1 Vdovichenko 1

Nel capitolo precedente avevamo considerato due diverse costanti di accoppiamento J e J' con il solo scopo di separare le variabili v e w, il ché ci ha permesso di comprendere meglio la configurazione grafica dei termini $v^r w^s$ sul reticolo.
D'ora in poi per semplicità considereremo $J = J'$ e quindi $v = w$: stiamo dicendo che i termini $v^4 w^2$ e $v^2 w^4$ della **??** ora compaiono tutti come v^6 con degenerazione $2N$.
Definiamo inoltre come *maglia* una sola poligonale chiusa, come *grafico* l'unione di una o più maglie.
La funzione di partizione diventa dunque

$$Z_N = 2^N (1 - v^2)^{-N} \Phi(v) \tag{1}$$

con

$$\Phi(v) = \sum_r g_r v^r \tag{2}$$

dove g_r è il numero di grafici non necessariamente connessi con perimetro r accendibili sul reticolo.
L'obbiettivo di questo capitolo è scrivere i grafici che avevamo acceso sul reticolo nello sviluppo ad alte temperature come dei *cammini chiusi*.
Il problema sorge davanti a grafici ambigui come quello in figura 1, che può essere interpretato nei tre modi descritti.
In particolare la configurazione sul reticolo di v^8 può essere letta come sovrapposizione di due maglie di v^4, oppure come un'unica maglia di v^8, con o senza intersezione.
Si intuisce però che ogni autointersezione di una configurazione sul reticolo ha tutte e sole le interpretazioni di figura 1, e questo risolve subito il problema: è sufficiente pesare ogni grafico con un fattore $(-1)^n$, dove n è il numero di autointersezioni. In questo modo il primo e il terzo contano come $+1$ e il secondo come -1, e la somma rimane invariata.
Vi è un ulteriore vantaggio nel pesare i grafici nel modo sopra descritto.

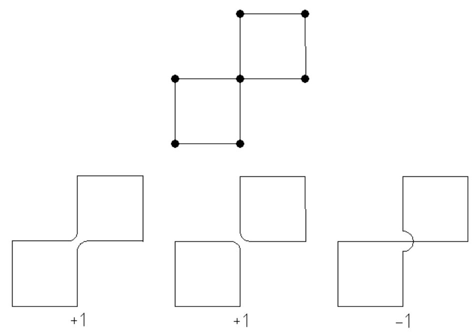

Figura 1: tre diversi grafici di v^8 con identica configurazione sul reticolo

Come accennato precedentemente non è ammissibile come configurazione grafica sul reticolo di v^8 quella formata da due quadrati con un lato in comune: i due siti centrali avrebbero un numero dispari di ingressi/uscite, σ_i sarebbe elevata al cubo, ed essendo antisimmetrica verrebbe, come già spiegato, eliminato. Nel caso però venissero contati, se pesati con il fattore $(-1)^n$ non darebbero comunque contributo, in quanto si eliminerebbero a vicenda. Si veda la figura 2 per capire come.

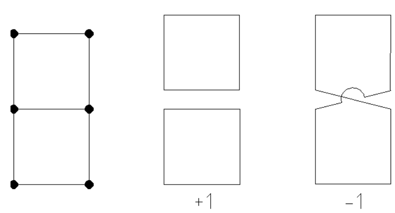

Figura 2: tre diversi grafici di v^8 con identica configurazione sul reticolo

Bisogna quindi capire come determinare il numero di autointersezioni n di una maglia. Il problema risiede nel fatto che questa è una proprietà globale, mentre noi lavoriamo in maniera locale, ovvero guardando spigolo dopo spigolo cosa succede.
Il metodo che si utilizza è discendente del noto teorema di Gauss che afferma che l'angolo spazzato dalla tangente su un cammino chiuso senza intersezioni è 2π. Generalizzando si intuisce che questo angolo è $2\pi(k+1)$, con k intero postivo o negativo che aumenta o diminuisce a seconda che le intersezioni avvengano in un verso oppure nell'altro. La procedura da seguire è la seguente: ad ogni punto del cammino corrisponde un angolo di rotazione che

può essere $\alpha = 0; \pm\pi/2$, gli si associa una fase $e^{i\alpha/2}$ e si ottiene dopo aver camminato su tutta la maglia il valore $(-1)^{\nu+1}$, con ν somma delle intersezioni di una maglia, pesate del loro segno. Per un insieme di più maglie si ottiene $(-1)^{n+s}$ con $n = \sum \nu$ e s numero di maglie. Per capire meglio si veda la figura X. Ovviamente noi vorremmo ad esponente solo n e non s, dopo vedremo come risolvere questo inconveniente.
Chiamiamo ora con f_r il numero di maglie di perimetro r pesate nel modo sopra descritto. Il numero dei grafici composti da due maglie pesate sarà

$$\frac{1}{2!} \sum_{r_1+r_2=r} f_{r_1} f_{r_2}$$

dove ovviamente il 2! è necessario in quanto i grafici sono indistinguibili. Qui torna molto utile quanto discusso nella 2, in quanto avremmo dovuto altrimenti fare un calcolo più complesso. Un generico grafico è composto da s maglie, con s variabile da 1 a $+\infty$, quindi si scrive

$$\Phi(v) = \sum_{s=0} (-1)^s \frac{1}{s!} \sum_{r_1, r_2, \ldots =1}^{\infty} v^{r_1+r_2+\ldots r_s} f_{r_1} \ldots f_{r_s} \tag{3}$$

Il fattore $(-1)^s$ serve a compensare il seguente inconveniente lasciato in sospeso poche righe sopra, $\frac{1}{s!}$ è l'estensione dell'$\frac{1}{2!}$. Notiamo che gli esponenti r_i assumono tutti i possibili valori da 1 a $+\infty$ in tutte le possibili combinazioni, quindi anche $r = \sum_i r_i$. Possiamo quindi riorganizzare la sommatoria come

$$\sum_{r_1, r_2 \ldots =1}^{\infty} v^{r_1+r_2+\ldots r_s} f_{r_1} \ldots f_{r_s} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} v^r f_r \right)^s$$

e sostituirla nella 3, che riconosciamo subito essere uno sviluppo in serie di un esponenziale:

$$\Phi(v) = \exp \left[- \sum_{r=1}^{\infty} v^r f_r \right]$$

Resta da determinare la quantità f_r.