

# Progetto di Automatica

*Ricerca di una funzione di trasferimento per modellizzare un sistema meccanico in analisi*



**POLITECNICO**  
**MILANO 1863**

La Mensa:

Compagnone Claudio 10704960  
De Luca Alberto 10773657  
Di Genni Alessandro 10797749  
Di Ubaldo Matteo 10808525

## Sommario

<b>1. Prefazione .....</b>	<b>3</b>
1.1 Obiettivo .....	3
1.2 Dati sperimentali.....	3
<b>2. Analisi della risposta allo scalino .....</b>	<b>4</b>
2.1 Analisi dei dati .....	4
2.2 Problematiche.....	5
<b>3. Analisi risposta alle sinusoidi .....</b>	<b>6</b>
3.1 Filtraggio .....	6
.....	7
3.2 Risposta ad ingressi sinusoidali.....	7
3.3 Analisi diagrammi di bode .....	8
.....	9
.....	9
.....	9
.....	9
.....	9
<b>4. Conclusione.....</b>	<b>9</b>
<b>5. Codice matlab .....</b>	<b>11</b>

# 1. Prefazione

## 1.1 Obiettivo

Il progetto ha come obiettivo lo sviluppo di un modello matematico in grado di approssimare il comportamento di un sistema fisico tramite l'analisi di dati sperimentali. Il sistema fisico in questione è un Qube-servo 2 prodotto dalla Quanser:



Figura 1 (Quanser, Qube-servo 2)

Si vuole descrivere mediante il modello matematico il legame tra ingresso (voltaggio [V]) uscita (velocità [m/s]) formulando una funzione di trasferimento sul software MatLab.

## 1.2 Dati sperimentali

Di seguito si riportano i dati presi in esame:

- Serie di rampe di tensione di diversa pendenza (ramp1.mat, ramp2.mat, ramp3.mat);
- Serie di scalini di tensione di diversa durata e ampiezza (scalini.mat, square.mat);
- Serie di sinusoidi di tensione con diversa ampiezza e pulsazione che partono da 0 V (seni\_nooffset.mat, seni\_largeamplitude\_nooffset.mat);
- Serie di sinusoidi di tensione a diversa pulsazione che partono da 2V (seni\_offset2, sine1.mat, sine2.mat, sine3.mat, sine4.mat, sine5.mat, sine6.mat)

Ogni file contiene le seguenti variabili:

- $t$  = tempo (s);
- $u$  = motor input voltage (V);
- $x$  = motor / disk position (counts);
- $v$  = derivata di  $x$ .

Tali dati sono stati raccolti, come descritto nel PowerPoint di presentazione del lavoro, con un filtro passa basso collegato in serie caratterizzato da un modello matematico dettato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{150}{150 + s}$$

Dunque, ci aspettiamo, nelle nostre analisi, un comportamento del sistema con un grado relativo + 1 rispetto a quello del sistema fisico non influenzato dal collegamento in serie con il filtro passa-basso.

## 2. Analisi della risposta allo scalino

### 2.1 Analisi dei dati

A partire dai dati sperimentali contenuti nel file *scalini.mat*, si è tracciato il grafico delle risposte a una serie di scalini di tensione di diversa durata e ampiezza (da 1 a 10 V).

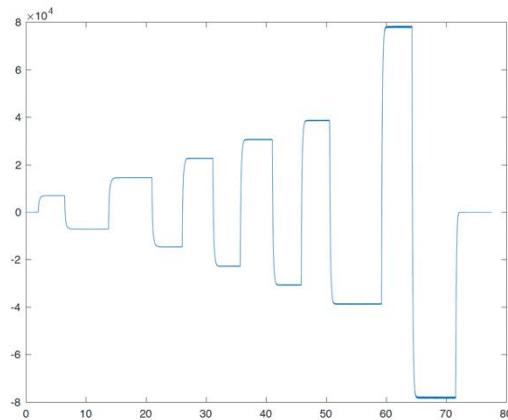


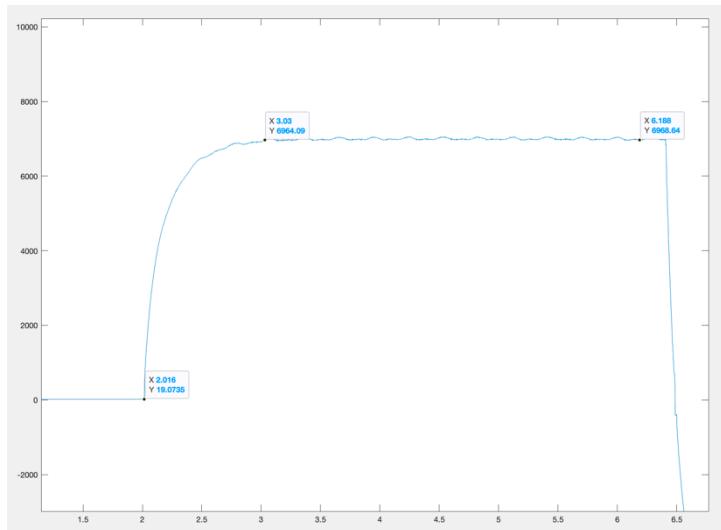
Figura 2 (risposta a scalini)

Dall'analisi del grafico delle risposte ricaviamo i seguenti dati:

- Tempo di assestamento = 1,014 [s]
- Guadagno statico  $\cong 7000$

*Il tempo di assestamento viene considerato misurando il tempo in cui l'uscita raggiunge il 99% del guadagno mentre il guadagno è stato individuato osservando il valore a cui si assesta il grafico.*

Calcolo del tempo di assestamento  $T_a$  e della costante di tempo  $\tau$  dal grafico:



**Figura 3**

$$T_a = 3,03 - 2,016 = 1,014 \rightarrow \tau = \frac{T_a}{5} = \frac{1,014}{5} = 0,2028$$

## 2.2 Problematiche

Si verifica una variazione del guadagno non lineare rispetto all'ampiezza degli scalini. Mentre per lo scalino unitario il guadagno risulta 7000 [count/s], per lo scalino di ampiezza 10 il valore si assesta a circa 7800.

Si nota inoltre che i disturbi presenti nel grafico hanno un andamento periodico, il cui periodo coincide con quello di rivoluzione del motore (circa 0.2926 s), pertanto si tratta di errori dovuti al meccanismo di misurazione e alla trasmissione del segnale.

Risulta dai dati sperimentali che ad un ingresso di 0V corrisponde un'uscita non nulla in particolare (19,07). Questo fenomeno è causato da un errore di misura dovuto ad un allineamento non perfetto all'asse di misura ideale, lo consideriamo dunque un valore di bias.

Basandoci su queste informazioni, abbiamo ricavato una prima ipotesi di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau} = \frac{7000}{1 + 0,22s}$$

Confrontando la risposta associata alla nostra funzione di trasferimento (linea arancione) e quella delle prove sperimentali (linea blu). (Figura 4) si nota uno scostamento che varia tra circa il 4% e il 10%.

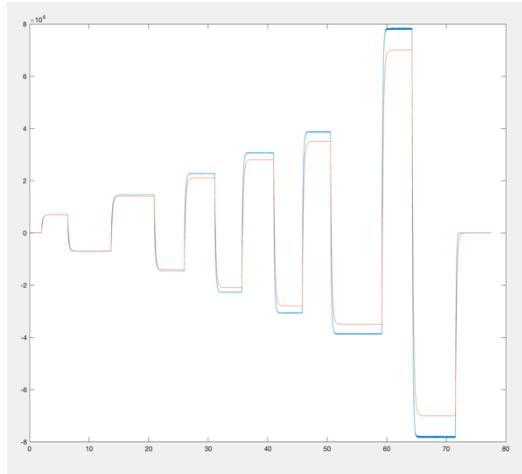


Figura 4

Le analisi condotte nei capitoli successivi avranno lo scopo di approfondire il comportamento del nostro sistema per minimizzare il margine d'errore della funzione stimata.

### 3. Analisi risposta alle sinusoidi

#### 3.1 Filtraggio

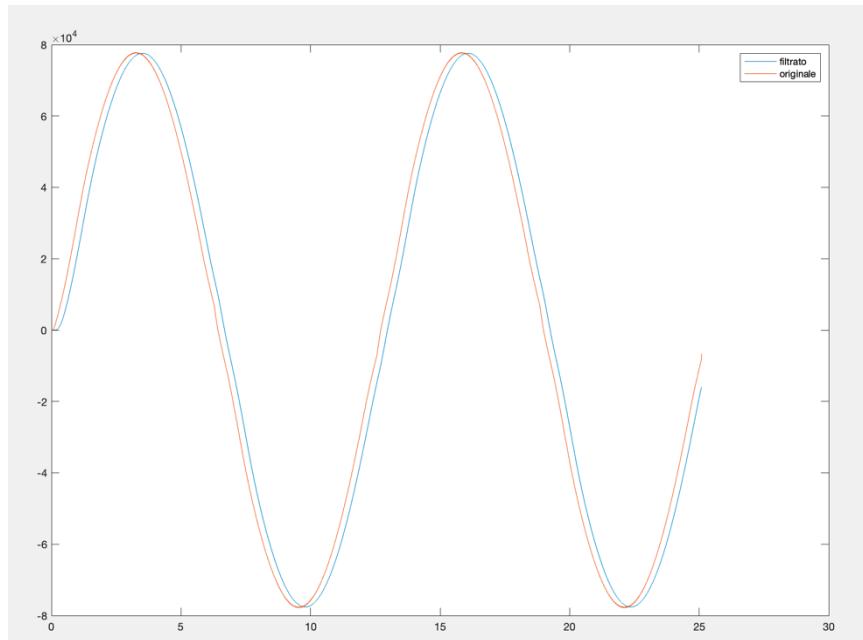
L'analisi in risposta in frequenza del sistema si sviluppa in merito a tre tipologie diverse di ingressi:

1. Sinusoidi senza offset;
2. Sinusoidi con offset;
3. Sinusoidi con ampiezza maggiore rispetto ai casi precedenti.

Le misure forniteci come dati sperimentali sono disturbate da un notevole rumore di misura, il quale è caratterizzato da frequenze abbastanza alte rispetto a quelle delle sinusoidi in ingresso.

Dunque, abbiamo ritenuto opportuno l'utilizzo di un filtro passa-basso al fine di reiettare il rumore ad alta frequenza e "pulire" i dati. Difatti anche i dati forniti ci, come spiegato nelle slides, sono stati "raccolti" con un filtro.

Tale filtro è stato scelto con una frequenza di taglio tale da esser sufficientemente distante dalla frequenza della sinusoide da analizzare al fine di non inficiare le proprietà (quali l'ampiezza) da misurare. Per quanto riguarda la fase, poiché l'adoperamento di un filtro influisce sulla fase della sinusoide in analisi, le misurazioni sono state fatte su le sinusoidi non filtrate (figura 5).



**Figura 5**

### 3.2 Risposta ad ingressi sinusoidali

Per ricavare informazioni dai dati sinusoidali abbiamo applicato il *TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA*, il quale permette di ottenere informazioni sul segnale in uscita a regime.

Difatti, tal teorema garantisce che il segnale in uscita a regime sia un segnale della stessa pulsazione della sinusoide in ingresso modificata in ampiezza e fase in base al modulo e alla fase della funzione di trasferimento che modellizza il sistema, valutata alla pulsazione del segnale d'ingresso  $\rightarrow |G(j\omega)| \angle(G(j\omega))$ .

Al fine di valutare il sistema in condizioni di regime, facendo riferimento alla costante di tempo tau identificata nell'analisi della risposta a scalino, analizziamo i dati a partire da dall'istante di tempo 5tau.

Al fine di studiare precisamente le sinusoidi abbiamo sviluppato un programma Matlab che ci ha permesso di ricavare tali informazioni per sinusoidi alla diversa pulsazione. Oltre alle informazioni quali sfasamento e guadagno, il programma Matlab è stato scritto in modo tale da fare anche una rappresentazione grafica dei dati sperimentali in forma di diagramma di Bode per confrontare il comportamento del sistema alle risposte sinusoidali con la funzione di trasferimento ipotizzata nello studio della risposta allo scalino.

### 3.3 Analisi diagrammi di bode

Dai diagrammi di bode del modulo si evince chiaramente che la FDT all'infinito ha una pendenza di -20 dB/dec. Dunque, la funzione ha sicuramente grado relativo 1, ergo almeno un polo asintoticamente stabile.

Analizzando invece il diagramma della fase, poiché' parte da 0 e arriva 90 gradi all'infinito si può giungere alle stesse conclusioni alle quali si è arrivati dall'analisi dei diagrammi di Bode del modulo.

Infine, abbiamo utilizzato i diagrammi di Bode per meglio precisare la stima della posizione del polo, ergo della sua costante di tempo.

Dopodiché' mediando tra i vari valori che si ricavano dall'analisi dei grafici dei diversi diagrammi di Bode, relativi ai rispettivi ingressi sinusoidali si è giunti al valore x.

Analizzando i vari grafici, si può evincere un discostamento iniziale dovuto alla presenza del polo aggiunto dal filtro passa-basso. Difatti, non prendendo in considerazione la presenza del filtro si potrebbe erroneamente assumere che la funzione di trasferimento abbia grado relativo = 2, in quanto alcuni grafici presentano una risposta iniziale di pendenza nulla, tipica dei sistemi di second'ordine. In realtà, la funzione ha grado relativo 1, escludendo il filtro, dunque, riferendosi teoricamente all'operazione di approssimazione ai poli dominanti di una funzione di trasferimento, nel quale bisogna preservare:

- costante di tempo polo dominante
- eventuali sovra elongazioni o sotto elongazioni
- guadagno
- grado relativo, dunque valore iniziale  $y(0), y'(0)$

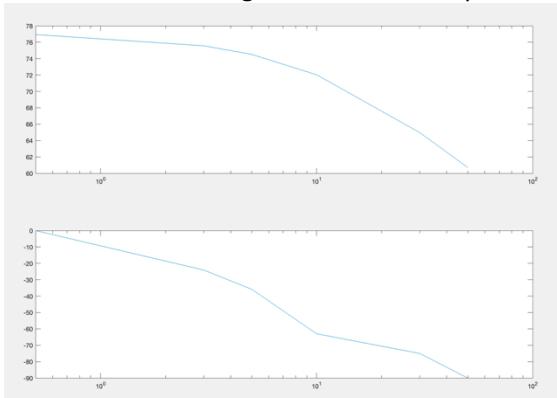


Figura 6 (Bode modulo, in alto, e fase, in basso, di seni\_nooffset)

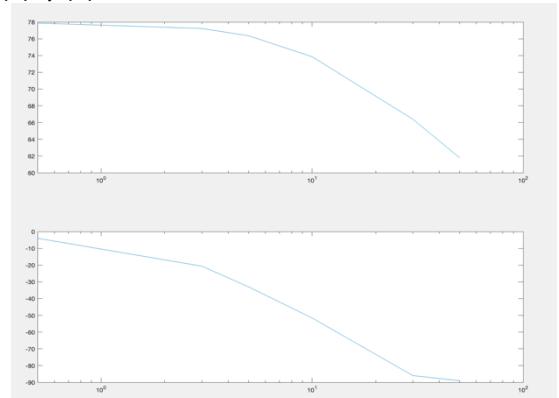


Figura 7 (Bode modulo in alto, e fase, in basso, di seni\_largeamplitude\_nooffset)

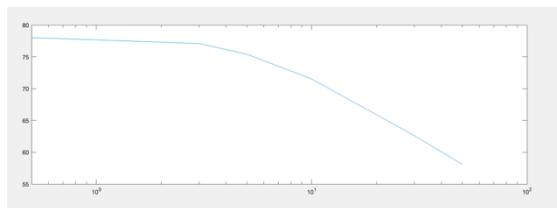


Figura 8 (Bode modulo seni\_offset2)

Nota: la fase di seni\_offset2 non è stata calcolata.

Di seguito riportiamo quelli che sono i confronti tra i diagrammi di bode, ottenuti dalle prove sperimentali, e la nostra funzione di trasferimento.

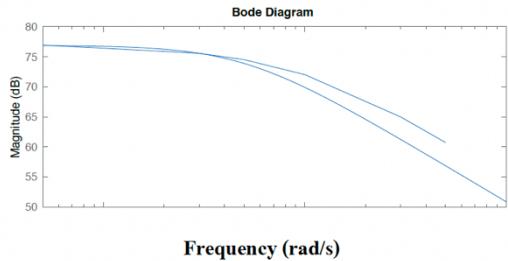


Figura 9 (Bode modulo seni\_nooffset vs FDT scelta)

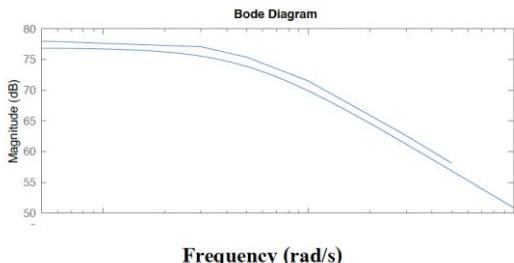


Figura 10 (Bode modulo seni\_offset2 vs FDT scelta)

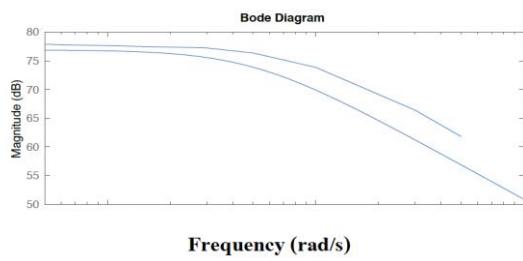


Figura 11 (Bode modulo seni\_largeamplitude\_nooffset vs FDT scelta)

Si è quindi proceduto nell'analizzare ulteriormente il diagramma di Bode delle prove al fine di trovare il punto esatto in cui inizia la pendenza e, tenendo, dunque, conto della differenza tra diagramma di Bode reale e asintotico, è stato trovato il polo definitivo della funzione attraverso una media delle pulsazioni in corrispondenza delle quali il grafico inizia a scendere di -20 dB/dec.

## 4. Conclusione

Basandoci sugli ulteriori studi grafici, abbiamo ipotizzato la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} = \frac{7800}{1 + 0,1250s}$$

Per verificare l'effettività della funzione da noi stimata riportiamo di seguito un confronto grafico tra le risposte delle prove sperimentali fornite e quelle della funzione ricavata

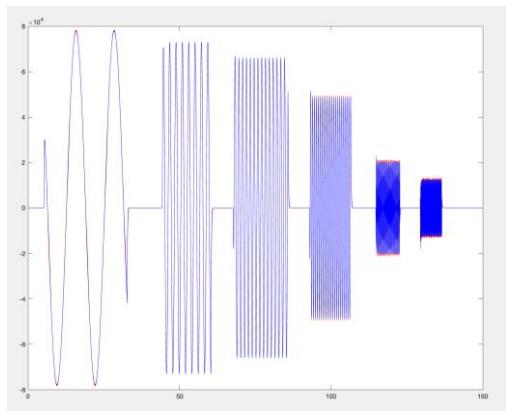


Figura 12(Risposta a seni\_largeamplitude\_nooffset )

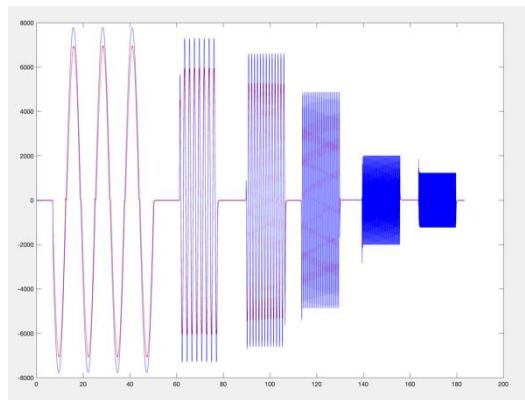


Figura 13(Risposta a seni\_nooffset)

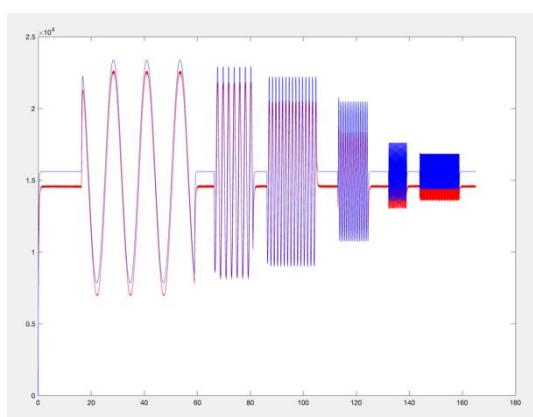


Figura 14(Risposta a seni\_offset2)

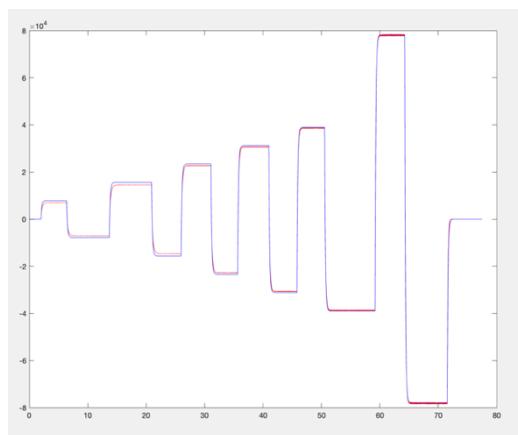


Figura 15(Risposta a scalini)

## 5. Codice matlab

```
%% CREAZIONE DEI DATI PROVA
close all
clear all

load proveSperimentali/ramp1.mat
load proveSperimentali/ramp2.mat
load proveSperimentali/ramp3.mat
load proveSperimentali/scalini.mat
load proveSperimentali/seni_largeamplitude_nooffset.mat
load proveSperimentali/seni_nooffset.mat
load proveSperimentali/seni_offset2.mat
load proveSperimentali/sine1.mat
load proveSperimentali/sine2.mat
load proveSperimentali/sine3.mat
load proveSperimentali/sine4.mat
load proveSperimentali/sine5.mat
load proveSperimentali/sine6.mat
load proveSperimentali/square.mat

Provesperimentaliseni_nooffset=data038;
Provesperimentaliseni_offset2=data042;
Provesperimentaliseni_largeamplitude_nooffset=data044;
Provesperimentaliscalini=data032;
Provesperimentaliseni_1=data002;
Provesperimentaliseni_2=data003;
Provesperimentaliseni_3=data004;
Provesperimentaliseni_4=data005;
Provesperimentaliseni_5=data006;
Provesperimentaliseni_6=data007;
Provesperimentalisquare=data011;
Provesperimentaliramp1=data001;
Provesperimentaliramp2=data009;
Provesperimentaliramp3=data010;

Provesperimentaliscalini=struct('t',data032(1,1:38758),'u',data032(2,1:38758),'x',data032(3,1:38758),
'y',data032(4,1:38758));
Provesperimentaliramp1=struct('t',data001(1,1:50379),'u',data001(2,1:50379),'x',data001(3,1:50379),
'y',data001(4,1:50379));
Provesperimentaliramp2=struct('t',data009(1,1:42958),'u',data009(2,1:42958),'x',data009(3,1:42958),
'y',data009(4,1:42958));
Provesperimentaliramp3=struct('t',data010(1,1:12355),'u',data010(2,1:12355),'x',data010(3,1:12355),
'y',data010(4,1:12355));
Provesperimentaliseni_nooffset=struct('t',data038(1,1:91650),
'u',data038(2,1:91650),'x',data038(3,1:91650), 'y',data038(4,1:91650));
Provesperimentaliseni_offset2=struct('t',data042(1,1:82503),
'u',data042(2,1:82503),'x',data042(3,1:82503), 'y',data042(4,1:82503));
Provesperimentaliseni_largeamplitude_nooffset=struct('t',data044(1,1:74801),'u',data044(2,1:74801),
'x',data044(3,1:74801), 'y',data044(4,1:74801));
Provesperimentaliseni_1=struct('t',data002(1,1:12545),'u',data002(2,1:12545),'x',data002(3,1:12545),
'y',data002(4,1:12545));
Provesperimentaliseni_2=struct('t',data003(1,1:9620),'u',data003(2,1:9620),'x',data003(3,1:9620),
'y',data003(4,1:9620));
Provesperimentaliseni_3=struct('t',data004(1,1:7612),'u',data004(2,1:7612),'x',data004(3,1:7612),
'y',data004(4,1:7612));
Provesperimentaliseni_4=struct('t',data005(1,1:7997),'u',data005(2,1:7997),'x',data005(3,1:7997),
'y',data005(4,1:7997));
Provesperimentaliseni_5=struct('t',data006(1,1:5061),'u',data004(2,1:5061),'x',data004(3,1:5061),
'y',data004(4,1:5061));
Provesperimentaliseni_6=struct('t',data007(1,1:5566),'u',data005(2,1:5566),'x',data005(3,1:5566),
'y',data005(4,1:5566));
Provesperimentalisquare=struct('t',data011(1,1:3948),'u',data011(2,1:3948),'x',data011(3,1:3948),
'y',data011(4,1:3948));

%% PROVA INGRESSI NON FILTRATI
%per provare altri ingressi sostituisci all'assegnazione di ingresso1
%l'ingresso di interesse
ingresso1= ---;
t0=ingresso1.t;
u0=ingresso1.u;
```

```

x0=ingresso1.x;
yf0=ingresso1.y;

%plot prove (uscita/ingresso)
figure(1)
plot(t0,u0)
figure(2)
plot(t0,yf0)

%plot prova(uscita) vs Fdt(uscita)
T1=0.125;
mu=7800;
den00=[T1 1];
num00=mu;
sis00=tf(num00,den00);
sis_fs00=ss(sis00);
[y,t,x]=lsim(sis_fs00,u0,t0,0);
figure(3)
plot(t0,yf0, Color='r')
hold on
plot(t,y, Color='b')

%% PLOT DEGLI INGRESSI FILTRATI
%FILTRAGGIO
frequenza=0.5; %Frequenza della sinusoide interessata
[b,a] = besself(3,20*frequenza);
filtro=tf(b,a);
[uscita_filtro]=lsim(filtro,ingresso1.y,ingresso1.t);
figure(4);
plot(ingresso1.t,(uscita_filtro));
hold on;
plot(ingresso1.t,ingresso1.y);
legend("filtrato", "originale");

%% Raccolta dati per costruzione diagramma di Bode (I valori usati per la creazione dei diagrammi di Bode approssimati sono stati raccolti nei file Bode_largeamplitude.mat, Bode_nooffset.mat e Bode_offset2.mat)
load Bode_largeamplitude.mat
load Bode_nooffset.mat
load Bode_offset2.mat
BODEprove_seni_nooffset=struct('w',Bode_nooffset(1,1:6),'Y',Bode_nooffset(2,1:6),'U',Bode_nooffset(3,1:6),'f',Bode_nooffset(4,1:6));
BODEprove_seni_offset2=struct('w',Bode_offset2(1,1:6),'Y',Bode_offset2(2,1:6),'U',Bode_offset2(3,1:6),'f',Bode_offset2(4,1:6));
BODEprove_seni_largeamplitude_nooffset=struct('w',Bode_largeamplitude(1,1:6),'Y',Bode_largeamplitude(2,1:6),'U',Bode_largeamplitude(3,1:6),'f',Bode_largeamplitude(4,1:6));

%% Costruzione e plot diagramma di Bode delle prove
ingresso2=BODEprove_seni_nooffset;
Gdb=20*log10((ingresso2.Y)./(ingresso2.U));
figure(5)
subplot(2,1,1)
semilogx(ingresso2.w,Gdb);
grid on
subplot(2,1,2)
semilogx(ingresso2.w,ingresso2.f);
grid on

%% Plot diagramma di Bode della fdt
figure(6)
bode(sis_fs00,{0.5,10^2});
grid on

```



# *2° Lavoro di gruppo*

Sintesi di un regolatore  
per un sistema reale



La mensa:  
Alessandro Di Genni 10797749  
Compagnone Claudio 10704960  
De Luca Alberto 10773657  
Di Ubaldo Matteo 10808525

## Sommario

<b>1</b>	<b>Prefazione.....</b>	<b>2</b>
1.1	Materiale a disposizione:.....	2
1.2	Descrizione approccio.....	2
1.3	Obiettivo.....	2
1.4	File di supporto per le varie verifiche e simulazioni:.....	2
<b>2</b>	<b>Analisi della <math>G(s)</math> .....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Sintesi del regolatore .....</b>	<b>4</b>
3.1	Vincolo sul tempo di assestamento .....	4
3.2	Vincolo sulla sovra elongazione massima percentuale .....	5
3.3	Analisi dei disturbi in alta frequenza .....	6
<b>4</b>	<b>Creazione del regolatore e analisi delle prestazioni.....</b>	<b>6</b>
4.1	Calcolo degli indici di robustezza di stabilità .....	6
4.2	Analisi della stabilità del sistema.....	7
4.3	Analisi delle caratteristiche dinamiche .....	7
4.4	Analisi di errori e disturbi .....	8
4.5	Analisi della funzione di sensitività del controllo.....	9
<b>5</b>	<b>Analisi del sistema reale in retroazione .....</b>	<b>10</b>
5.1	Analisi degli ingressi .....	10
5.1.1	Scalini di varia ampiezza .....	10
5.1.2	Sinusoidi di varia ampiezza e pulsazione unitaria.....	11
5.2	Sintesi del nuovo regolatore.....	12
5.3	Analisi dei requisiti .....	12
5.3.1	Tempo di assestamento e sovra elongazione .....	12
5.3.2	Attenuazione dei disturbi in alta frequenza .....	13
5.3.3	Uso della variabile di controllo.....	14
<b>6</b>	<b>Uscita finale .....</b>	<b>14</b>

# 1 Prefazione

## 1.1 Materiale a disposizione:

-Funzione di trasferimento ottenuta nel primo lavoro di gruppo

$$G(s) = \frac{7800}{1 + 0,125s}$$

-Sistema reale in forma digitale, Digital twin.

## 1.2 Descrizione approccio

Partendo dalla  $G(s)$  del precedente lavoro di gruppo siamo partiti dall'analisi delle sue caratteristiche in anello chiuso con la quale abbiamo calcolato quelli che sono i parametri ed indici utili allo studio della stabilità del sistema e della sua robustezza come margine di fase e margine di guadagno.

Ciò che è stato appurato analizzando i diagrammi di bode di modulo e fase della  $G(s)$  per ottenere dei valori indicativi degli indici e successivamente la bontà di queste valutazioni è stato in seguito confermato calcolando analiticamente i valori precisi.

Una volta fatto ciò si è proceduto alla sintesi del regolatore per fare sì che rispettasse prima i requisiti statici, sugli errori a regime, e successivamente le specifiche dinamiche sul tempo di assestamento e sovra elongazione massima percentuale. In particolare, queste ultime due specifiche ci hanno permesso di ricavare i limiti sulla  $L(s)$  come, ad esempio, quella sulla pulsazione critica. Mentre la specifica sui i disturbi è stata utilizzata per ricavare una caratteristica da rispettare sul modulo della funzione ad anello. Quindi l'insieme di progetto statico e dinamico del regolatore uniti all'analisi dei diagrammi di bode della  $G(s)$  ha portato alla sintesi di un regolatore semplicemente proporzionale. L'analisi sul sistema non lineare è stata fatta principalmente per via grafica e in confronto al sistema non linearizzato, cercando di trovare un regolatore che fornisse valori di risposta il più possibile assimilabili a quelli della nostra funzione di trasferimento, una volta scelto il punto di lavoro.

## 1.3 Obiettivo

Progettare un regolatore LTI per il sistema linearizzato tale che:

- a) Asintoticamente stabile in loop.
- b) Tempo di assestamento tra 0.1s e 0.2s.
- c) Sovra elongazione massima < 15%.
- d) Capacità di attenuare disturbi in alta frequenza tra 1 e 2 decadi dopo la  $\omega_c$  (abbiamo considerato la  $n(t)$  come disturbo in alta frequenza e  $d(t)$  come disturbo in bassa frequenza).
- e) Uso oculato della variabile di controllo.
- f) Usare il regolatore progettato sul sistema reale e confrontare le prestazioni e la validità delle specifiche sopra riportate. Nell'eventualità, modificare tale regolatore per adattarlo al digital twin per avere tutte le specifiche verificate in almeno un punto di lavoro.

## 1.4 File di supporto per le varie verifiche e simulazioni:

- codice regolatore ideale: Lamensa\_rid.m
- file di simulazione regolatore ideale: Lamensa\_id.slx
- codice regolatore reale: Lamensa\_rtwin.m
- file di simulazione regolatore reale: Lamensa\_twin.slx
- file con le due fdt: Lamensa\_controllori.m

## 2 Analisi della G(s)

Di seguito le caratteristiche della funzione di trasferimento sviluppata nel precedente lavoro:

- Guadagno: 7800;
- Polo  $P = -8$ ;
- Ordine e grado relativo: 1;
- Tipo  $g = 0$ ;
- Strettamente propria;

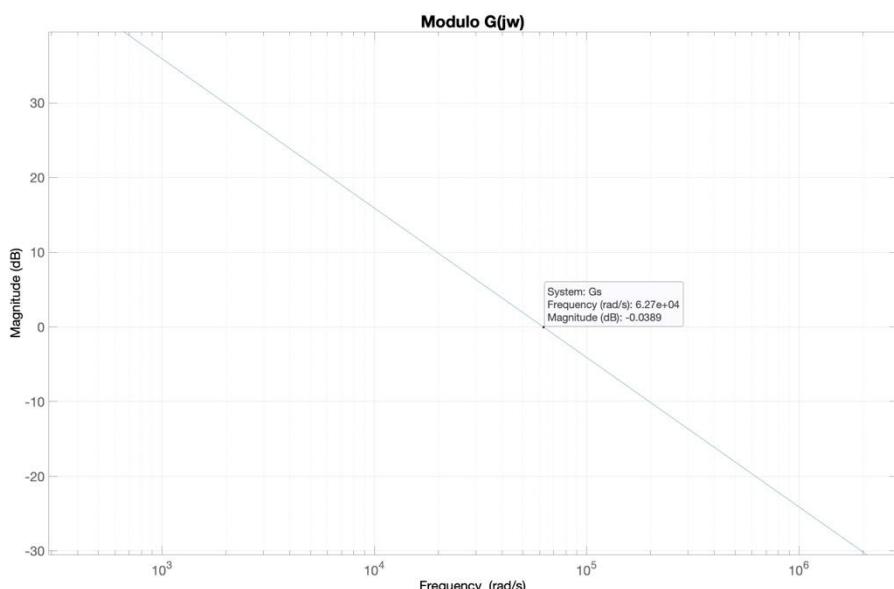
A partire da queste caratteristiche sono stati tracciati i diagrammi di bode di modulo e fase. Nello specifico, dal diagramma del modulo abbiamo ricavato una pulsazione critica di valore  $6,27 \times 10^4$ . Utilizzando questo valore abbiamo ricavato il valore della fase critica che si attesta a circa  $-82,87^\circ$ . Utilizzando il valore della fase critica e notando che la  $G(s)$  è una funzione di trasferimento strettamente propria abbiamo calcolato i seguenti parametri di robustezza della stabilità:

- Margine di guadagno  $K_m = +\infty$
- Margine di fase  $97,13^\circ$

Possiamo subito notare come il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile anche senza regolatore. Questo risultato è supportato dal corollario della piccola fase del criterio di Nyquist, poiché la fase di  $G(s)$ , che in questo caso corrisponde alla nostra funzione d'anello, è in modulo minore di  $180^\circ$ . Il margine di fase è stato calcolato usando la seguente formula:

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -\tan^{-1}(0,125 \cdot \omega_c) = -89,99^\circ \rightarrow \varphi_c = 180^\circ - |\angle L(j\omega_c)| = 90,01^\circ$$

Il margine di guadagno invece acquisisce il seguente valore perché notiamo che il diagramma di Nyquist si chiude a  $-90^\circ$  nell'origine senza intersecare altri punti dell'asse reale negativo e questo indica un valore del modulo della funzione d'anello alla pulsazione  $\omega_\pi$  (pulsazione alla quale il valore della fase della funzione d'anello è  $-180^\circ$ ) pari a 0.



### 3 Sintesi del regolatore

Riguardo al vincolo sull'aspetto dinamico del sistema sfruttiamo la funzione di trasferimento che lega il suo ingresso all'uscita, ovvero la funzione di sensitività complementare  $F(s)$

$$y^0 \xrightarrow{F} u \quad \text{dove} \quad F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

#### 3.1 Vincolo sul tempo di assestamento

Come primo vincolo da rispettare sul sistema ad anello chiuso abbiamo un tempo di assestamento compreso tra i seguenti valori  $T_a = [0.1, 0.2]$ . Questa prima specifica ci permette di imporre un vincolo sulla pulsazione critica della funzione d'anello e questa varierà in base alla scelta del regolatore e soprattutto sul valore che il nostro margine di fase assumerà. Nello specifico possiamo approssimare la nostra funzione di sensitività complementare nei seguenti modi

Polo reale:  $F(s) \approx \frac{\mu_F}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$  dove  $\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se } g_L = 0 \\ \mu_F = \frac{\mu_L}{1 + \mu_L} & \text{se } g_L > 0 \end{cases}$  valida se  $\varphi_m \geq 75^\circ$   
 $\omega = \omega_c$

Poli c.c.:  $F(s) \approx \frac{\mu_F}{\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2\frac{s}{\omega_c}\xi + 1}$  dove  $\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se } g_L = 0 \\ \mu_F = \frac{\mu_L}{1 + \mu_L} & \text{se } g_L > 0 \\ \omega_n = \omega_c \\ \xi = \frac{\varphi_m}{100} \end{cases}$  valida se  $\varphi_m < 75^\circ$

Poiché la nostra funzione d'anello senza regolatore ha un margine di fase superiore a  $90^\circ$ , abbiamo optato per un regolatore puramente proporzionale per non abbassare ulteriormente tale indice e sfruttare l'approssimazione della funzione di sensitività complementare a polo reale con pulsazione in  $\omega_c$ . Il passo seguente è stato quello di sfruttare tale approssimazione per ricavare il seguente vincolo sulla  $\omega_c$ .

Poiché l'approssimazione a poli dominanti fornisce una funzione di trasferimento del primo ordine il tempo di assestamento si può calcolare come segue

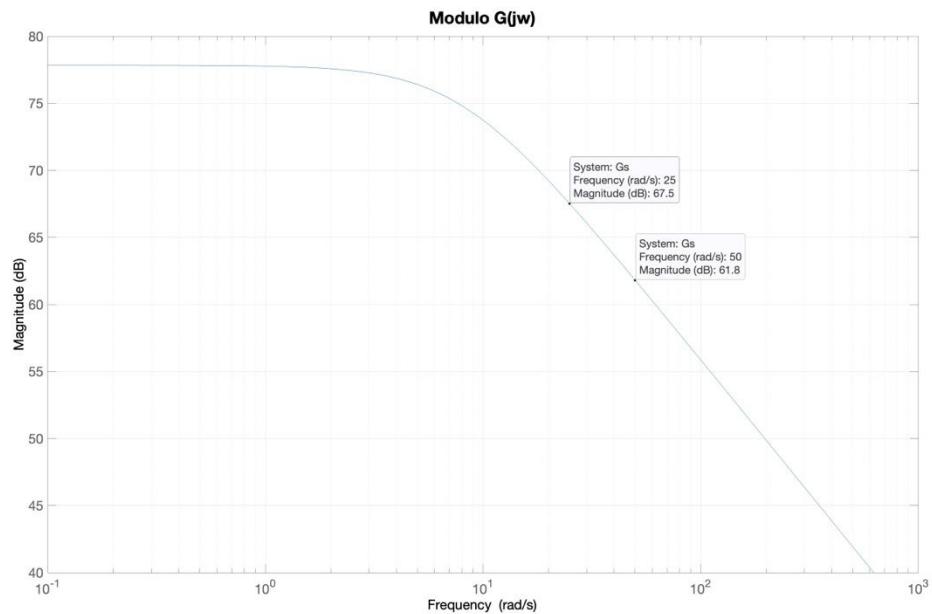
$$T_a = 5\tau_{dom} = \frac{5}{\omega_c}$$

Poiché la dinamica del sistema deve esaurirsi tra 0.1 e 0.2 secondi otteniamo il seguente vincolo sulla pulsazione critica

$$25 < \omega_c < 50 \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

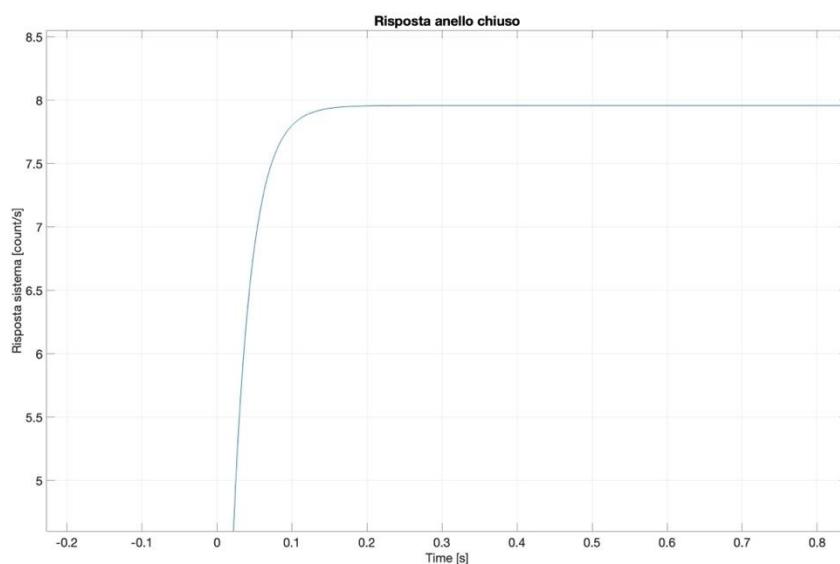
Avendo ricavato la pulsazione critica della sola  $G(s)$ , la quale risultava essere molto elevata, per rispettare questo vincolo sulla  $G$  bisogna abbassare il suo guadagno e nello specifico vediamo dai diagrammi di Bode del modulo che essi devono essere traslati verso il basso di un valore compreso tra 67.5 dB e 61.8 dB. Questo ha portato al seguente vincolo sul guadagno del nostro regolatore:

$$4,21 \cdot 10^{-4} < \mu_R < 8,13 \cdot 10^{-4}$$



### 3.2 Vincolo sulla sovra elongazione massima percentuale

La richiesta sulla sovra elongazione massima percentuale è anch'essa legata alla funzione di sensitività complementare e alla sua approssimazione a poli dominanti. Forti del fatto che abbiamo scelto un regolatore semplicemente proporzionale, il margine di fase rimane sempre superiore ai  $75^\circ$  e quindi l'approssimazione fornisce una funzione del primo ordine, la quale non presenta oscillazioni, di conseguenza, la sovra elongazione percentuale risulta nulla. Seppur questa sia una approssimazione del comportamento reale della risposta del sistema questa rimane affidabile come si può vedere dal seguente plot della risposta ad uno scalino unitario.



### 3.3 Analisi dei disturbi in alta frequenza

Consideriamo adesso il nostro sistema retro azionato di partenza e consideriamo il disturbo  $n(t)$  il quale agisce in alta frequenza, principalmente considereremo frequenze tra la prima e seconda decade dopo la pulsazione critica. Tale disturbo agisce sull'ingresso della nostra funzione d'anello. Ciò che vogliamo analizzare è l'attenuazione di tale disturbo sull'uscita del nostro sistema retro azionato. Possiamo analizzare quantitativamente l'effetto del disturbo  $n$  sull' uscita sfruttando la funzione di sensitività complementare

$$n \xrightarrow{-F} y$$

La funzione risulta cambiata di segno poiché l'ingresso  $n$  entra nel sommatore con il segno negativo. Ricordando le approssimazioni sul modulo della  $F(s)$  possiamo scrivere la seguente catena di relazioni per trovare un vincolo da porre sul modulo della nostra funzione d'anello (ciò che ci interessa è il modulo della risposta in frequenza)

$$\text{se } n(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{allora} \quad |y_n(t)| = A|F(j\omega)| \rightarrow |F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Poiché stiamo considerando disturbi di frequenze ad almeno una decade dopo la pulsazione critica possiamo sfruttare la seconda approssimazione sulla  $L$ . Nell'analisi dell'attenuazione dei disturbi consideriamo un buon filtraggio, una attenuazione di almeno un fattore 10 quindi il vincolo sulla  $L$  è il seguente:

$$|L(j\omega)| < 0,1 \rightarrow |L(j\omega)|_{dB} < -20 \text{ dB} \quad \omega \in [\omega_c \cdot 10, \omega_c \cdot 100]$$

## 4 Creazione del regolatore e analisi delle prestazioni

Dopo la precedente analisi fatta sui vari vincoli che la funzione d'anello deve rispettare la scelta del regolatore, come precedentemente riportato, è ricaduta su un proporzionale avente il la seguente formulazione

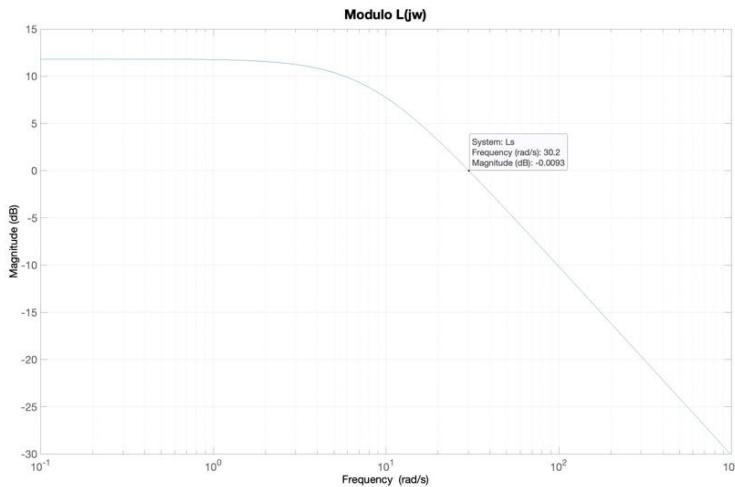
$$R(s) = 5 \cdot 10^{-4} \rightarrow L(s) = G(s)R(s) = \frac{3,9}{1 + 0,125s}$$

In seguito, verranno ricavati tutti gli indici di robustezza della stabilità, l'analisi degli errori di inseguimento a regime dovuti a vari ingressi e disturbi e l'analisi sull'uso della variabile di controllo tramite la funzione di sensitività del controllo

### 4.1 Calcolo degli indici di robustezza di stabilità

Dalla analisi dei diagrammi di Bode del modulo abbiamo ricavato il seguente valore della pulsazione critica relativa alla nuova funzione d'anello (Plot pulsazione critica su  $L(s)$ )-4

$$\omega_c \approx 30.2 \text{ rad/s}$$



Usando questo valore si ricava il seguente valore della pulsazione critica grazie al quale ricaviamo il nuovo margine di fase

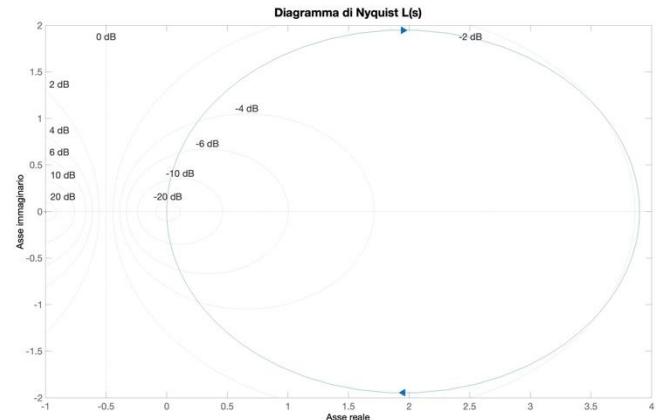
$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -\tan^{-1}(0,125 \cdot \omega_c) = -75,16^\circ \rightarrow \varphi_c = 180^\circ - |\angle L(j\omega_c)| = 104,84^\circ$$

Poiché non abbiamo modificato la fase della funzione d'anello, visto che non sono stati aggiunti poli o zeri, il diagramma polare della funzione d'anello si chiude sempre nell'origine a  $-90^\circ$  senza intersecare il semiasse reale negativo, quindi il nostro margine di guadagno risulta essere anche in questo caso  $\infty$ .

#### 4.2 Analisi della stabilità del sistema

Possiamo sfruttare il criterio di Nyquist e l'analisi del diagramma di Nyquist per determinare le proprietà di stabilità del sistema.

La nostra funzione d'anello presenta un numero di poli a parte reale negativa pari a zero,  $P = 0$ , e poiché il diagramma polare non fa giri attorno al punto  $-1$  abbiamo che il parametro  $N$  è pari a zero. Per il criterio di Nyquist possiamo affermare che il sistema è asintoticamente stabile.



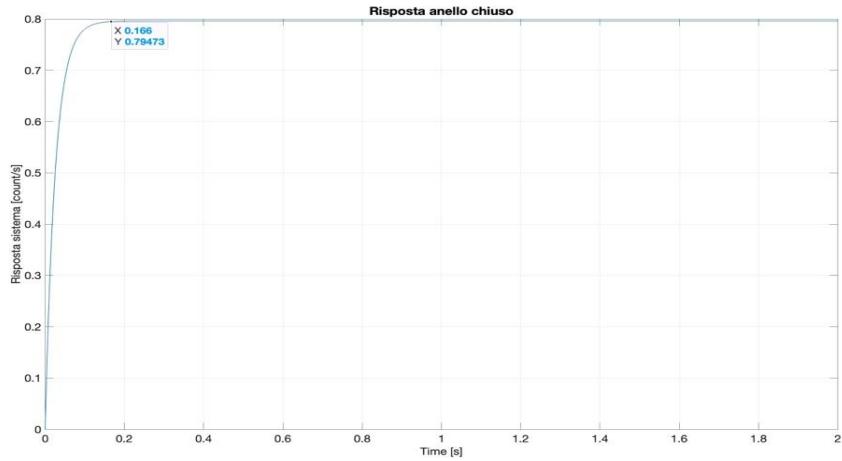
#### 4.3 Analisi delle caratteristiche dinamiche

Dopo aver determinato la pulsazione critica e l'approssimazione a poli dominanti della  $F(s)$ , risulta immediata la determinazione del tempo di assestamento del sistema e della sovra elongazione massima percentuale.

$$\text{-Tempo di assestamento: } T_a = \frac{5}{\omega_c} = 0,166 \text{ s}$$

$$\text{-Sovra elongazione massima percentuale: } S\% = 0\%$$

Ricordiamo che la sovra elongazione risulta nulla vista la buona approssimazione della  $F(S)$

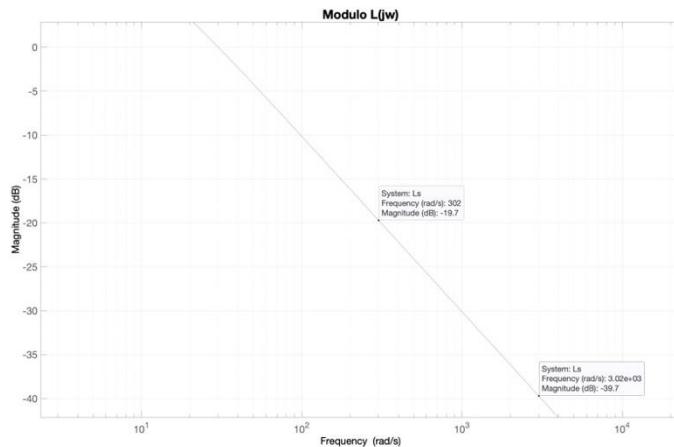


#### 4.4 Analisi di errori e disturbi

Partiamo dall’analizzare la capacità del nostro sistema di attenuare disturbi in alta frequenza. L’analisi quantitativa fatta prima viene confermata dai diagrammi di bode di  $L(s)$  dalla quale, a partire da una pulsazione di 302 rad/s, ovvero precisamente ad una decade dopo la pulsazione critica, abbiamo un valore del modulo della funzione d’anello di circa

-19.7 dB, ovvero, sfruttando il teorema della risposta in frequenza per ricavare l’uscita relativa al disturbo  $n$ , indica che l’ampiezza della sinusoide in ingresso è moltiplicata di un fattore circa pari ad 1/10.

Andando ad analizzare l’altro estremo di interesse, ovvero a pulsazioni di circa 3020 rad/s vediamo che il grafico si è abbassato fino a -39.7 dB fornendo un fattore moltiplicativo all’uscita di circa 1/100, come aspettabile dato che il grafico tende asintoticamente ad avere pendenza di -20 dB/dec. Quindi tra una e due decadi dopo la pulsazione critica riusciamo ad avere una attenuazione compresa tra le 10 e le 100 volte.



Anche se non richiesto abbiamo deciso di analizzare l’errore di inseguimento dovuto all’ingresso  $y^0$  e al disturbo  $d$  i quali agiscono principalmente in bassa frequenza. Sia il disturbo  $d$  che l’ingresso  $y^0$  sono legati all’errore dalla funzione di sensitività  $S(s)$

$$E(s) = S(s)Y^0(s) - S(s)D(s)$$

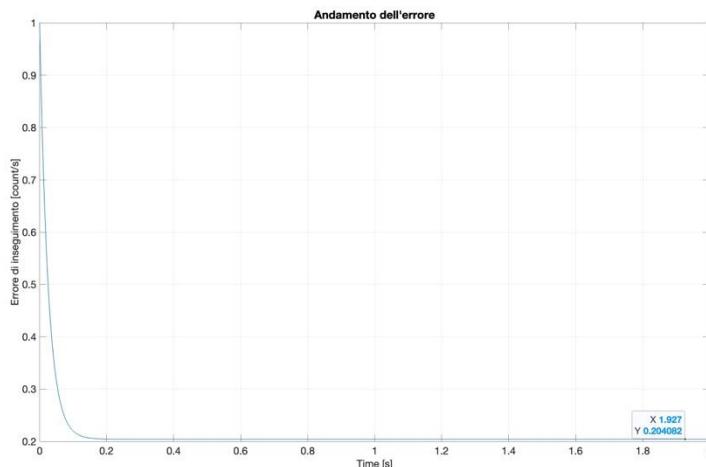
Per facilitare l’analisi quantitativa dei due contributi all’errore possiamo sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, data la linearità del nostro sistema, e calcolare tali contributi

sfruttando il teorema del valore finale, applicabile poiché il nostro sistema è asintoticamente stabile. Consideriamo  $y^0 = d = Asca(t)$

$$|e_\infty^d| = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} A = \frac{1}{1 + \mu_L} A = A \cdot 0,20408 = |e_\infty^{y^0}|$$

NOTA: si sarebbe potuto scegliere un regolatore che presentasse almeno un integratore per azzerare l'errore a regime. Questa tesi è supportata dal principio del modello interno, il quale afferma che l'errore statico a regime è nullo se la  $L(s)$  ha tipo almeno pari a quello dell'ingresso.

Nel nostro caso, con due scalini, bastava porre un integratore per annullare l'errore a regime.



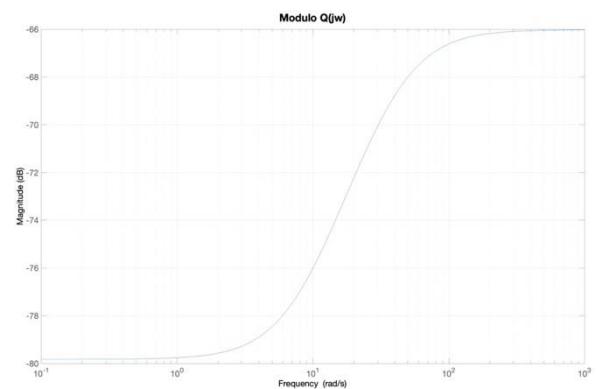
#### 4.5 Analisi della funzione di sensitività del controllo

Come ultima analisi andiamo a studiare la funzione di sensitività del controllo per osservare come viene gestita la variabile di controllo che, nel nostro caso, è l'uscita del nostro regolatore. La funzione di sensitività del controllo è definita come segue

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

Questa definisce il legame tra l'ingresso  $y^0$  e l'uscita  $u$  del regolatore. In generale più è grande il modulo della risposta in frequenza di  $Q$  e maggiore sarà il costo in termini di variabile di controllo che dovremmo sostenere. È preferibile in generale che l'uso della variabile sia limitato e non eccessivo.

Questa considerazione è dovuta alla presenza di altri componenti all'interno del sistema, come ad esempio l'attuatore, il quale deve esercitare l'azione di controllo. In quanto sistema fisico esso presenta dei limiti in termini di esercitazione dell'azione di controllo e quindi fornire una variabile di controllo troppo elevata potrebbe oltrepassare il confine accettabile dell'attuatore e degradare le prestazioni del nostro sistema di controllo. Analizzando i diagrammi di bode del modulo della  $Q(j\omega)$  notiamo che esso si attesta sempre tra i -66 dB e i -80dB. Ciò indica un'attenuazione del modulo della variabile di controllo che va da un fattore approssimativamente compreso tra 1000 e 10000. L'aver scelto un controllore puramente proporzionale ha permesso di risparmiare oltre che sulla sua complessità anche sul costo dell'azione di controllo



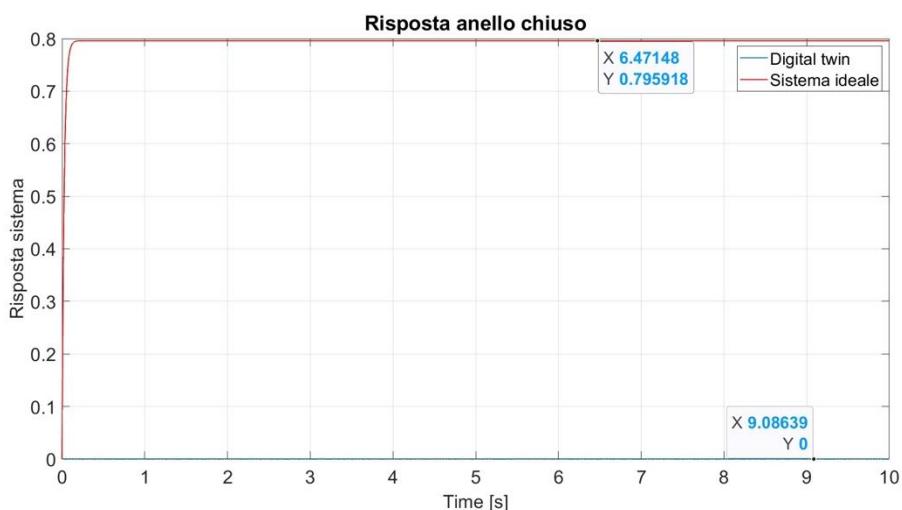
## 5 Analisi del sistema reale in retroazione

Partendo con lo studio del sistema non lineare abbiamo optato per un approccio comparativo, ricavando le informazioni necessarie allo sviluppo del nuovo controllore prevalentemente per via grafica. Le motivazioni di tale scelta sono da ricercare nell'assenza di un modello preciso che descriva la dinamica del sistema Qubeservo 2, dato che la nostra funzione di trasferimento è un'approssimazione che funziona solo in determinate condizioni di lavoro. La sintesi del nuovo regolatore parte quindi da un'analisi dei grafici delle risposte del sistema a vari ingressi come scalini e sinusoidi di varia ampiezza, ciò sarà fatto plottando l'uscita del sistema non lineare assieme a quella del sistema linearizzato.

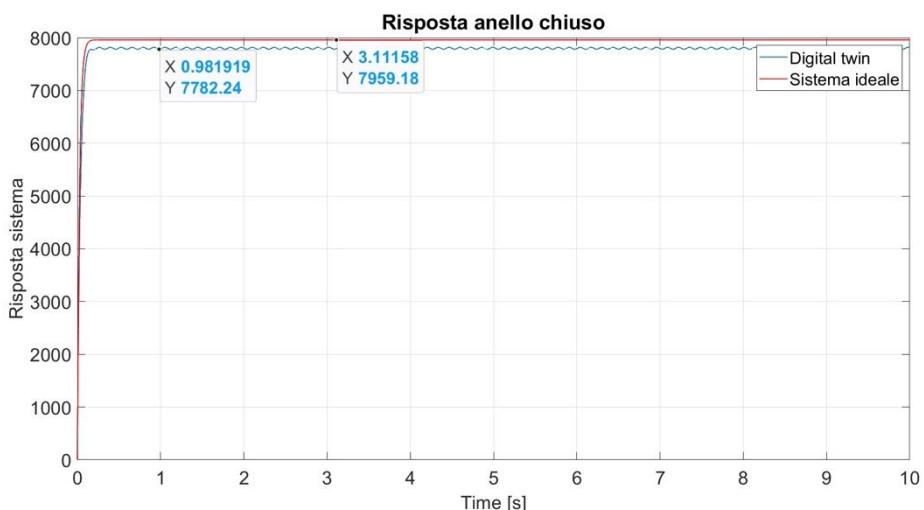
### 5.1 Analisi degli ingressi

#### 5.1.1 Scalini di varia ampiezza

- a)  $y^0 = sca(t)$ : notiamo che il sistema non lineare non reagisce con l'andamento previsto dal sistema lineare ma mantiene un'uscita nulla



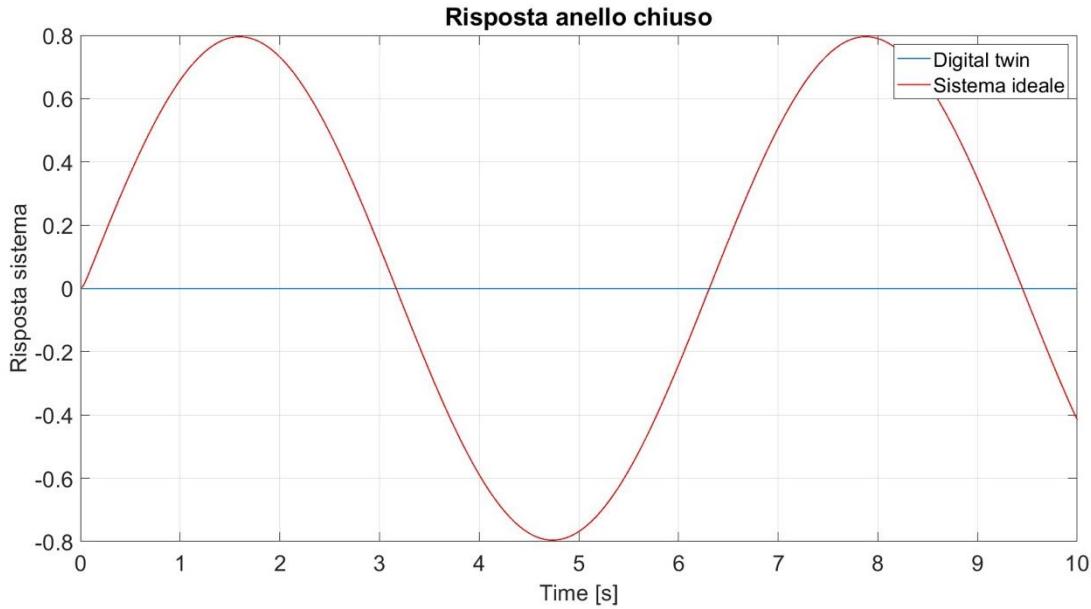
- b)  $y^0 = 100sca(t)$ : continuiamo ad ottenere i medesimi risultati ottenuti con il precedente ingresso
- c)  $y^0 = 10000sca(t)$ : l'uscita del sistema non lineare risulta essere molto simile a quella della nostra funzione di trasferimento



Notiamo che aumentando sempre di più l'ampiezza degli ingressi a scalino l'uscita dei due sistemi tende ad essere sempre più sovrapponibile. Continuiamo quindi l'analisi della risposta usando sempre ingressi a diversa ampiezza ma optando per segnali sinusoidali

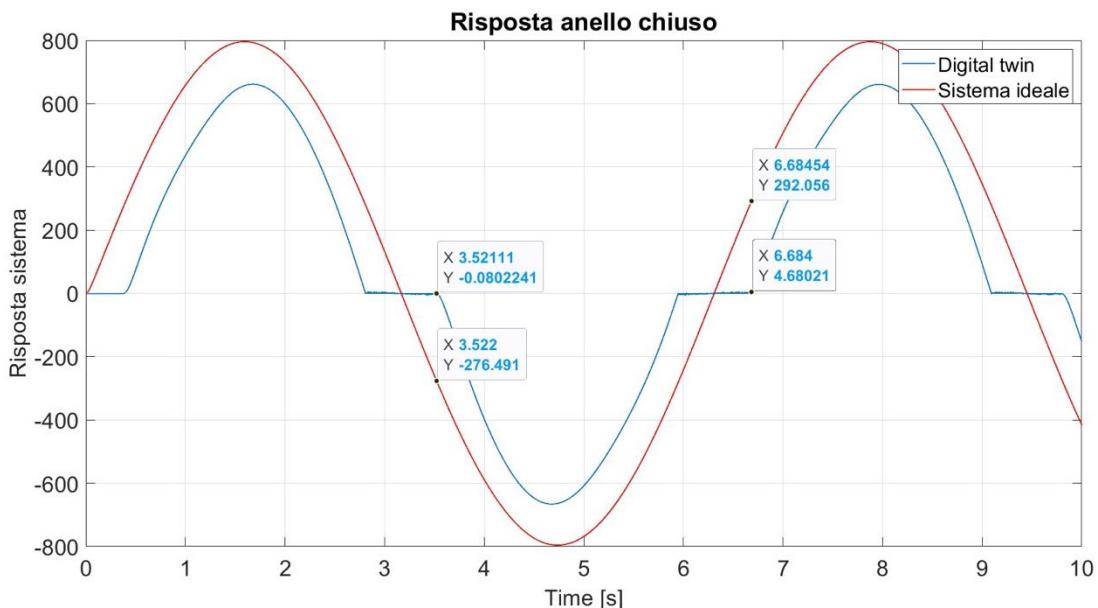
### 5.1.2 Sinusoidi di varia ampiezza e pulsazione unitaria

- a)  $y^0 = \sin(t)$ : mentre il nostro sistema lineare risponde con un'uscita sinusoidale il sistema non lineare risponde con un'uscita nulla

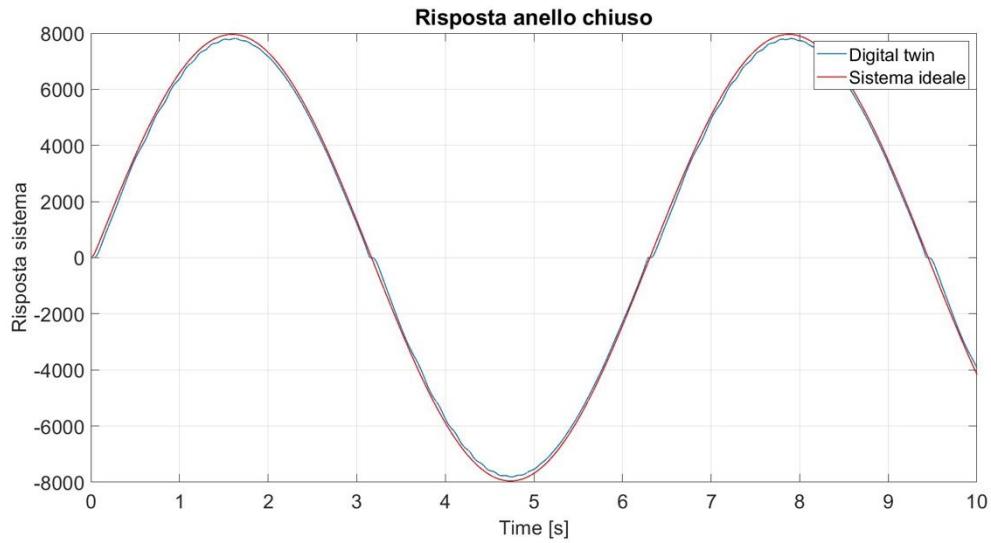


- b)  $y^0 = 100 \sin(t)$ : l'uscita del sistema non lineare continua a rimanere nulla

- c)  $y^0 = 1000 \sin(t)$ : notiamo che la risposta ad anello chiuso del cubeservo 2 tende ad essere sempre più simile a quello del nostro sistema lineare. Si osserva che l'uscita del sistema reale tende ad avere dei punti di risposta nulla tra i punti di inversione di segno dell'uscita fino a che la differenza tra le uscite dei due sistemi non è circa 295



- d)  $y^0 = 10000 \sin(t)$ : l'uscita è quasi del tutto identica a quella della  $G(s)$  e continuiamo a riportare zone di annullamento della risposta del sistema reale



Dopo aver analizzato ingressi di varia ampiezza arriviamo alla conclusione che la risposta del sistema reale tende a quella del sistema lineare quando l'ampiezza degli ingressi è molto elevata ( $>1000$ ). Quindi si è deciso di far lavorare il Qubeservo 2 con ingressi di ampiezza 10000 (scalini e sinusoidi)

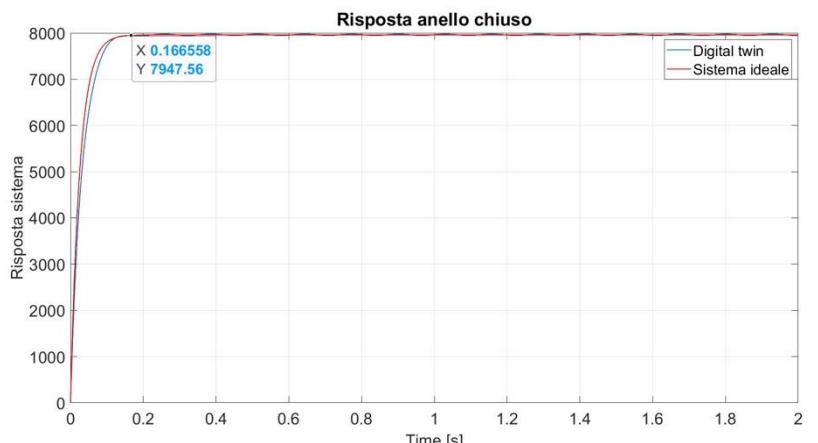
## 5.2 Sintesi del nuovo regolatore

Utilizzare il vecchio regolatore per l'analisi delle prestazioni del sistema in anello chiuso avrebbe comportato sottostima dell'uscita del sistema reale rispetto a quella del sistema linearizzato a parità di regolatori. Decidiamo quindi di cambiare regolatore ma di rimanere comunque su un proporzionale ma di aumentare il guadagno. Scegliere un guadagno di  $6 \times 10^{-4}$  avrebbe comportato una sovrastima di entità uguale rispetto alla prima. Si opta quindi per un regolatore di guadagno  $5,5 \times 10^{-4}$ . La scelta di questo nuovo controllore sarà giustificata in seguito tramite l'analisi delle uscite e dei vari requisiti da rispettare.

## 5.3 Analisi dei requisiti

### 5.3.1 Tempo di assestamento e sovra elongazione

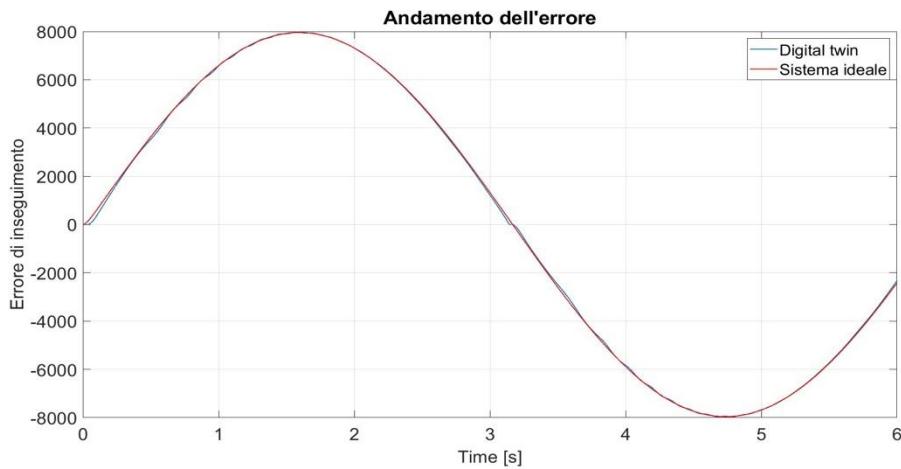
La scelta del nuovo regolatore è dettata dalla necessità di far sovrapporre il più possibile gli andamenti delle varie variabili analizzate, errore, uscita e variabile di controllo, per poter lavorare tramite confronto. Andando ad analizzare il grafico delle uscite dei due sistemi ad uno scalino unitario possiamo notare come il tempo di assestamento e la sovra elongazione percentuale massima siano assimilabili a quelle del sistema lineare. Si riportano dal grafico dell'uscita del QubeServo2 delle oscillazioni permanenti a regime, dovute probabilmente alla struttura interna del sistema a noi ignota, ma queste sono di piccola entità e quindi il requisito sulle oscillazioni risulta essere rispettato.



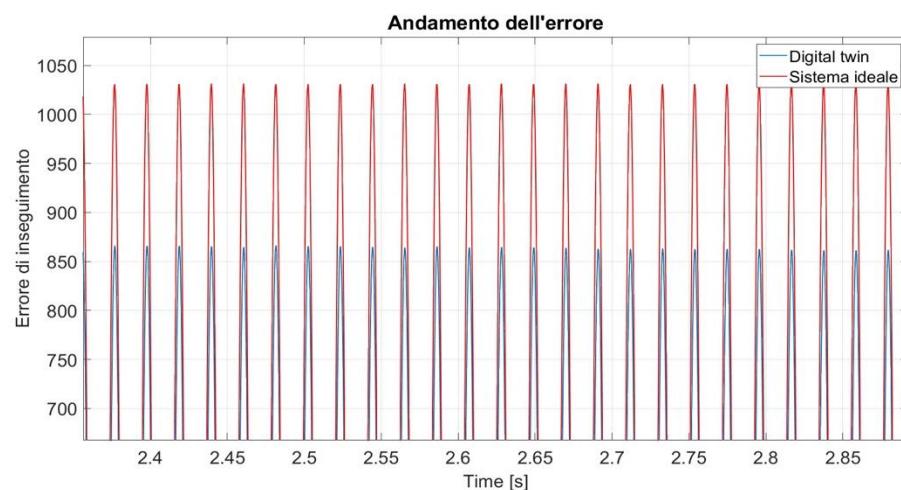
### 5.3.2 Attenuazione dei disturbi in alta frequenza

Vogliamo andare a verificare che tramite la variazione del regolatore anche l'andamento dei disturbi in alta frequenza segua circa l'andamento predetto dal sistema linearizzato. Per fare ciò si è adottato procedimento funzionante nelle fasi iniziali dell'analisi per ricavare un punto di lavoro favorevole, ovvero provare vari ingressi sinusoidali, in questo caso con frequenze diverse e ampiezza fissata.

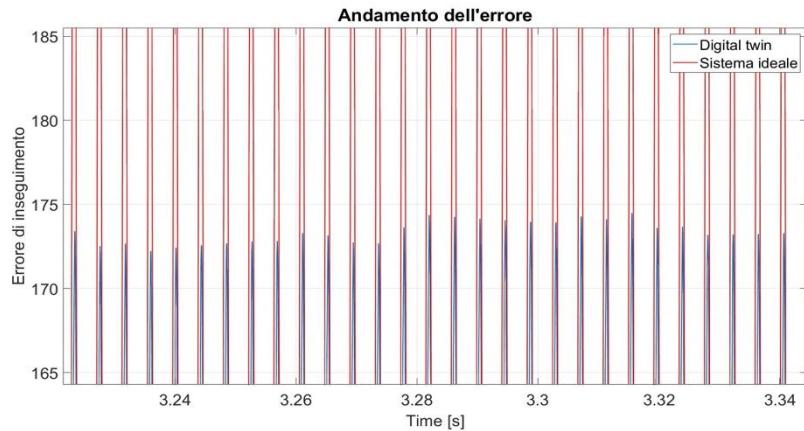
- a)  $n(t) = 10000\sin(t)$ : notiamo che il disturbo a bassa frequenza viene attenuato leggermente, come accadeva per il sistema lineare



- b)  $n(t) = 10000\sin(300t)$ : continuiamo a vedere come l'errore venga sempre più attenuato lineare e notiamo che andando a zoomare sui picchi delle sinusoidi l'errore risulta più attenuato nel sistema reale

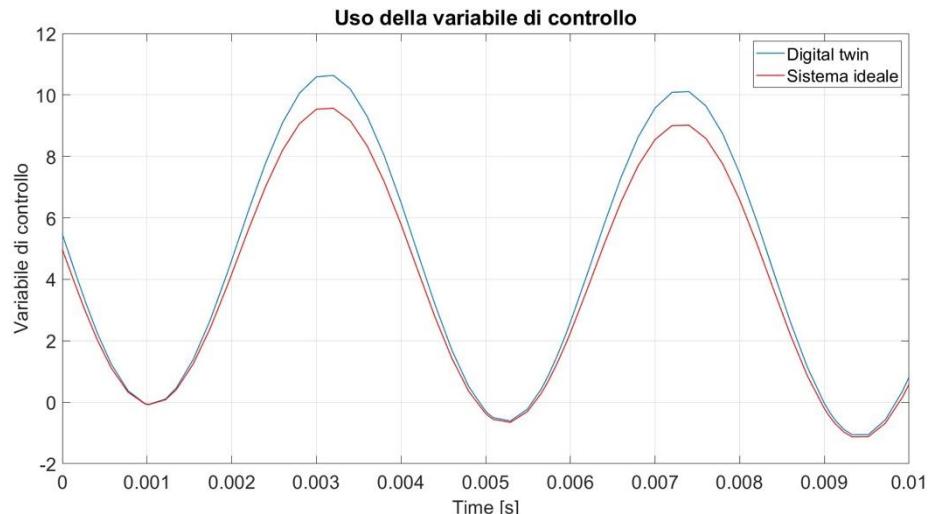


- c)  $n(t) = 10000\sin(1500t)$ : questo ultimo ingresso conferma che l'attenuazione ad alta frequenza è buona e a queste frequenze si attesta a circa un fattore 100



### 5.3.3 Uso della variabile di controllo

La variabile di controllo tende ad avere un andamento simile a quello riportato per il sistema lineare



## 6 Uscita finale

Si riporta in seguito l'uscita dei due sistemi con i seguenti ingressi

- $y^0(t) = 10000sca(t)$ ;
- $d(t) = 50sca(t)$ ;
- $n(t) = 10000\sin(1500t)$ .

