
Universidad de Huelva

# Tema 3

# Autómatas finitos y autómatas de pila

# Índice

- La codificación de conjuntos infinitos numerables requiere un secuencia ilimitada de dígitos.
  - Por ejemplo, {0,1} en codificación binaria, [0-9] en codificación decimal, …

- Para modelar funciones es necesario leer la codificación del valor de entrada, que puede tener una longitud ilimitada. Esto no es posible con un circuito combinacional. Es necesario un modelo que permita leer secuencialmente la codificación de entrada.

- Supongamos que deseamos desarrollar la función suma en notación decimal.

$$f(a,b) = a + b$$

- Podemos representar las entradas como una lista de dígitos

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 6 |

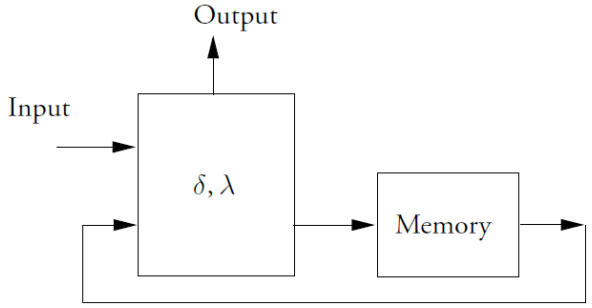
- El sistema debe ir leyendo las entradas para calcular la suma

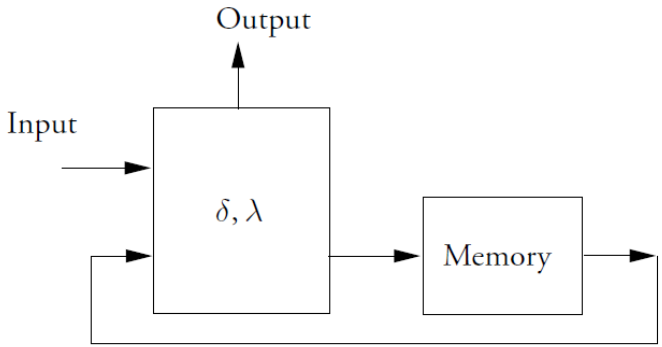
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| | | | | ⇓ |
| | | | | 1 |

- Para calcular la siguiente cifra es necesario tener en cuenta la "llevada".

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| | | | ⇓ | |
| | | | 1 | 1 |

- Para esto es necesario que el sistema disponga de una memoria en la que almacenar el estado en el que se encuentra el proceso de ejecución.



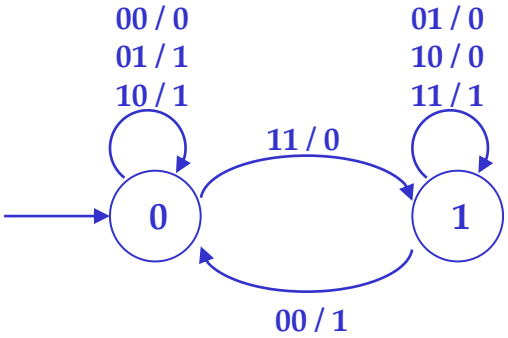



- La función $\lambda$(i,s) representa la salida a generar en función de la entrada *i* y del estado *s* (almacenado en la memoria) en el que se encuentre el sistema.
- La función δ(i,s) representa el estado a almacenar en la memoria después de cada iteración.

- Formalmente, se define un ***autómata finito*** (***finite state machine***) como una septupla $M = (\Sigma,\Psi,Q, \delta, \lambda,s,F)$, donde $\Sigma$ es el alfabeto de entrada, $\Psi$ es el alfabeto de salida, $Q$ es el conjunto de estados del autómata, $\delta:Q\times\Sigma\rightarrow Q$ es la función de transición de estado, $\lambda :Q\times\Sigma\rightarrow\Psi$ es la función de salida, $s$ es el estado inicial y $F\subseteq Q$ es el conjunto de estados finales del autómata.

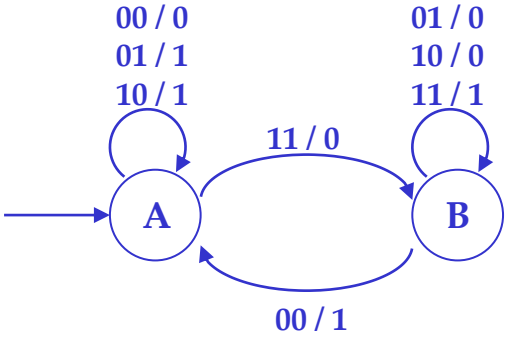
- En nuestro ejemplo,
  - $\Sigma = [0\text{-}9] \times [0\text{-}9]$ (dígitos de los números a sumar)
  - $\Psi = [0\text{-}9]$ (digitos resultado de la suma)
  - $Q = \{ q_0, q_1 \}$ (estados "me llevo 0" y "me llevo 1")
  - $\lambda = \{ [(0,0, q_0) \rightarrow 0]$, (resultados "0+0+0 es 0",
    $[(0,1, q_0) \rightarrow 1]$, "0+1+0 es 1",
    …, $[(9,9, q_1) \rightarrow 9]\}$ …, "9+9+1 es 9")
  - $\delta = \{ [(0,0, q_0) \rightarrow q_0]$, (transiciones "0+0+0 me llevo 0",
    $[(0,1, q_0) \rightarrow q_0]$, "0+1+0 me llevo 0",
    …, $[(9,9, q_1) \rightarrow q_1]\}$ …, "9+9+1 me llevo 1")
  - $s = q_0$ (estado inicial "me llevo 0")
  - $F = \{ q_0, q_1 \}$ (todos los estados son finales)

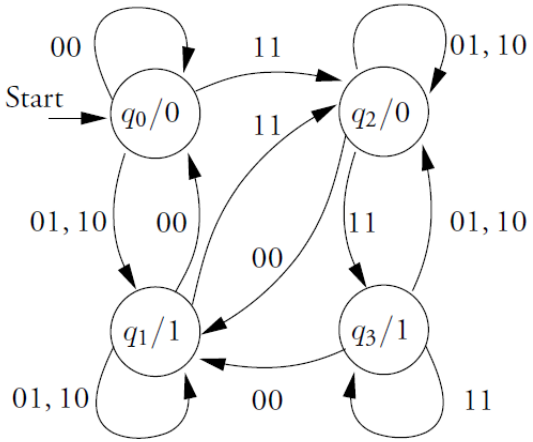
- Un ejemplo más sencillo: suma binaria



- El esquema anterior fue propuesto por G.H. Mealy en 1955 y se conoce como ***autómata de Mealy***.
- Un esquema muy parecido fue propuesto por E.F. Moore en 1956. En este modelo, conocido como ***autómata de Moore***, el valor de la salida no está asociado a la transición sino al estado de destino.
- Ambos tipos de autómatas tienen la misma capacidad de cómputo.

- Transformación de un autómata de Mealy en un autómata de Moore:
  - Cada estado del autómata de Mealy se transforma en varios estados en el autómata de Moore equivalente, uno por cada valor diferente que tengan sus transiciones de entrada.
  - Las transiciones de salida de cada estado de Moore se copian de las de su estado equivalente, colocando el destino de la transición en el estado adecuado.

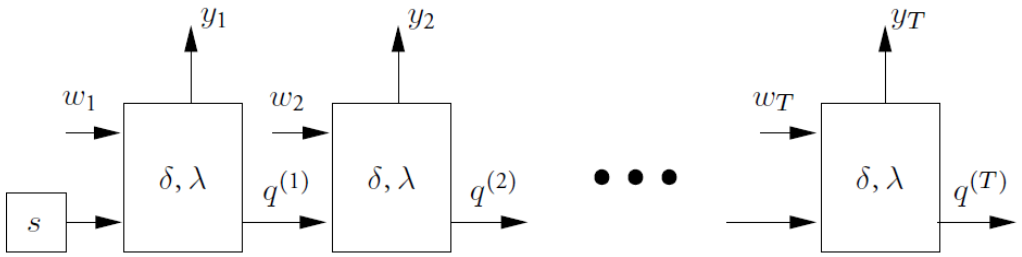


- Funciones computadas por autómatas finitos
  - Dado un estado inicial $s$ y un conjunto de entradas externas $w_1, w_2, \ldots, w_T$, un autómata finito $M$ genera un conjunto de salidas externas $y_1, y_2, \ldots, y_T$ y termina en un estado $q^T$.
  - Se dice que el autómata $M$ computa en $T$ pasos la función $f_M^{(T)}$

$$f_M^{(T)} : Q \times \Sigma^T \rightarrow Q \times \Psi^T$$

  - Si asumimos que Q, Σ y Ψ están codificados en binario, entonces la función $f_M^{(T)}$ es una función binaria.



- Funciones computadas por autómatas finitos
  - Cuando utilizamos un autómata en T pasos, normalmente no computa la función más general $f_M^{(T)}$, sino una subfunción de ella. Por ejemplo, se introduce que el estado inicial sea un estado concreto. También es frecuente desechar salidas (y quedarse con la última).

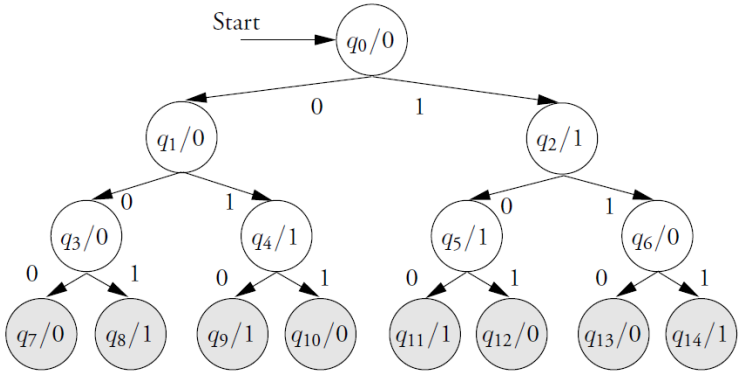
  - Sea $f_M^{(T)}$ la función computada por un autómata $M = (\Sigma,\Psi,Q, \delta, \lambda,s,F)$ en $T$ pasos. El tamaño de circuito y la profundidad de circuito de cualquier función $f$ computada por $M$ en $T$ pasos satisface las siguientes ecuaciones:

$$C_\Omega(f) \leq C_\Omega(f_M^{(T)}) \leq T \cdot C_\Omega(\delta, \lambda)$$

$$D_\Omega(f) \leq D_\Omega(f_M^{(T)}) \leq T \cdot D_\Omega(\delta, \lambda)$$

- Funciones computadas por autómatas finitos
  - Se denomina ***potencia*** (***power***) de un autómata finito $M$ a $C_\Omega(\delta, \lambda)$, es decir, al número de operaciones lógicas que desarrolla M en cada paso.
  - Se denomina ***trabajo computacional*** desarrollado por un autómata finito $M$ al valor $T \cdot C_\Omega(\delta, \lambda)$, es decir, al número de operaciones lógicas totales.
  - Corolario: Es imposible computar funciones $f$ para las que su tamaño y profundiad sean mayores que los límites $T \cdot C_\Omega(\delta, \lambda)$ y $T \cdot D_\Omega(\delta, \lambda)$, respectivamente.

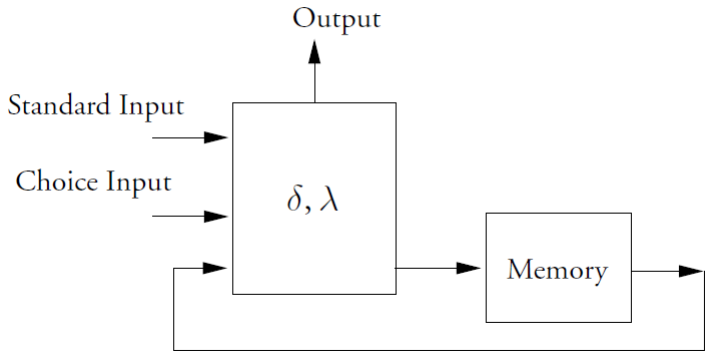
- Funciones computadas por autómatas finitos
  - Teorema: Toda función booleana de *n* entradas puede ser computada mediante un autómata finito de $2^{n+1}$-1 estados.
  - Demostración: A partir del estado inicial se puede construir un árbol binario ramificando cada estado en función del valor 0 o 1 de la siguiente entrada, hasta llegar a la entrada n-ésima. La salida del autómata es la correspondiente a las hojas del árbol, desechando las salidas internas.



- Autómatas finitos no deterministas
  - Los autómatas finitos presentados anterioriormente son ***deterministas***, en el sentido de que, dado un estado y una entrada, el siguiente estado del autómata está unívocamente determinado.
  - Se denomina ***autómata finito no determinista*** a un autómata finito en el que, dado un estado y una entrada, existen varias transiciones posibles y, por tanto, varios siguientes estados posibles.
  - Formalmente, un autómata finito no determinista viene dado por una función de transición $\delta:Q\times\Sigma\rightarrow 2^Q$ , es decir, el resultado de una transición no es un único estado de Q sino un subconjunto de estados de Q.
  - El resultado de una transición podría ser un subconjunto vacío, indicando que no existe ningún sucesor del estado origen para esa entrada.

- Autómatas finitos no deterministas
  - Los autómatas finitos no deterministas se utilizan como reconocedores de lenguajes.
  - Dada una cadena de entrada $w$, se considera aceptada por el autómata si existe un encadenamiento de transiciones que mueva el autómata desde el estado inicial a un estado final.
  - Los autómatas finitos no deterministas no pueden utilizarse como generadores de funciones ya que para una misma entrada el autómata podría generar salidas diferentes, lo que va en contra del concepto de función.

- Autómatas finitos no deterministas
  - Un autómata finito no determinsta se puede modelar como un autómata finito determinista con una entrada adicional (***choice input***) utilizada como selector para elegir la trayectoria correcta.
  - Se asume que el ***agente selector*** es capaz de suministrar los valores adecuados para esta entrada a partir del valor de la cadena.



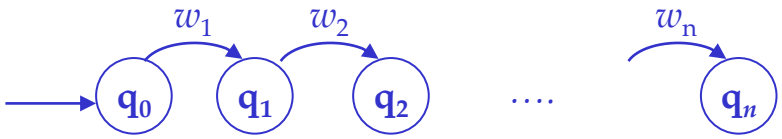
- Autómatas finitos no deterministas
  - Dado un autómata finito no determinista NFSM es posible construir un autómata finito determinista equivalente DFSM. Los estados de este autómata finito determinista DFSM se generan como representación de subconjuntos de estados del autómata finito no determinista. Por tanto, potencialmente el conjunto de estados del autómata finito determinista equivalente puede ser hasta $2^Q$, siendo Q el conjunto de estados del NFSM.
  - El teorema anterior indica que la capacidad de cómputo de los autómatas deterministas y no deterministas es la misma. Sin embargo, este resultado está basado en que el conjunto de estados de ambos es finito.
  - En sistemas como las máquinas de Turing (con una capacidad de memoria infinita) no sabemos si el conjunto de lenguajes aceptados en un tiempo polinomial por una máquina determinista (clase P) es el mismo que el de los lenguajes aceptados en tiempo polinomial por una máquina indeterminista (clase NP).

- Lema de bombeo:
  - Sea $L$ un lenguaje regular sobre el alfabeto $\Sigma$ reconocido por un DFSM con $m$ estados.
  - Si $w \in L$ y $|w| \geq m$, entonces existen las cadenas $r$, $s$ y $t$ con $|s| \geq 1$ y $|rs| \leq m$ tales que $w = rst$ y para todo $n \geq 0$, $rs^n t$ también pertenece a $L$.

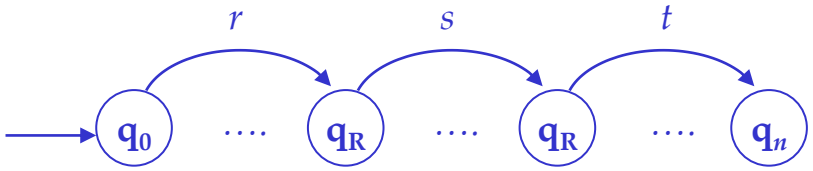
- En término de funciones, la función reconocida por un DFSM de $m$ estados $f$: $\Sigma^* \rightarrow \Psi^*$ cumple que,
  - $\forall w \in \Sigma^*$, $|w| \geq m$ y $f(w)=a$,
  - $\exists\, r, s, t, b, c, d$ con $|s| \geq 1$, $|rs| \leq m$ ,
  - tales que $w = rst$, $a=bcd$
  - y $\forall n \geq 0$, $f(rs^n t) = bc^n d$

- Identifica el tipo de funciones que se pueden definir por medio de autómatas finitos. Las funciones que no lo cumplan no pueden ser descritas por autómatas finitos.

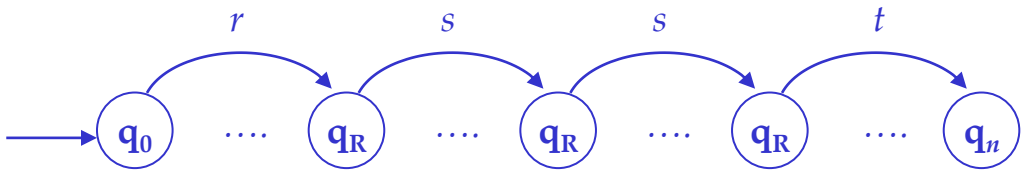
- Demostración:
  - Siguiendo el comportamiento del DFSM, cada símbolo de la cadena de entrada $w$ genera una transición entre estados:




  - Teniendo en cuenta que existen $m$ estados diferentes y que $|w| \geq m$, entonces debe existir al menos un estado $q_R$ repetido en el conjunto de transiciones. Esto se conoce como "*pigeonhole principle*" (principio del palomar): Si en un palomar hay $n$ huecos y $n$+1 palomas, en algún hueco hay más de una paloma.



- Demostración:
  - Esto implica que la subcadena *s* se puede "bombear", es decir, que el autómata también reconocería las cadenas *rt*, *rst*, *rsst*, *rssst*, …



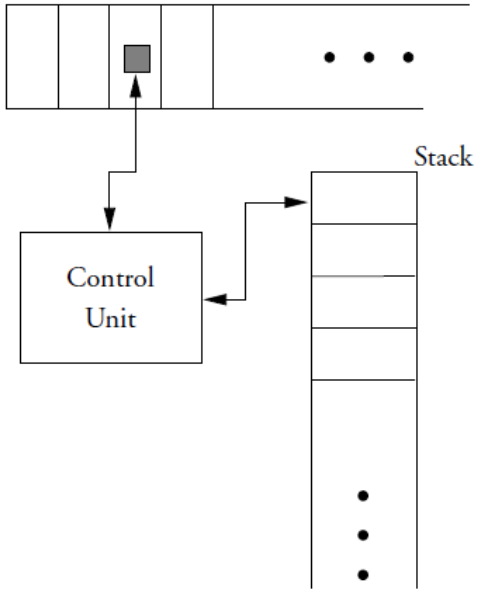

  - Por tanto, la expresión $rs^nt$ debe ser reconocida por el autómata.

- Como hemos visto en la demostración del lema de bombeo, la limitación de los autómatas finitos se debe a que el número de estados en los que se puede encontrar el autómata está limitado.
- Para superar la capacidad de cómputo de los autómatas finitos debemos desarrollar un modelo que trabaje sobre una memoria ilimitada.
- En 1961, A.G. Oettinger propuso un modelo de autómata que trabaja sobre una memoria ilimitada en forma de pila. Las acciones que pueden desarrollarse sobre la memoria consisten en apilar o desapilar valores.

- Dado el lenguaje L = { $0^n\ 1^n$ | $n \geq 1$ }, no es posible construir un autómata finito que sea capaz de reconocerlo.
  - Intuitivamente, hace falta un estado para almacenar que se han leído un 0, dos 0s, tres 0s, … para poder comprobar después que el número de 1s es igual al número de 0s. Si el autómata finito tiene *m* estados, es imposible que pueda almacenar un estado que indique que el número de 0s es mayor que *m*.

- Sin embargo, es fácil reconocer este lenguaje por medio de una pila.
  - Si cada vez que se lee un 0 se almacena en la pila, el número de 0s que se pueden apilar es ilimitado. Para comprobar que el número de 1s es el mismo basta con ir desapilando un 0 por cada 1 que se lea en la cadena y aceptar si el último 1 corresponde al último 0 de la pila.

- Definición formal:
  - Un **autómata de pila** (**pushdown automaton – PDA**) se define como una sextupla ($\Sigma$, $\Gamma$, Q, $\Delta$, $q_0$, F) donde:
    - $\Sigma$ es el alfabeto de entrada, incluido el símbolo vacío $\beta$.
    - $\Gamma$ es el alfabeto de la pila, incluido el símbolo vacío $\gamma$.
    - Q es el conjunto de estados del autómata.
    - $\Delta$ es el conjunto de transiciones
    - $q_0$ es el estado inicial del autómata
    - F es el conjunto de estados finales del autómata.




  - La unidad de control se describe como un Autómata Finito

- Transiciones del autómata
  - Las transiciones son del tipo:

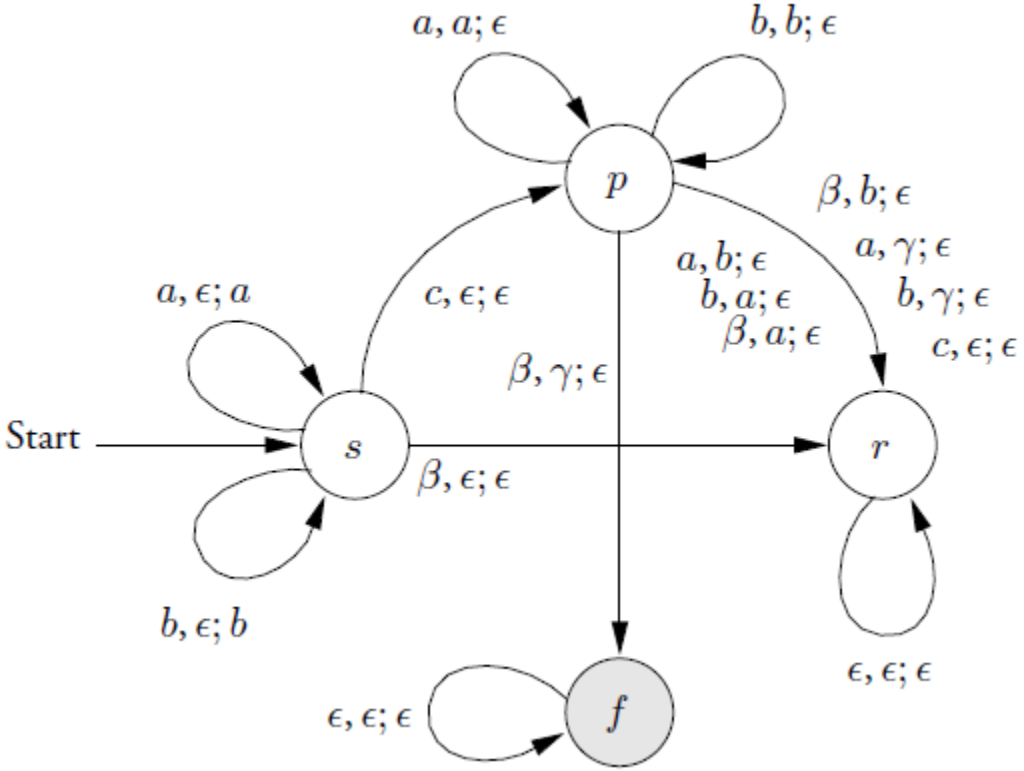
$$\Delta : \quad ( Q \times ( \Sigma \cup \{ \epsilon \} ) \times (\Gamma \cup \{ \epsilon \} ) \times Q \times ( \Gamma \cup \{ \epsilon \} ) )$$

donde $\epsilon$ representa un símbolo vacio

  - Una transición ($p$, $x$, $y$; $q$, $z$) significa que si el autómata se encuentra en el estado $p$, en la cinta de lectura se encuentra el símbolo $x$ y en la cima de la pila se encuentra el símbolo $y$, se produce una transición hacia el estado $q$, se consume el símbolo $x$ de la entrada, se desapila el símbolo $y$ y se apila el símbolo $z$.
  - Si x= $\epsilon$, entonces la transición no consume el símbolo de la entrada.
  - Si y= $\epsilon$, entonces la transición no desapila el símbolo de la pila.
  - Si z= $\epsilon$, entonces la transición no apila ningún símbolo en la pila.

- Funcionamiento del autómata de pila:
  - Inicialmente el autómata se encuentra en el estado $q_0$, la pila se encuentra vacía con el símbolo $\gamma$ en el fondo y la cinta de lectura tiene la cadena de entrada $w$ seguida de símbolos $\beta$.
  - El autómata va realizando transiciones, avanzando en la cinta de lectura y apilando y desapilando símbolos de la pila.
  - Existen dos modelos para definir como finalizar el proceso:
    1. La cadena de entrada se acepta si el estado del autómata tras consumir todos los símbolos de la cadena de entrada es un estado final.
    2. La cadena de entrada se acepta si la pila queda vacía al consumir todos los símbolos de la cadena de entrada.
  - Ambos modelos son equivalentes.

- Ejemplo de Autómata de Pila:
  - Autómata reconocedor del lenguaje $\{w\ c\ w^T\}$ donde $w \in (\ \{a,b\}\ )^*$



- Autómatas de pila deterministas y no deterministas:
  - Un autómata de pila es ***determinista*** si en cada momento solo es posible realizar una transición. En caso contrario es un autómata ***no determinista***.
  - Formalmente, un autómata de pila es determinista si cumple las siguientes condiciones:
    1. Para cada $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{ \epsilon \}$ , $x \in \Gamma$, solo existe una o ninguna transición $\delta(q, a, x; p, z)$
    2. Para cada $q \in Q$, $x \in \Gamma$ , si existe la transición $\delta(q, \epsilon, x; p, z)$ entonces no existen transiciones $\delta(q, a, x; p, z)$.

- Autómatas de pila deterministas y no deterministas:
  - En el caso de los Autómatas Finitos, los deterministas (AFD) y los no deterministas (AFND) tienen la misma capacidad de cómputo. El no determinismo significa que el AFND puede estar computando diferentes caminos simultaneamente. El "estado simultaneo" del AFND corresponde a un conjunto de estados de los diferentes caminos. Puesto que el número de estados es finito, el número de conjuntos de estados tambien lo es por lo que el comportamiento de un AFND con un conjunto de estados N puede simularse como un AFD con un conjunto de estados $2^N$.

- Autómatas de pila deterministas y no deterministas:
  - En el caso de los Autómatas de Pila, los deterministas (APD) y los no deterministas (APND) no tienen la misma capacidad de cómputo.
  - El APND puede estar computando diferentes caminos simultaneamente.
  - En cada momento, la configuración del APND corresponde al estado de la unidad de control y al contenido de la pila.
  - En este caso es imposible simular el "estado simultaneo" (formado por varios estados y varias pilas) por medio de un único estado y una única pila. El problema está en que no es posible simular varias pilas con una única pila.
  - Por tanto, dado un APND es imposible obtener un APD equivalente.

- Autómatas de pila deterministas y no deterministas:
  - Por ejemplo, el lenguaje $\{ w\ w^T \}$ donde $w \in ( \{a,b\} )^*$ puede ser reconocido por un APND, pero no puede ser reconocido por un APD.
  - Demostración: el comportamiento del APND consiste en apilar $w$ al reconocer la cadena y desapilarla al reconocer la cadena invertida. El problema es que no existe un símbolo que indique cuando termina $w$ y comienza $w^T$. El APND puede probar simultaneamente todos los caminos, pero el APD no puede hacerlo.
  - Por ejemplo, la cadena "aa" puede ser una cadena completa (y en tal caso deberíamos apilar "a" y desapilarlo a continuación) o el comienzo de una cadena mayor (y en tal caso deberíamos apilar "aa"). Hasta que no se alcanza el final de la cadena es imposible saber en que punto era necesario comenzar a desapilar, pero el APD necesita tomar la decisión en el momento de leer cada carácter.

## Lenguajes formales:

- Alfabeto ($\Sigma$): conjunto finito de símbolos
- Cadena: secuencia finita de símbolos
- Cadena vacía ($\lambda$): cadena de longitud cero
- $\Sigma^k$: Conjunto de cadenas de longitud k
- Clausura del alfabeto ($\Sigma^*$): Conjunto de todas las cadenas

$$\Sigma^* = \cup \Sigma^k = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots$$

- Lenguaje formal: Subconjunto de $\Sigma^*$

## Gramáticas formales:

- Forma de describir lenguajes formales
- Cuatro elementos (N, Σ, P, <S>):
- N: Alfabeto de símbolos no terminales
- Σ : Alfabeto de símbolos terminales
- P: Conjunto de producciones o reglas

$$P \subset (N \cup \Sigma)^* \, N \, (N \cup \Sigma)^* \rightarrow (N \cup \Sigma)^*$$

- <S>: Símbolo inicial (no terminal)

## Lenguaje generado por una gramática:

- Derivación directa: $\eta$ deriva directamente en $\gamma$ ($\eta \Rightarrow \gamma$) si
  - $\eta = \omega_1 \alpha \omega_2$
  - $\gamma = \omega_1 \beta \omega_2$
  - $\alpha \rightarrow \beta \in P$
- Derivación: $\eta$ deriva en $\gamma$ ( $\eta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ )si
  - existen $\xi_1,\ldots, \xi_n$ tales que $\eta$ deriva directamente en $\xi_1$, $\xi_i$ deriva directamente $\xi_{i+1}$ y $\xi_n$ deriva directamente en $\gamma$
- Forma sentencial: cadena $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ tal que $<S> \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$
- Sentencia: forma sentencial perteneciente a $\Sigma^*$
- Lenguaje generado por la gramática G:

$$L(G) = \{ x \in \Sigma^* \mid <S> \overset{*}{\Rightarrow} x \}$$

- Jerarquía de Chomsky:

| Nivel | Tipo de lenguaje | Dispositivo reconocedor |
|---|---|---|
| 0 | Con estrutura de frase | Máquina de Turing |
| 1 | Sensible al contexto | Autómata acotado linealmente |
| 2 | Libre de contexto | Autómata de Pila No Determinista |
| 3 | Regular | Autómata Finito |

## Gramáticas con estructura de frase:

- Son las que no presentan restricciones en cuanto a las reglas.
- Ejemplo de gramática con estructura de frase:

| | | |
|---|---|---|
| S → a S B C | a B → a b | c C → c c |
| S → a B C | b B → b b | |
| C B → B C | b C → b c | |

- Ejemplo de derivación:

S → a S B C → a a S B C B C → a a a B C B C B C → a a a B B C C B C →

→ a a a B B C B C C → a a a B B B C C C → a a a b B B C C C → a a a b b B C C C →

→ a a a b b b C C C → a a a b b b c C C → a a a b b b c c C → a a a b b b c c c

- Esta gramática reconoce el lenguaje $L(G) = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \}$.

## Gramáticas sensibles al contexto:

- Son aquellas en las que las reglas son de la forma ($\gamma$ A $\beta \rightarrow \gamma$ B $\beta$ ). Es decir, podemos sustituir A por B siempre que se encuentre entre $\gamma$ y $\beta$. Las cadenas $\gamma$ y $\beta$ representan el contexto en el que se puede aplicar la sustitucion de A.
- (Definición alternativa: gramáticas crecientes) Son aquellas en las que el número de símbolos en la parte derecha de las reglas es siempre mayor o igual que el de la parte izquierda. ( $A \rightarrow B \Longrightarrow |A| \leq |B|$ ).
- Puede demostrarse que ambas definiciones conducen a gramáticas con la misma capacidad.
- Ejemplo de gramática ~~sensible al contexto:~~ creciente

| | | | |
|---|---|---|---|
| S → a S B C | C B → B C | b B → b b | c C → c c |
| S → a B C | a B → a b | b C → b c | |

Lenguaje sensible al contexto

## Gramáticas libres de contexto:

- Son aquellas cuyas reglas tienen la parte izquierda formada por un único símbolo no terminal. Por ejemplo, $A \rightarrow \alpha\ \beta\ \gamma$ .
- Ejemplo de gramática libre de contexto:

| |
|---|
| $S \rightarrow a\ S\ b$ |
| $S \rightarrow \epsilon$ |

- Ejemplo de derivación:

$$S \rightarrow a\ S\ b \rightarrow a\ a\ S\ b\ b \rightarrow a\ a\ a\ S\ b\ b\ b \rightarrow a\ a\ a\ b\ b\ b$$

- Esta gramática reconoce el lenguaje $L(G) = \{\ a^n\ b^n \mid n \geq 0\ \}$

## Gramáticas regulares:

- Son aquellas cuyas reglas en su parte derecha contiene un símbolo terminal o un símbolo terminal seguido de un no terminal.

$$A \rightarrow a \qquad A \rightarrow a\,B$$

- Ejemplo de gramática regular:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $S \rightarrow 0\,A$ | $A \rightarrow 0\,S$ | $B \rightarrow 1\,S$ | $C \rightarrow 0\,B$ | $A \rightarrow 0$ |
| $S \rightarrow 1\,B$ | $A \rightarrow 1\,C$ | $B \rightarrow 0\,C$ | $C \rightarrow 1\,A$ | $B \rightarrow 1$ |

- Ejemplo de derivación:

$$S \rightarrow 0\,A \rightarrow 0\,1\,C \rightarrow 0\,1\,0\,B \rightarrow 0\,1\,0\,1$$

- Esta gramática reconoce un lenguaje formado por cadenas con un número par de 0s y de 1s.
- Las gramáticas regulares tienen la misma capacidad expresiva que las expresiones regulares y pueden ser reconocidas por Autómatas Finitos.

## Forma Normal de Chomsky para gramáticas libres de contexto:

- Se dice que una gramática libre de contexto está en **Forma Normal de Chomsky** si todas sus reglas son de la forma $A \rightarrow a$ (parte derecha con un único símbolo terminal) o $A \rightarrow B\ C$ (parte derecha con dos símbolos no terminales). Si el lenguaje incluye la cadena vacía, entonces se incluye la regla $S \rightarrow \epsilon$ (siendo S el símbolo inicial).

- Ejemplo de gramática en Forma Normal de Chomsky:

| | | |
|---|---|---|
| $S \rightarrow A\ M$ | $M \rightarrow S\ B$ | $B \rightarrow b$ |
| $S \rightarrow \epsilon$ | $A \rightarrow a$ | |

## Forma Normal de Chomsky para gramáticas libres de contexto:

- Toda gramática libre de contexto puede transformarse en una gramática en Forma Normal de Chomsky.
  - Las reglas A → ϵ se eliminan y para cada regla en la que aparezca el símbolo A se generan dos reglas, una con A y otra sin A.

| | |
|---|---|
| S → s L M N<br>M → a P Q<br>M → ϵ | S → s L M N<br>S → s L N<br>M → a P Q |

  - Para cada símbolo terminal *a* se crea un símbolo no terminal asociado *A* y una regla A → a. Cada ocurrencia de un símbolo terminal se sustituye por su símbolo no terminal asociado.
  - Las reglas A → B, donde B tiene asociadas reglas B → w, se sustituyen por reglas A → w, de forma que todas las reglas deben tener al menos dos símbolos no terminales
  - Cada regla (A → B C D ...) se sustituye por dos reglas (A → B X) y (X → C D …)

Algoritmo de reconocimiento para gramáticas libres de contexto:

- Dada una cadena de entrada $w$ de tamaño $n$ y una gramática $G$ expresada en Forma Normal de Chomsky, ¿pertenece $w$ al lenguaje descrito por $G$? ¿ $w \in L(G)$ ?
- Existen varios algoritmos que permiten resolver este problema de forma general: Cocke-Younger-Kasami, Early, GLR.
- Existen algoritmos más rápidos, pero están limitados a ciertos tipos de gramáticas.
- Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami
  - Basado en programación dinámica. Es de orden $O(n^3 \cdot V)$, siendo $n$ el tamaño de la entrada y $V$ el número de símbolos no terminales de la gramática en Forma Normal de Chomsky.

Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami:

- Se basa en el uso de una matriz $(n+1)\times(n+1)$ donde las celdas contienen conjuntos de símbolos no terminales.
- Paso 1: Cada celda $c_{i,i+1}$ contiene los símbolos no terminales que producen el símbolo terminal $w_i$.

$$c_{i,i+1} = \{ A \mid (A \rightarrow w_i) \in G\}$$

- Paso 2: Cada celda $c_{i,i+2}$ contiene los símbolos no terminales $A$ que tienen reglas $A \rightarrow B\ C$ con $B \in c_{i,i+1}$ y $C \in c_{i+1,i+2}$.
- Paso j-ésimo: Cada celda $c_{i,j}$ contiene los símbolos no terminales $A$ que tienen reglas $A \rightarrow B\ C$ con $B \in c_{i,k}$ y $C \in c_{k+1,j}$.

$$c_{i,j} = \{ A \mid (A \rightarrow BC) \in G, B \in c_{i,k} \text{ y } C \in c_{k+1,j}\}$$

- La cadena $w$ se acepta si al repetir los pasos n veces, el símbolo inicial pertenece a la celda $c_{1,n}$.

## APND asociado a una gramática libre de contexto:

- Dada una gramática libre de contexto G = (N, Σ, P, <S>) se puede construir un APND que reconozca el mismo lenguaje con la siguiente estructura:
  - El alfabeto de entrada es Σ ∪ { β }, siendo β el símbolo que marca el final de la entrada.
  - El alfabeto de la pila es N ∪ Σ ∪ { γ }, siendo γ el símbolo que marca el fondo de la pila.
  - El estado inicial es *q*.
  - La primera transición es (*q*, ϵ, ϵ;*p*,*S*), siendo *S* el símbolo inicial de la gramática.
  - Para cada símbolo $a \in \Sigma$, se incluye la transición (*p*, *a*, *a*; *p*, ϵ), que consume el símbolo *a* de la cadena de entrada y de la pila.
  - Para cada regla $A \rightarrow B\ C\ D$, siendo *B*, *C* y *D* símbolos terminales o no terminales, se incluyen las transiciones (*p*, ϵ, *A*; *r1*, *D*), (*r1*, ϵ , ϵ; *r2*, *C*), (*r2*, ϵ, ϵ; *p*, *B*), es decir, se desapila *A* y se apila la parte derecha de la regla en orden inverso (generando los estados *r* auxiliares que sean necesarios).
  - Se añade la transición final (*p*, β, γ; *f*, ϵ), siendo *f* el estado final del AFND.

## Gramática libre de contexto asociada a un APND:

- Dado un autómata de pila $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \Delta, s, F)$, que funciona como reconocedor de lenguaje y finaliza con la pila vacía, se puede generar una gramática libre de contexto $G$ que genera el mismo lenguaje.
  - Los símbolos terminales de la gramática corresponden al alfabeto de entrada $\Sigma$, (sin el símbolo $\beta$).
  - Los símbolos no terminales de la gramática N, son el símbolo inicial $S$ y los símbolos $<p, y, q>$, con $p \in Q$, $y \in \Gamma \cup \{ \epsilon \}$ , $q \in Q$. Estos símbolos denotan el hecho de moverse del estado $p$ al estado $q$ en un conjunto de pasos con el único efecto sobre la pila de desapilar el símbolo $y$. Los estados $<p, \epsilon, q>$ reflejan el movimiento del estado $p$ al $q$ sin modificación de la pila. Los estados $<s, \epsilon, f>$, siendo $s$ el estado inicial del APND y $f$ un estado final, denotan la transición del estado inicial a un estado final en una serie de pasos, dejando la pila en su estado original. Esto debería suponer un proceso completo de reconocimiento de una cadena de entrada.

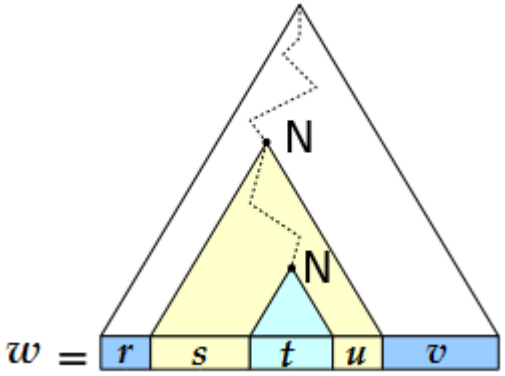
## Gramática libre de contexto asociada a un APND:

- Dado un autómata de pila $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \Delta, s, F)$, que funciona como reconocedor de lenguaje y finaliza con la pila vacía, se puede generar una gramática libre de contexto $G$ que genera el mismo lenguaje.
  - Las reglas de la gramática son las siguientes:

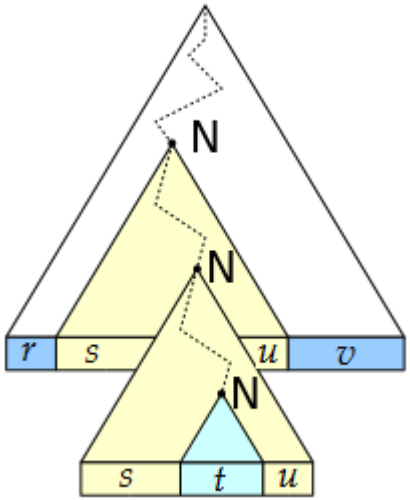
1. $S \rightarrow \langle s, \epsilon, f \rangle \qquad \forall f \in F$
2. $\langle p, \epsilon, p \rangle \rightarrow \epsilon \qquad \forall p \in Q$
3. $\langle p, y, r \rangle \rightarrow x \langle q, z, r \rangle \qquad \forall r \in Q,\ \forall \langle p,x,y; q, z \rangle \in \Delta$ , $y \neq \epsilon$
4. $\langle p, u, r \rangle \rightarrow x \langle q,z,t \rangle \langle t,u,r \rangle \qquad \forall r,t \in Q,\ \forall \langle p,x, \epsilon; q, z \rangle \in \Delta$ , $\forall u \in \Gamma \cup \{ \epsilon \}$

- Si $L$ es un lenguaje libre de contexto, existe un $p \geq 1$ tal que, toda cadena del lenguaje $w$ de longitud mayor que $p$ ($|w| > p$) puede escribirse como $w = r\ s\ t\ u\ v$, donde las subcadenas cumplen que:
  - $|\ s\ t\ u\ | \leq p$
  - $|\ s\ u\ | \geq 1$
  - $r\ s^n\ t\ u^n\ v \in \mathrm{L}$

- Demostración:
  - Puesto que la gramática libre de contexto tiene un número de símbolos no terminales finito, si una cadena $w$ es lo suficientemente larga, entonces en su árbol de derivación debe repetirse algún símbolo no terminal $N$.

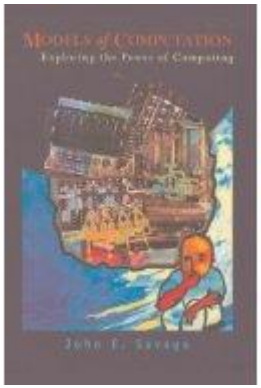


- Demostración:
  - Esto permite "bombear" la derivación de $N$ a $N$



- El lema de bombeo para gramáticas libres de contexto identifica el tipo de lenguajes que se pueden reconocer por medio de autómatas de pila. Los lenguajes que no lo cumplan no pueden ser descritos por estos autómatas.
- Por ejemplo, los siguientes lenguajes no son libres de contexto:
  - $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$
  - $L = \{ 0^n \mid n \text{ es primo} \}$
  - $L = \{ w\, w \mid w \in \{0,1\}^* \}$

## Bibliografía




- Savage, John E. (1998). "Models Of Computation: Exploring the Power of Computing". Capítulo 4