



3 ROBOTS MÓVILES

3.1 Introducción: Preliminares y Conceptos.

3.2 Características de los Robots Móviles.

3.3 Estrategias de Control.

3.4 Seguimiento de Trayectorias.

3.5 Algoritmos de Planificación.

3.6 Introducción a la Localización.

3.7 Control reactivo

3.8 Slam

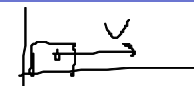
3.9 Navegación Topológica



Universidad
de Huelva

3.2 Características de los Robots Móviles

3.2.1 Modelo de la rueda



Asumimos que el robot se mueve en un plano con un ángulo θ determinado

- Consideramos
 - Velocidad lineal (\dot{x})
 - Velocidad angular ($\dot{\theta}$)
 - La orientación del robot.

El movimiento de cualquier sólido rígido en el plano se puede considerar compuesto por:

- Un punto en el plano del objeto.
- Velocidad angular del objeto al rededor del punto.

Necesitamos encontrar:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

Se pueden expresar en diferentes sistemas de Referencia.

Normalmente se expresan en el sistema de Referencia del Robot:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x = v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega = \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Variables de configuración: $P = [x_1 \ y_1 \ \theta \ \alpha]$

$$\text{Restricciones Cinemáticas: } \begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$

Nº D.O.F: $4 - 2 = 2 \rightarrow$ Modelo Cinemático: $\dot{P} = f(P, u)$

\rightarrow Centro Instantáneo de Rotación

- Velocidad asociada: $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$



$$R = \frac{r}{\rho}$$

Curvatura

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \theta & 0 \\ r \cdot \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Modelo Completo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Modelo Simplificado

Asumimos un cambio de velocidad instantáneo.

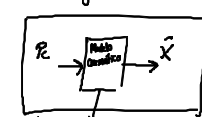
$$x = \int v \, dt$$

La velocidad no es una función analítica por lo que debemos integrar numéricamente.

Algoritmos de integración numérica. Se usan en simuladores.

Modelo Cinemático

Proporciona \dot{x} en función de los parámetros de control (velocidad).



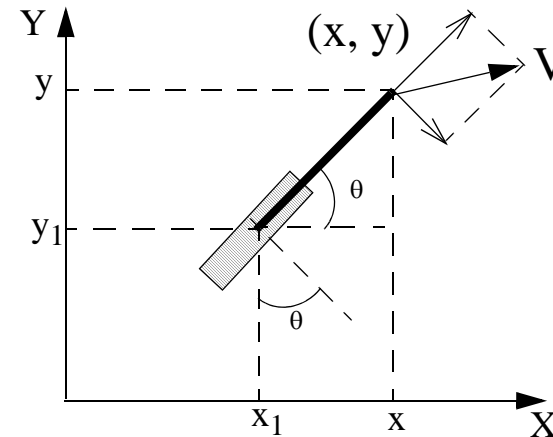
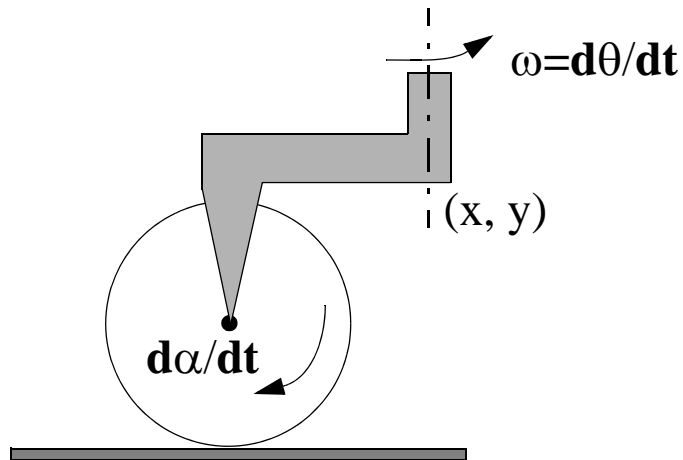
Aproximación de la expresión: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$. Se aproxima a $x(k+1) = x(k) + v \cdot \Delta t$. Se aproximan los valores de x y y en cada instante de tiempo.

2 Grados de Libertad:

- $\dot{\alpha}$ velocidad de rodado
- ω velocidad de giro



3.2.2 Rueda Castora



Parámetros de configuración: $[x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \alpha \ x \ y \ \theta]$

$\xleftarrow{\text{rueda}} \quad \xrightarrow{\text{enlace}}$

Restricciones Holónomas:

$$x_1 = x + l \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad y_1 = y + l \cdot \sin(\theta)$$

$$\theta_1 = \theta$$

$$V = V_1 + \omega \wedge l$$

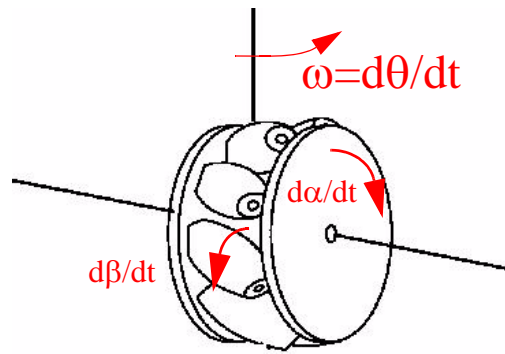
Variables de configuración (7 - 3) = 4: $P = [x \ y \ \theta \ \alpha]$

Restricciones No Holónomas:

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + l \cdot \dot{\theta} = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$



3.2.3 Rueda Sueca (Swedish wheel)



Swedish 90



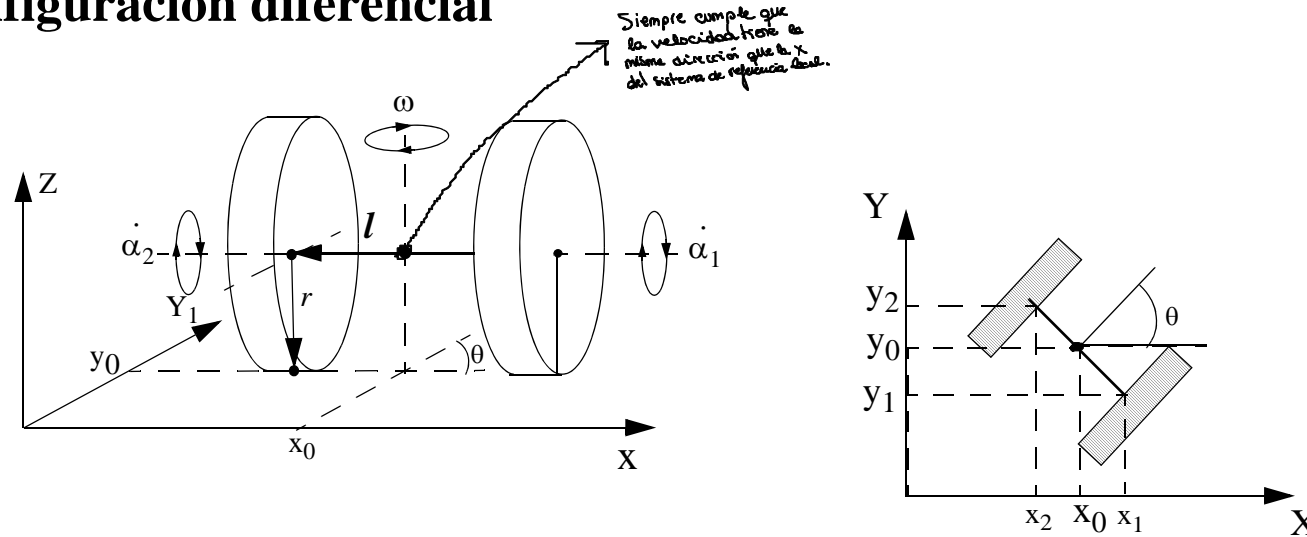
Variables de configuración = 5: $P = [x \ y \ \theta \ \alpha \ \beta]$

$$\text{Restricciones No Holónomas:} \begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + l \cdot \dot{\beta} = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$



Universidad
de Huelva

3.2.4 Configuración diferencial



Parámetros de configuración: $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \theta_1 & x_2 & y_2 & \theta_2 & x_0 & y_0 & \theta \end{bmatrix}$
 $\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ \text{rueda 1}^a & \text{rueda 2}^a & \text{enlace} \end{matrix}$

Restricciones Holónomas:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{l} \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_O - \vec{\omega} \wedge \vec{l} \end{aligned}$$

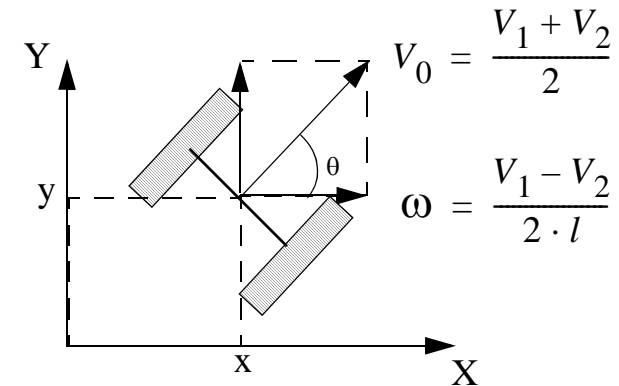
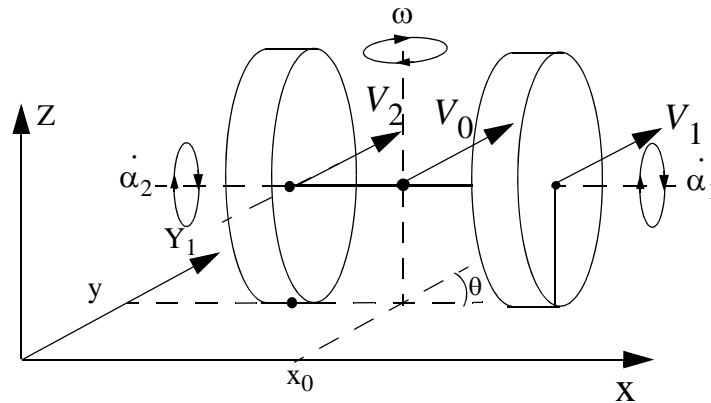
$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) ; y_1 = y_0 + l \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ x_2 &= x_0 + l \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) ; y_2 = y_0 + l \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) ; \\ \theta_1 &= \theta ; \theta_2 = \theta \end{aligned}$$

Variables de configuración ($9 - 6 = 3$): $P = [x_0 \ y_0 \ \theta]$



Universidad
de Huelva

TEMA IV: ROBOTS MÓVILES



Restricciones no holónomas
(una por cada rueda y otra para el enlace,
se resumen en una sola)

$$\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta = 0$$

Nº D.O.F: $3 - 1 = 2$

2 Grados de Libertad:

$\dot{\alpha}_1$ velocidad de rodado 1ª rueda

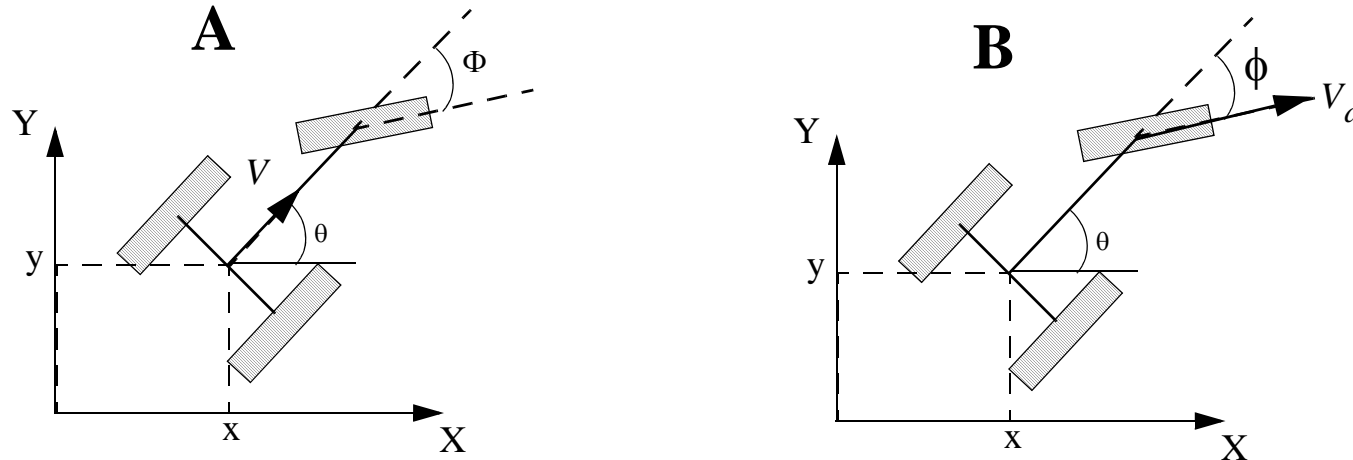
$\dot{\alpha}_2$ velocidad de rodado 2ª rueda

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r \cos \theta}{2} & \frac{r \cos \theta}{2} \\ \frac{r \sin \theta}{2} & \frac{r \sin \theta}{2} \\ \frac{r}{2 \cdot l} & -\frac{r}{2 \cdot l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$



3.2.5 Configuración de triciclos



12 Parámetros de configuración - 8 restricciones holónomas: 4 V. de config.
(3 ruedas y el punto de referencia)

Variables de configuración: $P = [x \quad y \quad \theta \quad \phi]$

Restricciones no holónomas:
$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \\ \dot{x} \sin(\phi + \theta) - \dot{y} \cos(\phi + \theta) - \dot{\theta} l \cos(\phi) = 0 \end{cases}$$

(una por cada rueda y la estructura del vehículo se resumen en dos)

2 Grados de Libertad:

v velocidad de desplazamiento

ϕ ángulo de conducción

**Modelo Simplificado A**

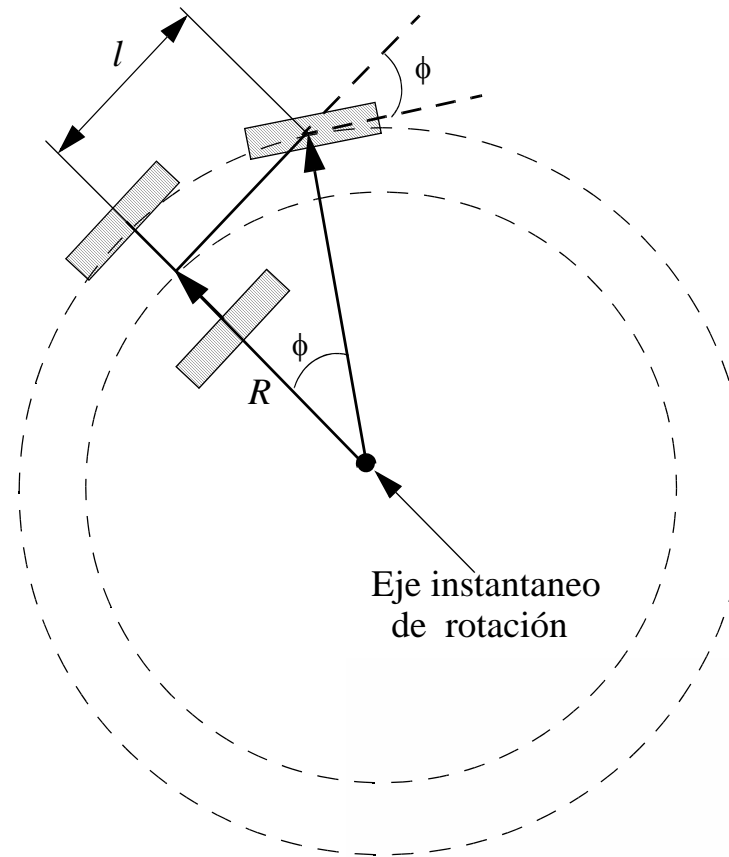
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ V \cdot \frac{\tan \phi}{l} \end{bmatrix}$$

Modelo Completo A

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{\tan \phi}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Limitación física

$$|\phi| < \phi_{max}$$



$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{\tan \phi}$$

$$\dot{\theta} = V \cdot \rho$$

Modelo Simplificado B

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \cdot \cos \phi \\ V_d \cdot \frac{\sin \phi}{l} \end{bmatrix}$$

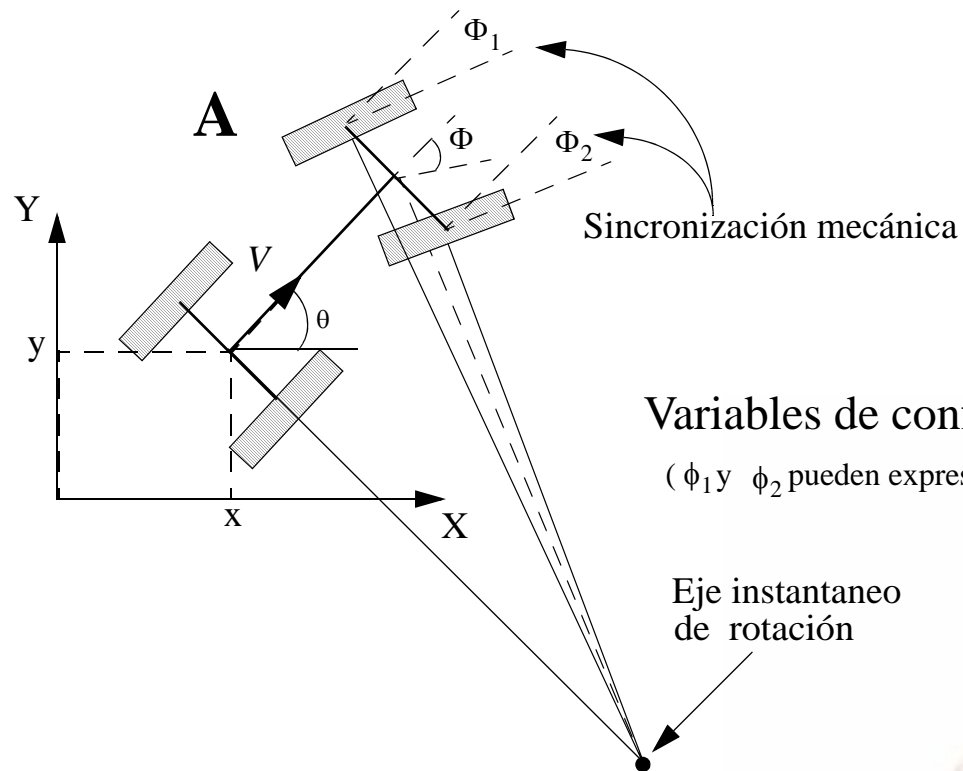
Modelo Completo B

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & 0 \\ \frac{\sin \phi}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$



3.2.6 Configuración Ackerman

15 Parámetros de configuración - 11 restricciones holónomas: 4 V.de configuraciui
 (4 ruedas y el punto de referencia) (ϕ_1 y ϕ_2 están relacionados mecánicamente)



Variables de configuración: $P = [x \ y \ \theta \ \phi]$

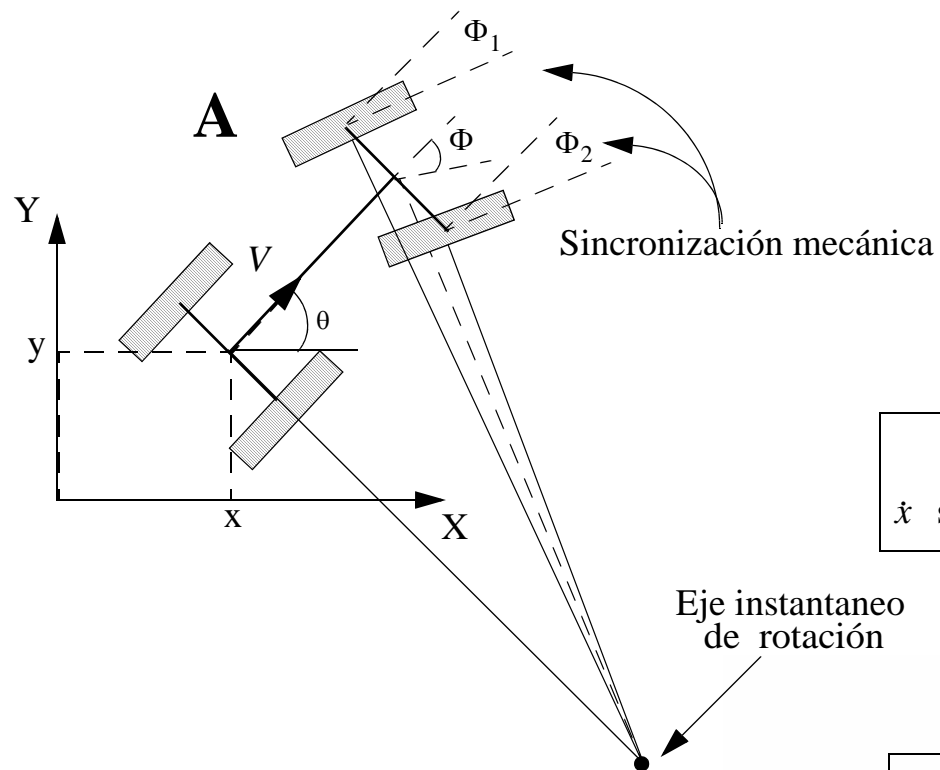
(ϕ_1 y ϕ_2 pueden expresarse en función de ϕ)

Eje instantaneo
de rotación



Universidad
de Huelva

TEMA IV: ROBOTS MÓVILES



Restricciones no holónomas:

(una por cada rueda y la estructura del vehículo se resumen en dos)

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

$$\dot{x} \sin(\phi + \theta) - \dot{y} \cos(\phi + \theta) - \dot{\theta} l \cos(\phi) = 0$$

2 Grados de Libertad:

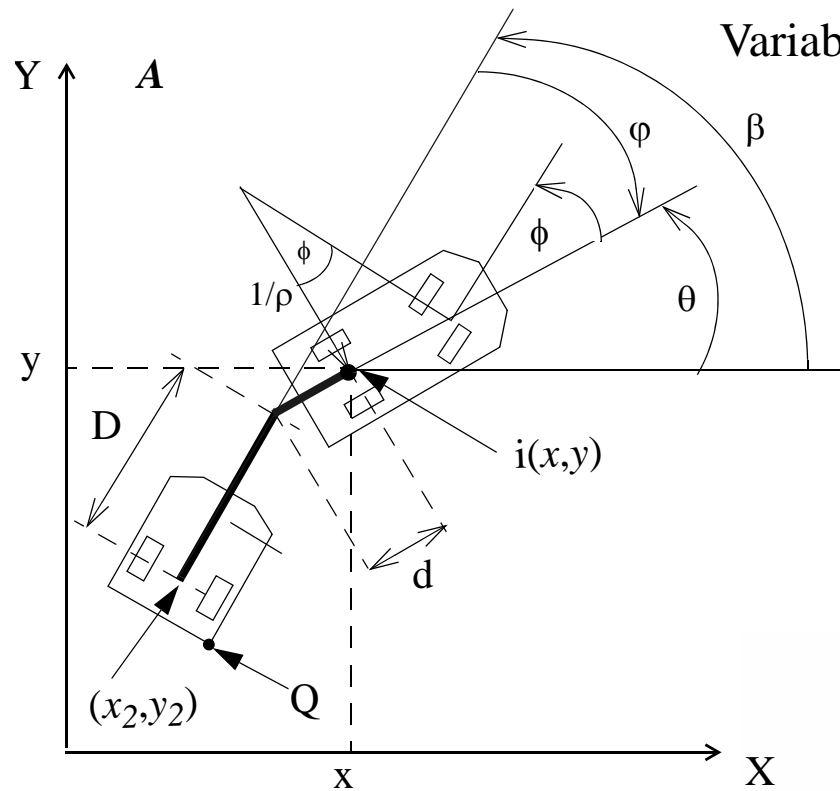
v velocidad de desplazamiento

ϕ ángulo de conducción

MODELO CINEMÁTICO SIMILAR AL DEL TRICICLO



3.2.7 Tractor- Trailer

Variables de configuración: $P = [x \ y \ \theta \ \phi]$

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta \sin\phi & \sin\theta \sin\phi & -D-d\cos\phi & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0$$

2 Grados de Libertad:

 v velocidad de desplazamiento ϕ ángulo de conducción

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\sin(\phi)}{D} & \frac{\cos(\phi)d}{D} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t)\rho(t) \end{bmatrix}$$