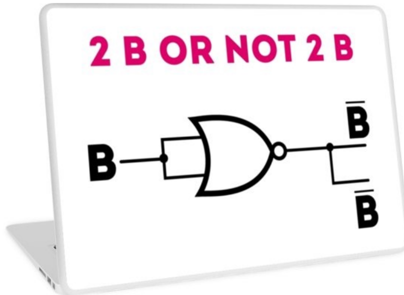
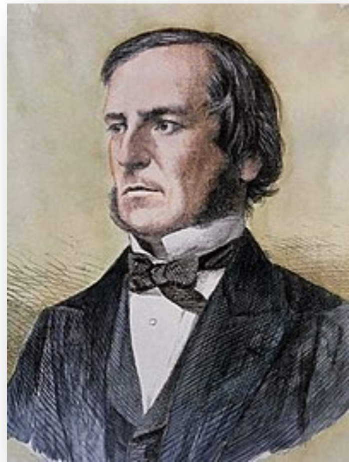
UNIVERSITÀ DI PARMA



algebra di Boole



algebra di Boole

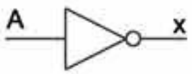
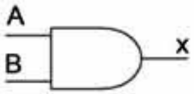
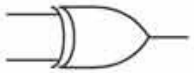
- l'algebra di Boole è un ***formalismo*** che opera su variabili (*variabili booleane*)
- le ***variabili booleane*** possono assumere due soli valori: ***vero***, ***falso***
- sulle variabili booleane è possibile definire un insieme di funzioni (*funzioni booleane*)
- il risultato di una ***funzione booleana*** può assumere solo il valore ***vero*** o il valore ***falso***
- il valore ***vero*** viene anche rappresentato con ***1*** e il valore ***falso*** con ***0***

funzioni e tabella di verità

- una ***tabella di verità*** ***definisce*** una funzione booleana
  - stabilisce il valore risultante per ciascuna ***combinazione*** dei valori in ingresso
- a volte, *specifica incompleta*
  (certe combinazioni di ingressi non possono verificarsi) → non è specificato alcun valore

#	w	x	y	z	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

operatori di base

Name	NOT	AND	NAND	OR	NOR	XOR	XNOR
Alg. Expr.	$\overline{A}$	AB	$\overline{AB}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
Symbol							

Truth Table

NOT:

A	X
0	**1**
1	**0**

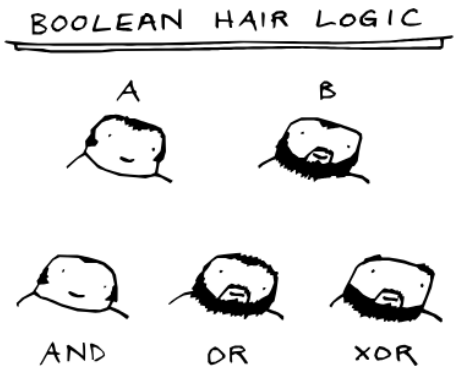
AND, NAND, OR, NOR, XOR, XNOR:

B	A	X (AND)	X (NAND)	X (OR)	X (NOR)	X (XOR)	X (XNOR)
0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

espressione booleana

- operatori possono essere ***combinati*** in espressioni
  - altra forma di definizione di funzioni booleane
  - es. $F_2(A, B, C) = A \cdot B + C$

Operatore	Simbolo
And	· (∧)
Or	+ (∨)
Not	¬
Xor	⊕
Nand	↑
Nor	↓



proprietà degli operatori

Proprietà	Not
Complemento	¬¬A = A

Proprietà	And	Or
Commutativa	A · B = B · A	A + B = B + A
Associativa	(A·B) · C = A · (B·C)	(A+B) + C = A + (B+C)
Distributiva	A + (B·C) = (A+B) · (A+C)	A · (B+C) = (A·B) + (A·C)
Idempotenza	A · A = A	A + A = A
Identità	A · 1 = A	A + 0 = A
Del limite	A · 0 = 0	A + 1 = 1
Assorbimento	A · (A + B) = A	A + (A · B) = A
Inverso	A · ¬ A = 0	A + ¬A = 1
De Morgan	¬(A·B·C...) = ¬A + ¬B + ¬C...	¬(A+B+C...) = ¬A · ¬B · ¬C...

Attenzione a De Morgan: errore comune!

UNIVERSITÀ DI PARMA

leggi di De Morgan

le leggi di De Morgan sono principi della logica proposizionale che stabiliscono come negare le congiunzioni e le disgiunzioni

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

A	B	A.B	$\overline{A.B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

forme canoniche

- le ***forme canoniche*** sono espressioni standardizzate di una funzione booleana e permettono di rappresentarla in modo univoco
- ***somma di prodotti (SP):*** si considerano le righe a ***1***
  - $F1(A, B, C) = (\neg A \cdot \neg B \cdot \neg C) + (\neg A \cdot B \cdot C) + (A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot B \cdot \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$
- ***prodotto di somme (PS):*** si considerano le righe a ***0***
  - $F1(A, B, C) = (A + B + \neg C) \cdot (A + \neg B + C) \cdot (\neg A + B + C)$

A	B	C	F	
0	0	0	1	$\rightarrow SP$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow SP$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\rightarrow SP$
1	1	0	1	$\rightarrow SP$
1	1	1	1	$\rightarrow SP$

A	B	C	F	$\neg F$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	0	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	$\rightarrow PS$
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	

somma di prodotti

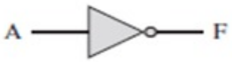
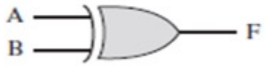
A	B	C	F	
0	0	0	1	$\rightarrow SP$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow SP$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\rightarrow SP$
1	1	0	1	$\rightarrow SP$
1	1	1	1	$\rightarrow SP$

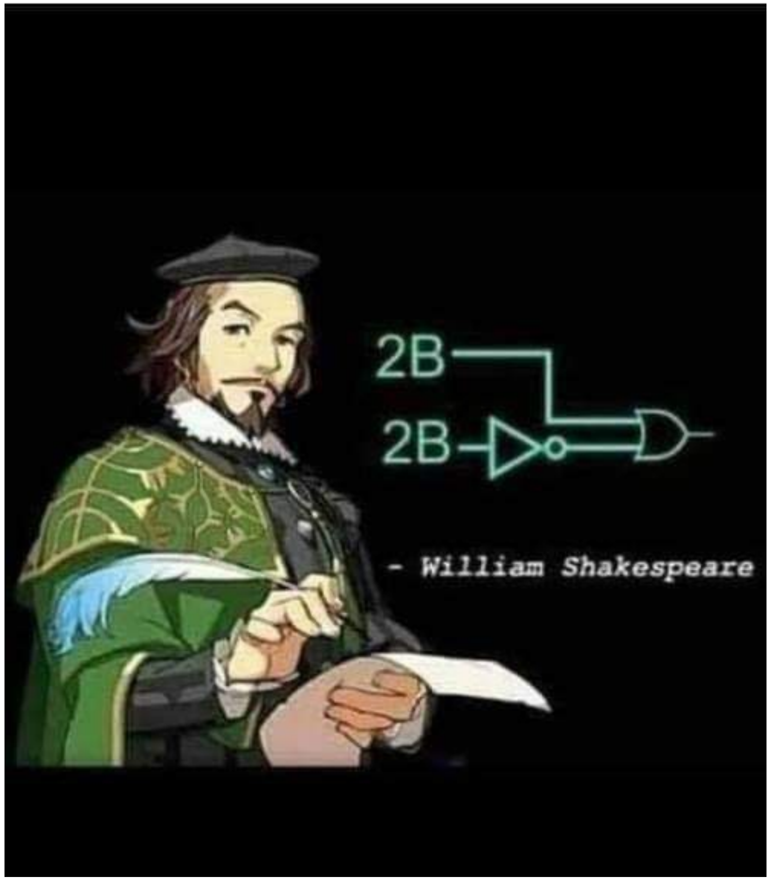
$$F(A,B,C) := (\neg A \cdot \neg B \cdot \neg C) + (\neg A \cdot B \cdot C) + (A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot B \cdot \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$$

prodotto di somme

A	B	C	F	$\neg F$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	0	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	$\rightarrow PS$
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	

$$F(A,B,C) := (A + B + \neg C) \cdot (A + \neg B + C) \cdot (\neg A + B + C)$$

Name	Graphical Symbol	Algebraic Function	Truth Table
AND		$F = A \bullet B$ or $F = AB$	A B | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$F = A + B$	A B | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NOT		$F = \overline{A}$ or $F = A'$	A | F 0 | 1 1 | 0
NAND		$F = \overline{AB}$	A B | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = \overline{A + B}$	A B | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
XOR		$F = A \oplus B$	A B | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0


2B
2B
- William Shakespeare