
Números naturales y números enteros

Ejercicio 1.

Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1. $3 \times 4 = 22$,
2. $41 \times 14 = 1224$,
3. $52 \times 25 = 1693$,
4. $25 \times 13 = 51$,
5. $13^4 = 14641$

Ejercicio 2. Da la expresión en base 8 de los naturales que en base 2 se escriben:

1. 101101100010011010111,
2. 10001000000100110,
3. 1011101111011111

Ejercicio 3. Prueba que dado un número entero cualquiera m se verifica una de las siguientes posibilidades:

1. $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$,
2. $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$,
3. $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$

Concluye que si m es impar, entonces $m^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes congruencias:

1. $3x \equiv 2 \pmod{5}$,
2. $7x \equiv 4 \pmod{10}$,
3. $6x \equiv 3 \pmod{4}$.

Ejercicio 5. Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

Ejercicio 6.

Determina el número de enteros entre 1500 y 2500 tales que

- (a) sus dos últimas cifras en base dos son 11,

(b) sus dos últimas cifras en base tres son 00 y

(c) sus dos últimas cifras en base cinco son 12.

Ejercicio 7. ¿Cuántos números naturales hay, menores que 10000, que acaben en 7, y que al dividirlos por 55 den resto 12?

Ejercicio 8. Sean $x = 48572_{16}$ e $y = 95883_{16}$. Expresa el valor de $x + y$ en base 8.

Ejercicio 9.

Calcula el resto de dividir 4225^{1850} entre 1234.

Ejercicio 10. En \mathbb{Z}_{300} realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

- $25 \cdot 60$.
- $127 \cdot (-100)$.
- 237^{-1} .
- $13 - 50 \cdot 101^{-1}$.
- Encuentra $x \neq 0$ tal que $111 \cdot x = 0$.
- Encuentra x tal que $13x + 25 = 32x - 50$.
- Encuentra x tal que $11x - 100 = 45x + 12$.

Ejercicio 11. Calcula, si es posible, 1392^{-1} en \mathbb{Z}_{7585} .

Ejercicio 12.

Enumera los divisores positivos de 120, y calcula cuántos divisores tiene el número 118800.

Ejercicio 13. Calcula las soluciones enteras de cada una de las siguientes ecuaciones diofánticas:

1. $2x + 3y = 7$.
2. $6x + 10y = 16$.
3. $232x - 341y = 17$.

Ejercicio 14. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica

$$210x - 91y = 77$$

que verifiquen que $-500 \leq x, y \leq 500$?

Ejercicio 15. Demuestra que:

1. Un número escrito en base 10 es par si, y sólo si, su última cifra es par.
2. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
3. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 4 si, y sólo si, su última cifra más dos veces la penúltima es múltiplo de 4.
4. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

5. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.
6. Un número escrito en hexadecimal es múltiplo de 4 si, y sólo si, termina en 0, 4, 8 ó C.
7. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si, y sólo si, la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11
8. Un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.

Ejercicio 16. Determina la factorización como producto de números primos de $10!$ y $15!$. ¿Cuántos divisores tiene cada uno de ellos?.

Ejercicio 17. Sin realizar el cálculo, halla las cifras que faltan en los siguientes números:

1. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 61 - 4 - 0$
2. $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 = -07 - 84 - 00$
3. $17! = 35 - 6874 - 8096000$

Ejercicio 18. Encuentra el valor máximo de n tal que 2^n divide a $25!$.

Ejercicio 19. Encuentra todas las parejas de números a, b tales que $\text{mcd}(a, b) = 210$ y $\text{mcm}(a, b) = 840$.

