



Università di Padova

Relazione del progetto di Ricerca Operativa

Alberto Lazari - 1216747

Giugno 2022 - A.A. 2021-2022

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Abstract	3
1.2	Problema generale	3
2	Modello	3
2.1	Insiemi	3
2.2	Parametri	4
2.3	Variabili decisionali	4
2.4	Funzione obiettivo	5
3	Codice OPL	7
3.1	File .mod	7
4	Primo scenario	8
4.1	File .dat	8
4.2	Output	9
5	Secondo scenario	9
5.1	File .dat	10
5.2	Output	10

1 Introduzione

1.1 Abstract

Una palestra di arrampicata organizza dei corsi di allenamento. L'obiettivo del progetto è massimizzare il guadagno ricavato dai corsi, minimizzando i costi degli istruttori.

Di seguito viene esposta la soluzione del problema in forma generale. Successivamente si propone un modello matematico indipendente dai dati, poi implementato in linguaggio OPL, al fine di calcolare le soluzioni ottime di due scenari alternativi.

1.2 Problema generale

Durante ogni giorno di apertura, all'interno della settimana, la palestra ha un determinato numero di corsi individuali da svolgere a un certo orario. È attrezzata per svolgere corsi di boulder e di lead. La divisione settimanale dei corsi è sempre la stessa ogni settimana. Per poter essere svolto, ogni corso necessita di un istruttore che lo segua. Un istruttore può seguire un numero massimo di corsi contemporaneamente, tutti di boulder oppure di lead. È presente anche un corso per gli agonisti, che si distingue dai corsi individuali, della durata di 2 ore. Questo deve essere seguito da uno stesso istruttore che si occupi solamente di loro durante lo svolgimento del corso in una stessa giornata. La domenica si possono organizzare corsi outdoor su roccia, che devono essere seguiti dallo stesso istruttore per tutto il tempo. Si vuole massimizzare il guadagno derivato dai corsi, sapendo che:

- un istruttore ha un certo costo orario;
- un istruttore ha un numero massimo di ore settimanali che può mettere a disposizione;
- lo svolgimento di un corso di boulder porta un determinato guadagno;
- lo svolgimento di un corso di lead porta un guadagno differente;
- gli agonisti devono allenarsi almeno un certo numero di giorni alla settimana;
- il corso agonisti viene svolto in una certa fascia oraria, identica per ogni giorno della settimana in cui si tiene il corso;
- lo svolgimento delle 2 ore di un corso agonisti porta un determinato guadagno;
- il corso outdoor ha un determinato numero di ore;
- il corso outdoor, se svolto, porta un certo guadagno.

2 Modello

2.1 Insiemi

- G : giorni di apertura della palestra

- O : orari dei corsi
- I : istruttori della palestra

2.2 Parametri

- $maxCorsiIstruttore$: massimo numero di corsi individuali, di boulder o lead, che un istruttore può seguire contemporaneamente
- $costoIstruttore$: costo orario di un istruttore
- $maxOre_i$: massimo numero di ore di lavoro per l'istruttore $i \in I$
- $boulder_{g,o}$: corsi individuali di boulder svolti nel giorno $g \in G$ nell'orario $o \in O$
- $lead_{g,o}$: corsi individuali di lead svolti nel giorno $g \in G$ nell'orario $o \in O$
- $guadagnoCorsoBoulder$: guadagno ricavato dallo svolgimento di un corso di boulder
- $guadagnoCorsoLead$: guadagno ricavato dallo svolgimento di un corso di lead
- $minAllenamentiAgonisti$: minimo numero di giorni in cui si tiene il corso agonisti
- $orarioCorsoAgonisti$: orario $\in O$ di inizio¹ del corso agonisti
- $guadagnoCorsoAgonisti$: guadagno ricavato dallo svolgimento delle 2 ore di un corso agonisti in una giornata
- $durataCorsoOutdoor$: numero di ore di durata del corso outdoor
- $guadagnoCorsoOutdoor$: guadagno ricavato dallo svolgimento del corso outdoor
- M : costante sufficientemente grande

2.3 Variabili decisionali

- $b_{i,g,o} = \begin{cases} 1 & \text{se l'istruttore } i \in I \text{ segue dei corsi di boulder il giorno } g \in G \\ & \text{nell'orario } o \in O \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $l_{i,g,o} = \begin{cases} 1 & \text{se l'istruttore } i \in I \text{ segue dei corsi di lead il giorno } g \in G \\ & \text{nell'orario } o \in O \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $t_g = \begin{cases} 1 & \text{se nel giorno } g \in G \text{ si tiene il corso agonisti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

¹Essendo la durata del corso agonisti di 2 ore, l'orario di fine è $orarioCorsoAgonisti + 2$

- $a_{i,g} = \begin{cases} 1 & \text{se l'istruttore } i \in I \text{ segue il corso degli agonisti il giorno } g \in G \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $k = \begin{cases} 1 & \text{se viene svolto il corso outdoor} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $d_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'istruttore } i \in I \text{ segue il corso outdoor} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2.4 Funzione obiettivo

La funzione obiettivo del modello può essere espressa in una forma generale come segue:

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Guadagno corsi boulder} + \text{Guadagno corsi lead} + \text{Guadagno corso agonisti} \\ & + \text{Guadagno corso outdoor} - \text{Costi istruttori} \end{aligned}$$

dove i termini sono i seguenti:

$$\text{Guadagno corsi boulder} = \sum_{g \in G, o \in O} \text{boulder}_{g,o} \cdot \text{guadagnoCorsoBoulder}$$

$$\text{Guadagno corsi lead} = \sum_{g \in G, o \in O} \text{lead}_{g,o} \cdot \text{guadagnoCorsoLead}$$

$$\text{Guadagno corso agonisti} = \sum_{g \in G} t_g \cdot \text{guadagnoCorsoAgonisti}$$

$$\text{Guadagno corso outdoor} = k \cdot \text{guadagnoCorsoOutdoor}$$

$$\begin{aligned} \text{Costi istruttori} = & \text{costoIstruttore} \cdot (\text{Ore corsi individuali} + \text{Ore corso agonisti} \\ & + \text{Ore corso outdoor}) \end{aligned}$$

$$\text{Ore corsi individuali} = \sum_{i \in I, g \in G, o \in O} b_{i,g,o} + l_{i,g,o}$$

$$\text{Ore corso agonisti} = \sum_{i \in I, g \in G} 2a_{i,g}$$

$$\text{Ore corso outdoor} = \sum_{i \in I} d_i \cdot \text{durataCorsoOutdoor}$$

s.t.

- Ogni corso deve avere almeno un istruttore che lo segua:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} b_{i,g,o} \cdot M &\geq \text{boulder}_{g,o} & \forall g \in G, \forall o \in O \\
\sum_{i \in I} l_{i,g,o} \cdot M &\geq \text{lead}_{g,o} & \forall g \in G, \forall o \in O \\
\sum_{i \in I} a_{i,g} &\geq t_g & \forall g \in G \\
\sum_{i \in I} d_i &\geq k
\end{aligned}$$

- Un istruttore non può seguire contemporaneamente corsi di boulder e di lead:

$$b_{i,g,o} + l_{i,g,o} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall g \in G, \forall o \in O$$

- Un istruttore può seguire un numero massimo di corsi contemporaneamente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} b_{i,g,o} &\geq \frac{\text{boulder}_{g,o}}{\text{maxCorsiIstruttore}} & \forall g \in G, \forall o \in O \\
\sum_{i \in I} l_{i,g,o} &\geq \frac{\text{lead}_{g,o}}{\text{maxCorsiIstruttore}} & \forall g \in G, \forall o \in O
\end{aligned}$$

- Un istruttore ha un numero massimo di ore settimanali che può mettere a disposizione:

$$\left(\sum_{g \in G, o \in O} b_{i,g,o} + l_{i,g,o} \right) + \left(\sum_{g \in G} 2a_{i,g} \right) + d_i \cdot \text{durataCorsoOutdoor} \leq \text{maxOre}_i \quad \forall i \in I$$

- Se un istruttore sta seguendo il corso agonisti deve seguire solo quello, per tutte le 2 ore:

$$b_{i,g,o} + b_{i,g,o+1} + l_{i,g,o} + l_{i,g,o+1} \leq (1 - a_{i,g}) \cdot M \quad o = \text{orarioCorsoAgonisti}, \forall i \in I, \forall g \in G$$

- Gli agonisti devono allenarsi almeno un certo numero di giorni alla settimana:

$$\sum_{g \in G} t_g \geq \text{minAllenamentiAgonisti}$$

Dominio: $b_{i,g,o}, l_{i,g,o}, t_g, a_{i,g}, k, d_i \in \{0, 1\}$ $\forall i \in I, \forall g \in G, \forall o \in O$

Si noti che non vengono fatte assunzioni sul numero di istruttori contemporanei per uno stesso costo, perché, non comportando nessun vantaggio la presenza di più istruttori in contemporanea, questo verrebbe limitato in tutti i casi a 1 dalla funzione obiettivo, nell'intento di minimizzare i costi degli istruttori per massimizzare il profitto. Questo effetto è garantito dalle variabili decisionali t_g e k .

In uno scenario reale può essere utile mantenere la possibilità che due istruttori possano seguire uno stesso corso, invece di limitarli a 1 a priori, anche se questo non porterebbe a una soluzione ottima.

3 Codice OPL

3.1 File .mod

```

set G;
set O;
set I;

param maxCorsiIstruttore;
param costoIstruttore;
param maxOre{I};
param boulder{G, O};
param lead{G, O};
param guadagnoCorsoBoulder;
param guadagnoCorsoLead;
param minAllenamentiAgonisti;
param orarioCorsoAgonisti;
param guadagnoCorsoAgonisti;
param durataCorsoOutdoor;
param guadagnoCorsoOutdoor;
param M := 9999999;

var b{I, G, O} binary;
var l{I, G, O} binary;
var t{G} binary;
var a{I, G} binary;
var k binary;
var d{I} binary;

maximize F0:
    (sum{g in G, o in O} boulder[g,o] * guadagnoCorsoBoulder)
    + (sum{g in G, o in O} lead[g,o] * guadagnoCorsoLead)
    + (sum{g in G} t[g] * guadagnoCorsoAgonisti)
    + k * guadagnoCorsoOutdoor
    - costoIstruttore * (
        (sum{i in I, g in G, o in O} (b[i,g,o] + l[i,g,o]))
        + (sum{i in I, g in G} 2 * a[i,g])
        + (sum{i in I} d[i] * durataCorsoOutdoor)
    );

s.t. istruttoreBoulder{g in G, o in O}: sum{i in I} b[i,g,o] * M >=
    boulder[g,o];
s.t. istruttoreLead{g in G, o in O}: sum{i in I} l[i,g,o] * M >=
    lead[g,o];
s.t. istruttoreAgonisti{g in G}: sum{i in I} a[i,g] >= t[g];
s.t. istruttoreOutdoor: sum{i in I} d[i] >= k;

```

```

s.t. boulderOppureLead{i in I, g in G, o in O}: (b[i,g,o] + l[i,g,o])
    => <= 1;

s.t. maxCorsiBoulder{g in G, o in O}: (sum{i in I} b[i,g,o]) >=
    => boulder[g,o] / maxCorsiIstruttore;
s.t. maxCorsiLead{g in G, o in O}: (sum{i in I} l[i,g,o]) >= lead[g,o]
    => / maxCorsiIstruttore;

s.t. vincoloMaxOre{i in I}:
    (sum{g in G, o in O} (b[i,g,o] + l[i,g,o]))
    + (sum {g in G} 2 * a[i,g])
    + d[i] * durataCorsoOutdoor <= maxOre[i];

s.t. soloCorsoAgonisti{i in I, g in G}:
    b[i,g,orarioCorsoAgonisti] + b[i,g,orarioCorsoAgonisti+1]
    + l[i,g,orarioCorsoAgonisti] + l[i,g,orarioCorsoAgonisti+1]
    <= (1 - a[i,g]) * M;

s.t. vincoloMinAllenamentiAgonisti: sum{g in G} t[g] >=
    => minAllenamentiAgonisti;

```

4 Primo scenario

Si vuole modellare lo scenario di una palestra aperta dal lunedì al venerdì, dalle 16 alle 20. Ha quattro istruttori: Luca, Giovanni, Marco e Matteo, che possono seguire al massimo 3 corsi contemporaneamente e vengono pagati 5 euro per ogni ora di corso seguito. Per ogni corso individuale svolto si guadagnano 7 euro per i corsi di boulder, 8 per quelli di lead. Il corso agonisti si tiene tra le 16 e le 18, porta un guadagno di 11 euro ogni giorno in cui viene svolto e deve avvenire almeno 2 volte nella settimana. Il corso outdoor dura 3 ore e porta 30 euro di guadagno se svolto.

Di seguito il file **.dat** in cui vengono inizializzati i valori di tutti i parametri del modello e che contiene anche le informazioni sulle ore di disponibilità degli istruttori e sugli orari dei corsi da tenere.

4.1 File .dat

```

set G := lun mar mer gio ven;
set O := 16 17 18 19;
set I := Luca Giovanni Marco Matteo;

param maxCorsiIstruttore := 3;
param costoIstruttore := 5;

```



```

param maxOre :=
Luca          16
Giovanni      13
Marco         9
Matteo        15
;
param boulder: 16 17 18 19 :=
lun           2  3  1  1
mar           4  0  3  8
mer           9  2  5  1
gio           2  3  1  6
ven           6  2  0  3
;
param lead:    16 17 18 19 :=
lun           3  1  2  1
mar           2  7  2  1
mer           0  2  1  3
gio           1  2  4  0
ven           0  3  6  2
;
param guadagnoCorsoBoulder := 7;
param guadagnoCorsoLead   := 8;
param minAllenamentiAgonisti := 2;
param orarioCorsoAgonisti  := 16;
param guadagnoCorsoAgonisti := 11;
param durataCorsoOutdoor   := 3;
param guadagnoCorsoOutdoor := 30;

```

4.2 Output

L'esecuzione del file `.run` mostra che il guadagno massimo è di 546 euro. Gli istruttori riescono anche a svolgere un terzo giorno di allenamento con gli agonisti, ma non hanno abbastanza ore disponibili per poter sostenere il corso outdoor.

5 Secondo scenario

Dopo poco tempo la palestra ottiene ricavi sufficienti per espandersi. Sposta l'orario di chiusura di un'ora in avanti e assume un nuovo istruttore: Andrea. Gli agonisti ora si allenano dalle 18 alle 20 e devono sostenere un minimo di 3 allenamenti a settimana.

Di seguito il file `.dat` del secondo scenario:

5.1 File .dat

```

set G := lun mar mer gio ven;
set O := 16 17 18 19 20;
set I := Luca Giovanni Marco Matteo Andrea;

param maxCorsiIstruttore := 3;
param costoIstruttore := 5;
param maxOre :=
Luca      16
Giovanni  13
Marco     11
Matteo    15
Andrea    13
;
param boulder: 16 17 18 19 20 :=
lun      2  3  1  1  3
mar      4  0  3  8  0
mer      9  2  5  1  4
gio      2  3  1  6  1
ven      6  2  0  3  2
;
param lead: 16 17 18 19 20 :=
lun      3  1  2  1  2
mar      2  7  2  1  5
mer      0  2  1  3  1
gio      1  2  4  0  2
ven      0  3  6  2  0
;
param guadagnoCorsoBoulder := 7;
param guadagnoCorsoLead := 8;
param minAllenamentiAgonisti := 3;
param orarioCorsoAgonisti := 18;
param guadagnoCorsoAgonisti := 11;
param durataCorsoOutdoor := 3;
param guadagnoCorsoOutdoor := 30;

```

5.2 Output

L'esecuzione del file **.run** di questo scenario mostra che il massimo guadagno è salito a 662 euro. Avendo un istruttore in più, nonostante l'ora aggiuntiva, è stato possibile arrivare a svolgere 4 allenamenti con gli agonisti e anche il corso outdoor.

Oltre ai due scenari presentati sarebbe possibile creare altri file **.dat** a piacere in poco tempo ed elaborare la soluzione ottima di qualsiasi istanza del problema in un istante, grazie alla flessibilità offerta dal modello generale.