Universidad de Huelva

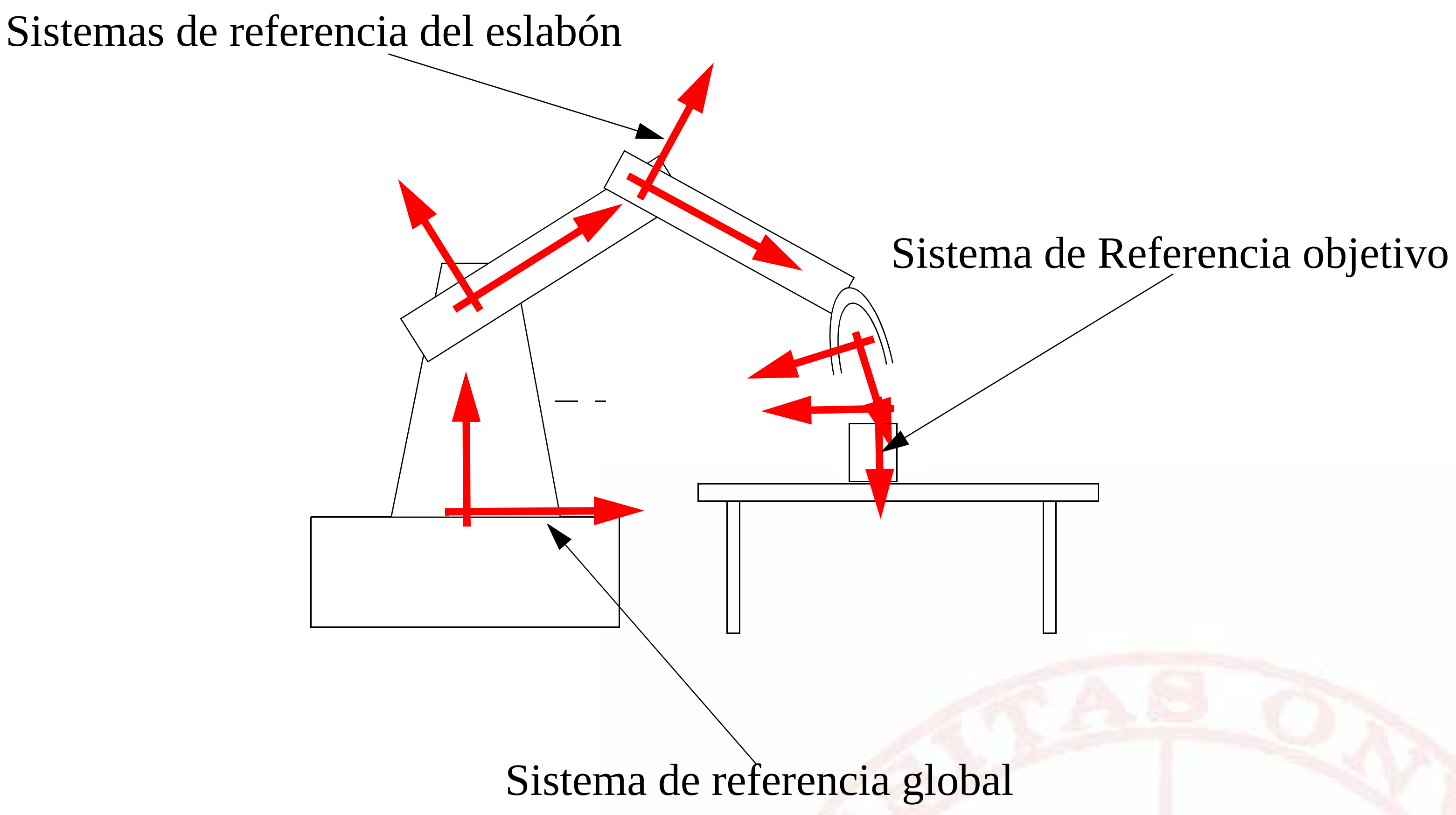
TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

TEMA 3.2 Problemas Geométricos y Cinemáticos

Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

3.2.1 Introducción: Problemas Geométricos



3.2.2 Modelo Cinemático Directo: Parámetros Denavit-Hattemberg

Modelo Cinemático Directo: Consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del robot con respecto al sistema de la base del robot a partir de conocer los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos

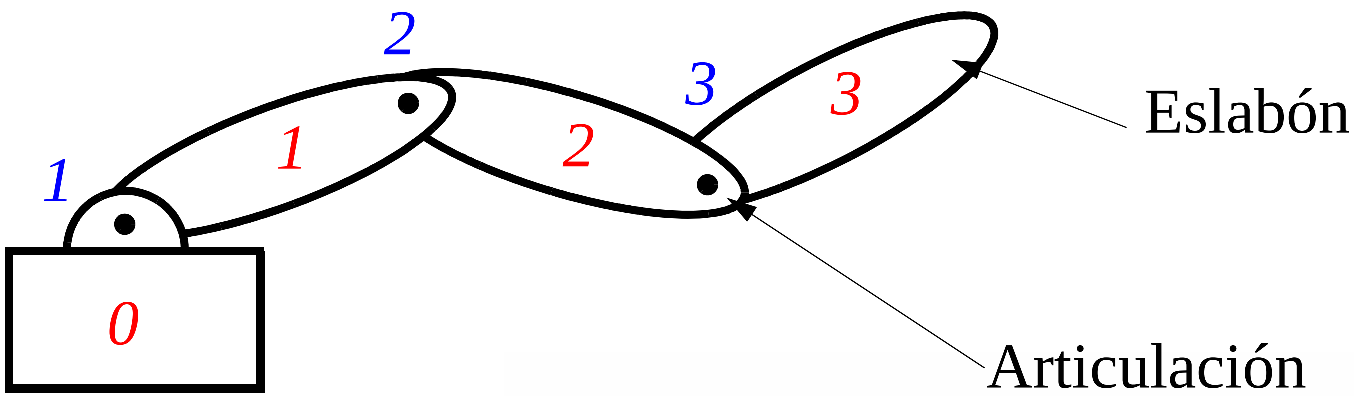
$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$
$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$
$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$
$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$
$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Las articulaciones se numeran empezando desde 1

Los eslabones o enlaces se numeran desde 0 empezando por la base



Cada eslabón o enlace *i* tiene asociado un sistema de referencia Ξ_i

Objetivo: Transformar las coordenadas dadas en Ξ_i en coordenadas en Ξ_{i-1}

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

La idea consiste en definir una serie de parámetros que permitan realizar simpre la misma serie de transformaciones para transformar las coordenadas dadas en Ξ_i en coordenadas en Ξ_{i-1}:

- Translación a lo largo del eje Z_i
- Rotación a lo largo del eje Z_i
- Traslación a lo largo del eje X_{i-1}
- Rotación a lo largo del eje X_{i-1}

$$\boxed{{}^{i-1}_{i}T = Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Tras(X_{i-1}, a_{i-1}) \cdot Rot(Z_i, \theta_i) \cdot Tras(Z_i, d_i)}$$

Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Parámetros

Cuatro parámetros, dos relacionados con el tamaño y forma del eslabón y otros dos para describir la posición relativa de los eslabones.

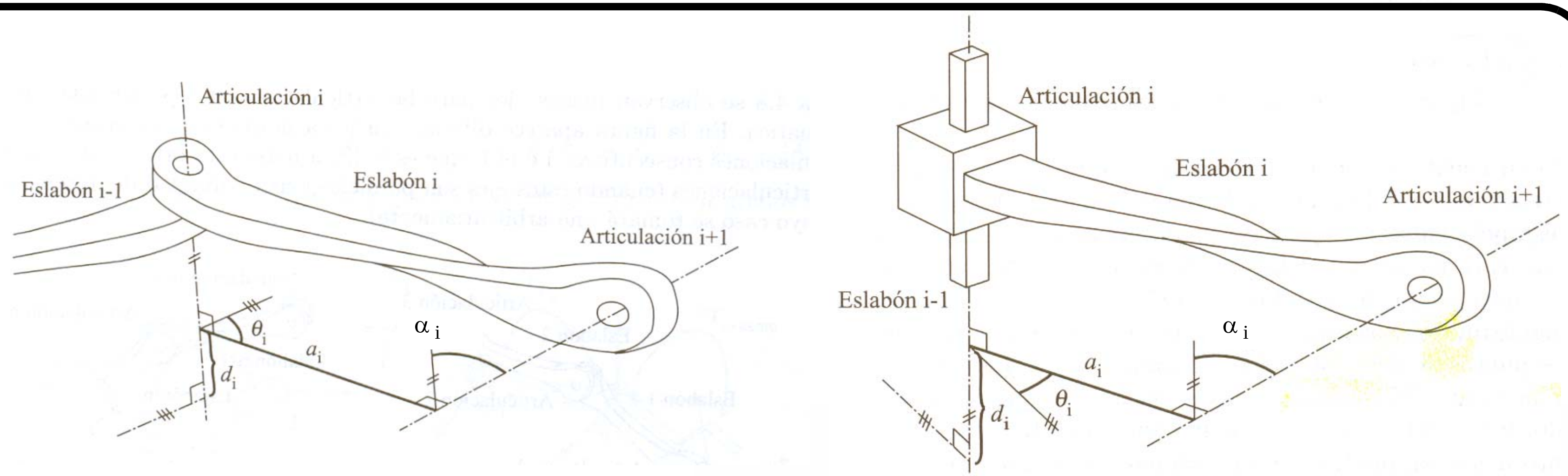


Figura 4.8: Parámetros de Denavit-Hartenberg.

θ_i.- Variable articular: ángulo formado entre las normales comunes a los ejes i-1 e i+1

d_i.- Variable articular: (distancia entre las intersecciones de las normales comunes a los ejes i-1e i+1)+(desplazamiento de una articulación prismática)

a_i.-distancia entre el eje de la articulación i y el eje de la articulación i+1 medida sobre la línea perpendicular común (si los ejes se cortan $a_i = 0$)

α_i.-ángulo entre los ejes de la articulación i e i+1 si estos se cortasen en los puntos de corte de la perpendicular común

Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia

El eje $\boldsymbol{Z_i}$ se hace coincidir con el eje de la articulación *i*. El origen de Ξ_i se escoge en el punto de corte con la normal común a la articulación *i*+1. El eje $\boldsymbol{X_i}$ se hace coincidir con esa misma normal. el eje $\boldsymbol{Y_i}$ se elige siguiendo la regla de la mano derecha. (Craig, 1986; Ollero, 2001)

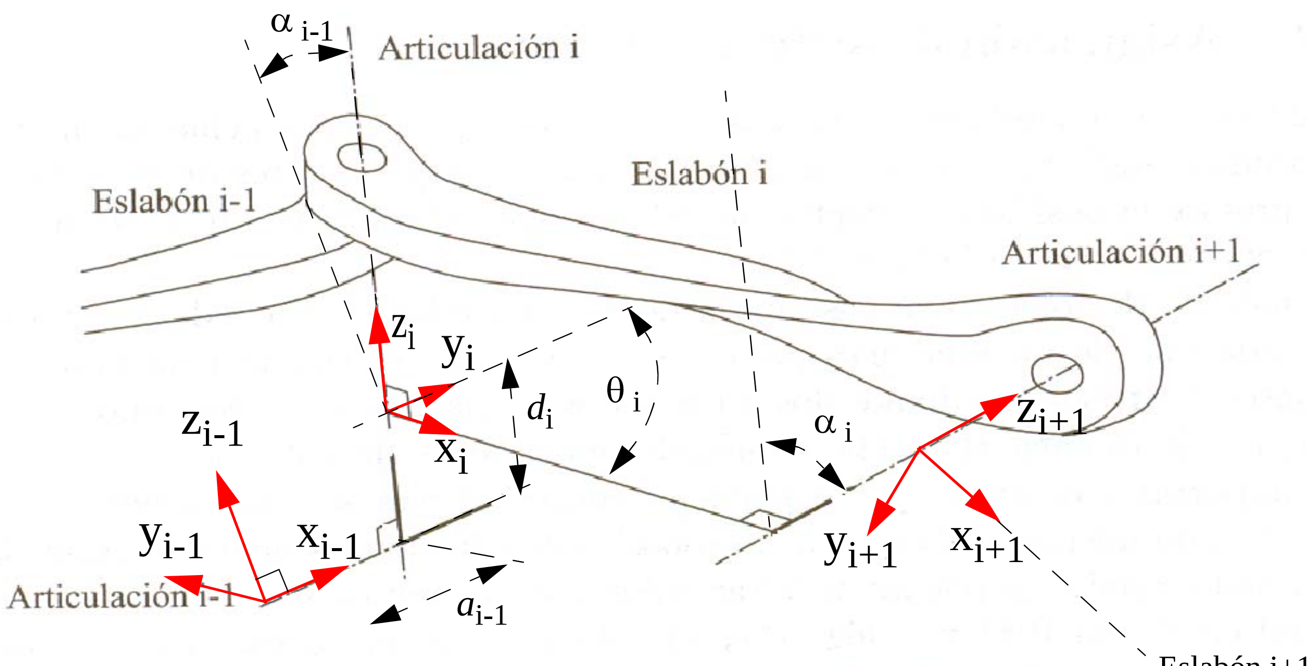


Figura 4.9: Asignación de sistemas de referencia.

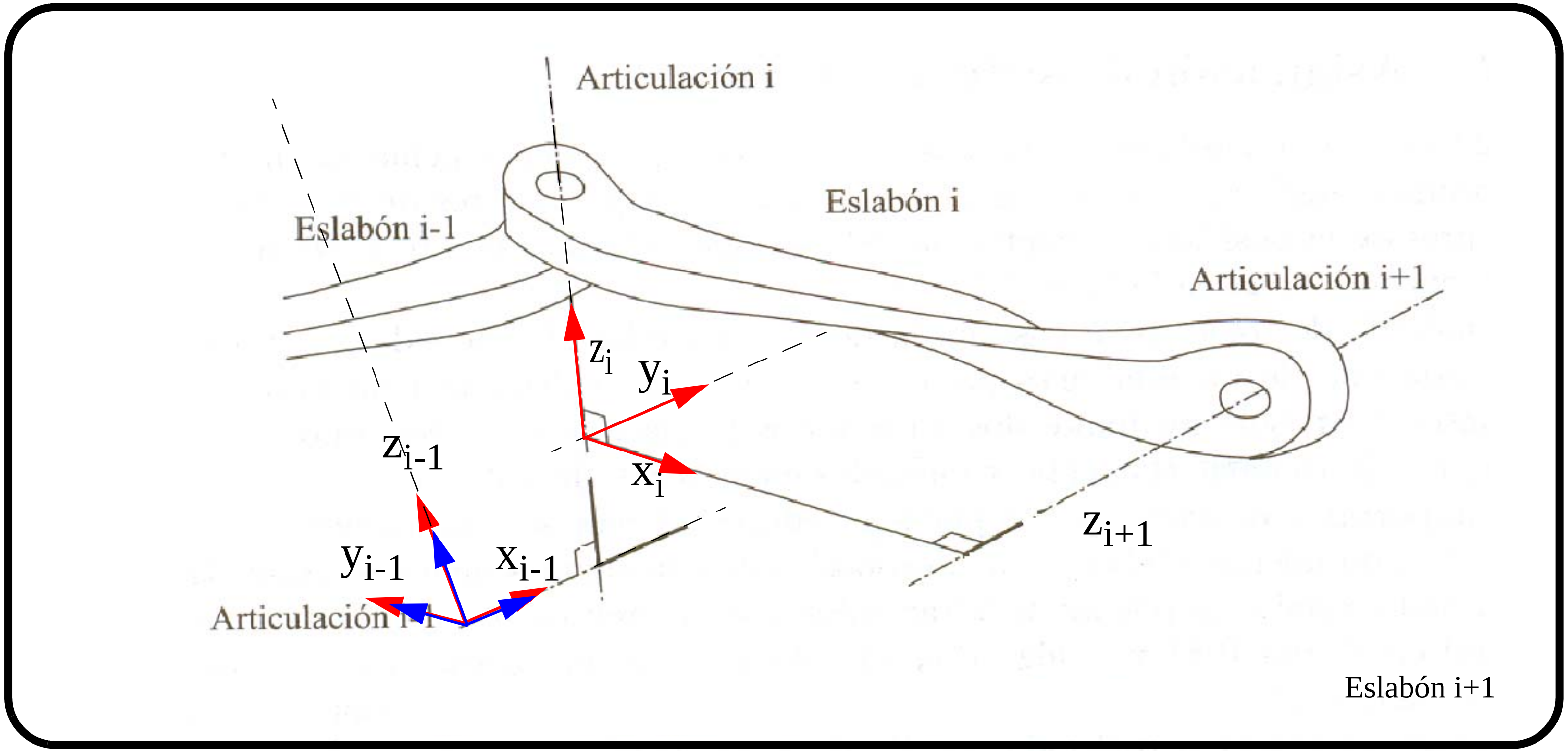
Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia

El eje Z_i se hace coincidir con el eje de la articulación *i*. El origen de Ξ_i se escoge en el punto de corte con la normal común a la articulación *i*+1. El eje X_i se hace coincidir con esa misma normal. el eje Y_i se elige siguiendo la regla de la mano derecha. (Craig, 1986; Ollero, 2001)

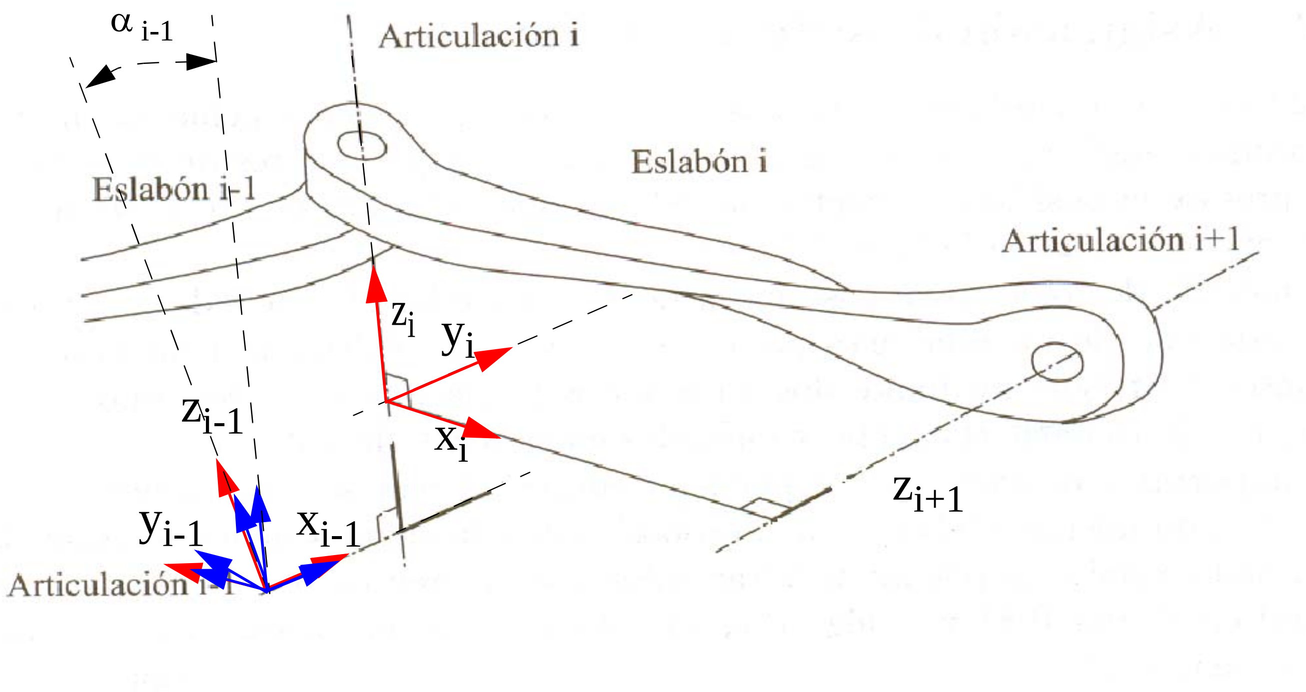


Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia

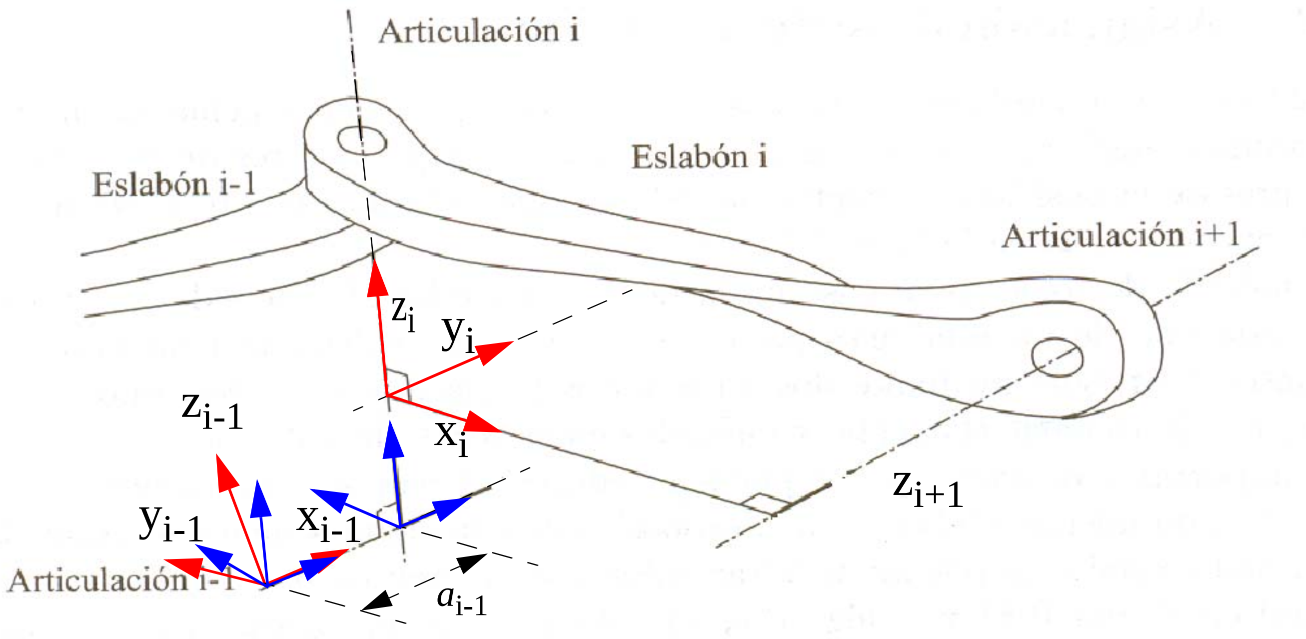


$$Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1})$$

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia



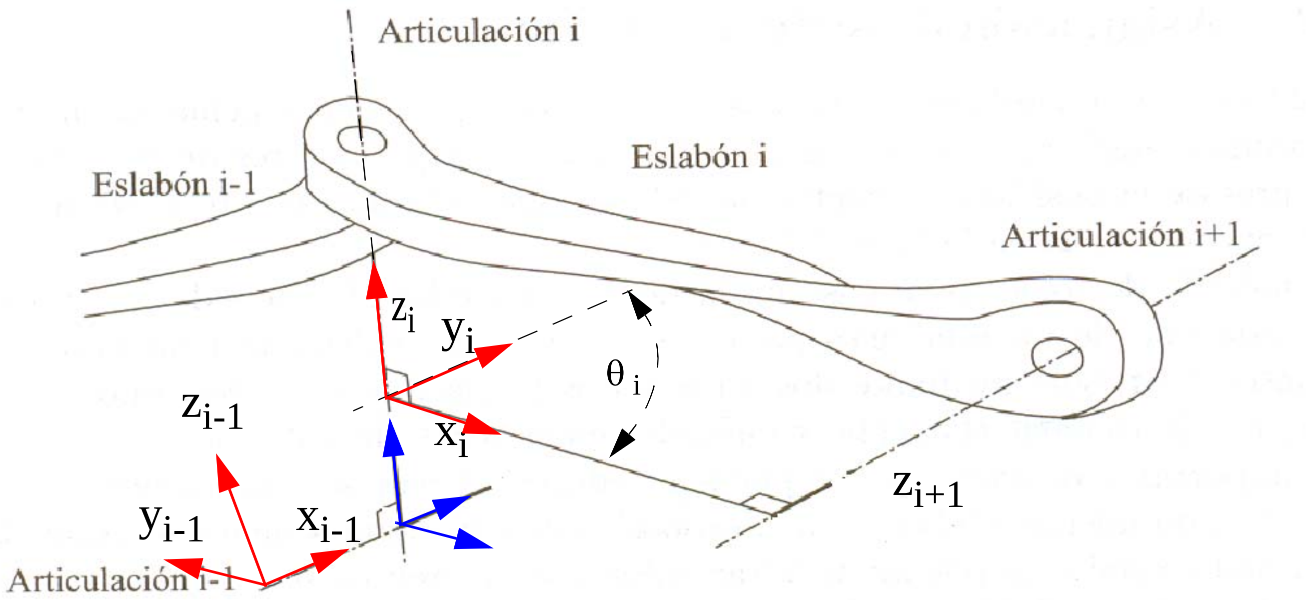
$$Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Tras(X_{i-1}, a_{i-1})$$

Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia



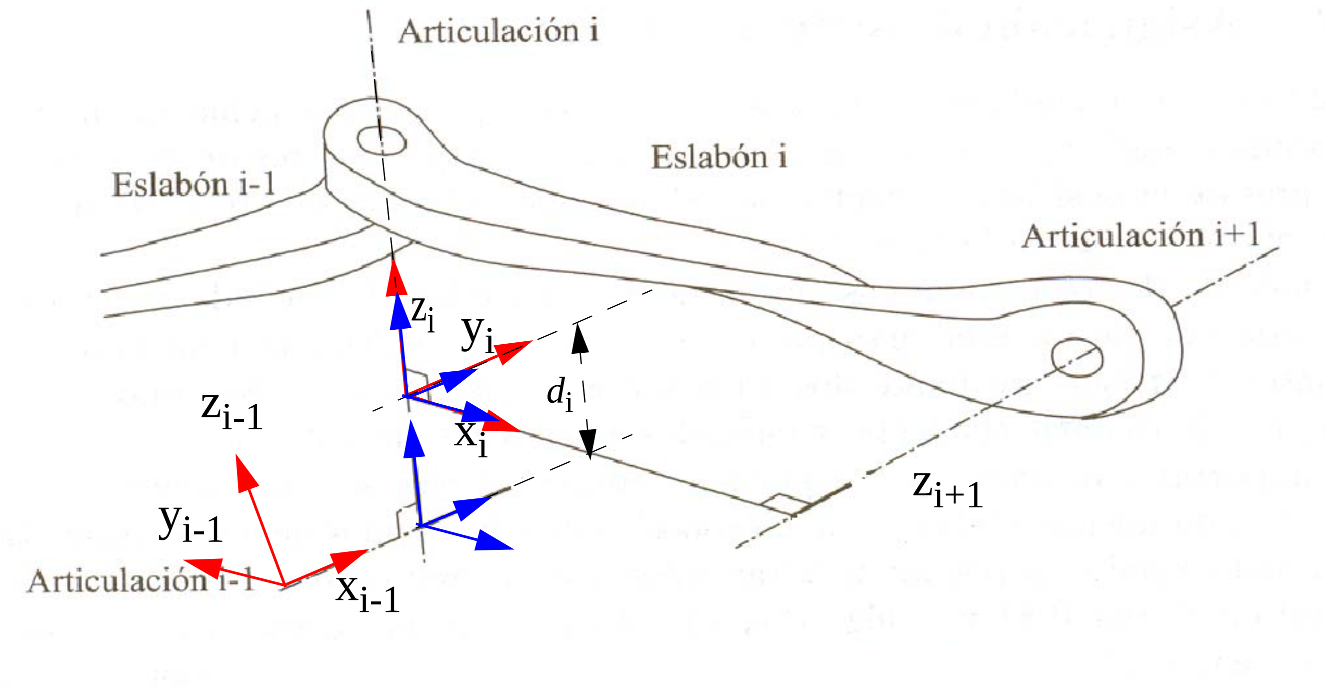
$$^{i-1}_{\ \ \ i}T = Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Tras(X_{i-1}, a_{i-1}) \cdot Rot(Z_i, \theta_i)$$

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Universidad de Huelva

Parámetros Denavit-Hattemberg

Elección de los sitemas de referencia



$$ {}^{i-1}_{i}T = Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Tras(X_{i-1}, a_{i-1}) \cdot Rot(Z_i, \theta_i) \cdot Tras(Z_i, d_i) $$

Universidad de Huelva

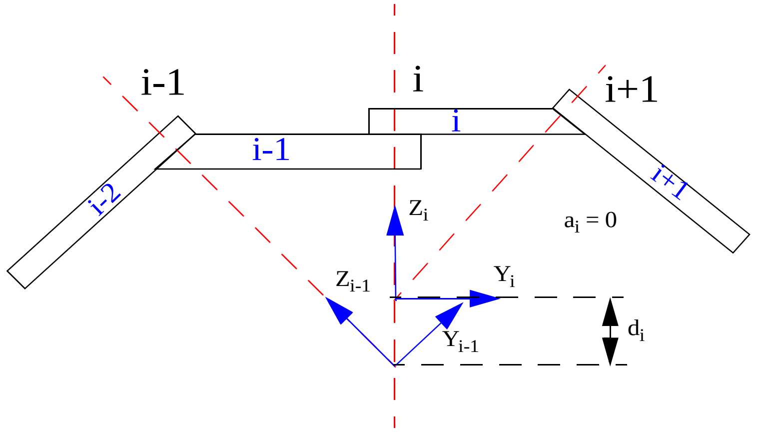
TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Casos Especiales

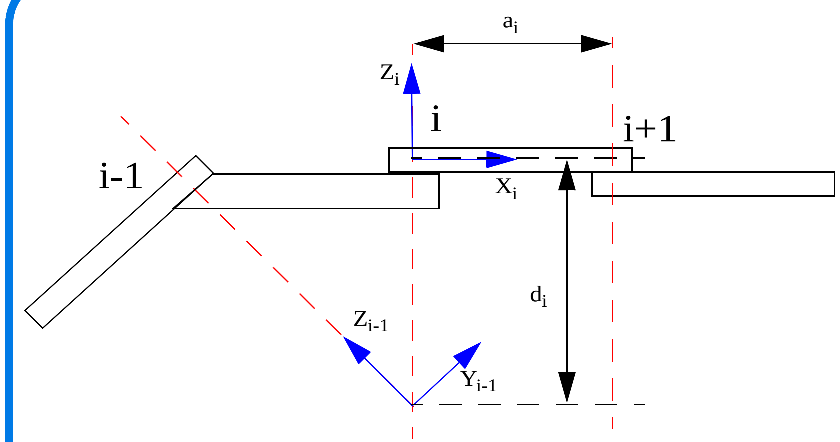
Si el eje i-1 o el i+1 cortan al eje i ó son paralelos al mismo, hay que añadir las siguientes reglas:

- En cualquier caso θ_i mide el ángulo formado por los ejes X_i y el X_{i-1}.
- Si se produce un corte entre dos ejes, la distancia d_i se mide desde ese punto de corte.
- Si el eje i se corta con el eje i+1 el origen del sistema de referencia i se fija en ese punto de corte.
- Si el eje i se corta con el eje i+1, X_i se elige perpendicular al plano que definen dichos ejes
- Si los ejes son paralelos se escoge la perpendicular común que contiene el centro del eslabón i.
- Si los ejes coinciden, el origen del sistema de referencia se escoge en el extremos del enlace

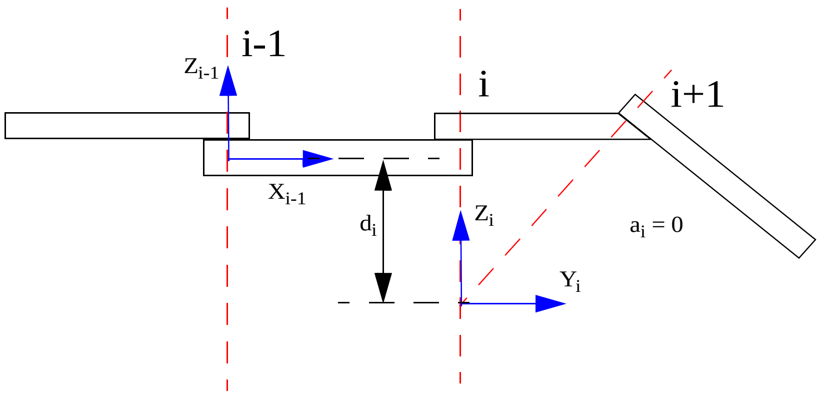
Casos Especiales



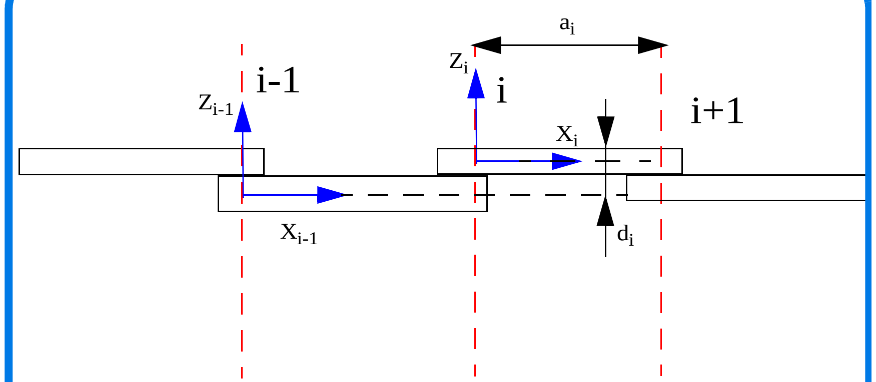
i-1 e i+1 cortan a i



i-1 corta a i; i+1 es paralelo



i+1 corta a i; i-1 es paralelo



i+1 e i-1 son paralelos

Universidad de Huelva

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Procedimiento para determinar los parámetros Denavit-Hattemberg

1º) Identificar los ejes

2º) Ubicar los origenes de los sistemas de referencia

3º) Dibujar los ejes Z_i

4º) Dibujar los ejes X_i e Y_i

5º) Escoger el sistema de referencia 0 (Se escoge de manera que α_i,a_i,θ_i e d_i sean iguales a cero)

6º) El origen del último sistema de referencia se fija en el efector final

7º) Identificar Parámetros: (para α_i y a_i observamos las relaciones con el sistema de referencia i+1 y para θ_i y d_i observamos las relaciones con el sistemas de referencia i-1)

Matrices de Transformación

Para representar i con respecto a i-1 se definen una serie de transformaciones en función de los parámetros considerados:

$$ {}^{i-1}_{i}T = Rot(X_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Tras(X_{i-1}, a_{i-1}) \cdot Rot(Z_i, \theta_i) \cdot Tras(Z_i, d_i) $$

PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

El problema cinemático directo consiste en:

Dados los parámetros Denavit-Hattemberg de las n articulaciones de un manipulador, encontrar la posición y orientación del sistema de referencia objetivo en el espacio cartesiano

$$ P(q, d) = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \ldots {}^{n-1}_{n}T = {}^{0}_{n}T $$

3.2.3 Problema cinemático Inverso

Cálculo de las variables articulares a partir de la posición y orientación deseadas para la herramienta final

Orientación deseada **Posición deseada**

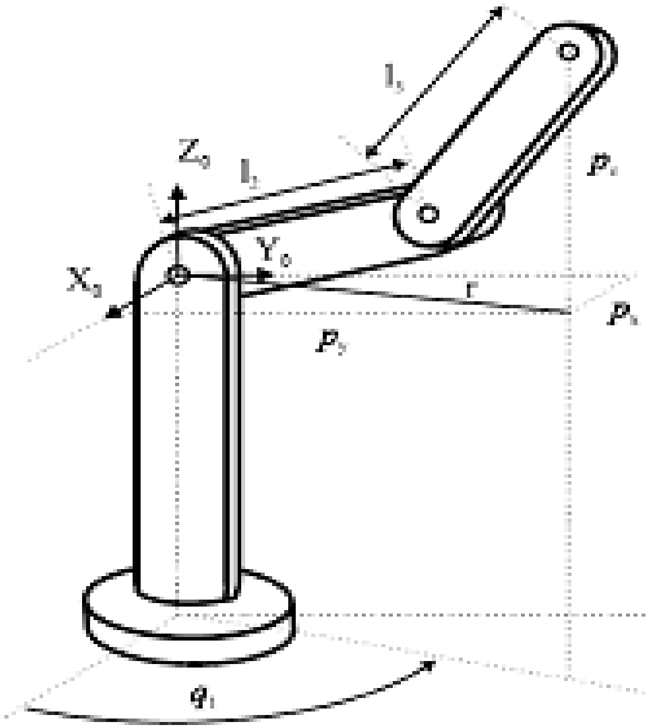
$$ {}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & {}^{0}x_{extremo} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & {}^{0}y_{extremo} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & {}^{0}z_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \ldots {}^{n-1}_{n}T $$

Ecuaciones no lineales:

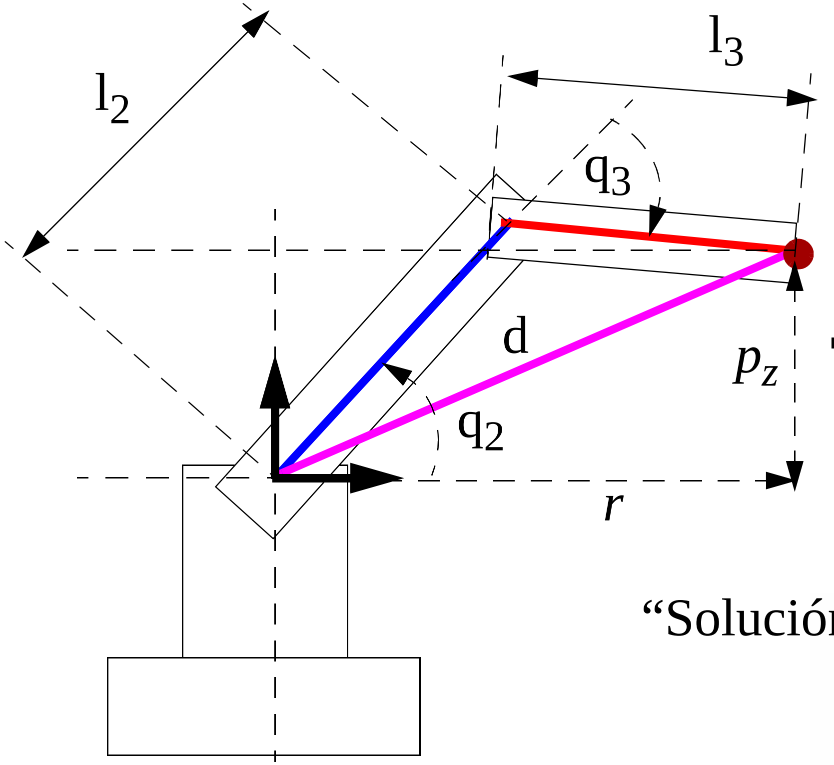
- ***Soluciones numéricas***
- ***Soluciones Algebraicas***
- ***Soluciones Geométricas***
- ***Solución Pieper***

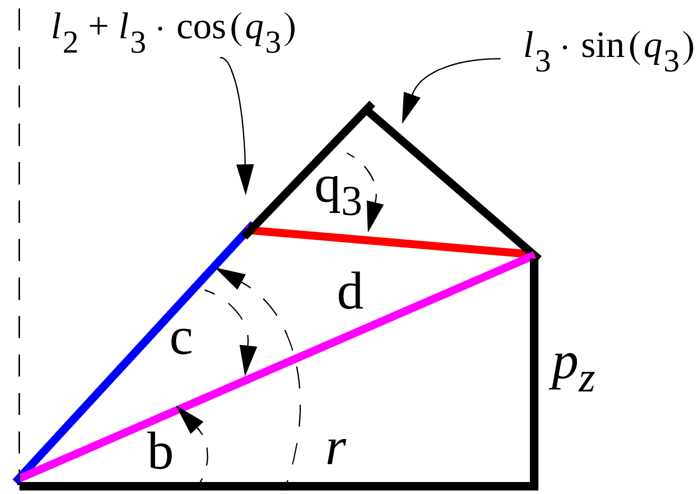
TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

Problema cinemático Inverso: Solución Geométrica



Problema cinemático Inverso: Solución Geométrica, Codo Arriba





$$\tan(b) = \frac{p_z}{r}$$

"Solución negativa q_3"

$$\tan(c) = \frac{l_3 \cdot \sin(q_3)}{l_2 + l_3 \cdot \cos(q_3)}$$

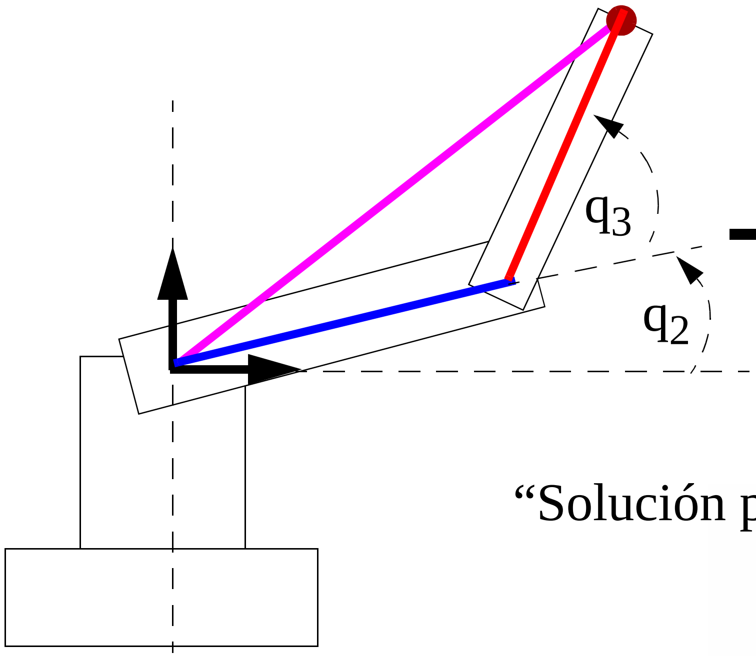
$$\boxed{q_2 = b - c}$$

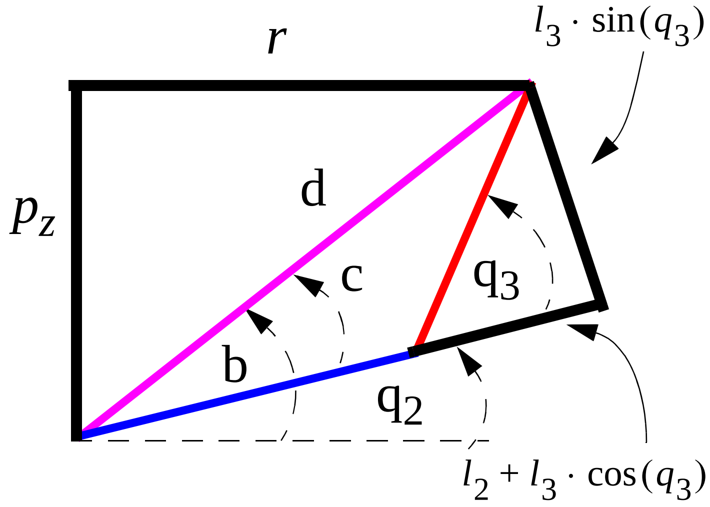
$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$d = r^2 + p_z^2 = (l_2 + l_3 \cdot \cos(q_3))^2 + (l_3 \cdot \sin(q_3))^2$$

$$\boxed{\cos(q_3) = \frac{r^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3}}$$

Problema cinemático Inverso: Solución Geométrica, Codo Abajo





$$\tan(b) = \frac{p_z}{r}$$

"Solución positiva q_3"

$$\tan(c) = \frac{l_3 \cdot \sin(q_3)}{l_2 + l_3 \cdot \cos(q_3)}$$

$$\boxed{q_2 = b - c}$$

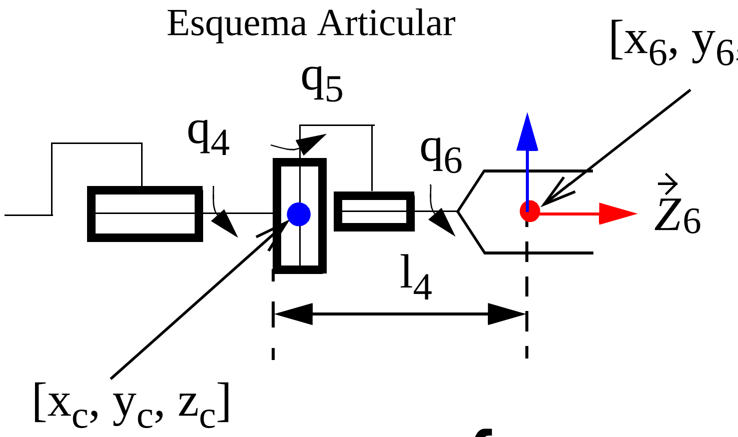
$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

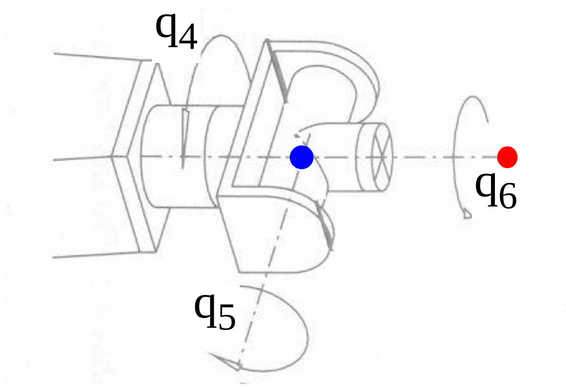
$$d = r^2 + p_z^2 = (l_2 + l_3 \cdot \cos(q_3))^2 + (l_3 \cdot \sin(q_3))^2$$

$$\boxed{\cos(q_3) = \frac{r^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3}}$$

Problema cinemático Inverso: Solución Pieper-I

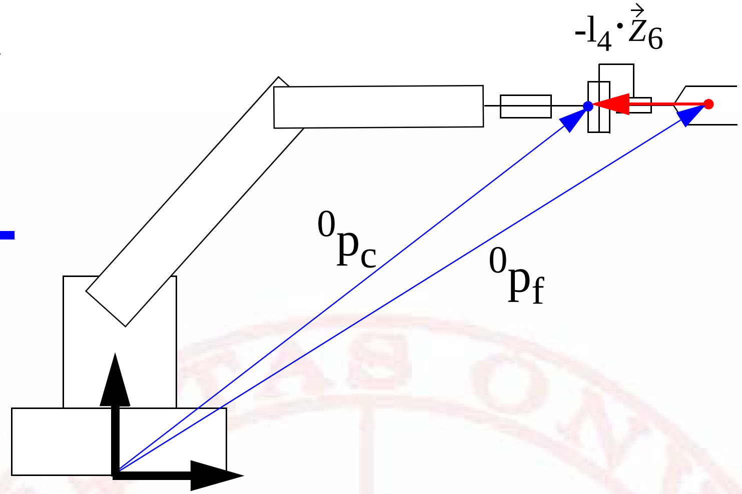
Caso de una muñeca en la que los tres ejes se cortan





Datos del Problema

$$\begin{cases} [{}^0x_f, {}^0y_f, {}^0z_f] \longrightarrow \text{Posición} \\ \vec{z}_6 \longrightarrow \text{Orientación} \end{cases}$$

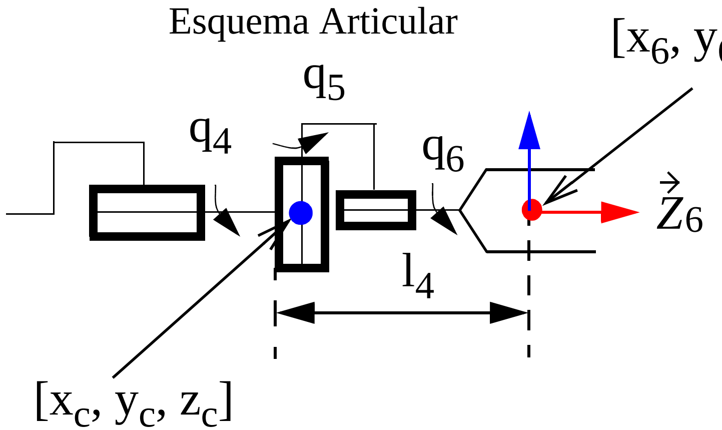


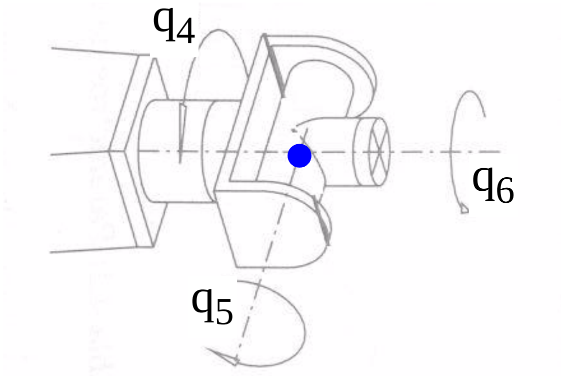
$$[{}^0x_c, {}^0y_c, {}^0z_c]^T = [{}^0x_6, {}^0y_6, {}^0z_6]^T - l_4 \cdot \vec{z}_6$$

Solución Geométrica q_1, q_2, q_3

Problema cinemático Inverso: Solución Pieper-II

Caso de una muñeca en la que los tres ejes se cortan





$$^0T_6 = {}^0T_3 \cdot {}^3T_6$$

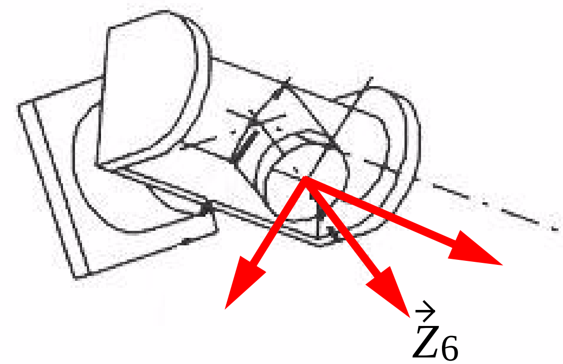
$[q_1, q_2, q_3]$

$\left[{}^0\vec{X}_6, {}^0\vec{Y}_6, {}^0\vec{Z}_6\right]$

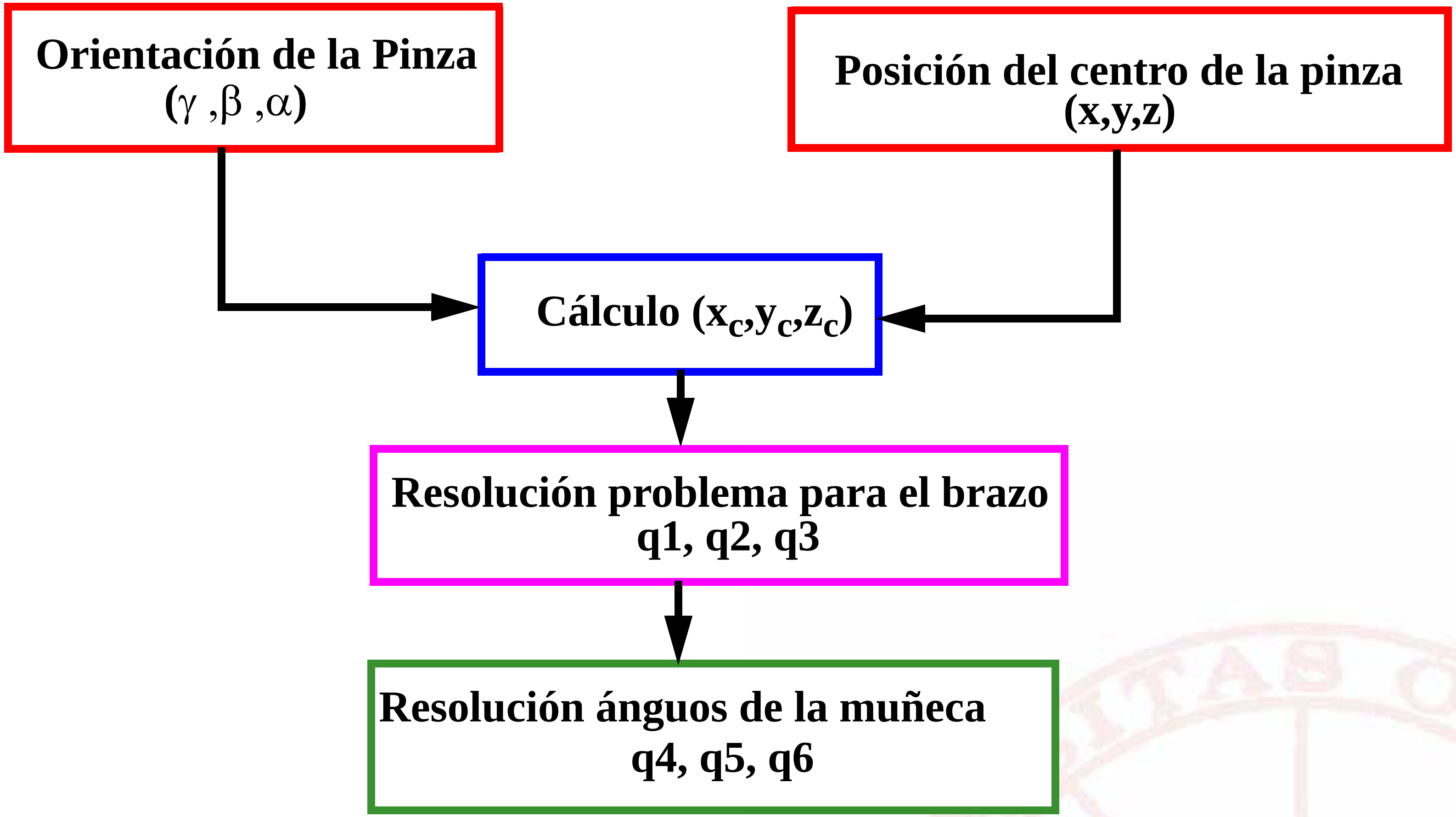
Datos del Problema

$$\boxed{^3T_6 = \left({}^0T_3\right)^{-1} \cdot {}^0T_6}$$

$$\boxed{[q_4, q_5, q_6]}$$



Problema cinemático Inverso: Solución Pieper



3.2.4 Cálculo del Jacobiano

Problema Directo

Conocer la velocidad del efector final conocidas las velocidades articulares

$$Q' \ (q'_1, q'_2, \ldots q'_n) \longrightarrow \boxed{\mathbf{J}} \longrightarrow \begin{cases} V_E \ (x'_E, y'_E, z'_E) \\ \omega_E \ (\alpha', \phi', \psi') \end{cases}$$

$$\mathbf{J} \longrightarrow \textbf{Jacobiano}$$

TEMA III: ROBOTS ARTICULADOS

¿Cómo se obtiene?

Problema cinemático Directo

$$\left.\begin{aligned} P_E &= (x_E, y_E, z_E) \\ \theta_E &= (\alpha, \phi, \psi) \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} P_E \\ \theta_E \end{bmatrix} = G(q_1, q_2, \ldots q_n)$$

Derivando

$$\begin{bmatrix} P'_E \\ \theta'_E \end{bmatrix} = J(q_1, q_2, \ldots q_n) \cdot \begin{bmatrix} q'_1 \\ \ldots \\ q'_n \end{bmatrix}$$

Universidad de Huelva

Problema Inverso

Conocer las velocidades articulares dada la velocidad del efector final

$$\begin{matrix} V_E\,(x'_E, y'_E, z'_E) \\ \omega_E\,(\alpha', \phi', \psi') \end{matrix} \longrightarrow \boxed{J^{-1}} \longrightarrow Q'\,(q'_1, q'_2, \ldots q'_n)$$

$$\begin{bmatrix} q'_1 \\ \ldots \\ q'_n \end{bmatrix} = J^{-1}(q_1, q_2, \ldots q_n) \cdot \begin{bmatrix} P'_E \\ \theta'_E \end{bmatrix}$$

Singularidades

Son aquellas configuraciones donde no es posible encontrar la inversa del manipulador. Coinciden con aquellas en las que el determinante del Jacobiano se hace igual a cero.

$$Det[J(q_1, q_2, \ldots q_n)] = 0$$

Representan situaciones en las que hay direcciones en los que no es posible mover el efector final (límites del espacio de trabajo o alineación de de ejes articulaciones)

Ejemplo: