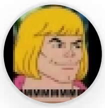


Bald
www.wuolah.com/student/Bald

Examenes-Resueltos-ALEM-2015-2020.pdf

Examenes Resueltos de 2015 a 2020 ALEM

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Febrero 2.015 (Rosales).

(1) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \frac{2x+1}{3}$

(2.) Resolver en $\mathbb{Z}_{155}$ la ecuación $121x = 23$

(3) Calcular todos los números enteros pares que al dividirlos entre 5 dan resto 3 y al dividirlos entre 7 dan resto 4.

(4) Es irreducible el polinomio $x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

(5) Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,1,3), (3,1,2), (4,4,1)\}$ Calcular el cardinal de U. $|U| = |K|^{\dim U}$.

(6) Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+y+z, 6x+y+2z)$ Calcular una base de $\operatorname{Im}(f)$.

(7) Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(3,2,4), (4,1,2)\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \mid 2x+3y+z=0, 3x+2y+4z=0\}$. ¿Es $\mathbb{Z}_5^3 = U \oplus W$?

(8) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ y que depende del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

(9) Diagonalizar, si es posible, la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_7)$$

✓

(10) ¿Cuántos números de seis cifras podemos formar reordenando los dígitos de 100122?

✓

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria extraordinaria de septiembre 14 de septiembre de 2015

Apellidos: [redacted]

Firma: [redacted]

Nombre: [redacted]

D.N.I. (o Pasaporte): [redacted]

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definimos sobre $A \times A$ la relación binaria

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \text{si} \quad a + b = c + d.$$

Demuestra que R es una relación de equivalencia y calcula el cardinal del conjunto cociente $\dfrac{A \times A}{R}$.

2. Calcula todas las soluciones de la ecuación en congruencias $1210x \equiv 110 \pmod{2560}$.

$\{x^2+1, x^4+x^2+1\} = 1$ S/1

3. ¿Es $x^2 + 1$ una unidad de $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$? sí mcd $= 1$ divido.

Esp sub 4 = Ecu.

4. Sea $U = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}_7^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + 3z + 3t = 0 \end{array} \right\}$. Calcula una base de U.

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + z, x + y, 2x + y + z)$. Calcula las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$.

6. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$ y dependiente de los parámetros a, b.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + z = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right\}.$$

7. Calcula los valores propios de la matriz, con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. ¿Cuántos números impares de tres cifras podemos construir con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Estructuras Matemáticas	de febrero
Grado en Ingeniería Informática	3 de febrero de 2016

Apellidos: [redacted]

Nombre: [redacted]

D.N.I. (o Pasaporte): [redacted]

Firma: [redacted]

1. Estudia la inyectividad y la sobreyectividad de la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$.

2. Resuelve, en $\mathbb{Z}_{121}$, la ecuación $9x + 2 = 2x + 7$.

3. ¿Cuántos números enteros del intervalo $[1000, 2000]$ terminan en 101 al expresarlos en base 2 y, además, terminan en 22 si se expresan en base 3?

4. Calcula el inverso, para el producto, de $x + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+1}$.

5. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por

$$\{(2,3,4,1), (1,5,2,4), (2,1,0,3), (6,5,4,0)\}.$$

Calcula el cardinal de U.

6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 3x + y + 2z, -x + 3y + 4z).$$

Calcula una base del núcleo de f.

7. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones, con coeficientes en $\mathbb{Q}$, dependiente de los parámetros a, b.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = b \\ x + y + bz = a \end{array}\right\}.$$

8. Diagonaliza la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$.

9. ¿Cuántos números de seis cifras podemos construir reordenando los dígitos 2, 2, 1, 1, 0, 0?

10. Calcula, en $\mathbb{Z}_7[x]$, el resto de dividir $x^{977} + x^{83} + 2$ entre $x + 3$.

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria ordinaria de febrero 7 de febrero de 2017

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Definimos en $A \times B \times C$ la reclación de equivalencia

$$(a, b, c)R(a', b', c') \text{ si } a + b + c = a' + b' + c'.$$

Calcula el cardinal del conjunto cociente $\frac{A\times B\times C}{R}$.

2. Calcula 37^{-1} en $\mathbb{Z}_{512}$.

3. Calcula la descomposición en irreducibles del polinomio $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

4. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por

$$\{(2, 3, 4, 2), (4, 3, 3, 2), (1, 1, 2, 4), (3, 4, 1, 1)\}.$$

Calcula el cardinal de U.

5. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2, 3, 3), (1, 2, 1)\}$ y

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Calcula una base de $U \cap W$.

6. ¿Cuántos números de seis dígitos tienen exactamente tres dígitos iguales a cero?

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas	Convocatoria extraordinaria
Grado en Ingeniería Informática	14 de julio de 2017

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

1. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros definimos la siguiente relación binaria:

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si} \quad x \cdot y \geq 0.$$

¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia?

2. Calcula todos los números impares que, al dividirlos entre 5, dan el resto 2 y que, al dividirlos entre 7, dan el resto 4.

3. Calcula en $\mathbb{Z}_7[x]$ el resto de dividir $x^{329} + x^{191} + 2$ entre $x + 5$.

4. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(2,3,1,4), (3,2,2,1), (2,3,4,4)\}$ y sea

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ 2x+y+z+t=0 \end{array} \right\}.$$

¿Es $\mathbb{Z}_5^4 = U + W$?

5. Sea $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (x+y, z+t, x+y+z+t)$. ¿Es f un epimorfismo?

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$. ¿Es diagonalizable la matriz A?

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria ordinaria de enero 24 de enero de 2018

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

1. Calcula todos los números naturales que verifican, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:
   - expresados en base 2 terminan en 11;
   - expresados en base 3 terminan en 10.

2. Calcula, si existe, el inverso para el producto del polinomio x^2+1 en $\mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x^2+1}$.

3. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(4,3,2),(5,2,6)\}$ y sea
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \mid x+y+z=0\}.$$
¿Es $\mathbb{Z}_7^3 = U + W$?

4. Sea $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ la aplicación lineal definida por
$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z, 2x+2y+2z+t, x+2z+t).$$
¿Es f un epimorfismo?

5. Estudia, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$:
$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=b \\ x+y+z=1 \\ x+y+bz=a \end{array}\right\}.$$

Enunciado Examen Febrero 2018.

1. Calcula, si existe, el inverso para el producto de 121 en $\mathbb{Z}_{458}$

2. ¿Es irreducible el polinomio x^5+x^4+1 en $\mathbb{Z}_2[x]$?

3. Sea U el sobespacio de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,1,3),(4,0,1)\}$ y sea $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3$ tq $\begin{cases} 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases}\}$. Calcula una base de $U\cap W$.

4. Diagonaliza, si es posible, la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$

5. Consideramos en $\mathbb{N}$ el orden $a\leq b$ si b es múltiplo de a. Calcula los elementos notables de $A=\{0,2,4,5,6,8,10\}$.

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria ordinaria 22 de enero de 2019

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I. (o Pasaporte)

1. Calcula el inverso, para el producto, de 121 en $\mathbb{Z}_{347}$.

2. ¿Es $x^2 + 2x + 1$ una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+x}$?

3. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por

$$\{(2,3,4,1),(1,4,2,3),(1,2,3,4),(2,1,0,2)\}.$$

   Calcula el cardinal de U.

4. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \mid x + y + z = 0\}$ y sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(1,2,3),(3,1,2)\}$. Calcula una base de $U \cap W$.

5. Estudia el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\}.$$

6. Sean $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,3)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_7^3$. Las coordenadas de un vector $\vec{x}$ respecto de la base B son $(1,2,1)$. Calcula las coordenadas de dicho vector $\vec{x}$ respecto de la base B'.

7. Diagonaliza, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

8. ¿Cuántos números, escritos en base 5, tienen 7 dígitos y exactamente 3 de dichos dígitos son iguales a cero?

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria ordinaria 16 de enero de 2020

Apellidos: [redacted]

Nombre: [redacted]

D.N.I. (o Pasaporte): [redacted]

Firma:

1. Calcula todas las soluciones de la ecuación diofántica $845x - 1445y = 30$. [redacted]

2. Resuelve en $\mathbb{Z}_{243}$ la ecuación $87x + 17 = 12x + 11$.

3. Calcula la descomposición en irreducibles del polinomio $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. [redacted]

4. Calcula las raíces, indicando sus multiplicidades, del polinomio $6x^3 + 5x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

5. Sean $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x+3y+4z+t=0 \\ x+4y+2z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array} \right\}$ y W el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(1,2,1,1),(1,1,0,1)\}$. Calcula el cardinal de $U+W$.

6. Tomamos en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ las bases dadas por $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Si las coordenadas de un vector $\vec{x}$ respecto de la base B son $(1,1,2,1)$, calcula las coordenadas de dicho vector $\vec{x}$ respecto de la base B'.

7. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ definida por
$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\, y+z+t,\, z+t).$$
¿Es f un epimorfismo?

8. Estudia el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ y que depende del parámetro $a \in \mathbb{Z}_5$.
$$\left. \begin{array}{r} x+2y+az=1 \\ 2x+ay+z=a \\ ax+y+z=0 \end{array} \right\}.$$

9. Diagonaliza, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

10. ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden formar con 2 unos, 3 doses, 2 ceros y 2 sietes?

Examen Febrero 2015 18:45 - 20:07

1) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ tq $f(x) = \frac{2x+1}{3}$

Inyectividad: Para que la aplicación f sea inyectiva $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{3}$; $f(y) = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow \cancel{6}x + \cancel{1} = \cancel{6}y + \cancel{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x=y}$, por tanto, f es inyectiva.

Sobreyectividad: Para que la aplicación f sea sobreyectiva se debe cumplir que $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ tq $f(x) = y$.

$\frac{2x+1}{3} = y \Rightarrow 2x+1 = 3y \Rightarrow \boxed{x = \frac{3y-1}{2}}$

$\to f(z) = 2$ siendo $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{5}{2}$.

Como $\forall 2 \in \mathbb{Q} \ \nexists \frac{5}{2} \in \mathbb{Z}$ tq $f(n) = 2 \Rightarrow$ No es sobreyectiva.

2) $\to$ Podemos expresar la ecuación $121x = 23$ en $\mathbb{Z}_{155}$ como una congruencia $(Ax \equiv b \pmod{m}) \Rightarrow 121x \equiv 23 \pmod{155}$.

$\to$ La congruencia, tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \longrightarrow 121 \cdot u + 155 \cdot v = 1$.

$\to$ ~~(Para que tenga)~~ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod{m}$ y ~~para~~ existe, si y solo si, el $mcd(155, 121) = 1$.

$\to$ Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (155, 121) \overset{q=1}{=} (121, 34) \overset{q=3}{=} (34, 19) \overset{q=1}{=} (19, 15) \overset{q=1}{=} (15, 4) \overset{q=3}{=} (4, 3) \overset{q=1}{=} (3, 1) \overset{q=3}{=} (1, 0)$

$\to$ Como el $mcd(155, 121) = 1 \Rightarrow$ Tiene solución.

$\to$ Algoritmo de Euclides Extendido

$(a_0, a_1) = (155, 121) \overset{q=1}{=} (121, 34) \overset{q=3}{=} (34, 19) \overset{q=1}{=} (19, 15) \overset{q=1}{=} (15, 4) \overset{q=3}{=} (4, 3) \overset{q=1}{=} (3, 1) \overset{q=3}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, 4) = (4, -7) = (-7, 25) = (24, -32) = (\underline{-32}, \ldots)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -5) = (-5, 9) = (9, -32) = (-32, 41) = (\underline{41}, \ldots)$

$\to$ Como $121 \cdot 41 + 155(-32) = 1 \Rightarrow$ la solución es $b \cdot u \pmod{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 23 \cdot 41 \pmod{155} = 943 \pmod{155} = 13$ //

(3)

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod 2 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 2k}$$

mod 5: $2^{-1} = \underline{3}$ | mod 7: $3^{-1} = \underline{5}$

→ Sustituyo $\boxed{x=2k}$ en $x \equiv 3 \pmod 5$

$2k \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 2^{-1} 2k \equiv 2^{-1} 3 \pmod 5 \Rightarrow k \equiv 3 \cdot 3 \pmod 5$

$\Rightarrow k \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow \boxed{k = 4 + 5\bar{k}}$

→ Si $\boxed{x=2k} \Rightarrow x = 2(4+5\bar{k}) = 8 + 10\bar{k} \Rightarrow \boxed{x = 8 + 10\bar{k}}$

→ Sustituyo $\boxed{x = 8+10\bar{k}}$ en $x \equiv 4 \pmod 7$.

$8 + 10\bar{k} \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 10\bar{k} \equiv -8 + 4 \pmod 7 \Rightarrow 3\bar{k} \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-1} 3\bar{k} \equiv 3^{-1} 3 \pmod 7 \Rightarrow \bar{k} \equiv 1 \pmod 7 = 1 + 7\bar{\bar{k}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bar{k} = 1 + 7\bar{\bar{k}}}$

→ Si $\boxed{x = 8 + 10\bar{k}} \Rightarrow x = 8 + 10(1 + 7\bar{\bar{k}}) = 8 + 10 + 70\bar{\bar{k}} = 18 + 70\bar{\bar{k}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = 18 + 70\bar{\bar{k}}}$

(4) Para que el polinomio de grado 5, $a(x) = x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, sea irreducible, no puede tener raíces y no puede ser divisible entre ningún polinomio mónico irreducible de grado 2

Raíces.
$a(0) = 1$
$a(1) = 1$.
No tiene raíces.

→ Polinomios mónicos de grado 1 y 2

$0\ 5$
$1\ 4$
$2\ 3$

Grado 1 $(x+a)$ $\forall a \ \exists \ \{0,1\} \in \mathbb{Z}_2[x]$ tq $a=0$ y $a=1$

x ; $x+1$

Grado 2 (x^2+ax+b) $\forall a,b \ \exists \ \{0,1\} \in \mathbb{Z}_2[x]$

$a=0 \quad b=0 \Rightarrow x^2$ No
$a=0 \quad b=1 \Rightarrow x^2+1$ No
$a=1 \quad b=0 \Rightarrow x^2+x$ No
$a=1 \quad b=1 \Rightarrow \underline{x^2+x+1}$ Sí es irreducible.

Polinomios mónicos reducibles de grado 2.
$(x)(x) = x^2$
$x \cdot (x+1) = x^2 + x$
$(x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 =$
$= \cancel{x}^2 + 1$.

→ Divido el polinomio $a(x)$ entre x^2+x+1.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + \sqcup + \sqcup + \sqcup + x + 1 & x^2+x+1 \\ x^5 \quad x^4 \quad x^3 & x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^4 + x^3 \qquad + x + 1 & \\ x^4 + x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 + x + 1 & \\ x^2 + x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Por tanto el polinomio $a(x)$ es reducible

$\boxed{a(x) = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)}$

⑤ $U = \langle \{(2,1,3),(3,1,2),(4,4,1)\} \rangle \in \mathbb{Z}_5^3$

→ Triangularizo el sistema de generadores de U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3-2F_1}{\overset{F_2+F_1}{\simeq}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4-F_3}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(U) = \{(2,1,3),(0,2,0)\}$$

$\dim(U) = 2.$

→ U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3 \Rightarrow U$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la $\dim(U) = 2$ es igual a la $\dim(\mathbb{Z}_5^2) = 2 \Rightarrow$ El

$\#U = \#(\mathbb{Z}_5^2) \Rightarrow \#U = \#\mathbb{Z}_5^2 = 5^2 = \underline{25 \text{ elementos}}.$

⑥ $f: \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$

$Im(f) = \langle \{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} \rangle \in \mathbb{Z}_7^3$

$Im(f) = \langle \{(1,2,6),(2,1,1),(3,1,2)\} \rangle$

→ Triangularizo su sistema de generadores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3-3F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\simeq}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{2F_3-F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{(1,2,6),(0,4,3)\}.$

⑦ → Para que $\mathbb{Z}_5^3 = U \oplus W$, se debe cumplir que:

1) $\mathbb{Z}_5^3 = U + W$

2) $U \cap W = \{(0,0,0)\}$

1) $U = \langle \{(3,2,4),(4,1,2)\} \rangle \in \mathbb{Z}_5^3$

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2+2F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L.I}{\Rightarrow} \underline{B(U) = \{(3,2,4)\}}.$$

$\underline{\dim(U) = 1}.$

2) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x+3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{array}\}$

→ Triangularizo las ec. cartesianas de W.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{LI}{\Rightarrow} W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \ / \ 2x+3y+z=0\}$$

dos

→ Hallo dos vectores de W que cumplan para calcular la base.

Vectores $\to (1,1,0)$, $\to (2,0,1)$ $\quad B(W) = \{(1,1,0), (2,0,1)\}$.

$\dim(W) = \dim(\mathbb{Z}_5^3) - \text{Nº Ec. Cartesianas} = 3-1=2 \Rightarrow \boxed{\dim(W)=2}$

3) $U+W = \langle\{(3,2,4), (1,1,0), (2,0,1)\}\rangle \in \mathbb{Z}_5^3$

→ Triangularizo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1}{\overset{2F_2+F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3+2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$B(U+W) = \{(3,2,4), (0,4,4), (0,2,0)\}$; $\underline{\dim(U+W) = 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{3}{\dim(\mathbb{Z}_5^3)} = \underset{3}{\dim(U+W)} \Rightarrow U+W = \mathbb{Z}_5^3$

¿$U \cap W = \{(0,0,0)\}$?

$\dim(U\cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim U+W = 3-3=0.$

$\cancel{B(U\cap W) = \{(0,0,0)\}}$

→ Por tanto, $U \cap W = \{0,0,0\}$

→ Como ~~los dos~~ se cumplen los dos apartados $\Rightarrow \mathbb{Z}_5^3 = U \oplus W$

8

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$$

1) Calculo el valor de a.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2+1+1-(1+a+a) = a^2+3a+2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2+3a+2=0.$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Continuación Ejercicio 8.

→ Si $a=1$ Como $rang(A) \neq rang(A') \Rightarrow$ S.I.

A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 1.$$

$|1|$

A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+1+2-(1+2+3) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 2.$$

→ Si $a \neq 1$.

A

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = \cancel{3}+a+\cancel{2}-(1+2a+3) = 4a+1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3.$$

→ Como $rang(A) = rang(A')$ y $rang(A) = N^o$ Incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

10

$$P_6^{2,2,2} - P_5^{2,2,1} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} - \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot2} - \frac{5\cdot4\cdot3}{2} = 60 \text{ números.}$$

9

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_7)$$

1) Calculo el polinomio característico. $P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$ $4+5\lambda$ $-(3+2\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - \overbrace{(2\cdot6\cdot(2-\lambda))} =$$

$= \cancel{(4+3\lambda+6\lambda+6\lambda^2)(2-\lambda)+4+5\lambda} = \cancel{5\lambda^2} + 4\lambda + 1 + \lambda^3 + \cancel{5\lambda^2} + 3 + \cancel{4+5\lambda} -$

$-(\cancel{(2-\lambda)(6\lambda^2+2\lambda+4)+4+5\lambda})$

$= \cancel{(\lambda^3+3\lambda^2)} = 1+4\lambda+2\lambda^2+3\lambda+5\lambda^2+6\lambda^3+4+5\lambda =$

$= 6\lambda^3 + 5\lambda + 5 \Rightarrow P_A(\lambda) = 6\lambda^3 + 5\lambda + 5$

2) Valores propios o raíces. $\forall\lambda \; \exists \{0,1,2,3,4,5,6\} \in \mathbb{Z}_7$

$P_A(0) = 5$ $P_A(3) = 6\cdot3^3 + 5\cdot3 + 5 = 0$ ✓ $P_A(6) = $ No.

$P_A(1) = 2$ $P_A(4) = $ No

$P_A(2) = 0$ ✓ $P_A(5) = $ No

$\boxed{\text{Valores propios: } \lambda = 2 \text{ y } \lambda = 3.}$

3) Multiplicidad Algebraica. (m.A)

$P_A(\lambda)=6\lambda^3+5\lambda+5$ $\quad P'_A(\lambda)=4\lambda^2+5$ $\quad P''_A(\lambda)=1\lambda$

$P_A(2)=6\cdot 2^3+5\cdot 2+5=0$; $P'_A(2)=4\cdot 2^2+5=0$; $P''_A(2)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la multiplicidad Algebraica es 2 para $\lambda=2$.

$P_A(3)=6\cdot 3^3+5\cdot 3+5=0$; $P'_A(3)=4\cdot 3^2+5=6 \Rightarrow$ la multi Algebraica es 1 para $\lambda=3$.

→ Como la suma de las m.A es 3, igual al orden de la matriz 3, podemos continuar. → (m.G)

4) Multiplicidad geométrica.

$4-\lambda \Rightarrow 4-2$

$$V(2)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$1-2=6$. $\quad 2-2=0$.

$$V(2)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x+2y+5z=0 \\ 6x+6y+z=0 \end{array}\right\}.$$

→ Triangularizo $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2-3F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ~~2x+2y+5z=0~~

$\dim(V_2)=\dim(\mathbb{Z}_5^3)-$ Nº Ec. carb. $=2$

$$V(2)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } 2x+2y+5z=0\right\} \Rightarrow$$ la multiplicidad geométrica es 2 para $\lambda=2$.

→ Como la m.A = m.G para $\lambda=2$, podemos continuar.

$$V(3)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 4-3 & 2 & 5 \\ 6 & 1-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$V(3)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} x+2y+5z=0 \\ 6x+5y+z=0 \\ 6z=0 \end{array}\right\}$$

→ Triangularizo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1

$V(3) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 + q \quad \begin{cases} x+2y+5z=0. \\ 6z=0 \end{cases}$

$\dim(V(3)) = \dim(\mathbb{Z}_5^3) - N^o$ Ec. Cartesianas $= 3-2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la m. Geométrica para $\lambda=3$ es 1. Como la m. A = m. G,

podemos diagonalizar la matriz.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} B(V_{(2)}) & B(V_{(2)}) & B(V_{(3)}) \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$B(V(2)) = \{ (1,0,1), (0,1,1) \}.$

$B(V(3)) = \{ (1,3,0) \}$

FIN.

Examen Septiembre 2015 20:08.

1 $A = \{1,2,3,4,5,6\}.$

$\to$ Para que R sea una relación de equivalencia, se debe cumplir que sea Reflexiva, Simétrica, y Transitiva.

Reflexiva.

$\to$ Si $(a,b) R (a,b) \Rightarrow a+b=a+b \Rightarrow$ Sí es reflexiva.

Simétrica.

$\to$ Si $(a,b) R (c,d) \to (c,d) R (a,b) \Rightarrow a+b=c+d \Rightarrow c+d=a+b.$

Sí es Simétrica.

Transitiva.

$\to$ Si $(a,b) R (c,d)$, $(c,d) R (e,f) \longrightarrow (a,b) R (e,f)$

$a+b=c+d$, $c+d=e+f \longrightarrow a+b=e+f.$

Sí es Transitiva, por tanto, R es una relación de equivalencia.

$\# = \frac{A \times A}{R} =$

Sabemos que: $A = \begin{Bmatrix} (1,1) (1,2) \ldots \\ \vdots \\ (6,6) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} [(1,1)] \overset{\in A}{\mid} tq \ a+b = 1+1 = 2. \\ [(6,6)] \overset{\in A}{\mid} tq \ a+b = 6+6 = 12. \end{matrix}$

→ Vemos que la suma mayor posible va desde el 2 hasta el 12, por tanto, hay 11 clases diferentes

$$\boxed{\#\frac{A\times A}{R} = 11.}$$

2

→ Para que la congruencia $1210x \equiv 110 \pmod{2560}$ tenga solución, el mcd $(1210, 2560) \mid 110$.

→ Como el mcd$(2560, 1210) = 10 \mid 110 \Rightarrow$ Tiene solución.

→ La congruencia anterior es igual a la congruencia:

$$121x \equiv 11 \pmod{256}.$$

→ Tiene las mismas soluciones que:

$$a\cdot u + m\cdot v = 1 \longrightarrow 121\cdot u + 256\cdot v = 1.$$

→ La solución es $b\cdot u \pmod m$ y existe, si y sólo si, el mcd $(256, 121) = 1$.

→ Algoritmo de Euclides.

$$(a_0, a_1) = (256, 121) \overset{q=2}{=} (121, 14) \overset{q=8}{=} (14, 9) \overset{q=1}{=} (9, 5) \overset{q=1}{=} (5, 4) \overset{q=1}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$$

→ Como el mcd$(256, 121) = 1 \Rightarrow$ La solución existe.

→ Algoritmo de Euclides extendido.

$$(a_0, a_1) = (256, 121) \overset{q=2}{=} (121, 14) \overset{q=8}{=} (14, 9) \overset{q=1}{=} (9, 5) \overset{q=1}{=} (5, 4) \overset{q=1}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$$

$$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -8) = (-8, 9) = (9, -17) = (-17, 26) = (\underset{v}{26}, -)$$

$$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -2) = (-2, 17) = (17, -19) = (-19, 36) = (36, -55) = (\underset{u}{-55}, -)$$

→ Comprobamos que $121\cdot(-55) + 256\cdot 26 = 1 \Rightarrow$ Se cumple, por tanto ~~la~~ una solución es $x = 11\cdot(-55) \pmod{256} = 163$ ~~que~~ e y el conjunto de todas las soluciones en congruencias es: $\boxed{x = 163 + 256K \text{ tq } \forall K \in \mathbb{Z}}$

3 Para que ~~x^2+1~~ el polinomio $a(x) = x^2+1$ sea una unidad de $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}[x]}\, x^4+x^2+1$, ~~tiene que tener inverso~~, el polinomio dado debe tener inverso para el producto de $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}[x]}\, x^4+x^2+1$.

Si las siguientes ecuaciones tienen solución, el polinomio dado es unidad

-> ~~Sabemos que el polinomio dado~~, ~~tiene las mismas soluciones que las ecuaciones:~~

Congruencia ($Ax \equiv b \pmod m$)

$x^2+1 \equiv 1 \pmod{x^4+x^2+1}$ $\Longrightarrow$ Ec. diofántica $a \cdot u + m \cdot v = 1$.

$x^2+1 \cdot u + x^4+x^2+1 \cdot v = 1$.

-> Para que las ecuaciones anteriores tengan solución, el $mcd(x^4+x^2+1, x^2+1) = 1$.

-> Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (x^4+x^2+1, x^2+1) \overset{q=x^2}{=} (x^2+1, 1) \overset{q=x^2+1}{=} (1, 0)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} + \sqcup + \cancel{x^2} + \sqcup + 1 & x^2+1 \\ x^4 \quad\quad x^2 & x^2 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2+1 & 1 \\ x^2 & x^2+1 \\ \hline 1 & \\ 1 & \\ 0 & \end{array}$$

-> Como el $mcd(x^4+x^2+1, x^2+1) = 1 \Rightarrow$ Tiene solución $\Rightarrow$ El polinomio x^2+1 es una unidad de $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$.

(4)

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_7^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ 2x+y+z+t=0 \\ x+3y+3z+3t=0 \end{array} \right\}$$

-> Triangularizo las ec. cartesianas de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{3F_3-F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(U) = \dim(\mathbb{Z}_7^4) - N^o$ Ec. Cartesianas $= 4-2=2$.

-> Hallo 2 vectores que cumplan: $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_7^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x=0 \\ y+z+t=0 \end{array} \right\}$.

$B(U) = \{(0,1,0,6), (0,6,0,1)\}$

Vectores

$(0,1,0,6)$ $(0,6,0,1)$

5

$Im(f) = \langle \{ f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \} \rangle \in \mathbb{R}^3$

$Im(f) = \langle \{ (1,1,2), (0,1,1), (1,0,1) \} \rangle \in \mathbb{R}^3$

→ Triangularizo el sistema de generadores de $Im(f)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 + F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{ (1,1,2), (0,1,1) \}$ $\dim(Im(f)) = 2$.

→ Calculo las ec. cartesianas de $Im(f)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = z + x - (2x + y) = z + x - 2x - y =$$

$= -x - y + z = \cancel{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-x - y + z = 0}$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$

$\boxed{Im(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } -x - y - z = 0. \}}$

6 Z_{11}. Como el Nº Incógnitas > Orden $M_{2\times3}$ ⇒ No puede ser S.C.D.

$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & a \\ 1 & a & 1 & b \end{array}\right)$.

1º) Calculo el valor de a y b.

$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

Si $a = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - b \Rightarrow -b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

→ Si $a = 1$ y $b = 1$.

$\underline{A}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{=0}{\Rightarrow} \text{rang}(A) = 1$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{=0}{\Rightarrow} \text{rang}(A) = 1$ S.C.I.

→ Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$.

$\underline{A}$

$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

$\underline{A'}$

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. S.C.I.

Continuación Ejercicio 6.

→ Si $a=1$ y $b\neq 1$. S.C.I.

A

$\begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2.$

A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = -b+1 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2.$

→ Si $a\neq 1$ y $b=1$. S.C.I.

A

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-1 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2.$

A'

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A')=2.$

Por tanto, el sistema es S.C.I.

3 cifras → Al principio no puede haber un 0. ⇒ 5 números.

8

$\underline{5} \times \underline{6} \times \underline{3}$ → Sólo hay 3 impares del 0 al 5

$= 90$ números

7

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} M_{3\times 3} \in \mathbb{Z}_5$

1º) Calculo el polinomio característico. $P_A(\lambda)=|A-I\lambda|$

$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)-((1-\lambda)) =$

$=(1-\lambda)^2(2-\lambda)^{+1}+4+\lambda=$

$=(1+\lambda^2+3\lambda)(2-\lambda)+4+\lambda = 2+2\lambda^2+\lambda+4\lambda+4\lambda^3+2\lambda^2+\cancel{4}+\cancel{\lambda}=$

$=4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2. \Rightarrow P_A(\lambda)=4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2$

~~2º) Calculo los valores propios.~~

~~$P_A(0)=1$ No.~~

~~$P_A(1)=4+4+1+1=0$ Sí~~

~~$P_A(2)=4\cdot 2^3+4\cdot 2^2+2+1=1$, No~~

~~$P_A(3)=3$, No~~

~~$P_A(4)=0$, Sí~~

~~$P_A(5)=1$, No~~

~~Los valores propios son: $\lambda=1$ y $\lambda=4$.~~

~~(3º) Multiplicidad Algebraica)~~

~~$P_A(\lambda)=4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2$~~

2º) Calculo los valores propios.

Si ⇒ $\lambda^2+3\lambda+1=0$.

$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1.$

$\boxed{\lambda=1}$

Si ⇒ $4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2$.

$P_A(0)=2$ No

$P_A(1)=1$ No

$P_A(2)=2$ No

$P_A(3)=4$ No.

$P_A(4)=1$ No *

$\boxed{\text{El único valor propio es } \lambda=1}$

Examen Febrero 2016. 22:30.-

① $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$f(x) = \frac{2x}{3x+1}$

Inyectividad: Para que la aplicación f sea inyectiva se debe cumplir:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2y}{3y+1} \Rightarrow 2x(3y+1) = 2y(3x+1) \Rightarrow \cancel{6xy} + 2x = \cancel{6xy} + 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x=y}$; Por tanto, la aplicación f es inyectiva.

Sobreyectividad. ~~...~~

$\forall y \in Y\ \exists x \in Y$ tq $f(x) = y.$

$f(x) = y \Rightarrow \frac{2x}{3x+1} = y \Rightarrow 2x = (3x+1)y \Rightarrow 2x = 3xy + y \Rightarrow$

$\Rightarrow -y = 3xy - 2x \Rightarrow -y = x(3y-2) \Rightarrow \boxed{x = \frac{-y}{3y-2}}$

Compruebo que:

$f(n) = +1$ tq $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \frac{-1}{3-2} = -1.$

$\to$ Como $\forall 1 \in \mathbb{Q}\ \nexists -1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ No es sobreyectiva.

② $9x + 2 = 2x + 7 \Rightarrow 9x + 119x = 7 + 119 \Rightarrow \boxed{7x = 5}$

$\mathbb{Z}_{121}$

$\to$ Podemos expresar la anterior ecuación como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod m$

$7x \equiv 5 \pmod{121}$

$\to$ La anterior congruencia, tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \to 7 \cdot u + 121 \cdot V = 1.$

$\to$ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod m$ y existe, si y sólo si, el $mcd(121, 7) = 1.$

$\to$ Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (121, 7) \overset{q=17}{=} (7, 2) \overset{q=3}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0) \Rightarrow$ Como el $mcd(121, 7) = 1 \Rightarrow$ tiene solución

$\to$ Algoritmo de Euclides Extendido.

$(a_0, a_1) = (121, 7) \overset{q=17}{=} (7, 2) \overset{q=3}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (\underset{v}{-3}, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -17) = (-17, 52) = (\underset{u}{52}, -)$

→ Como $7 \cdot 52 + 121 \cdot (-3) = 1 \Rightarrow$ La solución es:

$x = b \cdot u \pmod m = 5 \cdot 52 \pmod{121} = 18$.

$\boxed{x = 18.}$

3

→ Nº que terminan en 101 al expresarlos en base 2.

$a \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + a \cdot 2^1 + a$.

$\underset{8}{a \cdot 2^3} + (\underbrace{1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1}_{5}) \Rightarrow x = 5 \pmod 8$.

→ Nº que terminan en 22 al expresarlos en base 3.

$a \cdot 3^2 + a \cdot 3^1 + a$.

$\underset{9}{a \cdot 3^2} + (\underbrace{2 \cdot 3^1 + 2}_{8}) \Rightarrow x = 8 \pmod 9$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \pmod 8 \\ x = 8 \pmod 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 5 + 8k.}$$

$8^{-1} = 8$.

→ Sustituyo $x = 5 + 8k$ en $x = 8 \pmod 9$

$5 + 8k = 8 \pmod 9 \Rightarrow 8k = 3 \pmod 9 \Rightarrow 8^{-1} 8k = 3 \cdot 8^{-1} \pmod 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 8 \cdot 3 \pmod 9 \Rightarrow \boxed{k = 6 + 9\bar{k}}$

→ Si $x = 5 + 8k \Rightarrow x = 5 + 8(6 + 9\bar{k}) = 5 + 48 + 72\bar{k} = 53 + 72\bar{k}$

$\boxed{x = 53 + 72\bar{k}}$

$1000 \leq 53 + 72\bar{k} \leq 2000$

$947 \leq 72\bar{k} \leq 1947$

$\frac{947}{72} \leq \bar{k} \leq \frac{1947}{72} \Rightarrow 13'15 \leq \bar{k} \leq 27'04 \Rightarrow 14 \leq \bar{k} \leq 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 14 soluciones posibles

4

→ Podemos expresar el polinomio $x^4 + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$ $x^2 + x + 1$ como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod m \Rightarrow x^4 + 1 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$

→ La congruencia anterior, tiene las mismas soluciones que.

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \Rightarrow x^4 + 1 \cdot u + x^2 + x + 1 = 1$

→ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod m$ y existe, si y sólo si el mcd $(x^2 + x + 1, x + 1) = \cancel{1}$

→ Algoritmo de Euclides. $q = x + 1$.

$(a_0, a_1) = (x^2 + x + 1, x + 1) \overset{q = x^2}{=} (x + 1, 1) = (1, 0)$

Continuación Ejercicio 4.

$x^2+x+1 \;|\; x+1$ → cociente x; $2x^2+2x$; resto 1

$\mathbb{Z}_3$: $x+1 \;|\; 1$ → cociente $x+1$; $2x$; 1; 2; 0.

→ Como el mcd $(x^2+x+1, x+1) = 1 \Rightarrow$ Existe una solución.

~~(Comprobamos que x^2+x+1)~~.

→ Algoritmo de Euclides Extendido.

$(a_0, a_1) = (x^2+x+1, x+1) \overset{q=x}{=} (x+1, 1) \overset{q=x+1}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) \qquad = (0, 1) = (1, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) \qquad = (1, 2x) = (2x, -)$.

→ Comprobamos que $(x^2+1 \cdot 2x) + (x^2+x+1) \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ Se cumple, por tanto, la solución es: $1 \cdot 2x \pmod{x^2+x+1} = \underline{2x}$.

El inverso de $x+1$ en $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+1}$ es $\underline{2x}$.

5) $U = \langle \{(2,3,4,1), (1,5,2,4), (2,1,0,3), (6,5,4,0)\} \rangle \in \mathbb{Z}_7^4$.

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&5&2&4\\2&1&0&3\\6&5&4&0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3-F_1\\F_4-3F_1}}{\overset{2F_2-F_1}{\approx}} \cancel{\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&0&6&0\\0&5&3&2\\0&3&6&4 \end{pmatrix}} \approx \cancel{\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&5&2\\0&5&3&2\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} \underset{3F_3+5F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&5&2\\0&0&5&3\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3-F_2}{\approx} \cancel{\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&5&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&0&0&0\\0&5&3&2\\0&3&6&4 \end{pmatrix} \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&6&4\\0&5&3&2\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \underset{3F_3-5F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&6&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B(U) = \{(2,3,4,1), (0,3,6,4)\}$

$\dim(U) = 2$.

→ U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7 \Rightarrow U$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_7^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(U) = \dim(\mathbb{Z}_7^2) \Rightarrow \#U = \#\mathbb{Z}_7^2 = 7^2 = \underline{49 \text{ elementos}}$.

6

~~$N(f) = \langle \{(1,2,3),(3,1,2),(-1,3,4)\} \rangle$~~

-> ~~Fcuar~~

$N(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\left.\begin{matrix} x+2y+3z \\ 3x+y+2z \\ -x+3y+4z \end{matrix}\right\}$

-> Triangularizo sus ec. cartesianas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3+F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\left.\begin{matrix} x+2y+3z=0 \\ -5y-7z=0 \end{matrix}\right\}$.

$\dim(N(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) -$ Nº Ec. cartesianas (L.I) $= 3-2=1$.

~~Coja~~ -> Hallo un vector que cumpla para formar $B(N(f))$

Vector -> $(1,7,-5)$; $B(N(f)) = \{(1,7,-5)\}$.

7

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ $\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right)$

~~Sabemos que no puede~~

Como el Nº Incógnitas > Orden M_{2x}

=> No puede ser S.C.D.

1º) Hallo el valor de a y b.

$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1 \Rightarrow \boxed{a=1}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

-> Si $a=1$ y $b=1$

A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad |1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$.

A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad |1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$

Como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') \Rightarrow$ S.C.I.

-> Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$.

A

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

A'

$\begin{vmatrix} 1 & b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A') = 2$.

Como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') \Rightarrow$ S.C.I.

-> Si $a=1$ y $b \neq 1 \Rightarrow$ S.C.I.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

A'

$\begin{vmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

→ Si $a \neq 1$ y $b = 1$.

A: $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ ~~sing.~~ rang(A) = 2.

A': $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rang (A') = 2.

Como rang(A) = rang(A') ⇒ S.C.D.

Por tanto, es un S.C.D.

9

$P_6^{2,2,2} - P_5^{2,2,1} = \frac{6!}{2!2!2!} - \frac{5!}{2!2!}$

$\overbrace{\underline{1}\ \underline{1}}^{2}\ \overbrace{\underline{2}\ \underline{2}}^{2}\ \overbrace{\underline{0}\ \underline{0}}^{2}\ \|\ \underline{0}\ \overbrace{\underline{1}\ \underline{1}}^{2}\ \overbrace{\underline{2}\ \underline{2}}^{2}\ \overbrace{\underline{0}}^{1}$

6 cifras. 5 cifras.

10

→ $x+3 = x-4$ en $\mathbb{Z}_7[x]$

→ Busco el inverso de 4^x en $\mathbb{Z}_7[x]$ ⇒ $4^0 = 0$. $4^1 = 4$. $4^2 = 2$. $4^3 = 1$., por tanto, el inverso es 3.

→ Divido los exponentes de $x^{977} + x^{83}$ entre el inverso.

$977 \,\underline{|3}$ → 2, 325 $83 \,\underline{|3}$ → 2, 27

→ ~~Sabemos que~~ ~~$x^{3\cdot 325+2} + x^{3\cdot 27+2} + 2 =$~~

→ $x^{977} + x^{83} + 2 = 4^{977} + 4^{83} + 2 = 4^{3\cdot 325+2} + 4^{3\cdot 27+2} + 2 =$

$= \underbrace{(4^3)^{325}}_{1} \cdot \underbrace{4^2}_{2} + \underbrace{(4^3)^{27}}_{1} \cdot \underbrace{4^2}_{2} + 2 = 2+2+2 = 6$//.

Por tanto, el resto es 6

8

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$

1º) Calculo el polinomio característico: $P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$.

$\mathbb{Z}_5$ $\quad -2\cdot 2\lambda$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda) =$$
$$= (3-\lambda)(4+\lambda^2+\lambda) = 2+3\lambda^2+3\lambda+\lambda+4\lambda^3+4\lambda^2 =$$
$$= 4\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+2.$$

2°) Calculo los valores propios del $P_A(\lambda)$ $\quad \lambda \in \{0,1,2,3,4\} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

$P_A(0) = 2$ No $\quad P_A(3) = 0$ Sí $\quad$ Los valores propios son.
$P_A(1) = 2$ No $\quad P_A(4) =$ $\quad \lambda \in \{2,3\}$.
$P_A(2) = 0$ Sí

3) Multiplicidades Algebraicas.

$\to \lambda = 2.$
$P_A(2) = 0 \Rightarrow P'_A(\lambda) = 2\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow P'_A(2) = 0 \Rightarrow P''_A(\lambda) = 4\lambda+4 = 0\ P''_A(2) = 2.$
Por tanto, la m. A para $\lambda = 2$ es 2.

$\to \lambda = 3.$ $\quad$ la m. G para $\lambda = 3$ es 1.
$P_A(3) = 0 \Rightarrow P'_A(3) = 4 \Rightarrow$ la m. G para $\lambda = 3$ es 1.

$\to$ Como la suma de las m. A(3) es igual al orden de la $M_{3\times 3}(3)$, podemos continuar.

$\to$ Como la m A = m. G para $\lambda = 2$, podemos continuar.

4) Multiplicidades geométricas.

$$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

$$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix} 3z = 0 \\ \cancel{3z = 0} \\ \cancel{z = 0} \end{matrix}\} \quad \begin{cases} \dim(V(2)) = 3 - 1 = 2, \\ B(V(2)) = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ por tanto, la m. G para $\lambda = 2$ es 2.

$$V(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$V(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix} 4x + 3z = 0. \\ 4y + 3z = 0 \end{matrix}\} \quad \begin{matrix} \dim(V(3)) = 3 - 2 = 1 \\ B(V(3)) = \{(1,1,2)\} \end{matrix}$$

$\to$ la m. G para $\lambda = 3$ es 1. Como la m. G para $\lambda = 3$ es igual a la m. A, podemos diagonalizar.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = PDP^{-1}$$

7 Febrero 2017

(1)

$\frac{A\times B\times C}{R} = \{[1,3,5],\dots,[3,6,7]\}$ { ~~tq a+b+c~~

$[1,3,5]$ tq $a+b+c = 1+3+5 = 9$.

$[3,6,7]$ tq $a+b+c = 3+6+7 = 16$.

→ Vemos que la suma posible va desde el hasta el 16, por tanto, hay 8 clases diferentes.

$\# \frac{A\times B\times C}{R} = 8$.

(2) 37^{-1} $\mathbb{Z}_{512}$.

→ Podemos plantear el ejercicio como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod{m}$.

$37x \equiv 1 \pmod{512}$

→ La congruencia anterior, tiene las mismas soluciones que:

$a\cdot u + m\cdot v = 1 \longrightarrow 37\cdot u + 512\cdot v = 1$.

→ Sabemos que la solución es $b\cdot u \pmod{m}$ y existe, si y sólo si, el $mcd(512, 37) = 1$.

→ Algoritmo de Euclides

$(a_0, a_1) = (512, 37) \overset{q=13}{=} (37, 31) \overset{q=1}{=} (31, 6) \overset{q=5}{=} (6, 1) = (1, 0)$

→ Como el $mcd(512, 37) = 1 \Rightarrow$ Existe la solución.

→ Algoritmo de Euclides Extendido.

$(a_0, a_1) = (512, 37) \overset{q=13}{=} (37, 31) \overset{q=1}{=} (31, 6) \overset{q=5}{=} (6, 1) = (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 6) = (\overset{v}{6}, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -13) = (-13, 14) = (14, -83) = (\underset{u}{-83}, -)$

→ Comprobamos que: $37\cdot(-83) + 512\cdot 6 = 1 \Rightarrow$ La solución es:

$b\cdot u \pmod{m} = 1\cdot(-83) \pmod{512} = 429$.

$\boxed{37^{-1} = 429 \text{ en } \mathbb{Z}_{512}}$

③ Primero ~~debe~~ estudiaremos si el polinomio es irreducible o reducible.
Para que el polinomio de $gr(5)$, $a(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Z}/_2[x]$ sea irreducible, no puede tener raíces y no puede ser divisible entre ningún polinomio mónico de grado 2.

Raíces.

$a(0) = 1$, No es una raíz ; $a(1) = 1+1+1+1+1+1 = 0$. Sí es una raíz.

Polinomios mónicos de grado 1 y 2.

Grado 1 $(x+a)$ $\forall a \in \{0,1\} \in \mathbb{Z}/_2[x]$.

x ; $x+1$.

Grado 2 (x^2+ax+b) $\forall a,b \in \{0,1\} \in \mathbb{Z}/_2[x]$.

$a=0$ $b=0 \Rightarrow x^2 \rightarrow$ Reducible.
$a=0$ $b=1 \Rightarrow x^2+1 \rightarrow$ Reducible
$a=1$ $b=0 \Rightarrow x^2+x \rightarrow$ Reducible
$a=1$ $b=1 \Rightarrow x^2+x+1 \rightarrow$ Irreducible.

Polinomios reducibles.

$x(x) \Rightarrow x^2$
$x(x+1) \Rightarrow x^2+x$
$(x+1)(x+1) \Rightarrow x^2+x+x+1 \Rightarrow x^2+1$.

→ Pruebo a dividir $a(x)$ entre x^2+x+1.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} x^5+x^4+x^3 & x^3+1 \\ \hline \quad\quad x^2+x+1 & \\ \quad\quad x^2+x+1 & \\ \hline \quad\quad 0\ \ 0\ \ 0 & \end{array}$$

Por tanto, el polinomio $a(x)$ es reducible. $\Rightarrow a(x) = (x^3+1)(x^2+x+1)$

y su descomposición en irreducibles es:

④

$U = \langle \{(2,3,4,2), (4,3,3,2), (1,1,2,4), (3,4,1,1)\} \rangle \in \mathbb{Z}/_5^4$

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4+F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3-F_2 \\ F_4-F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(U) = \{(2,3,4,2), (0,2,0,3)\}$ $\dim(U) = 2$.

→ U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}/_5$: ~~La dim(U) = 2 es igual.~~ La $\dim(U) = 2$ es igual a ~~la~~ U es isomorfo a $\mathbb{Z}/_5^2 \Rightarrow$ la $\dim(U) = 2$ es igual a la $\dim(\mathbb{Z}/_5^2) = 2 \Rightarrow \#U$ coincide con el $\#\mathbb{Z}/_5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \#U = \#\mathbb{Z}/_5^2 = 5^2 = 25$ elementos.

5

$U = < \{(2,3,3),(1,2,1)\} > \in \mathbb{Z}_7^3$

1º) Calculo las ec. cartesianas de U.

$rang \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 3 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $dim(U) = 1.$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 4z + 3x + 3y - (x + 2y + 3z) = \cancel{2x+y+z} \Rightarrow$

$= 3x + 3y + 4z + 6x + 5y + 4z =$

$\Rightarrow \cancel{2x+y+z=0}$. $\Rightarrow$ $= 2x + y + z \Rightarrow \boxed{2x+y+z=0}$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } 2x+y+z=0\}$. $dim(U)=1$.

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$. $dim(W) = 1$.

$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\}$.

→ Triangularizo $U \cap W$.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{2F_2 - F_1}{\overset{2}{=}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Son L.I, por tanto:

$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{matrix}\}$. Si $x=0$, $y=1 \Rightarrow z=6$.

$dim(U \cap W) = dim(\mathbb{Z}_7^3) - (dim(U) + dim(W)) = 3-2=1$.

→ Hallo un vector que cumpla, para formar la $B(U \cap W)$

Vector: $\{(0,3,4)\} \Rightarrow B(U \cap W) = \{(0,1,6)\}$

6

$\underset{9}{1}\ \underset{9}{2}\ \underset{9}{3}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}$ $\underline{0}\ \underset{9}{1}\ \underset{9}{2}\ \underset{9}{3}\ \underline{0}\ \underline{0}$

$C\binom{5}{3} \cdot 9^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 9^3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 9^3 = 7290$ números

14 Julio 2017

1

-> Para que R sea una relación de equivalencia, se deben cumplir 3 propiedades: Reflexiva, Simétrica y reflexiva.

~~Simétrica~~ Reflexiva.

Si $xRx \to x\cdot x \geq 0$ // $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ Es Simétrica.

~~Reflexiva~~ Simétrica.

Si $xRy \to yRx$ // $x\cdot y \geq 0 \Rightarrow y\cdot x \geq 0 \Rightarrow$ Es Simétrica.

Transitiva.

Si $xRy,\ yRz \to xRz$

$x\cdot y \geq 0,\ y\cdot z \geq 0 \Rightarrow x\cdot z \geq 0 \Rightarrow$ Es Transitiva.

Explicación: Cualquier número multiplicado por cero, es cero, y como tiene que ser $x\cdot y \geq 0$, se cumplen las 3 propiedades, por consiguiente, R es una relación de equivalencia.

2

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \pmod 2 \\ x = 2 \pmod 5 \\ x = 4 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 1 + 2\bar{k}}$$

$2^{-1} = 3.$

-> Sustituyo $x = 1 + 2\bar{k}$ en $x = 2 \pmod 5$

$1 + 2k = 2 \pmod 5 \Rightarrow 2k = 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{-1}2k = 2^{-1}1 \pmod 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3 \pmod 5 = 3 + 5\bar{\bar{k}} \Rightarrow \boxed{k = 3 + 5\bar{k}}$

-> Si $x = 1 + 2k \Rightarrow x = 1 + 2(3 + 5\bar{k}) = 1 + 6 + 10\bar{k} = 7 + 10\bar{k}$

$\boxed{x = 7 + 10\bar{k}}$

$3^{-1} = 5$

-> Sustituyo $x = 7 + 10\bar{k}$ en $x = 4 \pmod 7$

$7 + 10\bar{k} = 4 \pmod 7 \Rightarrow 3\bar{k} = 4 \pmod 7 \Rightarrow 3^{-1}3\bar{k} = 3^{-1}4 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{k} = 5\cdot 4 \pmod 7 = 6 + 7\bar{\bar{k}} \Rightarrow \boxed{\bar{k} = 6 + 7\bar{\bar{k}}}$

-> Si $x = 7 + 10\bar{k} \Rightarrow x = 7 + 10(6 + 7\bar{\bar{k}}) = 7 + 60 + 70\bar{\bar{k}} = 67 + 70\bar{\bar{k}}$

$\boxed{x = 67 + 10\bar{\bar{k}}}$

③

$\mathbb{Z}_7[x]$ $x^{329}+x^{191}+2$ entre $x+5$.

-> Sabemos que $x+5=x-2$ en $\mathbb{Z}_7$ $\quad 2^0=0 \quad 2^2=4$.

-> Hallo el inverso de 2 en $\mathbb{Z}_7$ => $2^1=2 \quad 2^{3}=1$

-> Divido los exponentes entre el inverso.

$329 \,|\, 3 \quad 2 \;\; 109 \qquad 191 \,|\, 3 \quad 2 \;\; 63$

-> Expreso el polinomio en base 2.

$\cancel{2^{3(329)+2}+2^{3(191)+2}}$ $\quad 2^{329}+2^{191}+2=2^{109\cdot 3+2}+2^{63\cdot 3+2}+2=$

$= (2^3)^{329}\cdot \underset{2}{2^4}+(2^3)^{191}\cdot \underset{2}{2^4}+2=2+2+2=6//$ (with $(2^3)=1$)

Por tanto, el resto es 6.

④

$U=\langle \{(2,3,1,4),(3,2,2,1),(2,3,4,4)\}\rangle \in \mathbb{Z}_5^4$

-> Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix}2&3&1&4\\3&2&2&1\\2&3&4&4\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2+F_1\\F_3-F_1}}{\simeq}\begin{pmatrix}2&3&1&4\\0&0&3&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}\underset{F_3-F_2}{\simeq}\begin{pmatrix}2&3&1&4\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

~~B(U)={(2,3,1,4),(0,0~~

=> $B(U)=\{(2,3,1,4),(0,0,3,0)\}$ $\quad \dim(U)=2$.

$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{cases}x+y+z+t=0\\2x+y+z+t=0\end{cases}\}$

-> Triangularizo W.

~~W={(x,y,z,t) ∈ Z_5^4 tq x+y+z+t=0, 2x+y+z+t=0}~~

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\underset{F_2-2F_1}{\simeq}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&4&4&4\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{matrix}y+z+t=0\\x=0\end{matrix}\}$$

$\dim(W)=\dim(\mathbb{Z}_5^4)-$ Nº Ec. cartesianas $=4-2=2//$

~~U+W=⟨{ }⟩~~ -> Hallo dos vectores de W para formar una B(W) que cumplan

Vectores $\begin{cases}\to (0,1,2,2)\\ \to (0,2,2,1)\end{cases}$ $\quad$ ~~B(W)={(, , ,),(, , ,)}~~

$B(W)=\{(0,1,2,2),(0,2,2,1)\}$

$U+W = \langle \{ (2,3,1,4) (0,0,3,0), (0,1,2,2), (0,2,2,1) \} \rangle \in \mathbb{Z}_5$

→ Triangularizo $U+W$.

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\0&0&3&0\\0&1&2&2\\0&2&2&1 \end{pmatrix} \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\0&2&2&1\\0&1&2&2\\0&0&3&0 \end{pmatrix} \underset{F_4+F_2}{\overset{F_3+2F_2}{\simeq}} \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\0&2&2&1\\0&0&1&4\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B(U+W) = \{ (2,3,1,4), (0,2,2,1), (0,0,1,4) \}$.

$\dim(U+W) = 3$.

→ Como la $\dim(U+W) = 3$ no es igual a la ~~dimensi~~ $\dim(\mathbb{Z}_5^4) = 4$,

$\Rightarrow \mathbb{Z}_5^4 \neq U+W$.

5

Para que la aplicación f sea un epimorfismo, debe ser sobreyectiva, es decir, $\mathbb{Z}_7^3 \subseteq Im(f)$.

$Im(f) = \langle \{ f(1,0,0,0) \, f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \} \rangle$

$Im(f) = \langle \{ (1,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (0,1,1) \} \rangle$.

→ Triangularizo $Im(f)$.

$$\begin{pmatrix} 1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\\0&1&1 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&0&0\\0&1&1\\0&1&1 \end{pmatrix} \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&0&0 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{ (1,0,1), (0,1,1) \}$. $\dim(Im(f)) = 2$.

Como la $\dim(\mathbb{Z}_7^3) = 3$ es distinta de la $\dim(Im(f)) = 2 \Rightarrow$ No es sobreyectiva $\Rightarrow$ Es un epimorfismo.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_7^3 \not\subseteq Im(f)$

6 (Resuelto en la última página).

24 Enero 2018.

1

$\rightarrow a \cdot 2^2 + a \cdot 2^1 + a.$

$a \cdot 2^2 + (1 \cdot 2^1 + 1) \Rightarrow x = 3 \pmod 4$

$\rightarrow a \cdot 3^2 + a 3^1 + a.$

$a \cdot 3^2 + (1 \cdot 3^1 + 0) \Rightarrow x = 3 \pmod 9.$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \pmod 4 \\ x = 3 \pmod 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 3 + 4k}.$$

$\rightarrow$ Sustituyo $x = 3+4k$ en $x = 3 \pmod 9$

$3 + 4k = 3 \pmod 9 \Rightarrow 4k = 0 \pmod 9 \Rightarrow 4^{-1} 4k = 4^{-1} 0 \pmod 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 0 + 9\bar{k}$

$\rightarrow$ Si $x = 3+4k \Rightarrow x = 3 + 4(9\bar{k}) = 3 + 36\bar{k} \Rightarrow \boxed{x = 3 + 36\bar{k}}$

2

$\rightarrow$ Podemos ~~en~~ plantear el ejercicio como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod m$

$x^2 + 1 \equiv 1 \pmod{x^3 + x^2 + 1}.$

$\rightarrow$ La anterior congruencia tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \longrightarrow x^2 + 1 \cdot u + x^3 + x^2 + 1 \cdot v = 1.$

$\rightarrow$ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod m$ y existe, si y solo si, el $mcd(x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1) = 1.$

$\rightarrow$ Algoritmo de Euclides.

$$(a_0, a_1) = (x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1) \overset{q = x+1}{=} (x^2 + 1, x) \overset{q = x}{=} (x, 1) \overset{q = x}{=} (1, 0).$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + \sqcup + 1 & x^2 + 1 \\ \hline x^3 \quad\quad x & x + 1. \\ \hline x^2 + x + 1 & \\ x^2 \quad\quad 1 & \\ \hline x & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2 + 1 & x \\ \hline x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x & 1 \\ \hline 0 & x \end{array}$$

$\rightarrow$ Como el $mcd(x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1) = 1 \Rightarrow$ Existe la solución $b \cdot u \pmod m$

$\mathbb{Z}_2$

→ Algoritmo extendido de Euclides

$(a_0,a_1)=(x^3+x^2+1, x^2+1) \overset{q=x+1}{=} (x^2+1, x) \overset{q=x}{=} (x,1) \overset{q=x}{=} (1,0)$

$(s_0,s_1)=(1,0) \qquad = (0,1) = (1,x) = (x,-)$

$(t_0,t_1)=(0,1) \qquad = (1, x+1) = (x+1, x^2+x+1) = (x^2+x+1, -)$ $\qquad x^2+x.$

→ Compruebo que: $(x^2+1)\cdot(x^2+x+1)+(x^3+x^2+1)(x)=1 \Rightarrow$.

⇒ Se cumple, por tanto la solución es.

$(x^2+1)^{-1} = 1\cdot x^2+x+1 \pmod{x^3+x^2+1} = x^2+x+1.$

$\boxed{(x^2+1)^{-1}=x^2+x+1.}$

$(x^2+1)\cdot(x^2+x+1) = x^4+x^3+x^2+x^2+x+1 = x^4+x^3+x+1.$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3+x+1} & \cancel{x^2+1} \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x+1 & x^3+x^2+1 \\ x^4\ x^3\ x^2 & x^2 \\ \hline x^2+x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x+1 & x^3+x^2+1 \\ x^4+x^3+x & x \\ \hline 1// & \end{array}$$

3

$U=\langle \{(4,3,2),(5,2,6)\} \rangle \in \mathbb{Z}_7^3$

→ Triangularizo U.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{2F_2+F_1}{=} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B(U)=\{(4,3,2)\}.$ $\quad \dim(U)=1.$

· $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$

$\dim(W)=2$. Hallo un vector de W que cumpla: $(0,1,6) \Rightarrow B(W)=\{(0,1,6)\}$ $\dim(W)=1.$

$U+W=\langle\{(4,3,2),(0,1,6)\}\rangle$

→ Triangularizo $U+W$.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{Son}}{\Longrightarrow}$ L. I $\quad B(U+W)=\{(4,3,2),(0,1,6)\}.$ $\quad \dim(U+W)=2.$

→ Como la $\dim(U+W)=2$ no es igual a la $\dim(\mathbb{Z}_7^3)=3$ ⇒

⇒ $\mathbb{Z}_7^3 \neq U+W.$

5

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right) \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

1) Hallo el valor de a y b.

$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a\cdot b+1+1-(1+a+b) = a\cdot b+1-a-b = a\cdot b-a-b=1= \\ =(a-1)(b-1)$

$a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$b-1=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

→ Si $a=1$ y $b=1$. ⇒ Como rang (A) = rang (A') y rang (A) ≠ Nº Incog ⇒ S.C.I.

A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \le 2.$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1.$

A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

$|1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A') = 1$

→ Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ ⇒ rang (A) = rang (A') y rang (A) = Nº Incógnitas. ⇒ S.C.D.

A

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a+b^2+1-(b+b+a) = \\ = b^2-2b+1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

→ Si $a=1$ y $b \neq 1$. ⇒ rang (A) ≠ rang (A') ⇒ S.I.

A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b+1+1-(1+1+b) = 0.$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2.$

A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 1+b^2+1-(b+b+1) = \\ = b^2-2b+1 \neq 0. \\ \Rightarrow \text{rang}(A) = 3.$

→ Si $a \neq 1$ y $b=1$. ⇒ rang (A) ≠ rang (A') ⇒ S.I.

A

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+1+1-(1+a+1) = 0.$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2.$

A'

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \\ = a^2+1+1-(1+a+a) = \\ = a^2-2a+1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3.$

Febrero 2018.

① 121^{-1} en $\mathbb{Z}_{458}$

→ Podemos plantear el ejercicio como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod{m}$.

$121x \equiv 1 \pmod{458}$

→ La congruencia, tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \rightarrow 121 \cdot u + 458 \cdot v = 1.$

→ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod{m}$ y existe, si y sólo si, el $mcd(458, 121) = 1$.

→ Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (458, 121) \overset{q=3}{=} (121, 95) \overset{q=1}{=} (95, 26) \overset{q=3}{=} (26, 17) \overset{q=1}{=} (17, 9) \overset{q=1}{=} (9, 8) \overset{q=1}{=} (8, 1) = (1, 0)$

→ Como el $mcd(458, 121) = 1 \Rightarrow$ Existe la solución $b \cdot u \pmod{m}$.

→ Algoritmo de Euclides Extendido

$(a_0, a_1) = (458, 121) \overset{q=3}{=} (121, 95) \overset{q=1}{=} (95, 26) \overset{q=3}{=} (26, 17) \overset{q=1}{=} (17, 9) \overset{q=1}{=} (9, 8) \overset{q=1}{=} (8, 1) = (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -5) = (-5, 9) = (9, -14) = (\underset{v}{-14}, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, 4) = (4, -15) = (-15, 19) = (19, -34) = (-34, 53) = (\underset{u}{53}, -)$

→ Comprobamos que: $121 \cdot 53 + 458(-14) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La solución es $1 \cdot 53 \pmod{458} = 53$, por tanto, el inverso de 121^{-1} es 53 en $\mathbb{Z}_{548}$.

$$\boxed{121^{-1} = 53 \text{ en } \mathbb{Z}_{458}}$$

② → ~~Primero estudiamos si el~~ Para que el polinomio $a(x) = x^5 + x^4 + 1$ de $gr(5)$, sea irreducible, no puede tener raíces y no puede ser divisible entre ningún polinomio mónico irreducible de grado 2.

Polinomios mónicos de grado 1 y 2.

Grado 1. $(x+a) \} \forall a \exists \{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2[x]$. tq $a=0$ y $a=1$.

$x, x+1$.

Grado 2 $(x^2 + ax + b) \} \forall a, b \exists \{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2[x]$. tq $a=0, a=1, b=0, b=1$

$a=0 \ b=0 \Rightarrow x^2$
$a=0 \ b=1 \Rightarrow x^2+1$
$a=1 \ b=0 \Rightarrow x^2+x$
$a=1 \ b=1 \Rightarrow x^2+x+1$. Irreducible.

Polinomios mónicos reducibles de grado 2.

$x \cdot (x) \Rightarrow x^2$
$x(x+1) \Rightarrow x^2+x$
$(x+1)(x+1) \Rightarrow x^2+x+x+1 \Rightarrow x^2+1$.

→ Divido el polinomio a(x) entre el único polinomio mónico irreducible de grado 2 : x^2+x+1.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4+\sqcup+\sqcup+\sqcup+1 & x^2+x+1 \\ \underline{x^5+x^4+x^3} & x^3+x+1. \\ \quad x^3+\sqcup+\sqcup+1 & \\ \quad \underline{x^3+x^2+x} & \\ \qquad x^2+x+1 & \\ \qquad \underline{x^2+x+1} & \\ \qquad 0 \;\; 0 \;\; 0 // & \end{array}$$

Por tanto, el polinomio es reducible y la descomposición en irreducibles es: $x^5+x^4+1 = (x^3+x+1)(x^2+x+1)$ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

⇒ ~~Por tanto, el polinomio~~ x^5+x^4+1 en $\mathbb{Z}_2[x]$ es ~~reducible~~.

~~$x^5+x^4+1=(x^3+x+1)(x^2+x+1)$~~ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

~~Descomposición en irreducibles~~.

Raíces.

$a(0) = 1$
$a(1) = 1+1+1 = 1$.

} No tiene raíces ~~es irreducible~~.

→ El polinomio es reducible ~~y~~ ~~el polinom~~

Por ~~tanto, la descomposición~~ en irreducibles ~~es~~ de x^5+x^4+1 en $\mathbb{Z}_2[x]$ es $(x^3+x+1)(x^2+x+1)$.

3

$U = \langle \{(2,1,3),(4,0,1)\} \rangle \in \mathbb{Z}_5^3$

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{2F_2+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to B(U) = \{(2,1,3),(0,1,0)\}.$$

$\dim(U) = 2$.

→ ~~Calcu~~ Hallo las ec. cartesianas de U.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z - (3x) = 0 \Rightarrow \boxed{2x+2z=0}.$$

→ $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+3y+4z=0 \\ x+4y+2z=0 \end{matrix}\}$

→ Triangularizo W para ver si son L.I.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{2F_1+F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L.I.}{\Rightarrow} W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } 2x+3y+4z=0$$

$\dim(W) = \dim(\underset{3}{\mathbb{Z}_5^3}) - N^o$ Ec. cartesianas (L.I) $= 3-1 = 2$.

~~Hallar~~

$$U \cap W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+2z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{matrix} \right\}$$

$\to$ ~~Hallo 2 vectores que cumplan:~~

~~$B(U \cap W) = \{(\ ,\ ,\ ),(\ ,\ ,\ )\}$~~

$\to \dim(U \cap W) = \dim(\mathbb{Z}_2^3) - $ Nº Ec. Cartesianas $= 3-2 = 1.$

$\to$ Hallo un vector que cumpla: Vector $\to (1,4,4)$

$$B(U \cap W) = \{(1,4,4)\}$$

4

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5) \qquad \forall \lambda \ \exists\ \{0,1,2,3,4\} \in \mathbb{Z}_5.$$

1º) Calculo el polinomio característico. $P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{(4-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - (4(2-\lambda))} =$$

$$\cancel{= (2-\lambda)(4-\lambda)^2 + 2+4\lambda = (2-\lambda)(1+\lambda^2+2\lambda)+2+4\lambda} =$$

$$\cancel{= 2+2\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4\lambda^3+3\lambda^2+2+4\lambda} =$$

$$= \cancel{4\lambda^3+\lambda}+4.$$

$$= (4-\lambda)^2(2-\lambda) - (4(2-\lambda)) = (1+\lambda^2+2\lambda)(2-\lambda) - (3+\lambda) =$$

$$= 2+2\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4\lambda^3+3\lambda^2+2+4\lambda = 4\lambda^3+2\lambda+4.$$

$$P_A(\lambda) = 4\lambda^3+2\lambda+4.$$

2º) Valores propios. $\lambda \in \{1,2\}$.

$P_A(0) = 4$, No lo es.

$P_A(1) = 4\cdot1+2+4 = 0$. Sí.

$P_A(2) = 4\cdot2^3+2\cdot2+4 = 0$ Sí

$P_A(3) = 4\cdot3^3+2\cdot3+4 = 3$, No lo es

$P_A(4) = 4\cdot4^3+2\cdot4+4 = 3$, No, lo es.

~~Vector~~

3º) Multiplicidades Algebraicas (m.A).

$P_A(\lambda) = 4\lambda^3+2\lambda+4$. ; $P'_A(\lambda) = 2\lambda^2+2$; $P''_A(\lambda) = 4\lambda$.

Para $\lambda = 1$.

$P_A(1) = 0 \Rightarrow P'_A(1) = 2\cdot1^2+2 = 4 \Rightarrow$ la m.A para $\lambda=1$ es 1.

Para $\lambda=2$.

$P_A(2)=0$; $P'_A(2)=2\cdot 2^2+2=0$; $P''_A(2)=4\cdot 2=3 \Rightarrow$ la m.A para $\lambda=2$ es 2.

→ Como la suma de las m.A de $\lambda=1$ y $\lambda=2$ es 3 que es igual al orden de la ~~matr~~ $M_{3\times3} \Rightarrow$ podemos continuar el proceso de diagonalizar.

4) Multiplicidades geométricas (m. G.)

$V(1)=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix}3&3&3\\0&1&0\\3&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ $\{ B(V(1))=\{(1,0,4)\}$

$V(1)=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \left.\begin{array}{l}3x+3y+3z=0.\\ y=0.\\ \cancel{3x+2y+3z=0}\end{array}\right\} \Rightarrow$ dim$(V(1))=$ dim$(\mathbb{Z}_5^3)-$ Nº Ec. Carte (L.I) $=3-2=1$.

$\cancel{\begin{pmatrix}3&3&3\\3&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\0&4&0\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}3&3&3\\0&1&0\\3&2&3\end{pmatrix}\underset{F_2-F_1}{=}\begin{pmatrix}3&3&3\\0&1&0\\0&4&0\end{pmatrix}\underset{F_3+F_2}{=}\begin{pmatrix}3&3&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

→ La m.G para $\lambda=1$ es ya que dim$(V(1))=1$. Como la m.A $=$ m.G para $\lambda=1$, podemos continuar.

→ Se triangulariza.

$V(2)=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix}2&3&3\\0&0&0\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ $\{ \begin{pmatrix}2&3&3\\3&2&2\end{pmatrix}\underset{F_2+F_1}{=}\begin{pmatrix}2&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$V(2)=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{array}{l}2x+3y+3z\\ \cancel{3x+2y+2z}\end{array}$ $\{ B(V(2))=\{(1,0,1),(1,1,0)\}$

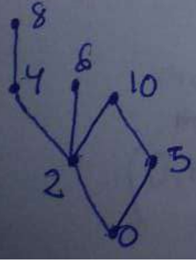
dim$(V(2))=$ dim$(\mathbb{Z}_5^3)-$ Nº Ec. Carit (L.I) $=3-1=2.$ ⇒ Como la dim$(V(2))=2 \Rightarrow$ la m.G para $\lambda=2$ es 2. Como la m.G $=$ m.A para $\lambda=2$, podemos diagonalizar la matriz.

$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\4&1&0\end{pmatrix}$ $P=PDP^{-1}$

¿¿

5) Consideramos en $\mathbb{N}$ el orden $a\leq b$ si b es múltiplo de a.
Calcula los elementos notables de $A=\{0,2,4,5,6,8 \text{ y } 10\}$??

Nota: Es el único ejercicio que no he resuelto por mí (@marinamuca01)



Maximales (A) $=\{8,6,10\}$
∄ Máximo A
Minimales (A) $=\{0\}$
Mínimo (A) $=0$

Cotas Superiores de A $=$
$=\{120\,k \text{ tq } k\in\mathbb{N}\setminus 0\}$
Supremo (A) $=120$.
Cotas inferiores de A $=\{\emptyset,0\}$
Ínfimo (A) $=\{0\}$

Examen Enero 2019.

1. $\mathbb{Z}_{347}$ 121^{-1}?

→ Podemos plantear el ejercicio como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod m$.

$121x \equiv 1 \pmod{347}$.

→ La congruencia anterior, tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \longrightarrow 121 \cdot u + 347 \cdot v = 1$.

→ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod m$ y existe, si y sólo si, el $mcd(347, 121) = 1$.

→ Algoritmo de Euclides.

$$(a_0, a_1) = (347, 121) \overset{q=2}{=} (121, 105) \overset{q=1}{=} (105, 16) \overset{q=6}{=} (16, 9) \overset{q=1}{=} (9, 7) \overset{q=1}{=} (7, 2) \overset{q=3}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0)$$

→ Como el $mcd(347, 121) = 1 \Rightarrow$ Tiene solución.

→ Algoritmo Euclides Extendido.

$$(a_0, a_1) = (347, 121) \overset{q=2}{=} (121, 105) \overset{q=1}{=} (105, 16) \overset{q=6}{=} (16, 9) \overset{q=1}{=} (9, 7) \overset{q=1}{=} (7, 2) \overset{q=3}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0)$$

$$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 7) = (7, -8) = (-8, 15) = (15, -53) = (\underbrace{-53}_{v}, -)$$

$$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -2) = (-2, 3) = (3, -20) = (-20, 23) = (23, -43) = (-43, 152) = (\underbrace{152}_{u}, -)$$

→ Comprobamos que $121 \cdot 152 + 347(-53) = 1 \Rightarrow$ Se cumple, por tanto, $b \cdot u \pmod m = 1 \cdot 152 \pmod{347} = 152$.

La solución es ~~x = 1 152~~

$$\boxed{121^{-1} = 152 \text{ en } \mathbb{Z}_{347}}$$

2. → Para que el polinomio $a(x) = x^2 + 2x + 1$ sea una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+x}$, el polinomio dado ha de tener inverso para el producto de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+x}$.

→ Si las siguientes ecuaciones tienen solución, el polinomio $a(x)$, es unidad.

$$\underline{\text{Congruencia}}\ (Ax \equiv b \pmod m) \longrightarrow \underline{\text{Ec. diofántica}}\ (a \cdot u + m \cdot v = 1)$$

$$x^2 + 2x + 1 \equiv 1 \pmod{x^3 + x^2 + x} \Longrightarrow x^2 + 2x + 1 \cdot u + x^3 + x^2 + x + v = 1$$

→ Para que las anteriores ecuaciones tengan solución, el $mcd(x^3 + x^2 + x, x^2 + 2x + 1) = 1$.

→ Algoritmo de Euclides.

$$(a_0, a_1) = (x^3 + x^2 + x, x^2 + 2x + 1) \overset{q=x+4}{=} (x^2 + 2x + 1, 2x + 1) \overset{q=3x+2}{=} (2x + 1, 4) \overset{q=3x+4}{=} (4, 0)$$

$$x^3+x^2+x+1 \,\lfloor\, x^2+2x+1$$
$$4x^3+3x^2+4x \qquad x+4.$$
$$4x^2$$
$$x^2+2x+1$$
$$2x+1$$

$$x^2+2x+1 \,\lfloor\, 2x+1$$
$$4x^2+2x \qquad 3x+2$$
$$4x+1$$
$$x+3$$
$$4.$$

$$2x+1 \,\lfloor\, 4$$
$$3x \qquad 3x+4$$
$$1$$
$$4$$
$$0.$$

→ Como el mcd $(x^3+x^2+x,\ x^2+x+1)=4 \Rightarrow$ También es mcd $(x^3+x^2+x,\ x^2+x+1)=4\cdot 4=1$ en $\mathbb{Z}_5 \Rightarrow$ Las anteriores ecuaciones tienen solución $\Rightarrow$ El polinomio x^2+x+1 es una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]\ x^3+x^2+x$.

3) $U=\langle\{(2,3,4,1),(1,4,2,3),(1,2,3,4),(2,1,0,2)\}\rangle \in \mathbb{Z}_5^4$

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&2&3\\1&2&3&4\\2&1&0&2\end{pmatrix} \underset{\substack{F_3+2F_1\\F_4-F_1}}{\overset{F_2+2F_1}{\simeq}} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&0&0&0\\0&3&1&1\\0&3&1&1\end{pmatrix} \underset{F_4\to F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&1&1\\0&3&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \underset{F_3-F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\0&3&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$B(U)=\{(2,3,4,1),(0,3,1,1)\}$ $\dim(U)=2$.

→ U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5$ de $\dim(2) \Rightarrow U$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2 \Rightarrow \#U=\#\mathbb{Z}_5^2=5^2=25$ elementos.

4) $W=\langle\{(1,2,3),(3,1,2)\}\rangle \in \mathbb{Z}_7^3$

→ Triangularizo W.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \underset{2F_2+F_1}{\simeq} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&0\end{pmatrix} \Rightarrow B(W)=\{(1,2,3),(0,4,0)\}.$$
$\dim(W)=2.$

→ Hallo las ec. cartesianas de W.

Nº Ec. cartesianas $(W)=\dim(\mathbb{Z}_7^3)-\dim(W)=3-2=1.$

(*) $\Rightarrow \begin{vmatrix}1&0&x\\2&4&y\\3&0&z\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1&0&x\\2&4&y\\3&0&z\end{vmatrix}=4z-(5x)=2x+4z \Rightarrow 2x+4z=0.$
$\Downarrow :2.$
$x+2z=0.$

$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } x+2z=0\}$

$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$

→ Esto es porque:

(*) $\text{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\2&4&y\\3&0&z\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$

$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{cases} x+y+z=0 \\ x \quad +2z=0 \end{cases}\} \Rightarrow$ Triangularizo para ver si son L.I.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Son. L.I.

$\dim(U)+\dim(W)$

$\rightarrow$ Hallo un vector que cumpla ya que: $\dim(U \cap W) = \dim(\mathbb{Z}_5^3) - \cancel{\dim}$

$= 3-2=1.$

Vector $\rightarrow (1,3,3) \Rightarrow B(U \cap W) = \{(1,3,3)\}$.

5 $\mathbb{R}$

$\underline{A}$ $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{A'}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

1) Calculo el valor de a.

$\boxed{\text{Nº de Incógnitas} \equiv N.I}$

$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$\rightarrow$ Si $a=1$. Como $\text{rang}(A)=\text{rang}(A')$ y $\text{rang}(A) \neq N.I \Rightarrow S.C.I$

$\underline{A}$ $\quad \underline{A'}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=1$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=1.$

$\rightarrow$ Si $a \neq 1$. S.C.I.

$\underline{A}$ $\quad \underline{A'}$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=2.$

$\rightarrow \boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \text{ es un S.C.I.}}$

6 $\vec{x} \equiv_B (1,2,1)$ $\quad \vec{x} \equiv_{B'} (a,b,c)$ $\quad \mathbb{Z}_5^3$ $\quad \boxed{2^{-1}=3 \quad 3^{-1}=2. \text{ en } \mathbb{Z}_5}$

$\rightarrow$ Calculo el vector $\vec{x}$

$\vec{x} = 1(1,1,1) + 2(0,1,1) + 1(0,0,1) = (1,3,4)$

$2^{-1}2b = 2^{-1} \cdot 1.$

$\rightarrow (1,3,4) \equiv_{B'} (a,b,c)$

$(1,3,4) = a(1,2,3) + b(0,2,3) + c(0,0,3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1} \\ 2a+2b=3 \Rightarrow 2+2b=3 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow \boxed{b=3} \\ 3a+3b+3c=4 \Rightarrow 3+4+3c=4 \Rightarrow 3c=2 \Rightarrow \boxed{c=4} \end{cases}$

$3^{-1}3c = 3^{-1} \cdot 2$

→ la solución es: $(1,3,4) \equiv B'(1,3,4)$.

Si no se entiende, escribidme un comentario

(8) → En base 5 $\exists\ \{0, \underbrace{1,2,3,4}_{4\ \text{números}}\}$

→ 7 dígitos ⇒ El primer número no puede ser un cero.

→ 3 dígitos iguales a cero. $\underline{\cancel{0}}\ \underline{1}\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{0}\ \underline{0}$; $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

$C\binom{6}{3} \cdot 4^4 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 4^4 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \cdot 4^4 = 20 \cdot 4^4 = \underline{\underline{5120\ \text{números}}}$

(7) $I\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad 2^{-1} = 3$ en $\mathbb{Z}_5$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{Z}_5)$ $\quad P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$

1º) Calculo el polinomio característico de A.

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (4) = 1 + \lambda^2 + 3\lambda + 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$

2º) Calculo los valores propios de $P_A(\lambda)$

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{2\cdot1} = \frac{2^{-1}\, 2 \pm 1}{2^{-1}\, 2} = \frac{3(2\pm1)}{1} =$

$= \begin{cases} \boxed{\lambda_1 = 4} \\ \boxed{\lambda_2 = 3} \end{cases}$

3º) Calculo las multiplicidad Algebraica (m.A) para $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$.

→ $\lambda = 3$. $\quad P'_A(\lambda) = 2\lambda + 3$

$\exists P_A(3) = \cancel{4} + 9 + 2 = 0 \Rightarrow P'_A(3) = 2\cdot3 + 3 = \cancel{4}\ \cancel{\not\exists} \Rightarrow$ la m.A para $\lambda = 3$ es 1.

→ $\lambda = 4$. $\quad P'_A(\lambda) = 2\lambda + 3$

$\exists P_A(4) = 4^2 + 3\cdot4 + 2 = 0 \Rightarrow P'_A(4) = 2\cdot4 + 3 = 1\ \nexists \Rightarrow$ la m.A para $\lambda = 4$ es 1.

→ Como la suma de las m.A $\overset{(2)}{=}$ al orden de la $M_{2\times2}$ (2) ⇒ podemos continuar.

4º) Hallo las multiplicidades geométricas (m. G.) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda(3) & 2 \\ 2 & 1-\lambda(3) \end{pmatrix}$

$V(3) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ $B(V(3)) = \{(1,1)\}$.

$V(3) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5^2 \text{ tq } \begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 2x+\cancel{3y}=0 \end{matrix} \} \Rightarrow$ Son L.I. lo veo al triangularizar.

$\dim(V(3)) = \dim(\mathbb{Z}_5^2) - $ Nº Ec. cartesianas $= 2-1 = 1 \Rightarrow$ La m. G. para $\lambda=3$ es 1. Como la m. A = m. G, podemos continuar.

$V(4) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1-\lambda(4) & 2 \\ 2 & 1-\lambda(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

$V(4) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ $B(V(4)) = \{(1,4)\}$

$V(4) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5^2 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+2y=0 \\ \cancel{2x+2y}=0 \end{matrix} \} \Rightarrow$ Al triangularizar vemos que son L.I.

$\dim(V(4)) = 2-1 = 1 \Rightarrow$ la m. G es 1 para $\lambda=4$. Como la m. A = m. G $\Rightarrow$ podemos diagonalizar la matriz A.

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $P = PDP^{-1}$

16 Enero 2020

(1)

→ Para que la ec. diofántica tenga solución, el mcd(1445, 845) debe ser | 30.

→ Como el mcd(1445, 845) = 5 | 30 ⟹ Tiene Solución.

→ Como el mcd(1445, 845) = 5 | 30 ⟹ tiene las mismas soluciones que:

→ La ec diofántica anterior, tiene las mismas soluciones que:

$169x - 289y = 6$. (Divido entre su mcd)

→ ~~Para~~ Sabemos que ~~la solución es~~ el conjunto de todas las soluciones es (*) $\boxed{x_0 + a_0 k,\ y_0 - bk \text{ tq } k \in \mathbb{Z}}$ y existe, si y solo si, el mcd(1445, 845) = 1.

→ Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (\cancel{1445, 845}) \overset{q=1}{=} (\cancel{845, 600}) \overset{q=1}{=} (120, 49) \overset{q=2}{=} (49, 22) \overset{q=2}{=} (22, 5) \overset{q=4}{=} (5, 2) \overset{q=2}{=} (2, 1) = (1, 0)$

289, 169 — 169, 120

→ Como el mcd(289, 169) = 1 ⟹ Existe el conjunto de todas las soluciones.

→ Algoritmo de Euclides Extendido.

$(a_0, a_1) = (289, 169) \overset{q=1}{=} (169, 120) \overset{q=1}{=} (120, 49) \overset{q=2}{=} (49, 22) \overset{q=2}{=} (22, 5) \overset{q=4}{=} (5, 2) \overset{q=2}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 3) = (3, -7) = (-7, 31) = (31, -69) = (\underset{v}{-69}, -)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 3) = (3, -7) = (-7, 31) = (31, -69) = (-69, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 2) = (2, -5) = (-5, 12) = (12, -53) = (-53, 118) = (\underset{u}{118}, -)$

→ Comprobamos que: $a \cdot u + m \cdot v = 1 \Rightarrow 169 \cdot 118 + 289(-69) = 1$ ⟹ Se cumple, por tanto, que el conjunto de todas las soluciones es (*)

→ ~~Una solución es $(x_0, y_0) = (1)$~~ Para obtener una solución de la ecuación $169x - 289y = 6$ ⟹ ~~169 · 708~~ $169 \cdot 708 - 289 \cdot 414 = 1$.

→ Una solución es $(x_0, y_0) = (708, 414)$ y el conjunto de todas las soluciones: $\{708 - 289k,\ 414 - 169k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $\mathbb{Z}_{243}$ $87x + 17 = 12x + 11 \Rightarrow 87x \ 231x = 11 + 226 \Rightarrow \boxed{75x = 237}$

→ Podemos plantear el ejercicio como una congruencia: $Ax \equiv b \pmod m$.

$75x \equiv 237 \pmod{243}$

→ Como el mcd(243, 75) = 3 | 243 ⟹ La congruencia, tiene las mismas soluciones que: $\boxed{25x \equiv 79 \pmod{81}}$

→ La congruencia $25x \equiv 79 \pmod{81}$ tiene las mismas soluciones que:

$a \cdot u + m \cdot v = 1 \rightarrow 25 \cdot u + 81 \cdot u = 1$.

→ Sabemos que la solución es $b \cdot u \pmod m$ y existe, si y sólo si, el mcd(81, 25) = 1.

→ Algoritmo de Euclides.

$(a_0, a_1) = (81, 25) \overset{q=3}{=} (25, 6) \overset{q=4}{=} (6, 1) \overset{q=6}{=} (1, 0)$

→ Como el mcd(81,25) = 1 ⇒ Existe la solución b·u (mod m).

→ Algoritmo de Euclides Extendido.

$(a_0,a_1) = (81,25) \overset{q=3}{=} (25,6) \overset{q=4}{=} (6,1) \overset{q=1}{=} (1,0)$

$(s_0,s_1) = (1,0) = (0,1) = (1,-4) = (-\underset{v}{4},-)$

$(t_0,t_1) = (0,1) = (1,-3) = (-3,13) = (\underset{u}{13},-)$

→ Comprobamos que $a\cdot u + m\cdot v = 1$ → $25\cdot 13 + 81(-4) = 1$ ⇒ Se cumple ⇒

⇒ La solución es: (b·u (mod m)) $x = 79\cdot 13 (\text{mod } 81) = 55$ ⇒ $\boxed{x=55}$

3) Para calcular la descomposición en irreducibles del polinomio, debemos estudiar si el polinomio es reducible o irreducible. Para que un polinomio de gr(4) sea irreducible, no puede tener raíces y no puede ser divisible entre ningún polinomio mónico de grado 2.

→ Raíces $a(x) = x^4+1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. Voy a $\{0,1,2\} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

$a(0) = 1$ $\quad a(2) = 2^4+1 = 3$ Por tanto, no tiene raíces.

$a(1) = 1+1 = 2$.

→ Polinomios mónicos irreducibles de grado 2.

1) Calculo los polinomios mónicos de gr(1) (Siempre van a ser irreducibles).

$x+a$. Si $a=0$ ⇒ x Si $a=2$ ⇒ $x+2$.

Si $a=1$ ⇒ $x+1$.

2) Calculo los polinomios mónicos de grado 2. $(3\times 3 = 9)$ (x^2+ax+b).

Si $a=0$ $b=0$ ⇒ x^2 No

$a=0$ $b=1$ ⇒ x^2+1 Irreducible

$a=0$ $b=2$ ⇒ x^2+2 No

$a=1$ $b=0$ ⇒ x^2+x No

$a=1$ $b=1$ ⇒ x^2+x+1 No

$a=1$ $b=2$ ⇒ x^2+x+2 Irreducible

$a=2$ $b=0$ ⇒ x^2+2x No

$a=2$ $b=1$ ⇒ x^2+2x+1 No

$a=2$ $b=2$ ⇒ x^2+2x+2 Irreducible.

Polinomios reducibles.

$x\cdot(x) \to x^2$

$x(x+1) \to x^2+x$

$x(x+2) \to x^2+2x$

$(x+1)(x+1) \to x^2+x+x+1 \to x^2+2x+1$

$(x+1)(x+2) \to x^2+2x+x+2 \to x^2+2$

$(x+2)(x+2) \to x^2+2x+2x+1 \Rightarrow x^2+x+1$.

Polinomios mónicos irreducibles de gr(2) ⇒ $\{x^2+1,\ x^2+x+2,\ x^2+2x+2\}$.

→ Pruebo a dividir a(x) entre x^2+x+2.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + \_ + \_ + \_ + 1 & x^2+x+2 \\ \hline 2x^4+2x^3+x^2 & x^2+2x+2 \\ \hline 2x^3+x^2 \quad\quad +1 & \\ x^3 \quad x^2 \quad 2x & \\ \hline 2x^2+2x+1 & \\ x^2+x+2 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

⇒ Por tanto el polinomio es reducible. La descomposición en irreducibles del polinomio

$a(x) = (x^2+x+2)(x^2+2x+2)$

(4)

→ Raíces de $a(x) = 6x^3+5x+5 \in \mathbb{Z}_7[x]$ ~~$\forall x \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \in \mathbb{Z}_7[x]$ tq $x=0, x=1, x=2, x=$~~

$\{\forall x \in X \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \in \mathbb{Z}_7[x]$ tq $x=0, x=1, x=2, x=3, x=4, x=5, x=6.\}$

$a(0) = 5$ $\quad a(4)$

$a(1) = 6+5+5 = 2.$ $\quad a(5)$

$a(2) = 6\cdot 2^3+5\cdot 2+5 = 0$ $\quad a(6)$

$a(3) = 6\cdot 3^3+5\cdot 3+5 = 0.$

→ Las raíces son $x \in \{2,3\}$

→ Multiplicidades de las raíces $x \in \{2,3\}$.

~~$(x-2 \Rightarrow x-2 \Rightarrow$ Se anula en $x=5$ en $\mathbb{Z}_7)$~~

→ Para $x-2 \Rightarrow x+5$ en $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3+\_+5x+5 & x+5 \\ x^3+5x^2 & 6x^2+5x+1 \\ \hline 5x^2+5x+5 & \\ 2x^2+3x & \\ \hline x+5 & \\ 6x+2 & \\ \hline 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6x^2+5x+1 & x+5 \\ x^2+5x & 6x+3 \\ \hline 3x+1 & \\ 4x+6 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6x+3 & x+5 \\ x+5 & 6 \\ \hline 1 // . & \end{array}$$

→ Por tanto, la multiplicidad ~~para x=~~ de la raíz 2 vale 2 $\quad a(x) = (x-2)^2(6x+3)$

→ Para $x-3 \rightarrow x+4$ en $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3+\_+5x+5 & x+4 \\ x^3+4x^2 & 6x^2+4x+3 \\ \hline 4x^2+5x+5 & \\ 3x^2+5x & \\ \hline 3x+5 & \\ 4x+2 & \\ \hline 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6x^2+4x+3 & x+4 \\ x^2+4x & 6x+1 \\ \hline x+3 & \\ 6x+3 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

→ Por tanto, la multiplicidad para la raíz 3, vale 1 $\quad a(x) = (x-3)(6x^2+4x+3)$

(5)

$U = \langle \{(1,2,1,1), (1,1,0,1)\} \rangle \in \mathbb{Z}_5^4$

→ Triangularizo U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(U) = \{(1,2,1,1), (0,4,4,0)\}.$$

$\dim(U) = 2.$

→ $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4$ tq $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+4z+t=0 \\ x+4y+2z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\}$

→ Triangularizo W.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+2F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4$ tq $\begin{matrix} 2x+3y+4z+t=0 \\ 2y+4z+3t=0 \end{matrix}\}$

$\dim(W) = \dim(\mathbb{Z}_5^4) -$ Nº Ec. cartesianas $= 4-2=2$.

→ Hallo dos vectores que cumplan para formar una $B(W)$

Vectores → $(0,2,2,1)$, → $(0,1,1,3)$ $\quad B(W) = \{(0,2,2,1), (0,1,1,3)\}$

$U+W = \langle \{(1,2,1,1), (0,4,4,0), (0,2,2,1), (0,1,1,3)\} \rangle \in \mathbb{Z}_5^4$

→ Triangularizo $U+W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3+2F_2 \\ F_4+F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_4+2F_3}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$B(U+W) = \{(1,2,1,1), (0,4,4,0), (0,0,0,1)\}$ $\dim(U+W)=3$.

→ $U+W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5$. La $\dim(U+W)=3$ es igual a la dim $(\mathbb{Z}_5^3) = 3 \Rightarrow U+W$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^3 \Rightarrow \#U+W = \#\mathbb{Z}_5^3 =$
$= 5^3 = \underline{125 \text{ elementos}}$. $\#U+W = 125$ elementos.

⑥

$\vec{x} \equiv_B (1,1,2,1)$ ¿$\vec{x} \equiv_{B'} (a,b,c,d)$? $\mathbb{Z}_5$

→ Calculo el vector de $\vec{x}$

$$\vec{x} = 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$= (1+1+2+1, 1+1+2+0, 1+1+0+0, 1+0+0+0) = (0,4,2,1)$

→ $(0,4,2,1) \equiv_{B'} (a,b,c,d)$.

$$(0,4,2,1) \equiv a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a+b+c=0 \\ a+b+d=4 \\ a+b+c+d=2 \\ b+c+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a+2b+2c+2d=1 \\ (-2)b+c+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3a=4 \Rightarrow 3^{-1}3a = 3^{-1}4 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

→ Si $a=3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3+b+c=0 \\ 3+b+d=4 \\ 3+c+d=2 \\ b+c+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b+c=2 \\ b+d=1 \\ c+d=4 \\ b+c+d=1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3b+2c+2d=4 \\ (-2)c+d=4 \end{matrix}\right\} 3b=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-1}3b = 3^{-1} = 1 \Rightarrow \boxed{b=2}$

→ Si $a=3$ y $b=2 \Rightarrow \boxed{c=0}$ $\boxed{d=4}$ Por tanto, $(0,4,2,1) \equiv_{B'} (3,2,0,4)$.

⑦ → Para que la aplicación lineal f sea un epimorfismo, tiene que ser sobreyectiva, es decir, $\mathbb{Z}_5^3 \subseteq Im(f)$

$Im(f) = \langle \{ f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \} \rangle$.

$Im(f) = \langle \{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,1) \} \rangle$.

$Im(f) = \langle \{ (1,0,0), ...$

→ Triangularizo $Im(f)$.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \\ 1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$ $\dim(Im(f)) = 3$.

→ Como la $\dim(Im(f)) = 3$ es igual a la $\dim(\mathbb{Z}_5^3) = 3 \Rightarrow \mathbb{Z}_5^3 \subseteq Im(f)$

$\Rightarrow$ Es sobreyectiva $\Rightarrow$ Es un epimorfismo.

⑧ $A = \begin{pmatrix} 1&2&a \\ 2&a&1 \\ a&1&1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&a&1 \\ 1&a&1&a \\ a&1&1&0 \end{array}\right)$

1º) Calculo el valor de a.

$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1&2&a \\ 2&a&1 \\ a&1&1 \end{vmatrix} = \cancel{a} + \cancel{2a} + \cancel{2a} - (a^3 + \cancel{1} + \cancel{4}) = 4a^3 \Rightarrow 4a^3 = 0 \Rightarrow \boxed{a=0.}$

→ Si $a=0$. $\Rightarrow rang(A) \neq rang(A') \Rightarrow$ S.I.

$\underline{A}$

$\begin{vmatrix} 1&2&0 \\ 2&0&1 \\ 0&1&1 \end{vmatrix} = 0+0+0-(0+1+4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1&2 \\ 2&0 \end{vmatrix} = 0-4 = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$

$\underline{A'}$

$\begin{vmatrix} 2&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&1&0 \end{vmatrix} = 0+0+0-(1+0+0) = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3$

→ Si $a \neq 0 \Rightarrow rang(A) = rang(A')$ y $rang(A) =$ Nº Incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D

$\underline{A}$

$\begin{vmatrix} 1&2&a \\ 2&a&1 \\ a&1&1 \end{vmatrix} = 4a^3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3.$

$\underline{A'}$

$\begin{vmatrix} 2&a&1 \\ a&1&a \\ 1&1&0 \end{vmatrix} = 0+a+a^2-(1+2a) =$
$= a^2+4a+4 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow rang(A') = 3.$

⑨ $A = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&2&1&1 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{Z}_5^4)$ $I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $I\lambda = \begin{pmatrix} \lambda&0&0&0 \\ 0&\lambda&0&0 \\ 0&0&\lambda&0 \\ 0&0&0&\lambda \end{pmatrix}$

1º) Calculo el polinomio característico. $P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda&2&3&4 \\ 0&2-\lambda&1&1 \\ 0&0&2-\lambda&1 \\ 0&0&0&2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda&1&1 \\ 0&2-\lambda&1 \\ 0&0&2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^3 =$

$= (1-\lambda)(3+3\lambda+\lambda^2+4\lambda^3) =$

$= 3+3\lambda+\lambda^2+4\lambda^3+2\lambda+2\lambda^2+4\lambda^3+\lambda^4$

$= \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3 \Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3.$

2) Valores propios de $P_A(\lambda)$.

$P_A(0) = 3$ No $\quad P_A(3)$

$P_A(1) = 1+3+3+3=0$ Sí $\quad P_A(4)$

$P_A(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 = 0$, Sí

Los valores propios son: $\lambda \in \} 1, 2 \{$.

3) Multiplicidad algebraica. (m.A)

Para $\lambda = 1$.

$P_A(1) = 0 \Rightarrow P'_A(\lambda) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda$
$P'_A(1) = 4+4+4 = 2$ $\Big\} \Rightarrow$ la multiplicidad algebraica para $\lambda = 1$ es 1.

Para $\lambda = 2$.

$P_A(2) = 0 \Rightarrow P'_A(\lambda) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda \Rightarrow P''_A(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 \Rightarrow P'''_A(\lambda) = 4\lambda + 3$

$P'_A(2) = 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow P''_A(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow P'''_A(2) = 1$

$\} \Rightarrow$ la m.A para $\lambda = 2$ es 3.

$\Rightarrow$ Como la suma de las m.A es 4 igual al orden de la matriz, podemos continuar.

4) Multiplicidad geométrica.

$$V(1) = \} (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \{$$

$V(1) = \} (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4$ tq $\left.\begin{array}{r} 2y+3z+4t=0 \\ y+z+t=0 \\ z+t=0 \\ t \neq 0 \end{array}\right\}$ Al triangularizar.

$\dim(V(1)) = 4-3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la m.G. para $\lambda = 1$ es 1. Como la m.A = m.G. podemos continuar.

$$V(2) = \} (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \{.$$

$V(2) = \} (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4$ tq $\left.\begin{array}{r} 4x+2y+3z+4t=0 \\ z+t=0 \\ t=0 \end{array}\right\{$ Al triangularizar salen 3 Ec. Cartesianas.

$\dim(V(2)) = 4-3 = 1 \Rightarrow$ la m.G para $\lambda = 2$ es 1.

$\rightarrow$ Como la m.G $\neq$ m.A para $\lambda = 2$, no podemos diagonalizar la matriz

10

$$P_9^{3,2,2,2} - P_8^{3,2,2,1} = \frac{9!}{3!2!2!2!} - \frac{8!}{3!2!2!1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$= 7560 - 1680 = 5880$ números

24 Enero 2018

(5) Para que la aplicación f sea un epimorfismo $\Rightarrow$ debe ser sobreyectiva, es decir, $\mathbb{Z}_5^4 \leq Im(f)$.

$Im(f) = \langle \{ f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \} \rangle$

$Im(f) = \langle \{ (1,1,2,1), (1,1,2,0), (1,1,2,2), (1,0,1,1) \} \rangle$.

$\rightarrow$ Triangularizo $Im(f)$

$$\begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 1&1&2&0\\ 1&1&2&2\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3-F_1\\F_4-F_1}}{\overset{F_2-F_1}{\simeq}} \begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&0&0&4\\ 0&0&0&1\\ 0&4&4&0 \end{pmatrix} \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&4&4&0\\ 0&0&0&4\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \underset{F_4+F_3}{\simeq} \begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&4&4&0\\ 0&0&0&4\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{ (1,1,2,1), (0,4,4,0), (0,0,0,4) \}$ $\quad dim(Im(f)) = 3$.

$\rightarrow$ Como la $dim(Im(f)) \neq dim(\mathbb{Z}_5^4) \Rightarrow \mathbb{Z}_5^4 \not\leq Im(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No es sobreyectiva $\Rightarrow$ No es un epimorfismo.

14 Julio 2017

(6) $A = \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&2&2\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$.

1º) Calculo el polinomio característico. $P_A(\lambda) = |A - I\lambda|$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = (1-\lambda)(4+\lambda^2+\lambda) =$$
$$= 4 + \cancel{\lambda^2} + \lambda + \lambda + 4\lambda^3 + \cancel{4}\lambda^2 = 4\lambda^3 + \ldots + 2\lambda + 4.$$

2º) Valores propios de $P_A(\lambda)$.

$P_A(0) = 4$ No $\quad P_A(3) = 3$ No $\quad$ Valores propios: $\lambda \in \{1, 2\}$.

$P_A(1) = 0$ Sí $\quad P_A(4) = 3$ No

$P_A(2) = 0$ Sí

3) Multiplicidad Algebraica. (m. A).

~~PA(1)~~ $\rightarrow$ Para $\lambda = 1$.

$P_A(1) = 0 \Rightarrow P'_A(\lambda) = 2\lambda^2 + 2$ $\Big\} \Rightarrow$ la m. A para $\lambda = 1$ es 1.

$\Rightarrow P'_A(1) = 2+2 = 4$.

→ Para $\lambda = 2$.

$P_A(2) = 0 \Rightarrow P'_A(\lambda) = 2\lambda^2 + 2 \Rightarrow P''_A(\lambda) = 4\lambda$ } → la m. A para $\lambda=2$ es 2.

$\searrow P'_A(2) = 2 \cdot 4 + 2 = 0 \Rightarrow P''_A(2) = 3$

→ Como la suma de las m. A es 3, igual al orden de la matriz A, $M_{3\times3}$, podemos continuar.

4º) Multiplicidad geométrica (m.G.)

$$V(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1-\lambda(1) & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda(1) & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$V(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$V(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{r} 2y+3z=0 \\ y+2z=0 \\ z=0 \end{array} \right\}$$ → Triangularizo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2+2F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{2F_3+F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3+2F_1}{\overset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\simeq}}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$\dim(V(1)) = 3 - \text{Nº Ec. cartesianas } (2) = 1 \Rightarrow$ la m. G para $\lambda = 1$ es 1. Como la m. A = m. G para $\lambda = 1 \Rightarrow$ podemos continuar.

$$(V(2)) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$V(2) \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{array}{r} 4x+2y+3z=0 \\ 2z=0 \end{array} \right\}$$

$\dim(V(2)) = \dim(\mathbb{Z}_5^3) - \text{Nº Ec. cartesianas. } (2) = 1. \Rightarrow$ la m. G. para $\lambda = 2$ es 1. Como la m. G $\neq$ m. A $\Rightarrow$ la matriz no es diagonalizable.