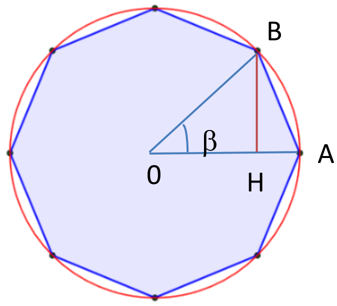
METODO DI ARCHIMEDE

approssimazione di π mediante l'area di un poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1, al tendere all'infinito del numero di lati del medesimo



L'area del poligono regolare di 2^n lati è data da 2^n volte l'area di ciascun triangolo che lo costituisce (n=2,3,..)

$$p_n = \frac{2^n \overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} = 2^{n-1} \cdot \sin(\beta)$$

Se si dimezza l'angolo al centro, raddoppia il numero di lati del poligono doppio di lati, la cui area sarà data da:

$$p_{n+1} = \frac{2^{n+1} \overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Poiché $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\beta)}{2}}$ e $\cos(\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\beta)}$

Si ottiene

$$p_{n+1} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2(\beta)}}{2}}$$

Si ottiene quindi l'algoritmo:

b(1)=2 s(1)=1 % **(inizializzazioni corrispondenti ad n=2, (quadrato inscritto nel cerchio di raggio1)**

for i=2,3,…n

p(i)=b(i-1)*s(i-1**)** **%Area come prodotto della Potenza del 2 per il seno dell'angolo attuale**

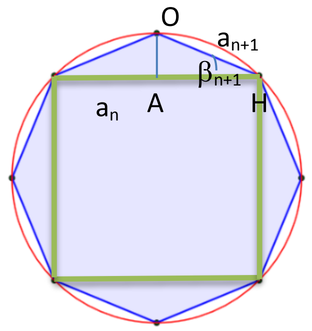
b(i)=2*b(i-1) **%accumulo le potenze di 2 per l'n successivo**

$$s(i) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s(i-1)^2}}{2}}$$ **seno dell'angolo dimezzato**

end

Metodo di Viete

Il valore di π è successivamente approssimato con la metà delle lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari di 2^n lati, per n=2,3,… inscritti in una circonferenza di raggio unitario.



Sia a_n la lunghezza del lato e p_n il semiperimetro del poligono di 2^n lati.

$$p_n=2^{n-1}\, a_n$$

Si ricava che

$$AH=\frac{a_n}{2}=a_{n+1}\cos(\beta_{n+1}) \quad \text{da cui segue:} \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2\cos(\beta_{n+1})} \qquad \beta_{n+1}=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$p_{n+1}=2^n a_{n+1}=\frac{2^{n-1}a_n}{\cos(\beta_{n+1})}=\frac{p_n}{\cos(\beta_{n+1})}$$

Gli angoli, passando da un poligono regolare di lato a_n ad un poligono regolare di lato a_{n+1} variano nel seguente modo:

$$\beta_{n+1}=\frac{\beta_n}{2}$$

Per le formule di bisezione del coseno

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\beta)}{2}}$$

Si ottiene il seguente metodo per calcolare il valore approssimato di π.

c(1)=0, p(1)=2   %inizializzazioni per il caso n=2

for i=2,3,…

$$c(i)=\sqrt{\frac{1+c(i-1)}{2}}$$

$$p(i)=\frac{p(i-1)}{c(i)}$$

End

Metodo di Leibniz:

Dalla trigonometria è noto che $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$

da cui segue che

$\pi = 4 * arctg(1)$.

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor dell'arcotangente:

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Un'approssimazione di π si può ottenere troncando ad N la sommatoria precedente e ponendo x=1.

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

Da cui si ottiene il metodo:

q(1)=1
for i=2,3,…,n

$$q(i) = q(i-1) + \frac{(-1)^{i-1}}{2 \cdot i - 1}$$

end

p=4*q(n)

Sviluppo in serie dell'arcoseno

Dalla trigonometria è noto che $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

da cui segue che

$$\pi = 6 \cdot arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$arcsen(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

$$\pi = 6 \cdot arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots.$$

Da cui si ottiene il metodo:

q(1)=0 t(1)=1/2
for i=1,…,n-1

$$q(i+1) = q(i) + \frac{t(i)}{2\cdot i - 1}$$

$$t(i+1) = \frac{t(i)\cdot(2\cdot i - 1)}{8\cdot i}$$

end

p=6*q(n)