logica dei predicati

predicato (enunciato aperto)

- predicato affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili
  - frase che contiene ***variabili***
  - la ***verità*** della frase dipende dal ***valore*** delle variabili
- se si sostituiscono valori alle variabili si ottiene una proposizione
- esempio
  - **P(x):= "x è un numero dispari"**
  - **Q(n):= "2^n-1 è un numero dispari"**
- è necessario definire il dominio delle variabili
- l'***insieme di verità*** del predicato
  - è l'insieme dei valori delle variabili che rendono vero l'enunciato
  - sottoinsieme del dominio delle variabili

predicati - connettivi

- $P(x) \land Q(x)$
  - vero per gli x che rendono veri sia P che Q
- $P(x) \lor Q(x)$
  - vero per gli x che rendono vero almeno uno tra i predicati P e Q
- $\neg P(x)$
  - vero per gli x che rendono falso P
- $P(x) \Rightarrow Q(x)$
  - vero per gli x che rendono falso P oppure vero Q
- $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
  - vero per gli x che rendono P e Q entrambi falsi o entrambi veri

quantificatori

- un predicato può essere trasformato in una proposizione in due modi
  - ***sostituendo*** le variabili con valori
  - ***quantificando*** le sue variabili
- una variabile legata a un quantificatore si dice ***vincolata***, altrimenti ***libera***
- quantificatori logici:
  - ***quantificatore universale***
  - ***quantificatore esistenziale***

quantificatore universale

- il ***quantificatore universale*** stabilisce che una proprietà valga per ***tutti i valori*** nel dominio della variabile vincolata
- $\forall x, P(x)$
  - "per ogni x, P(x) è vero"
- Esempi
  - $\forall n \in N$, n mod 4 = 0 $\Longrightarrow$ pari(n)
  - tutti i multipli di 4 sono pari
- $\forall x \in R, \forall y \in R, (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

quantificatore esistenziale

- il ***quantificatore esistenziale*** afferma che una data proprietà valga per ***almeno un valore*** della variabile vincolata
- $\exists x: P(x)$
  - esiste almeno un x tale che P(x) è vero
- esempi
  - $\exists n \in N: pari(n)$
    - esiste almeno un numero pari
  - $\exists x \in R: 2x + 1 = 0$
    - l'equazione ammette almeno una soluzione

UNIVERSITÀ DI PARMA

∄ e ∀

- la negazione di "esiste" ∃ è "non esiste", rappresentata da ∄ o ¬∃
- enunciati con ∄ riformulati con ∀ e negando il predicato
  - $\nexists x$: $x^2<0$
  - $\forall x$, $x^2 \geq 0$

proprietà

- i quantificatori sono sostanzialmente ***congiunzioni*** o **disgiunzioni** riferite a ***tutti*** gli elementi di un dominio
- per semplicità, dominio D:=1,2,3
  - $\forall x \in D, P(x) \equiv P(1) \land P(2) \land P(3)$
  - $\exists x \in D: P(x) \equiv P(1) \lor P(2) \lor P(3)$
- due quantificatori dello stesso tipo possono essere scambiati di posto senza alterare la verità dell'enunciato
- due quantificatori di diverso tipo non possono essere scambiati di posto
- attenzione, i seguenti enunciati sono diversi:
  - $\forall x \in R, \exists y \in R: y \geq x$
  - $\exists y \in R: \forall x \in R, y \geq x$

negazione con quantificatori

- per negare un enunciato che contiene quantificatori occorre:
  1. ***sostituire tutti i $\forall$ con $\exists$ e viceversa***
  2. ***negare il predicato***
- proprietà analoga a De Morgan
  - i quantificatori sono sostanzialmente $\wedge$ o $\vee$ allargati
- esempi
  - $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$
  - $\neg(\exists x: P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

sillogismi aristotelici

- modus ponens con quantificatori
  - premessa maggiore: “Tutti gli uomini sono mortali”
    - $\forall x, uomo(x) \Rightarrow mortale(x)$
  - premessa minore: “Socrate è un uomo”
    - uomo(Socrate)
  - conclusione: “Socrate è mortale”
    - mortale(Socrate)
- il quantificatore ∀ si può eliminare sostituendo alla variabile un valore del dominio
  - $uomo(Socrate) \Rightarrow mortale(Socrate)$
  - poi si applica il modus ponens

UNIVERSITÀ DI PARMA

insiemi

insiemi - proprietà

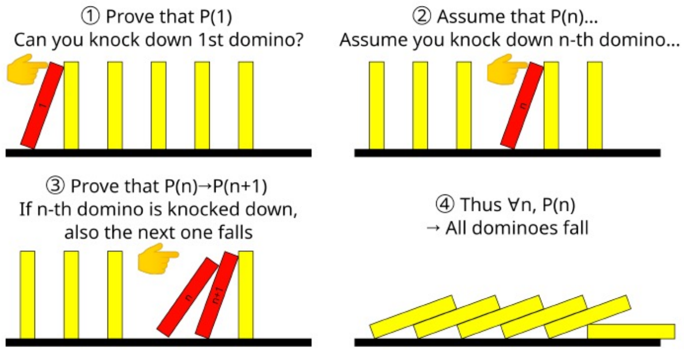
Proprietà	Op. tra insiemi	Op. tra predicati
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
Doppia neg.	$(B')' = B$	$\neg(\neg P) \equiv P$
De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

principio di induzione

- sia P(n) un predicato definito su ℕ tale che:
  1. P(1) è vero
  2. ∀n, supponendo P(n) vero, segue che anche P(n+1) è vero
- allora P(n) risulta vero ∀n

alcuni predicati sono definiti a partire da k anziché da 1

Premesse	Conclusione
$P(1)$	$\forall n, P(n)$
$\forall n, P(n) \implies P(n+1)$	



Gauss

Come esempio di induzione, dimostriamo la validità della *formula di Gauss*.

Definiamo per comodità la successione $G(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Inoltre definiamo il predicato $P(n)$ come: $1 + 2 + \cdots + n = G(n)$.
Vogliamo dimostrare *per induzione* che il predicato è `Vero` $\forall n$.

1) Il predicato per $n = 1$ è vero, infatti:
$G(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$

2) Supponendo che $P(n)$ sia `Vero`, ne dovrebbe segue che anche $P(n+1)$ è `Vero`.
Verifichiamo. Calcoliamo la somma fino a $n+1$, in termini della somma precedente, che per ipotesi vale $G(n) = 1 + 2 + ... + n$. Bisogna solo aggiungere un termine:

$$1 + 2 + ... + n + n + 1 = \text{[Per ipotesi]}$$

$$G(n) + n + 1 = \text{[Per definizione]}$$

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \text{[Per definizione]}$$

$$G(n+1)$$

Quindi la formula $G(n)$ vale per calcolare la somma dei numeri da 1 a n, $\forall n$.