



UNIVERSITÀ
DI PARMA

logica dei predicati

alberto ferrari - fondamenti di informatica

predicato (enunciato aperto)

- predicato affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili
 - frase che contiene *variabili*
 - la *verità* della frase dipende dal *valore* delle variabili
- se si sostituiscono valori alle variabili si ottiene una proposizione
- esempio
 - $P(x) := \text{“}x \text{ è un numero dispari”}$
 - $Q(n) := \text{“}2^n - 1 \text{ è un numero dispari”}$
- è necessario definire il dominio delle variabili
- l'*insieme di verità* del predicato
 - è l'insieme dei valori delle variabili che rendono vero l'enunciato
 - sottoinsieme del dominio delle variabili

- $P(x) \wedge Q(x)$
 - vero per gli x che rendono veri sia P che Q
- $P(x) \vee Q(x)$
 - vero per gli x che rendono vero almeno uno tra i predicati P e Q
- $\neg P(x)$
 - vero per gli x che rendono falso P
- $P(x) \Rightarrow Q(x)$
 - vero per gli x che rendono falso P oppure vero Q
- $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
 - vero per gli x che rendono P e Q entrambi falsi o entrambi veri

quantificatori

- un predicato può essere trasformato in una proposizione in due modi
 - *sostituendo* le variabili con valori
 - *quantificando* le sue variabili
- una variabile legata a un quantificatore si dice *vincolata*, altrimenti *libera*
- quantificatori logici:
 - *quantificatore universale*
 - *quantificatore esistenziale*

quantificatore universale

- il *quantificatore universale* stabilisce che una proprietà valga per *tutti i valori* nel dominio della variabile vincolata
- $\forall x, P(x)$
 - “per ogni x , $P(x)$ è vero”
- Esempi
 - $\forall n \in \mathbb{N}, n \bmod 4 = 0 \Rightarrow \text{pari}(n)$
 - tutti i multipli di 4 sono pari
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

quantificatore esistenziale

- il *quantificatore esistenziale* afferma che una data proprietà valga per *almeno un valore* della variabile vincolata
- $\exists x: P(x)$
 - esiste almeno un x tale che $P(x)$ è vero
- esempi
 - $\exists n \in \mathbb{N}: \text{pari}(n)$
 - esiste almeno un numero pari
 - $\exists x \in \mathbb{R}: 2x + 1 = 0$
 - l'equazione ammette almeno una soluzione

- la negazione di "esiste" \exists è "non esiste", rappresentata da \nexists o $\neg\exists$
- enunciati con \nexists riformulati con \forall e negando il predicato
 - $\nexists x: x^2 < 0$
 - $\forall x, x^2 \geq 0$

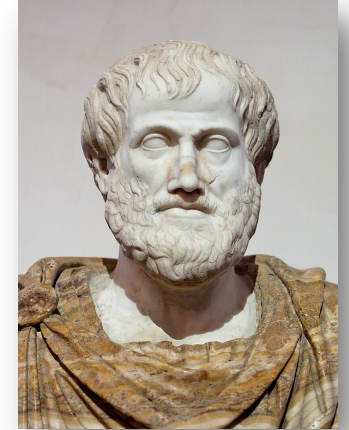
- i quantificatori sono sostanzialmente **coniunzioni** o **disgiunzioni** riferite a **tutti** gli elementi di un dominio
- per semplicità, dominio $D:=1,2,3$
 - $\forall x \in D, P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$
 - $\exists x \in D: P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$
- due quantificatori dello stesso tipo possono essere scambiati di posto senza alterare la verità dell'enunciato
 - $\exists x \exists y P(x,y)$ es. $\exists x \exists y (x^2+y^2=1)$
 - $\exists y \exists x P(x,y)$ es. $\exists x \exists y (x^2+y^2=1)$
- due quantificatori di diverso tipo non possono essere scambiati di posto
- attenzione, i seguenti enunciati sono diversi:
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: y \geq x$
 - $\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}, y \geq x$

negazione con quantificatori

- per negare un enunciato che contiene quantificatori occorre:
 1. *sostituire tutti i \forall con \exists e viceversa*
 2. *negare il predicato*
- proprietà analoga a De Morgan
 - i quantificatori sono sostanzialmente \wedge o \vee allargati
- esempi
 - $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$
 - $\neg(\exists x: P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

sillogismi aristotelici

- modus ponens con quantificatori
 - premessa maggiore: “Tutti gli uomini sono mortali”
 - $\forall x, \text{uomo}(x) \Rightarrow \text{mortale}(x)$
 - premessa minore: “Socrate è un uomo”
 - $\text{uomo}(\text{Socrate})$
 - conclusione: “Socrate è mortale”
 - $\text{mortale}(\text{Socrate})$
- il quantificatore \forall si può eliminare sostituendo alla variabile un valore del dominio
 - $\text{uomo}(\text{Socrate}) \Rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate})$
 - poi si applica il modus ponens





**UNIVERSITÀ
DI PARMA**

insiemi

insiemi - proprietà

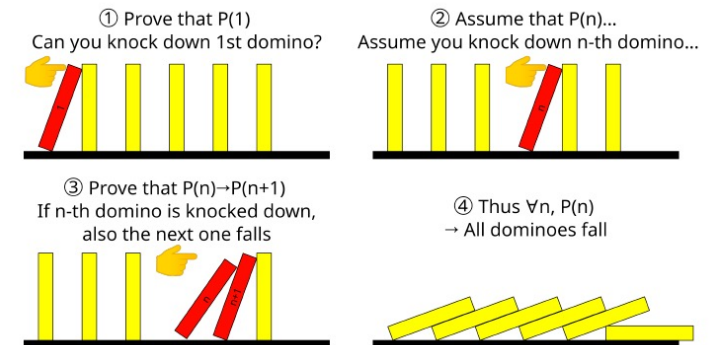
Proprietà	Op. tra insiemi	Op. tra predicati
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
Doppia neg.	$(B')' = B$	$\neg(\neg P) \equiv P$
De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

principio di induzione

- sia $P(n)$ un predicato definito su \mathbb{N} tale che:
 1. $P(1)$ è vero
 2. $\forall n$, supponendo $P(n)$ vero, segue che anche $P(n+1)$ è vero
- allora $P(n)$ risulta vero $\forall n$

alcuni predicati sono definiti a partire da k anziché da 1

Premesse	Conclusione
$P(1)$ $\forall n, P(n) \implies P(n+1)$	$\forall n, P(n)$



Gauss

Come esempio di induzione, dimostriamo la validità della *formula di Gauss*.

Definiamo per comodità la successione $G(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Inoltre definiamo il predicato $P(n)$ come: $1 + 2 + \dots + n = G(n)$.

Vogliamo dimostrare *per induzione* che il predicato è Vero $\forall n$.

1) Il predicato per $n = 1$ è vero, infatti:

$$G(1) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

2) Supponendo che $P(n)$ sia Vero, ne dovrebbe seguire che anche $P(n + 1)$ è Vero.

Verifichiamo. Calcoliamo la somma fino a $n + 1$, in termini della somma precedente, che per ipotesi vale $G(n) = 1 + 2 + \dots + n$. Bisogna solo aggiungere un termine:

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = [\text{Per ipotesi}]$$

$$G(n) + n + 1 = [\text{Per definizione}]$$

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2} = [\text{Per definizione}]$$
$$G(n + 1)$$

Quindi la formula $G(n)$ vale per calcolare la somma dei numeri da 1 a n , $\forall n$.