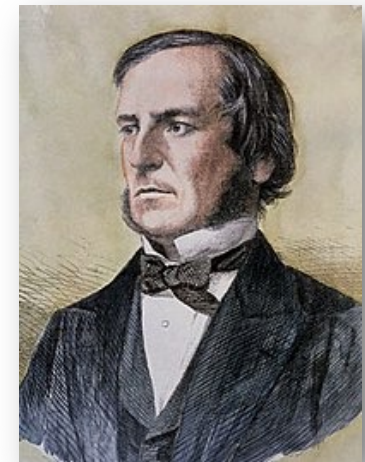


algebra di Boole



algebra di Boole

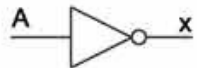






- l'algebra di Boole è un ***formalismo*** che opera su variabili (*variabili booleane*)
- le ***variabili booleane*** possono assumere due soli valori: ***vero***, ***falso***
- sulle variabili booleane è possibile definire un insieme di funzioni (*funzioni booleane*)
- il risultato di una ***funzione booleana*** può assumere solo il valore ***vero*** o il valore ***falso***
- il valore ***vero*** viene anche rappresentato con ***1*** e il valore ***falso*** con ***0***

funzioni e tabella di verità

- una **tabella di verità** **definisce** una funzione booleana
 - stabilisce il valore risultante per ciascuna **combinazione** dei valori in ingresso
- a volte, *specifica incompleta*
(*certe combinazioni di ingressi non possono verificarsi*) → *non è specificato alcun valore*

#	w	x	y	z	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

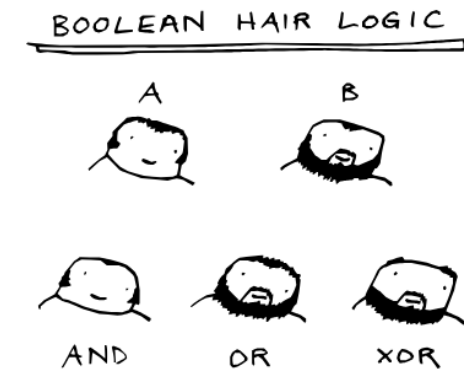
operatori di base

Name	NOT	AND	NAND	OR	NOR	XOR	XNOR																																																																																																
Alg. Expr.	\overline{A}	AB	\overline{AB}	$A + B$	$\overline{A + B}$	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$																																																																																																
Symbol																																																																																																							
Truth Table	<table><tr><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	X	0	1	1	0	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	X	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	X	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	X	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	X	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	X	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	X	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	X																																																																																																						
0	1																																																																																																						
1	0																																																																																																						
B	A	X																																																																																																					
0	0	0																																																																																																					
0	1	0																																																																																																					
1	0	0																																																																																																					
1	1	1																																																																																																					
B	A	X																																																																																																					
0	0	1																																																																																																					
0	1	1																																																																																																					
1	0	1																																																																																																					
1	1	0																																																																																																					
B	A	X																																																																																																					
0	0	0																																																																																																					
0	1	1																																																																																																					
1	0	1																																																																																																					
1	1	1																																																																																																					
B	A	X																																																																																																					
0	0	1																																																																																																					
0	1	0																																																																																																					
1	0	0																																																																																																					
1	1	0																																																																																																					
B	A	X																																																																																																					
0	0	0																																																																																																					
0	1	1																																																																																																					
1	0	1																																																																																																					
1	1	0																																																																																																					
B	A	X																																																																																																					
0	0	1																																																																																																					
0	1	0																																																																																																					
1	0	0																																																																																																					
1	1	1																																																																																																					

espressione booleana

- operatori possono essere **combinati** in espressioni
 - altra forma di definizione di funzioni booleane
 - es. $F_2(A, B, C) = A \cdot B + C$

Operatore	Simbolo
And	$\cdot (\wedge)$
Or	$+ (\vee)$
Not	\neg
Xor	\oplus
Nand	\uparrow
Nor	\downarrow



proprietà degli operatori

Proprietà	Not
Complemento	$\neg\neg A = A$

Proprietà	And	Or
Commutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Associativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributiva	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
Idempotenza	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identità	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Del limite	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Assorbimento	$A \cdot (A + B) = A$	$A + (A \cdot B) = A$
Inverso	$A \cdot \neg A = 0$	$A + \neg A = 1$
De Morgan	$\neg(A \cdot B \cdot C \dots) = \neg A + \neg B + \neg C \dots$	$\neg(A + B + C \dots) = \neg A \cdot \neg B \cdot \neg C \dots$

Attenzione a De Morgan: errore comune!

leggi di De Morgan

le leggi di De Morgan sono principi della logica proposizionale che stabiliscono come negare le congiunzioni e le disgiunzioni

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

A	B	$A.B$	$\overline{A.B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A+B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

forme canoniche

- le **forme canoniche** sono espressioni standardizzate di una funzione booleana e permettono di rappresentarla in modo univoco
- **somma di prodotti (SP)**: si considerano le righe a **1**
 - $F1(A, B, C) = (\neg A \neg B \neg C) + (\neg A \cdot B \cdot C) + (A \neg B \cdot C) + (A \cdot B \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$
- **prodotto di somme (PS)**: si considerano le righe a **0**
 - $F1(A, B, C) = (A + B + \neg C) \cdot (A + \neg B + C) \cdot (\neg A + B + C)$

somma di prodotti



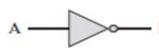



<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	
0	0	0	1	$\rightarrow SP$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow SP$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\rightarrow SP$
1	1	0	1	$\rightarrow SP$
1	1	1	1	$\rightarrow SP$

$$F(A, B, C) := (\neg A \cdot \neg B \cdot \neg C) + (\neg A \cdot B \cdot C) + (A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot B \cdot \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$$

prodotto di somme

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	$\neg F$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	0	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	$\rightarrow PS$
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	

$$F(A, B, C) := (A + B + \neg C) \cdot (A + \neg B + C) \cdot (\neg A + B + C)$$

Name	Graphical Symbol	Algebraic Function	Truth Table															
AND		$F = A \cdot B$ or $F = AB$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
OR		$F = A + B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
NOT		$F = \overline{A}$ or $F = A'$	<table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	F	0	1	1	0									
A	F																	
0	1																	
1	0																	
NAND		$F = \overline{AB}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
NOR		$F = \overline{A + B}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
XOR		$F = A \oplus B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	F																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																

