



# 3 ROBOTS MÓVILES

---

3.1 Introducción: Preliminares y Conceptos.

3.2 Características de los Robots Móviles.

3.3 Estrategias de Control.

3.4 Seguimiento de Trayectorias.

3.5 Algoritmos de Planificación.

3.6 Introducción a la Localización.

3.7 Control reactivo

3.8 Slam

3.9 Navegación Topológica

---



Universidad  
de Huelva

## 3.2 Características de los Robots Móviles

### 3.2.1 Modelo de la rueda



Asumimos que el robot se mueve en un plano con un ángulo  $\theta$  determinado

- Consideramos
  - Velocidad lineal ( $\dot{x}$ )
  - Velocidad angular ( $\dot{\theta}$ )
  - La orientación del robot.

El movimiento de cualquier sólido rígido en el plano se puede considerar compuesto por:

- Un punto en el plano del objeto.
- Velocidad angular del objeto al rededor del punto.

Necesitamos encontrar:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

Se pueden expresar en diferentes sistemas de Referencia.

Normalmente se expresan en el sistema de Referencia del Robot:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x = v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega = \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Robots  
Diferenciales

Variables de configuración:  $P = [x_1 \ y_1 \ \theta \ \alpha]$

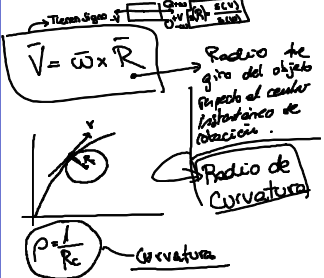
Restricciones Cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$

Nº D.O.F:  $4 - 2 = 2 \rightarrow$  Modelo Cinemático:  $\dot{P} = f(P, u)$

$\rightarrow$  Centro Instantáneo de Rotación

- Velocidad asociada:  $\vec{\omega}$



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \theta & 0 \\ r \cdot \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Modelo Completo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Modelo Simplificado

Asumimos un cambio de velocidad instantáneo.

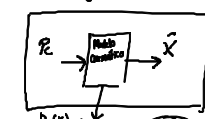
$$x = \int v \, dt$$

La velocidad no es una función analítica por lo que debemos integrar numéricamente.

Algoritmos de integración numérica. Se usan en simuladores.

Modelo Cinemático

Proporciona  $\dot{x}$  en función de los parámetros de control. (velocidad)



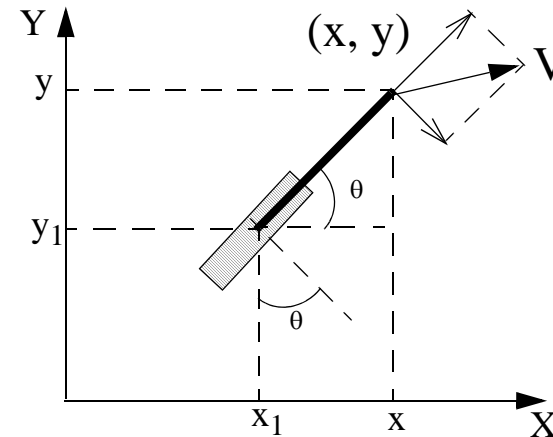
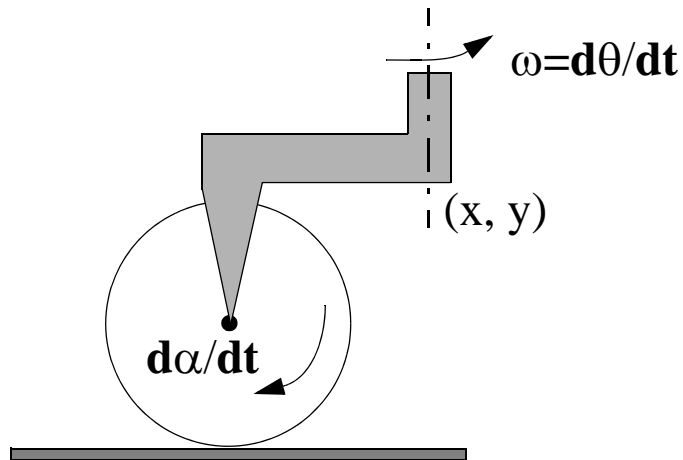
Aproximación de la expresión:  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ .  $x(k+1) = x(k) + v \cdot \Delta t$ . Se hace porque se calcula la velocidad y se calcula la posición.

2 Grados de Libertad:

- $\dot{\alpha}$  velocidad de rodado
- $\omega$  velocidad de giro



### 3.2.2 Rueda Castora



Parámetros de configuración:  $[x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \alpha \ x \ y \ \theta]$

$\xleftarrow{\text{rueda}} \quad \xrightarrow{\text{enlace}}$

Restricciones Holónomas:

$$x_1 = x + l \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad y_1 = y + l \cdot \sin(\theta)$$

$$\theta_1 = \theta$$

$$V = V_1 + \omega \wedge l$$

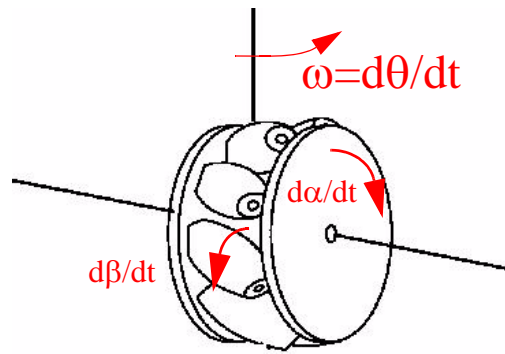
Variables de configuración (7 - 3) = 4:  $P = [x \ y \ \theta \ \alpha]$

Restricciones No Holónomas:

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + l \cdot \dot{\theta} = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$



### 3.2.3 Rueda Sueca (Swedish wheel)



Swedish 90



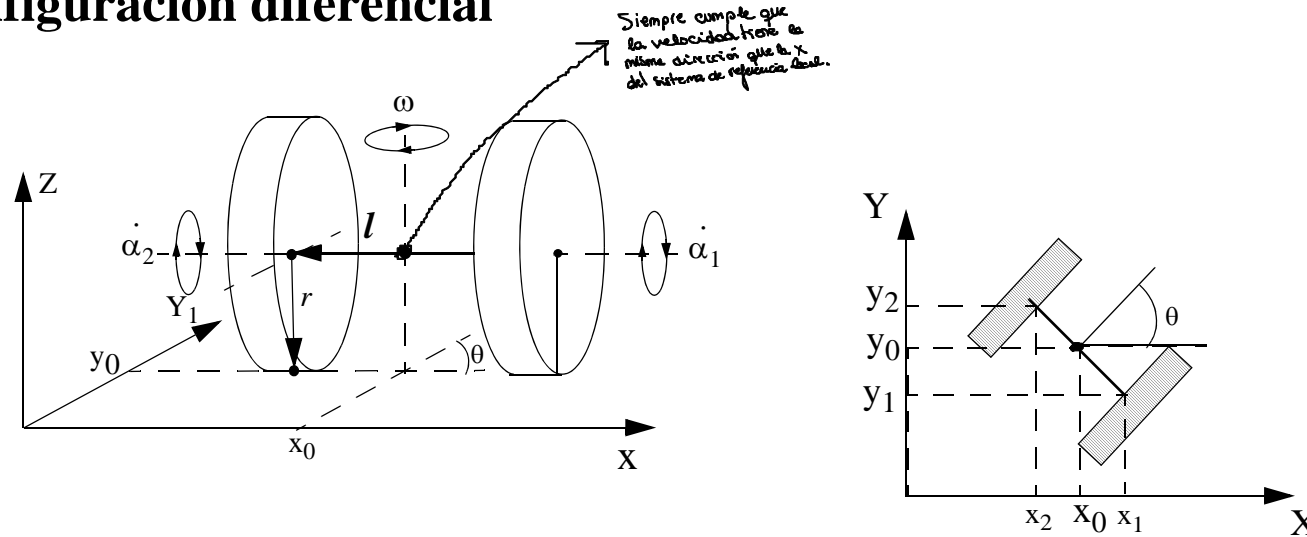
Variables de configuración = 5:  $P = [x \ y \ \theta \ \alpha \ \beta]$

$$\text{Restricciones No Holónomas:} \begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + l \cdot \dot{\beta} = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\alpha} \cdot r = 0 \end{cases}$$



Universidad  
de Huelva

### 3.2.4 Configuración diferencial



Parámetros de configuración:  $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \theta_1 & x_2 & y_2 & \theta_2 & x_0 & y_0 & \theta \end{bmatrix}$   
 $\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ \text{rueda 1}^a & \text{rueda 2}^a & \text{enlace} \end{matrix}$

Restricciones Holónomas:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{l} \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_O - \vec{\omega} \wedge \vec{l} \end{aligned}$$

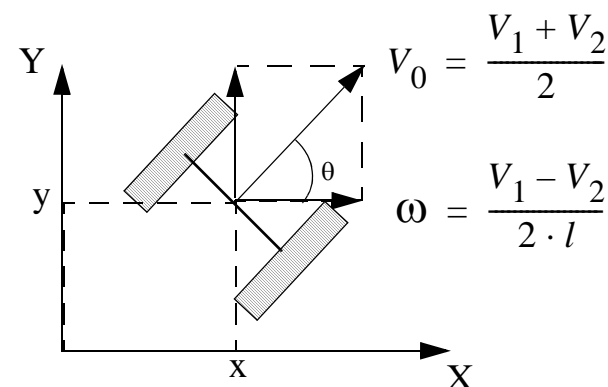
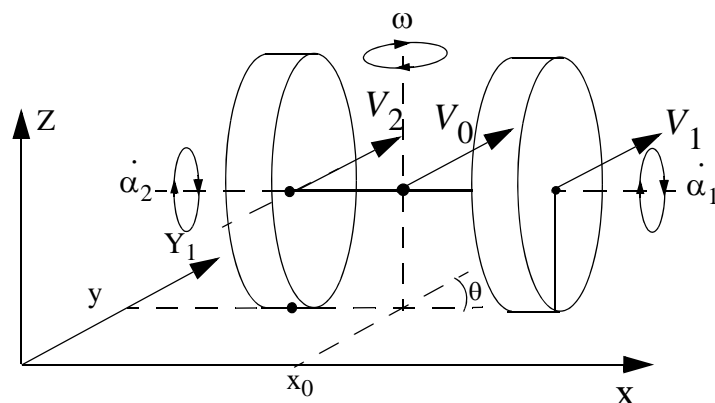
$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) ; y_1 = y_0 + l \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ x_2 &= x_0 + l \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) ; y_2 = y_0 + l \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) ; \\ \theta_1 &= \theta ; \theta_2 = \theta \end{aligned}$$

Variables de configuración (  $9 - 6 = 3$ ):  $P = [x_0 \ y_0 \ \theta]$



Universidad  
de Huelva

# TEMA IV: ROBOTS MÓVILES



**Restricciones no holónomas**  
(una por cada rueda y otra para el enlace,  
se resumen en una sola)

$$\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta = 0$$

Nº D.O.F:  $3 - 1 = 2$

**2 Grados de Libertad:**

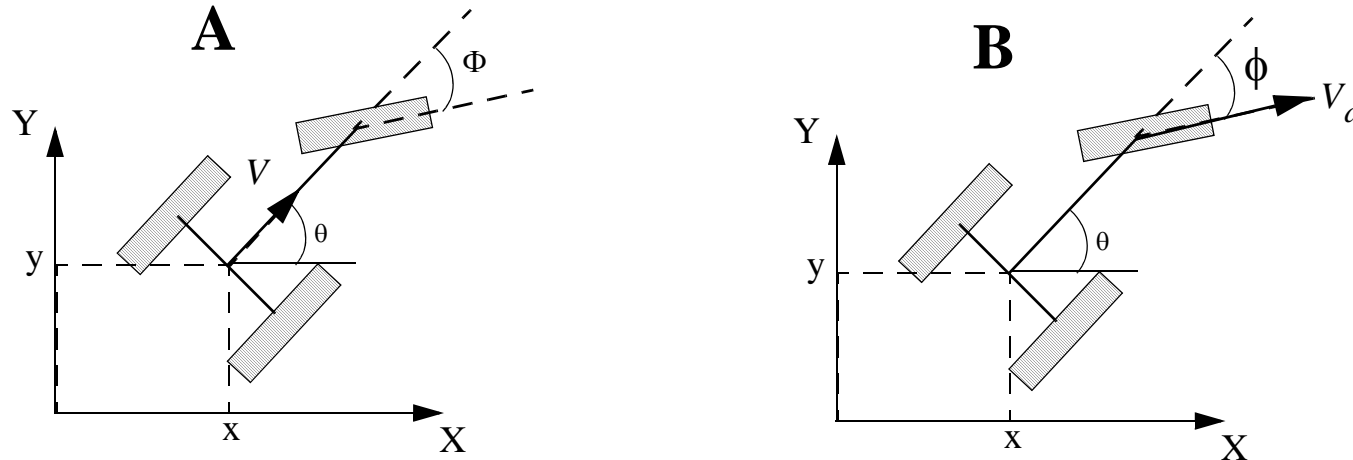
$\dot{\alpha}_1$  velocidad de rodado 1ª rueda  
 $\dot{\alpha}_2$  velocidad de rodado 2ª rueda

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r \cos \theta}{2} & \frac{r \cos \theta}{2} \\ \frac{r \sin \theta}{2} & \frac{r \sin \theta}{2} \\ \frac{r}{2 \cdot l} & -\frac{r}{2 \cdot l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$



### 3.2.5 Configuración de triciclos



12 Parámetros de configuración - 8 restricciones holónomas: 4 V. de config.  
(3 ruedas y el punto de referencia)

Variables de configuración:  $P = [x \quad y \quad \theta \quad \phi]$

Restricciones no holónomas: 
$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \\ \dot{x} \sin(\phi + \theta) - \dot{y} \cos(\phi + \theta) - \dot{\theta} l \cos(\phi) = 0 \end{cases}$$
  
(una por cada rueda y la estructura del vehículo se resumen en dos)

**2 Grados de Libertad:**

$v$  velocidad de desplazamiento

$\phi$  ángulo de conducción





Universidad  
de Huelva

# TEMA IV: ROBOTS MÓVILES

**Modelo Simplificado A**

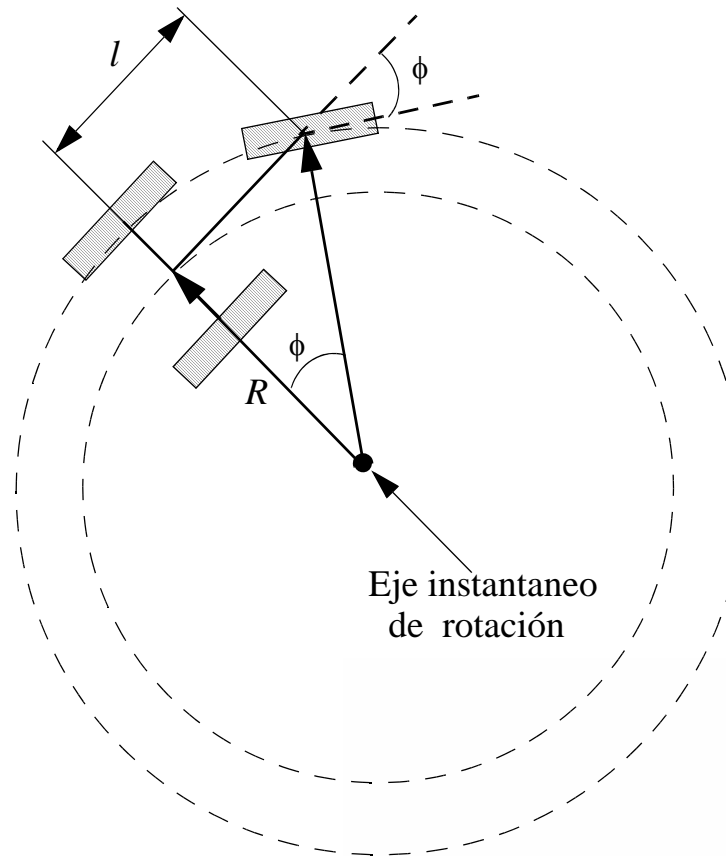
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ V \cdot \frac{\tan \phi}{l} \end{bmatrix}$$

**Modelo Completo A**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{\tan \phi}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

**Limitación física**

$$|\phi| < \phi_{max}$$



$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{\tan \phi}$$

$$\dot{\theta} = V \cdot \rho$$

**Modelo Simplificado B**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \cdot \cos \phi \\ V_d \cdot \frac{\sin \phi}{l} \end{bmatrix}$$

**Modelo Completo B**

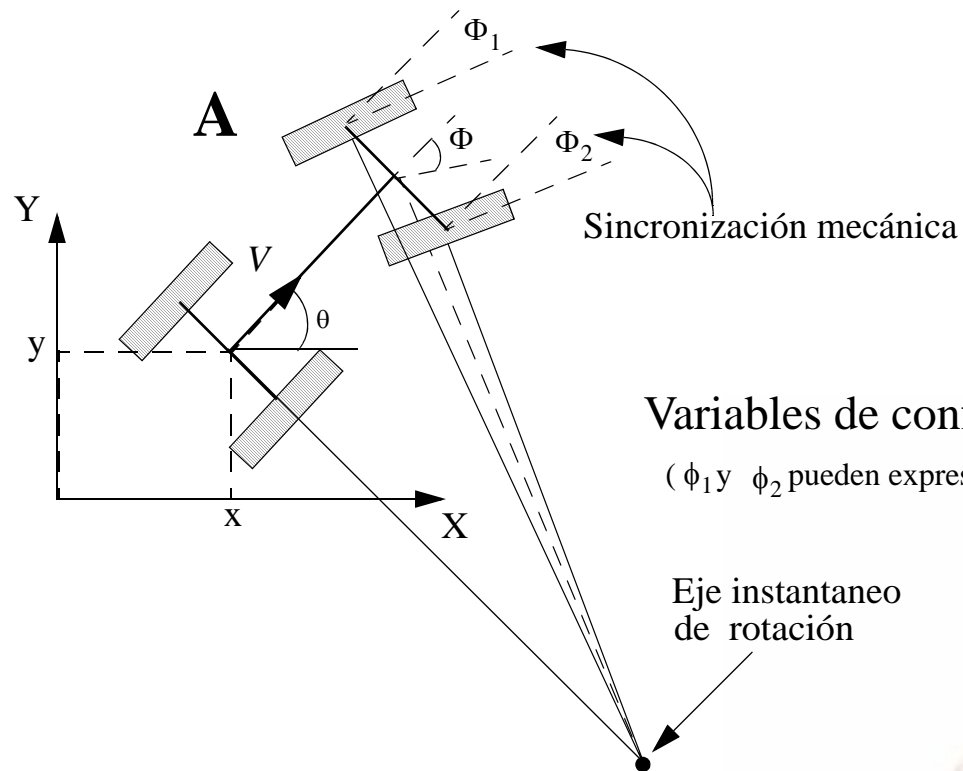
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & 0 \\ \frac{\sin \phi}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$





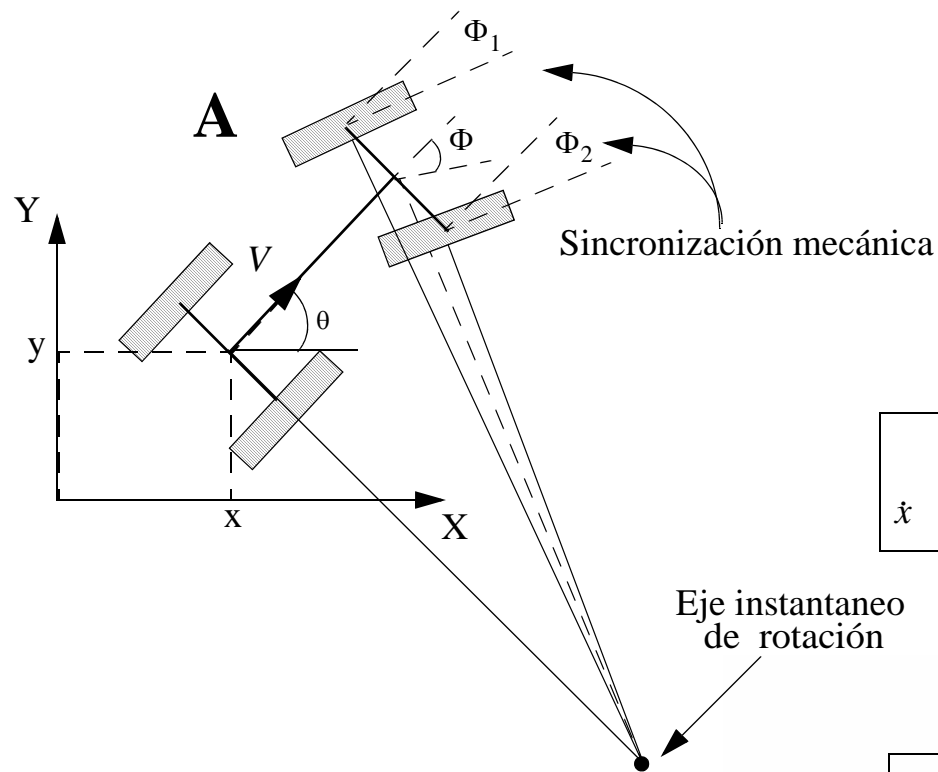
### 3.2.6 Configuración Ackerman

15 Parámetros de configuración - 11 restricciones holónomas: 4 V.de configuraciui  
 (4 ruedas y el punto de referencia) ( $\phi_1$  y  $\phi_2$  están relacionados mecánicamente)



Variables de configuración:  $P = [x \quad Y \quad \theta \quad \phi]$

( $\phi_1$  y  $\phi_2$  pueden expresarse en función de  $\phi$ )

**Restricciones no holónomas:**

(una por cada rueda y la estructura del vehículo se resumen en dos)

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

$$\dot{x} \sin(\phi + \theta) - \dot{y} \cos(\phi + \theta) - \dot{\theta} l \cos(\phi) = 0$$

**2 Grados de Libertad:**

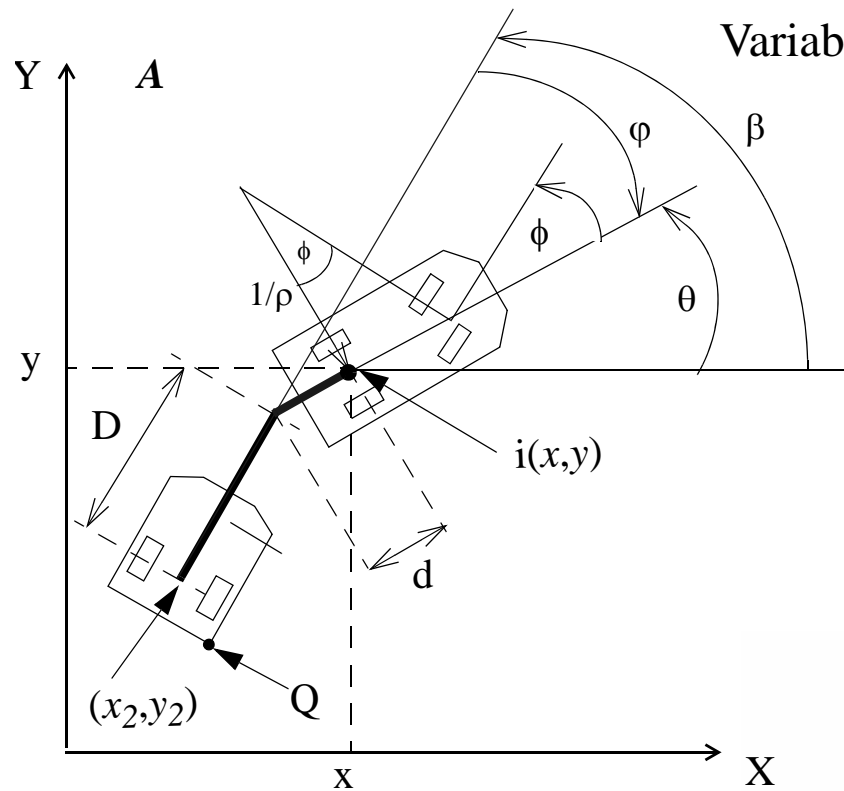
$v$  velocidad de desplazamiento

$\phi$  ángulo de conducción

**MODELO CINEMÁTICO SIMILAR AL DEL TRICICLO**



## 3.2.7 Tractor- Trailer



Variables de configuración:  $P = [x \quad y \quad \theta \quad \phi]$

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta \sin\phi & \sin\theta \sin\phi & -D-d\cos\phi & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0$$

2 Grados de Libertad:

$v$  velocidad de desplazamiento

$\phi$  ángulo de conducción

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\sin(\phi)}{D} & \frac{\cos(\phi)d}{D} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t)\rho(t) \end{bmatrix}$$