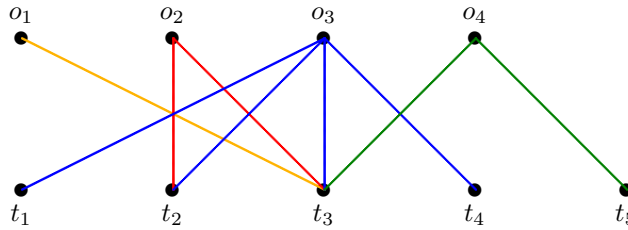


2.4 Emparejamientos

Una clase importante de problemas de optimización combinatoria se presentan en los problemas de asignación: de obreros a trabajos, de trabajos a máquinas, de barcos a muelles, etc.



Obreros= o_1, o_2, o_3 , etc.

Trabajos= t_1, t_2, t_3 , etc.

o_1 puede realizar el trabajo t_3 ; o_2 los trabajos t_2 y t_3 ; etc.

Se trata de asignar a cada obrero uno de los trabajos pendientes, si es posible.

Este tipo de situaciones, se modela con un grafo un poco especial:

Definición 27.- Un grafo $G = (V, A)$ se dice **bipartito** si el conjunto de vértices V puede separarse en dos conjuntos disjuntos $V = S \cup T$ de tal manera que las aristas del grafo unen siempre un vértice de S con uno de T (es decir, no hay aristas entre los vértices de S ni entre los vértices de T).

Aunque la estructura bipartita del grafo modelo se hace evidente en el planteamiento del problema, conocer mejor este tipo de grafos permite obtener mejores y más sencillas soluciones:

Proposición 28.- Un grafo G es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración:

En efecto, si G es bipartito, como las aristas unen únicamente vértices de S con los de T , cualquier camino que construyamos es una sucesión de vértices alternados de S y T ($s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3 \dots$). Entonces, si es un ciclo (camino cerrado) acaba en el vértice inicial luego tenemos en el ciclo el mismo número de vértices de S y de T luego es un número par de vértices y, por tanto, un número par de aristas ($s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3 \dots s_k t_k s_1$).

Si G no tiene ciclos de longitud impar, para cada par de vértices $x, y \in V$ (supondremos G conexo, si no se aplicaría a cada componente conexa), todos los caminos que unen x con y tienen la misma paridad. Si no fuera así, uniendo dos caminos de distinta paridad se formaría un ciclo de longitud impar, lo que no es posible. Entonces, fijado x , dividimos el conjunto V en dos S y T , en uno de ellos están los vértices cuyos caminos a x tienen longitud impar y en el otro los vértices cuyos caminos a x tienen longitud par (x está a longitud 0 de x). Estos dos conjuntos son disjuntos y verifican la propiedad de la bipartición. ■

Esta caracterización de los grafos bipartitos proporciona un método sencillo para comprobar que lo son. Basta para ello recordar el significado de las potencias de la matriz de adyacencia de un grafo: en particular, no habrá ciclos de orden impar si en la diagonal de las potencias impares sólo aparecen ceros. Esto nos lleva rápidamente a un prueba algorítmica de la bipartición:

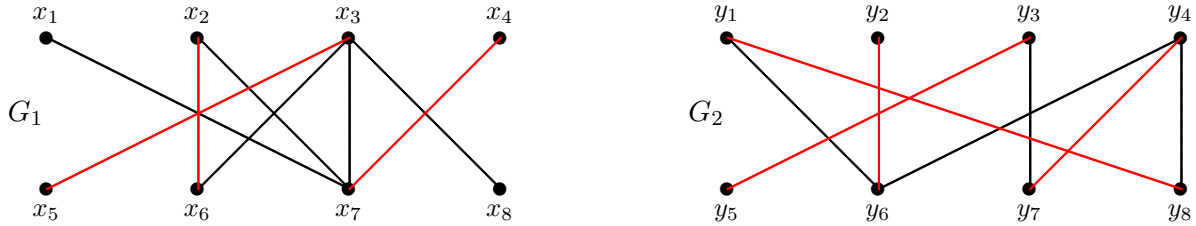
Algoritmo de bipartición Sea G un grafo de n vértices y M su matriz de adyacencia:

- Si $\text{diag}(M) \neq (0, 0, \dots, 0)$ el grafo no es bipartito, si se da la igualdad, comprobamos la siguiente potencia impar
- Si $\text{diag}(M \cdot M^2) \neq (0, 0, \dots, 0)$ el grafo no es bipartito, si se da la igualdad, comprobamos la siguiente potencia impar
- Si $\text{diag}(M^3 \cdot M^2) \neq (0, 0, \dots, 0)$ el grafo no es bipartito, si se da la igualdad, comprobamos la siguiente potencia impar
- sucesivamente, para todos los impares menores o iguales a n .

Definición 29.- Un **emparejamiento** en $G = (S \cup T, A)$ es un conjunto E de aristas tales que ningún par de ellas tiene un vértice en común. Si el emparejamiento es del mayor número posible de aristas se denomina **emparejamiento máximo** o **de cardinal máximo**.

Un vértice se dice **expuesto** (o no cubierto) por un emparejamiento E si no es punto extremo de ninguna arista de E .

Ser emparejamiento máximo no significa que todos los vértices estén emparejados con otro, sino que están emparejados los máximos posibles. Por ejemplo, si S tiene 5 vértices y T tiene 7, a lo más puede obtenerse un emparejamiento de tamaño 5, pero también es posible que no puedan emparejarse los 5 vértices:



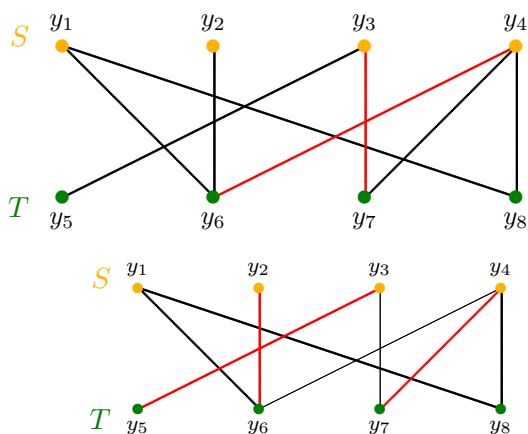
En el grafo G_1 el emparejamiento máximo es de tamaño 3, mientras que en G_2 es de tamaño 4. Un emparejamiento como el de G_2 , que no deja ningún borde expuesto, se dice que es un emparejamiento **completo** (evidentemente, un emparejamiento completo es máximo y sólo puede darse si los dos conjuntos tienen el mismo número de vértices). Los vértices x_1 y x_8 no están cubiertos por el emparejamiento dado en G_1 , es decir, son *expuestos*.

La manera de proceder para obtener un emparejamiento máximo, es ir incrementando paso a paso el cardinal del emparejamiento hasta hacerlo máximo. Para esta idea es fundamental el concepto de *camino aumentador*

Definición 30.- Sea $G = (S \cup T, A)$ un grafo bipartito y E un emparejamiento en G . Un camino en G se dice un **camino alternante** de E si recorre, de manera alternada, aristas de E y de $A - E$.

Un **camino aumentador** de E es un camino alternante cuyos dos vértices extremos están expuestos por E (es decir, no son extremos de ninguna de las aristas de E).

EJEMPLO.- Consideremos, en el grafo G_2 del principio, el emparejamiento $E = \{\{y_3, y_7\}, \{y_4, y_6\}\}$



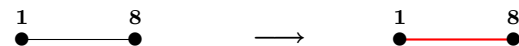
Podemos construir varios caminos aumentadores, por ejemplo:



que aumenta el cardinal de E en uno, sin más que cambiar unas aristas por otras:



El único camino aumentador posible para el nuevo emparejamiento es:



que basta con añadirlo a E .

Este procedimiento, ya describe un algoritmo de funcionamiento. La validez de dicho algoritmo la asegura el siguiente teorema.

Teorema 31.- Un emparejamiento E es de cardinal máximo si y sólo si no existe un camino aumentador de E .

La demostración del resultado es compleja, por lo que la obviaremos. Veamos como ha de ser el algoritmo a usar: se trata de ir aumentando el cardinal del emparejamiento mediante sucesivos caminos aumentadores, hasta que no se encuentren más. Cada camino aumentador debe comenzar en un vértice expuesto y seguir por un camino alternante hasta llegar a otro vértice expuesto.

2.4.1 Algoritmo de emparejamiento

Sea $G = (S \cup T, A)$ un grafo bipartito de n vértices y E un emparejamiento en G (puede ser inicialmente $E = \emptyset$). Denotemos los vértices por $1, 2, \dots, n$.

Paso 1: Si en S no hay ningún borde expuesto, E es máximo.

En caso contrario, etiquetar cada vértice expuesto de S por 0

Paso 2: Para cada vértice $j \in S$ y arista $\{j, k\} \notin E$, etiquetar el vértice k con j , a menos que ya esté etiquetado.

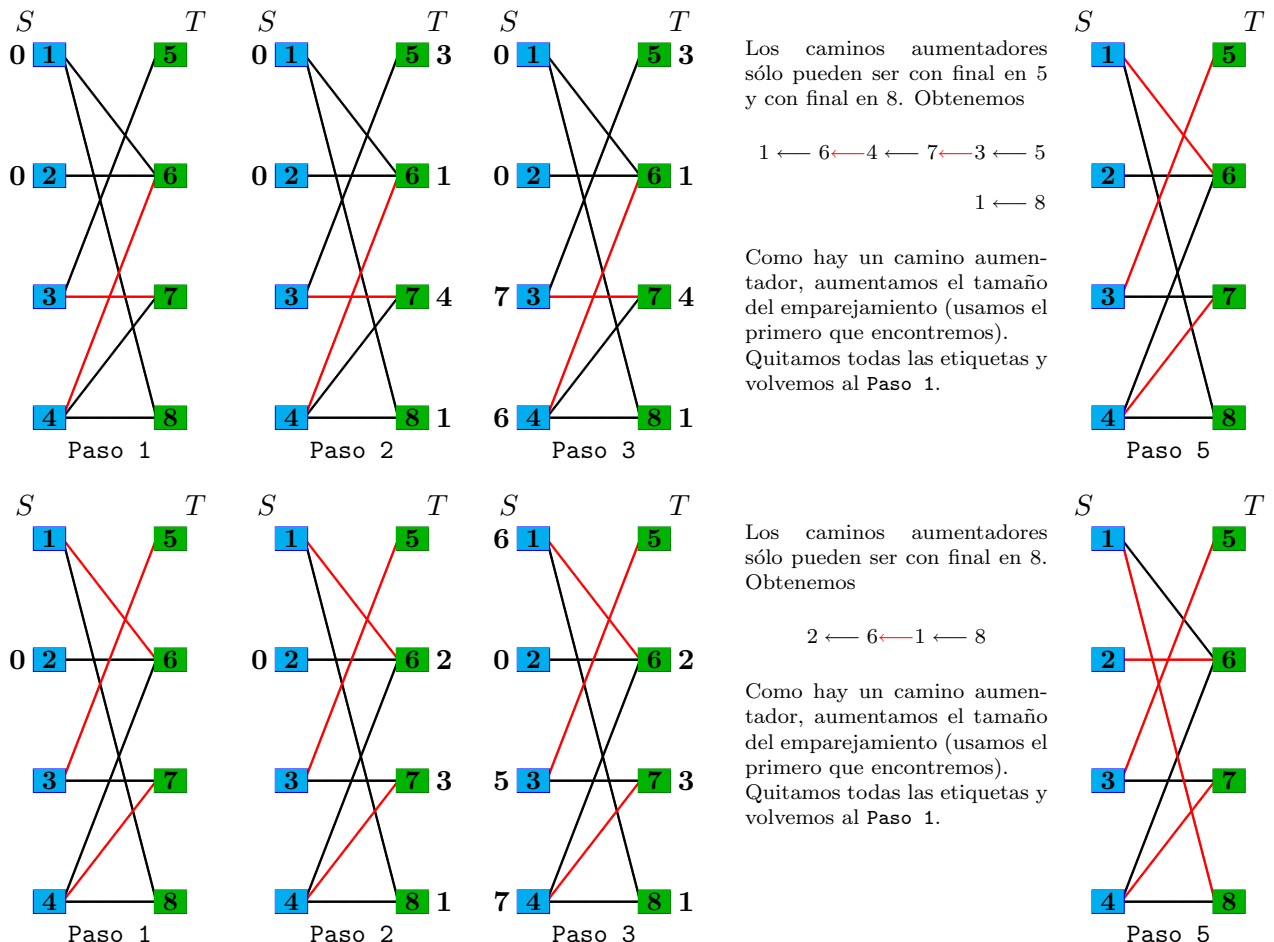
Paso 3: Para cada vértice $k \in T$ cubierto por E , etiquetar al vértice j por k , donde j es el vértice de S extremo de la única arista $\{j, k\} \in E$.

Paso 4: Recorrer hacia atrás los caminos alternantes que acaban en un vértice expuesto en T , usando las etiquetas sobre los vértices.

Paso 5: Si en el paso anterior, ninguno de los caminos alternantes es de aumento, entonces E es máximo.

En caso contrario, aumentar E usando un camino aumentador. Eliminar todas las etiquetas y volver al Paso 1.

Veamos la aplicación del algoritmo sobre un emparejamiento dado, de nuevo sobre el grafo G_2 :



Lo que concluye el proceso.

2.4.2 Ejercicios

4.1 Considerar los grafos G_1 y G_2 anteriores.

- Comprobar que se cumple la condición de que no tienen ciclos de orden impar.
- Si hicieramos la comprobación usando las potencias impares de las matrices de adyacencia, ¿hasta que potencia debemos calcular?
- Comprueba que en el grafo G_1 no puede darse un emparejamiento completo.

Introduce la matriz de adyacencia del grafo G_2 como M .

- ¿Qué tamaño ha de tener M ? ¿Se aprecia alguna estructura especial en M ?
- Calcular M^3 , M^5 y M^7 y comprobar que sus diagonales son todas ceros.
- Cada potencia impar se obtiene de la siguiente multiplicando por M^2 . Usar esto para escribir un programa con un bucle `for` que calcule las potencias impares necesarias.
- Construir una función `Bipartito` que introduciendole la matriz de adyacencia de un grafo devuelva un 1 o un 0 según el grafo sea o no bipartito.

4.2 Considerar en el grafo G_1 el emparejamiento vacío.

- Si aplico el algoritmo de emparejamiento, ¿cuál es el etiquetado de los vértices tras el paso 3? (por comodidad y por elegir un orden, los vértices en el paso 2 y 3 se van tomando con los valores de menor a mayor).
- ¿Cuántos caminos aumentadores se encuentran en el paso 4? Usa el primero que se encontró para aumentar el emparejamiento.
- Repetir el algoritmo hasta obtener un emparejamiento máximo.

Introduce la matriz de adyacencia del grafo G_1 como M .

- Usa la función `Bipartito` construida antes para comprobar que lo es.
- Introduce una matriz de dos filas que en la primera aparezcan los vértices y en la segunda el etiquetado encontrado en el apartado (a).
- ¿Cómo se encontrará un camino aumentador que termine en el vértice 5? Construye una matriz E para el emparejamiento conseguido por este camino aumentador.
- Repite el apartado [ii] anterior, pero obteniendo el etiquetado apartir de los datos de las matrices M y E . Buscar un camino aumentador usando los datos del nuevo etiquetado.

Práctica (Segunda y última parte)..- Construir una función `Parear` para obtener un emparejamiento maximal de un grafo bipartito. Con las siguientes características:

- ★ La entrada sea una matriz de un grafo bipartito, con los vértices ordenados: primero los de S y luego los de T ; y el numero de vectores del primer conjunto.
- ★ Que compruebe si el grafo es conexo o no usando la función `Floyd` y que compruebe que la matriz corresponde a un grafo bipartito.
- ★ Que tenga dos salidas. La primera, un vector `[(0)1, (0)1]` que indique si el grafo es (no) conexo y si es (no) bipartito.
- ★ Que la segunda salida sea la matriz vacía, si el grafo no es bipartito, y la matriz del emparejamiento máximo (o una matriz que describa el emparejamiento) si el grafo es bipartito.