1] Un gimnasio abre todos los días de la semana y cada socio acude cuatro días por semana. ¿Cuál es el mínimo número de socios que debe tener el gimnasio de modo que se pueda garantizar que cada semana haya al menos doce socios que van al gimnasio exactamente los mismos días de esa semana?

2] Calcule todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que la ecuación diofántica $498x + 1245y = 111n + 96$, cuyas incógnitas x e y, tiene solución.

3] Resuelva la ecuación $a(x^2+2) = x^2 + 2x + 1$ en el anillo
$A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^3+2x^2+2}$

4] El consejo de administración de una empresa está compuesto por quince personas. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto. Cada persona puede votar a favor, en contra, o en blanco, pero no puede abstenerse.

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación?

b) Considerando que se aprueba el proyecto con al menos ocho votos favorables, ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

5] Calcule todas las matrices $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{11})$, tales que

$$A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad y \quad A^9 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

6] Discuta el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$ según los valores de a y b.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + 6z = 3 \\ x + 4y + 10z = 7 \\ x + 3y + (a+4)z = a+8 \\ 6x + 4y + 9z = b+7 \end{array}\right\}$$