Progetto di Ricerca Operativa

Studente: Alberto De Bortoli
Matricola: 518505

A.A. 2007/'08

Sommario

Progetto di Ricerca Operativa tenuto dal prof. Luigi De Giovanni durante il II trimestre dell'anno accademico 2007/'08 presso l'Università di Padova.

Indice

1 Premessa

Oggetto di questo progetto è un problema reale. Essendo docente in una scuola di musica di medio-piccole dimensioni, l'organizzazione delle aule e degli orari delle lezioni tenendo conto della disponibilità degli insegnanti risulta essere un problema reale. Il progetto analizzerà con gli strumenti e le metodologie illustrate durante il corso come poter risolvere tale problema. Per arricchire il problema, mi riservo di inserire vincoli non strettamente reali, ma utili per dare al problema un aspetto più interessante.

2 Formulazione del problema

Una scuola di musica deve organizzare per il nuovo anno accademico l'organizzazione delle aule e l'orario delle lezioni. Le aule a disposizione sono 3 e gli insegnanti sono in totale 9, ognuno dei quali tiene un corso: chitarra, basso, batteria, canto, violino, sax, pianoforte, tastiera, fisarmonica. Gli allievi totali iscritti quest'anno sono 75 distribuiti come in tabella. Ogni allievo ha diritto a 1 ora di lezione a settimana. Le lezioni sono individuali.

Strumento	**Numero allievi**
chitarra	14
basso	7
batteria	8
canto	5
violino	9
sax	4
pianoforte	15
tastiera	10
fisarmonica	3

Le lezioni avvengono da lunedì al sabato soltanto di pomeriggio. La disponibilità va dalle 14.00 alle 20.00. Bisogna tenere conto di alcuni vincoli importanti. Solo in alcune aule è possibile tenere alcuni corsi, ad esempio il corso di batteria si può tenere solo in aula 1 poiché la batteria è presente solo lì. La situazione è riassunta nella seguente tabella (dove la X corrisponde alla possibilità di effettuare lezione).

Strumento	**Aula 1**	**Aula 2**	**Aula 3**
chitarra	X	X	X
basso	X	X	
batteria	X		
canto	X	X	X
violino	X	X	X
sax	X	X	X
pianoforte	X	X	
tastiera	X		
fisarmonica	X	X	X

Inoltre alcuni insegnanti insegnano anche in altre scuole di musica, con orari già definiti e sono disponibili solo alcuni giorni. Ogni spostamento di un insegnante ha un costo diverso (dovuto alla distanza che ognuno di loro deve percorrere per arrivare alla scuola). Con uno spostamento un insegnante può tenere fino a 6 lezioni al giorno (6 ore lavorative), quindi la cosa migliore da fare in generale è cercare di far fare ad un insegnante meno spostamenti possibili in modo da poter tenere lezioni il più possibile contigue per meno giorni possibili a settimana.

Insegnante	**Disponibilità**	**Costo Spostamento**
chitarra	lun, mer, gio, ven	10
basso	sabato	5
batteria	*sempre*	7
canto	*sempre*	1
violino	lun, mar, mer, ven (non dalle 14 alle 16)	10
sax	*sempre*	3
pianoforte	*sempre*	4
tastiera	*sempre*	12
fisarmonica	mar	5

L'obiettivo finale è di minimizzare il costo dovuto agli spostamenti degli insegnanti.

3 Analisi

A prima vista questo problema sembra essere un classico problema di "*Time Tabling*". Un "*timetable*" è una lista organizzata, spesso espressa in forma tabellare che mostra le informazioni riguardo una serie di eventi organizzati: in particolare il tempo in cui un particolare evento deve essere eseguito.

Nel problema in questione si deve ottimizzare la schedulazione delle lezioni nelle diverse aule in modo tale da permettere agli insegnanti di poter tenere il più alto numero possibile di lezioni al giorno al fine di minimizzare gli spostamenti settimanali. E' vero infatti che facendo muovere un insegnante per una sola ora di lezione si verrebbe a pagare uno spostamento per soltanto quell'ora, quando invece si avrebbe potuto utilizzare quello spostamento per sfruttare l'insegnante per altre ore durante la stessa giornata lavorativa. Lo scopo quindi è quello di minimizzare il costo totale degli spostamenti.

Come descritto nel capitolo successivo, sono state fatte delle scelte per poter manipolare i dati che è meglio descrivere. L'insieme I si riferisce agli insegnanti, l'insieme G ai giorni settimanali lavorativi e l'insieme N alle aule. L'insieme J invece si riferisce alle ore lavorative della giornata che vanno dalle 14.00 alle 20.00. Essendo 6 ore, J risulta essere: $J \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dove ad esempio 2 rappresenta l'ora di lezione dalle 15.00 alle 16.00.

Sono state utilizzate delle variabili binarie y con 4 indici $(g,\ j,\ i,\ n)$ che rappresentano l'occupazione di un'aula in un determinato giorno, ad una determinata ora da parte di un insegnante.

$$y_{gjin} = \begin{cases} 1, & \text{aula } n \text{ occupata da } i \text{ nel giorno } g \text{ all'ora } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le variabili binarie z con 2 indici $(g,\ i)$ invece indicano se vi è uno spostamento per un insegnante in un determinato giorno.

$$z_{gi} = \begin{cases} 1, & \text{l'insegnate } i \text{ ha uno spostamento nel giorno } g \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I vincoli che riguardano l'abilitazione di solo alcune aule per determinate lezioni e quelli riguardanti le disponibilità degli insegnanti non sono stati scritti per esteso nella Formulazione del modello per evitare ripetizioni. I vincoli completi per il problema sono espressi nel codice AMPL nel relativo capitolo.

4 Formulazione del modello

Insiemi

- $I = \{ch, bs, bt, vc, vl, sx, pf, kb, fi\}$: insieme degli insegnanti per strumento;
- $G = \{lun, mart, merc, giov, ven, sab\}$: insieme dei giorni della settimana;
- $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: insieme delle 6 ore lavorative del giorno;
- $N = \{1, 2, 3\}$: insieme delle aule disponibili;

Parametri

- $c = c_i : c \in C$: costo spostamento insegnante i;
- $s = s_i : s \in S$: numero di studenti per insegnante i;

Variabili decisionali

- $x = x_i : i \in I$: numero di spostamenti per l'insegnante i.
- $y = y_{in}^{gj} : g \in G, j \in J, i \in I$: occupazione dell'aula n nel giorno g, all'ora j, da parte dell'insegnante i;
- $z = z_{gi} : g \in G, i \in I$: spostamento nel giorno g, da parte dell'insegnante i;

Modello

f.o.

$$min \sum_{i \in I} c_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{g \in G, j \in J, n \in N} y_{in}^{gj} = s_i : \forall i \in I$$

(domanda)

$$\sum_{i \in I} y_{in}^{gj} \leq 1 : \forall g \in G, \forall j \in J, \forall n \in N$$

(aula occupata da un insegnante per volta)

$$\sum_{n \in N} y_{in}^{gj} \leq 1 : \forall g \in G, \forall j \in J, \forall i \in I$$

(un insegnante occupa al più un'aula all'ora)

$$\sum_{g \in G} z_{gi} = x_i : \forall i \in I$$

(spostamenti come somma di z)

$$y_{in}^{gj} \leq z_{gi} : \forall g \in G, \forall j \in J, \forall i \in I, \forall n \in N$$

(spostamento di un insegnante in un determinato giorno)

$$\sum_{j \in J} y_{chn}^{gj} = 0 : \forall g \in \{mar, sab\}, \forall n \in N$$

(esempio di indisponibilità di un insegnante,
per esempio *ch* non disponibile *mar* e *sab*)

$$\sum_{g \in G, j \in J} y_{bs3}^{gj} = 0$$

(esempio di non abilitazione di un'aula,
per esempio aula 3 non abilitata per lezioni di *bs*)

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in I$$
$$y_{in}^{gj} \in \{0,1\}, \forall g \in G, \forall j \in J, \forall i \in I$$
$$z_{gi} \in \{0,1\}, \forall g \in G, \forall i \in I$$

(dominio)

5 Modello AMPL

Poiché la versione gratuita per studenti di AMPL utilizzata a lezione consente di risolvere problemi per un massimo di 300 variabili e 300 vincoli, non è stato possibile risolvere il problema con tutti i dati necessari, ma sono state effettuate prove sul problema con una quantità minore di dati in maniera tale da non superare i suddetti vincoli. Il modello costruito risulta comportarsi in maniera corretta, dando una soluzione ottima.

Le variabili del problema completo risultano essere: $x = 9, y = 3{*}6{*}6{*}9 = 972, z = 9 * 6 = 54$ per un totale di 1035, mentre i vincoli risultano essere: $9 + (6*6*3) + (6*6*9) + 9 + (6*6*9*3) = 1422$. La figura 1 lo conferma.

```
Sorry, the student edition of AMPL is limited to 300 variables
and 300 constraints and objectives (after presolve).
You have 1035 variables, 1422 constraints, and 1 objective.
```

Figura 1: problema senza vincoli di abilitazione aule e disponibilità insegnanti

E' facile confrontare questi numeri guardando il modello AMPL.

AMPL applica un "risparmio" sulla creazione di alcune variabili che vengono vincolate a essere nulle, facendo diminuire il numero totale di variabili. Essendo 6 i vincoli sulle abilitazioni delle varie aule, le variabili vincolate a essere nulle sono 216 (6 giorni * 6 ore * 6 vincoli). Per i vincoli di disponibilità degli insegnanti otteniamo un risparmio di 591 variabili che vengono vincolate ad essere nulle (12*3 + 30*2 + 12*3 + 2*3 + 30*3).

AMPL ha quindi un totale di $1035 - 216 - 228 = 591$ variabili da gestire e simile risparmio si ottiene per i vincoli, per una riduzione da 1422 a 820, come mostrato in fig 2.

```
Sorry, the student edition of AMPL is limited to 300 variables
and 300 constraints and objectives (after presolve).
You have 591 variables, 820 constraints, and 1 objective.
```

Figura 2: problema con vincoli di abilitazione aule e disponibilità insegnanti

Si mostra di seguito il codice del file "model" AMPL

```
#INSIEMI
    set I;
    set G;
    set N;
    set J;
```

```
#PARAMETRI
    param s{I};
    param c{I};

#VARIABILI
    var y{G,J,I,N}  binary;
    var x{I}        >= 0 integer;
    var z{G,I}      binary;

#MODELLO

#FUNZIONE OBIETTIVO
    minimize    costo_totale: sum{i in I} c[i]*x[i];

#VINCOLI
s.t.    #domanda
        domanda {i in I}:
        sum{g in G, j in J, n in N} y[g,j,i,n] = s[i];

s.t.    #aula occupata da un solo insegnante per volta
        utilizzo_aule {g in G, j in J, i in I}:
        sum{n in N} y[g,j,i,n] <= 1;

s.t.    #insegnante occupa non più di un'aula all'ora
        limite_insegnanti {g in G, j in J, n in N}:
        sum{i in I} y[g,j,i,n] <= 1;

s.t.    #spostamenti come somma di z
        spostamenti {i in I}:
        x[i] = sum{g in G} z[g,i];

s.t.    #spostamento di un insegnante in un giorno
        spostamenti_giornalieri {j in J, g in G, i in I, n in N}:
        y[g,j,i,n] <= z[g,i];


# abilitazione aule
#------------------

#aule non abilitate per le lezioni di basso

s.t.    basso_no_aula3:
```

```
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'bs',3] = 0;

#aule non abilitate per le lezioni di batteria

s.t.    batteria_no_aula2:
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'bt',2] = 0;

s.t.    batteria_no_aula3:
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'bt',3] = 0;

#aule non abilitate per le lezioni di pianoforte

s.t.    pianoforte_no_aula3:
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'pf',3] = 0;

#aule non abilitate per le lezioni di tastiera

s.t.    tastiera_no_aula2:
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'kb',2] = 0;

s.t.    tastiera_no_aula3:
        sum{g in G, j in J} y[g,j,'kb',3] = 0;


# disponibilità insegnanti
#-------------------------

#insegnante di chitarra non disponibile martedì e sabato

s.t.    disp_ch_1 {n in N}:
        sum{j in J} y['mar',j,'ch',n] = 0;

s.t.    disp_ch_2 {n in N}:
        sum{j in J} y['sab',j,'ch',n] = 0;


#insegnante di basso disponibile solo al sabato

s.t.    disp_bs_1 {n in N}:
        sum{j in J} y['lun',j,'bs',n] = 0;

s.t.    disp_bs_2 {n in N}:
        sum{j in J} y['mar',j,'bs',n] = 0;
```

```
s.t.    disp_bs_3 {n in N}:
        sum{j in J} y['mer',j,'bs',n] = 0;

s.t.    disp_bs_4 {n in N}:
        sum{j in J} y['gio',j,'bs',n] = 0;

s.t.    disp_bs_5 {n in N}:
        sum{j in J} y['ven',j,'bs',n] = 0;


#insegnante di violino non disponibile giovedì, venerdì dalle 14.00
alle 16.00 e sabato

s.t.    disp_vl_1 {n in N}:
        sum{j in J} y['gio',j,'vl',n] = 0;

s.t.    disp_vl_2 {n in N}:
        y['ven',1,'vl',n] = 0;

s.t.    disp_vl_3 {n in N}:
        y['ven',2,'vl',n] = 0;

s.t.    disp_vl_4 {n in N}:
        sum{j in J} y['sab',j,'vl',n] = 0;


#insegnante di fisarmonica disponibile solo il martedì

s.t.    disp_fs_1 {n in N}:
        sum{j in J} y['lun',j,'fs',n] = 0;

s.t.    disp_fs_2 {n in N}:
        sum{j in J} y['mer',j,'fs',n] = 0;

s.t.    disp_fs_3 {n in N}:
        sum{j in J} y['gio',j,'fs',n] = 0;

s.t.    disp_fs_4 {n in N}:
        sum{j in J} y['ven',j,'fs',n] = 0;

s.t.    disp_fs_5 {n in N}:
        sum{j in J} y['sab',j,'fs',n] = 0;
```

Si mostra di seguito il codice del file “data” AMPL

```
#INSIEMI
    set I := ch bs bt vc vl sx pf kb fs;
    set G := lun mar mer gio ven sab;
    set N := 1 2 3; set J := 1 2 3 4 5 6;

#PARAMETRI
    param c:=
        ch  10
        bs  5
        bt  7
        vc  1
        vl  10
        sx  3
        pf  4
        kb  12
        fs  5 ;

    param s:=
        ch  14
        bs  7
        bt  8
        vc  5
        vl  9
        sx  4
        pf  15
        kb  10
        fs  3 ;
```