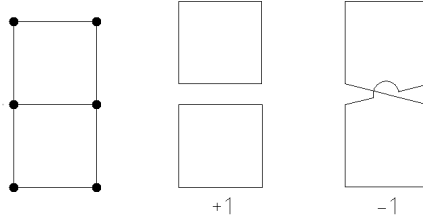


Figura 5: soluzione del problema della disparità nei siti σ_i

Bisogna quindi capire come determinare il numero di autointersezioni n di una maglia. Il problema risiede nel fatto che questa è una proprietà globale, mentre noi lavoriamo in maniera locale, ovvero guardando spigolo dopo spigolo cosa succede.

2.2 Le autointersezioni e il Teorema di Gauss

Il metodo che si utilizza è discendente del noto teorema di Gauss, che afferma che l'angolo spazzato dalla tangente su un cammino chiuso senza intersezioni è 2π . Generalizzando si intuisce che questo angolo è $2\pi(k+1)$, con k intero positivo o negativo che aumenta o diminuisce a seconda che le intersezioni avvengano in un verso oppure nell'altro, come illustrato in figura 6.

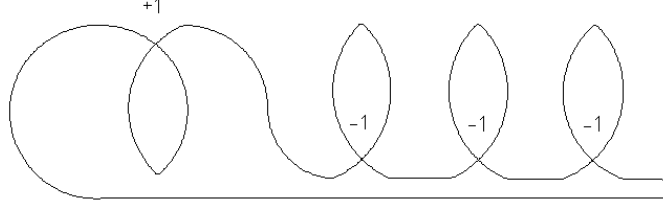


Figura 6: Generalizzazione del teorema di Gauss sull'angolo spazzato dalla tangente di una curva

La procedura da seguire è la seguente: ad ogni punto del cammino corrisponde un angolo di rotazione che può essere $\alpha = 0, \pm\pi/2$. Se il percorso ruota di un angolo α gli attribuiamo una fase $e^{i\alpha/2}$ e per il teorema di Gauss, considerando i contributi di tutti i siti, acquisisce il valore $(-1)^{\nu+1}$, con ν somma delle intersezioni di una maglia, pesate del loro segno. Per un insieme di più maglie si ottiene $(-1)^{n+s}$ con $n = \sum \nu$ e s numero di maglie. Ovviamente noi vorremmo ad esponente solo n e non s , dopo vedremo come risolvere questo inconveniente.

2.3 Grafici e maglie

Chiamiamo ora con f_r il numero di maglie di perimetro r pesate nel modo sopra descritto. Il numero dei grafici composti da due maglie disgiunte pesate sarà

$$g_r^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{r_1+r_2=r} f_{r_1} f_{r_2} \quad (13)$$

dove ovviamente il $2!$ è necessario in quanto i grafici sono indistinguibili. Qui torna molto utile quanto discusso nella 5, in quanto avremmo dovuto altrimenti fare un calcolo più complesso. Un generico grafico è composto da s maglie, con s variabile da 1 a $+\infty$, quindi si scrive

$$\Phi(v) = \sum_{s=1} (-1)^s \frac{1}{s!} \sum_{r_1, r_2, \dots = 0}^{\infty} v^{r_1+r_2+\dots+r_s} f_{r_1} \dots f_{r_s} \quad (14)$$

Il fattore $(-1)^s$ serve a compensare l'inconveniente lasciato in sospeso poche righe sopra, il fattore di simmetria $1/s!$ è la generalizzazione dell' $1/2!$ che appare nell'equazione 13. Notiamo che gli esponenti r_i assumono tutti i possibili valori da 1 a $+\infty$ in tutte le possibili combinazioni, quindi anche $r = \sum_i r_i$. Possiamo quindi riorganizzare la sommatoria come

$$\sum_{r_1, r_2, \dots = 0}^{\infty} v^{r_1 + r_2 + \dots + r_s} f_{r_1} \dots f_{r_s} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} v^r f_r \right)^s$$

e sostituirla nell'equazione 14, che riconosciamo subito essere uno sviluppo in serie di un esponenziale:

$$\Phi(v) = \exp \left[- \sum_{r=0}^{\infty} v^r f_r \right] \quad (15)$$

Resta da determinare la quantità f_r , cioè il numero di maglie chiuse.

2.4 Parametrizzazione delle maglie

Iniziamo indicizzando con $\mu = 1, 2, 3, 4$ gli spostamenti sul reticolo rispettivamente verso destra, in alto, sinistra, in basso. L'informazione che daremo d'ora in avanti sarà sempre del tipo

(coordinate del sito, direzione di ingresso nel sito)

Decidiamo quindi di partire dal sito di coordinate (i_0, j_0) con direzione *di ingresso* in detto sito μ_0 . Notiamo che questa direzione non ha alcuna influenza sul cammino che stiamo per descrivere. Possiamo così introdurre la funzione $W_r(i, j, \mu)$ come il numero pesato di cammini che arrivano al punto (i, j) con direzione μ dopo r passi data o meno una condizione iniziale. Poniamo inoltre per comodità $\mu = \mu_0$, tanto come già detto μ_0 non ha influenza sul cammino che stiamo per percorrere. Alcuni esempi dati $(i_0, j_0, \mu_0) = (0, 0, 1)$ sono (si veda la figura 7):

- $W_1(1, 0, 1) = 1$ dobbiamo partire da $(0, 0)$ diretti verso destra e dobbiamo arrivare in $(1, 0)$ da sinistra. Ovviamente c'è solo una possibilità
- $W_2(1, 1, 4) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ anche qui una sola possibilità
- $W_4(0, 0, 4) = 2$

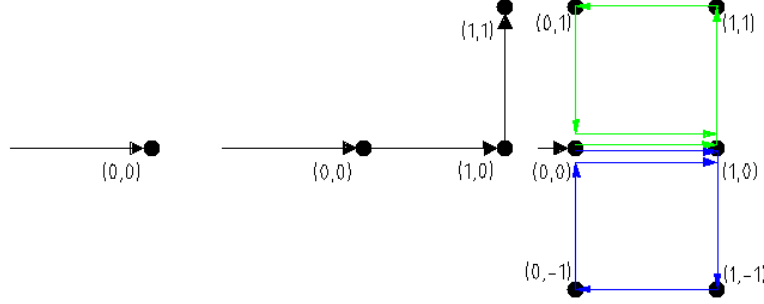


Figura 7: Esempi di cammini sul reticolo

Questo significa che $W_r(i_0, j_0, \mu)$ indica il numero pesato di cammini che partono in (i_0, j_0) dopo esserci arrivati con direzione $\mu_0 = \mu$, e ci ritornano dopo r passi nella direzione μ . Possiamo quindi scrivere

$$f_r = \frac{1}{2r} \sum_{i_0, j_0, \mu} W_r(i_0, j_0, \mu)$$

dove il fattore $1/2r$ è necessario in quanto nella sommatoria un solo cammino è percorso nei due versi e partendo da ognuno dei suoi r punti. La funzione $W_r(i, j, \mu)$ gode di proprietà ricorsive ben definite e facilmente intuibili, nella figura 8 rappresentiamo graficamente la prima.

$$\begin{aligned} W_{r+1}(i, j, 1) &= W_r(i-1, j, 1) + e^{-i\frac{\pi}{4}} W_r(i-1, j, 2) + 0 + e^{i\frac{\pi}{4}} W_r(i-1, j, 4) \\ W_{r+1}(i, j, 2) &= e^{i\frac{\pi}{4}} W_r(i, j-1, 1) + W_r(i, j-1, 2) + e^{-i\frac{\pi}{4}} W_r(i, j-1, 3) + 0 \\ W_{r+1}(i, j, 3) &= 0 + e^{i\frac{\pi}{4}} W_r(i+1, j, 2) + W_r(i+1, j, 3) + e^{-i\frac{\pi}{4}} W_r(i+1, j, 4) \\ W_{r+1}(i, j, 4) &= e^{-i\frac{\pi}{4}} W_r(i, j+1, 2) + 0 + e^{i\frac{\pi}{4}} W_r(i, j+1, 3) + W_r(i, j+1, 4) \end{aligned} \quad (16)$$

Come per ogni funzione ricorsiva, ad un certo punto arriviamo a chiederci quanto valga W_0 . Questa funzione è perfettamente determinata dalle condizioni iniziali.

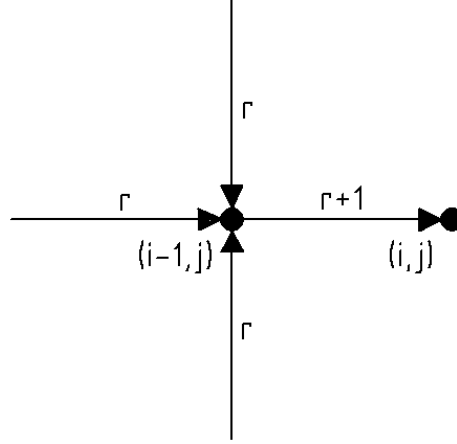


Figura 8: Rappresentazione grafica della prima equazione ricorsiva

Esiste quindi un'applicazione lineare con matrice associata Λ tale per cui

$$W_{r+1}(i, j, \mu) = \sum_{i', j', \mu'} \Lambda(ij\mu|i'j'\mu') W_r(i', j', \mu') \quad (17)$$

Notiamo che Λ è funzione non solo degli indici direzionali μ e μ' , che variano da 1 a 4, ma anche di quelli di posizione. Stiamo quindi parlando di una matrice di grandi dimensioni.

Λ è l'oggetto che fa evolvere il sistema, ci dice quali cammini sono permessi e con quali fasi associate.

I suoi elementi di matrice sono il numero di modi di partire dal sito (i_0, j_0) dopo esserci arrivati con direzione μ_0 e di arrivare al sito (i, j) con direzione μ dopo r passi. Di conseguenza il generico elemento diagonale $\Lambda(i_0, j_0, \mu|I_0, j_0, \mu_0)$ altro non è che il numero di cammini che partono in (i_0, j_0) e ci ritornano con direzione $\mu = \mu_0$. Notiamo che stiamo parlando di cammini chiusi. Detto ciò intuiamo che la traccia di Λ^r

$$\text{Tr}(\Lambda^r) = \sum_{i_0, j_0, \mu} \Lambda^r(i_0, j_0, \mu|I_0, j_0, \mu_0)$$

altro non è che il numero di cammini chiusi, a fissato r , che si possono percorrere sul reticolo. Questa quantità è legata al numero di maglie grazie alla relazione

$$f_r = \frac{1}{2r} \sum_{i_0, j_0, \mu} \Lambda^r(i_0, j_0, \mu|I_0, j_0, \mu_0) = \frac{1}{2r} \text{Tr}(\Lambda^r) \quad (18)$$

Come sappiamo la traccia è un invariante per cambio di base e, nell'ipotesi in cui siamo in grado di diagonalizzare Λ , possiamo scrivere

$$f_r = \frac{1}{2^r} \text{Tr}(\Lambda^r) = \frac{1}{2^r} \sum_a \lambda_a^r \quad (19)$$

dove ovviamente λ_a sono gli autovalori di Λ . Sostituendo questa espressione nell'equazione 15 troviamo

$$\Phi(v) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_i \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} v^r \lambda_i^r \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_i \log(1 - v \lambda_i) \right] = \prod_i \sqrt{1 - v \lambda_i} \quad (20)$$

nella quale le uniche incognite da determinare sono gli autovalori.

La strada più semplice per diagonalizzare Λ è trasformarla secondo Fourier rispetto alle coordinate sul reticolo. Partiamo dalla trasformata secondo Fourier della quantità W_r definita come segue:

$$W_r(p, q, \mu) = \sum_{k, l=0}^L e^{\frac{-2\pi i}{L}(pk+ql)} W_r(k, l, \mu) \quad (21)$$

dove p e q assumono i valori da 1 a L .

Riconsideriamo poi l'espressione dell'equazione ricorsiva 17 dopo tale trasformazione. Con semplici calcoli, assume la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} W_{r+1}(p, q, 1) \\ W_{r+1}(p, q, 2) \\ W_{r+1}(p, q, 3) \\ W_{r+1}(p, q, 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^{-p} & \alpha^{-1}\epsilon^{-p} & 0 & \alpha\epsilon^{-p} \\ \alpha\epsilon^{-q} & \epsilon^{-q} & \alpha^{-1}\epsilon^{-q} & 0 \\ 0 & \alpha\epsilon^p & \epsilon^p & \alpha^{-1}\epsilon^p \\ \alpha^{-1}\epsilon^q & 0 & \alpha\epsilon^q & \epsilon^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_r(p, q, 1) \\ W_r(p, q, 2) \\ W_r(p, q, 3) \\ W_r(p, q, 4) \end{pmatrix}$$

dove $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{L}}$.

Notiamo che sia a destra che a sinistra le variabili sono (p, q) ; confrontando con l'espressione 17 notiamo che la trasformata della matrice Λ è diagonale negli indici p e q

$$\Lambda(p, q, \mu | p', q', \mu') = \begin{pmatrix} \epsilon^{-p} & \alpha^{-1}\epsilon^{-p} & 0 & \alpha\epsilon^{-p} \\ \alpha\epsilon^{-q} & \epsilon^{-q} & \alpha^{-1}\epsilon^{-q} & 0 \\ 0 & \alpha\epsilon^p & \epsilon^p & \alpha^{-1}\epsilon^p \\ \alpha^{-1}\epsilon^q & 0 & \alpha\epsilon^q & \epsilon^q \end{pmatrix} \delta_{pp'} \delta_{qq'}$$

Se riprendiamo ora l'equazione 20 possiamo scrivere la produttoria tramite la matrice Λ non diagonalizzata come

$$\prod_i 1 - v \lambda_i = \det(\mathbf{1} - v \Lambda) = (1 + v^2)^2 - 2v(1 - v^2) \left(\cos \frac{2\pi p}{L} + \cos \frac{2\pi q}{L} \right)$$

Sostituendo tale risultato nell'espressione 11 della funzione di partizione otteniamo

$$Z_N = 2^N (1 - v^2)^{-N} \prod_{p,q=0}^L \left[(1 + v^2) - 2v(1 - v^2) \left(\cos \frac{2\pi p}{L} + \cos \frac{2\pi q}{L} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.5 L'energia libera

L'energia libera è calcolata dunque come

$$\begin{aligned} \frac{-F(T)}{kT} &= \log(Z_N) = \\ &= N \log(2) - N \log(1 - v^2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^L \log \left[(1 + v^2) - 2v(1 - v^2) \left(\cos \frac{2\pi p}{L} + \cos \frac{2\pi q}{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Nel limite termodinamico per cui $L \rightarrow +\infty$ la somma si trasforma in un integrale definito

$$\begin{aligned} \frac{-F(T)}{kT} &= \\ &= N \log(2) - N \log(1 - v^2) + \\ &\quad + \frac{N}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega_1 d\omega_2 \log \left[(1 + v^2) - 2v(1 - v^2) (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Notiamo che la $F(T)$ ottenuta è estensiva, in quanto direttamente proporzionale al numero di siti del reticolo N .

Nota $F(T)$ si può derivare la termodinamica.