Repaso-ALEM.pdf

Repaso temas 2-7 (paso a paso)

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Repaso ALEM

Ecuaciones en Congruencia — Tema 2

$1210x \equiv 110 \pmod{2560}$

1º. Calcular $mcd\{2560, 1210\}$. Si $mcd\{2560, 1210\} \mid 110$ la ecuacion ~~~~ ~~~~ se puede simplificar

$mcd\{2560, 1210\} = 10 \rightarrow 10 \mid 110 \rightarrow$ tiene simplificacion.

Las mismas que $121 \equiv 11 \pmod{256}$

2º. Repetimos lo mismo. Si $mcd\{256, 121\} = 1 \Rightarrow$ Tiene Solucion

Se aplica el alg. extendido de euclides.

$(a_0, a_1) = (256, 121) = \cdots = (1, 0)$
$(s_0, s_1) = (1, 0) = \cdots = (26, \sim)$
$(t_0, t_1) = (0, 1) = \cdots = (-55, \sim)$

$256 \cdot v + 121 \cdot u = 1 \longrightarrow 256 \cdot \overset{26}{v} + 121 \cdot (-55) = 1$

3º. Solucion: $11 \cdot u \bmod 256$

$11 \cdot 55 \bmod 256 = 17$ (es una solucion)

4º. Conjunto soluciones: $\{17 + 256k\}$ tq $k \in \mathbb{Z}$

Ecuaciones Diofánticas — Tema 2

$141x + 99y = 27$

1º. Calculo mcd{141, 99} | 27. Se puede simplificar

mcd{141, 99} = 3 como 3|27 → $47x + 33y = 9$ (*)

2º Calculo mcd{47, 33}. Si es 1 → Tiene solución. Calculo el alg. extendido de euclides

$(a_0, a_1) = (47, 33) = \cdots = (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = \cdots = (-7, \sim)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = \cdots = (10, \sim)$

$47 \cdot v + 33 \cdot u = 1 \longrightarrow 47 \cdot (-7) + 33 \cdot 10 = 1$

multiplico por 9 (*)

$47 \cdot (-63) + 33 \cdot 90 = 9$

3º. Soluciones: $\{(v + 33k, u - 47k) \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

$\{(-63 + 33k, 90 - 47k) \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

Inverso para el Producto — Tema 2

27^{-1} en $\mathbb{Z}_{64}$

1º. Si mcd{64, 27} = 1 → $\exists\, 27^{-1} \in \mathbb{Z}_{64}$. Calculo alg. extendido de euclides.

$(a_0, a_1) = (64, 27) = \cdots = (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = \cdots = (-8, \sim)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = \cdots = (19, \sim)$

2º. $64 \cdot v + 27 \cdot u = 1 \rightarrow 27^{-1} = u \bmod 64$

$64 \cdot (-8) + 27 \cdot 19 = 1 \longrightarrow 27^{-1} = 19 \bmod 64 = 19$

CALCULAR UNA POTENCIA — TEMA 2

5^{122} en $\mathbb{Z}_7$

1º Calculo potencias hasta $5^x = 1$

$5^1 = 5$; $5^2 = 4$; $5^3 = 1$

2º Divido 122 entre 3

$$\begin{array}{r|l} 122 & 3 \\ \hline 2 & 40 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 122 = 40 \cdot 3 + 2$$

$$5^{122} = 5^{40 \cdot 3 + 2} = (5^3)^{40} + 5^2 = \underline{\underline{4}}$$

CALCULAR LA DESCOMPOSICIÓN EN IRREDUCIBLES — TEMA 3

$$a(x) = (4x+3)(5x+2)(2x+3) \subset \mathbb{Z}_7[x]$$

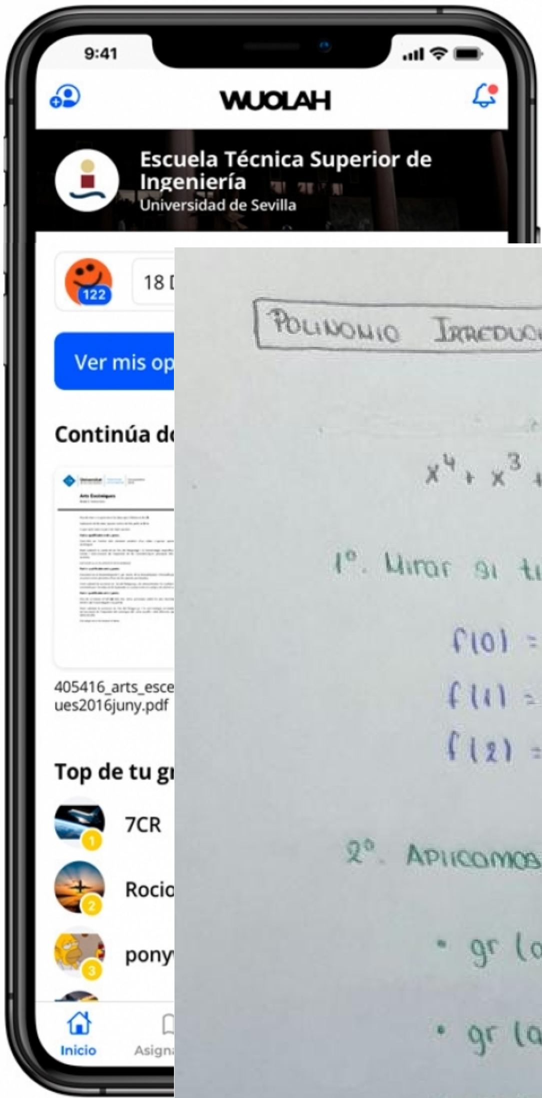
- Buscar porque número hay que multiplicar el primer elemento de cada polinomio para hacerlo mónico (1).

$$a(x) = 4 \cdot \underbrace{2(4x+3)}_{4 \cdot 2 = 8 = 1}\ 3 \cdot \underbrace{5(5x+2)}_{3 \cdot 5 = 15 = 1}\ 4 \cdot \underbrace{2(2x+3)} =$$

$$= 4(x+6)\,5(x+6)\,2(x+5) = 5(x+6)^2(x+5)$$

¿ES UNA UNIDAD? — TEMA 3

Será unidad $\Longleftrightarrow$ $\text{mcd}\{a, b\} = 1$



$\boxed{\text{POLINOMIO IRREDUCIBLE}}$ TEMA 3

$x^4+x^3+x+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

1°. Mirar si tiene raices

$f(0)=2$

$f(1)=2$ → NO TIENE RAICES

$f(2)=1$

2°. Aplicamos el siguiente teorema:

- $gr(a(x))=1 \Rightarrow a(x)$ es irreducible
- $gr(a(x))\geq 2 \Rightarrow$ Si tiene una raiz (al menos) es reducible
- $gr(a(x))\in\{2,3\} \Rightarrow$ Será IRREDUCIBLE $\leftrightarrow$ no tiene raices
- $gr(a(x))\in\{4,5\} \Rightarrow$ Será IRREDUCIBLE $\leftrightarrow$ no tiene raices y no es divisible por un polinomio mónico e irreducible de grado 2.

→ POLINOMIO MONICO E IRREDUCIBLE DE GRADO x.

$ax^x+bx^{x-1}+\dots+n$

ax^2+bx+c ← como es en $\mathbb{Z}_3$ sustituyo a,b,c por $0,1$ y 2.

$\cancel{x^2}$, $\cancel{x^2+x}$, $\cancel{x^2+x+1}$, $\cancel{x^2+2x}$, $\cancel{x^2+2x+1}$, x^2+2x+2, $\cancel{x^2+x+2}$, x^2+1, $\cancel{x^2+2}$ (TACHO LOS QUE SE HAGAN 0 AL SUSTITUIR 0, 1 O 2)

3°. Si divide a x^4+x^3+x+2 → NO ES IRREDUCIBLE

No lo divide → ES IRREDUCIBLE

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x+2 & x^2+1 \\ \hline 0 & x^2+x+2 \end{array}$$

→ ES REDUCIBLE

$\boxed{\text{Calcular el resto}}$ Tema 3

De dividir $x^{127} + x^{33} + x^2 + 3$ entre $x+2$.

$$a(x) \bmod \underbrace{x+2 = a(x) \bmod x-5}_{7-2=5}$$

$$5^{127} + 5^{88} + 5^1 + 3 \longrightarrow 5 + 2 + 5^2 + 3 = 0$$

$\boxed{\text{Calcular la descomposición en irreducible}}$ Tema 3

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

1º. Mirar si tiene raíces

$f(0) = 1$

$f(1) = 0$

2º. Divido el polinomio entre $x-1$

$$x - 1 = x + 1$$
$$\mathbb{Z}_2$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \;\; \underline{|\; x+1 \;\;\;}$$
$$x^4 + x^2 + 1$$
$$0/$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

3º. Repito lo anterior. Como no tiene raíces, miramos si es divisible por algún mónico e irreducible de grado 2.

$$\cancel{x^2},\ \cancel{x^2+x},\ x^2+x+1,\ \cancel{x^2+1}$$

$$x^4 + x^2 + 1 \;\; \underline{|\; x^2+x+1 \;\;\;}$$
$$x^2 + x + 1$$
$$0/$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)^2$$

CALCULAR RAICES Y MULTIPLICIDADES — TEMA 3

$$a(x) = x^4 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

- Raices: sustituir $\{0,1,2,3,4\}$ en $a(x)$

$$a(0) = 1 \; ; \; a(1) = 0 \; ; \; a(2) = 4 \; ; \; a(3) = 4 \; ; \; a(4) = 0$$

- Multiplicidades: calculo las derivadas. Si $a'(x) \neq 0 \rightarrow$ nº de derivadas = nº multiplicidad

$$a'(x) = 4x^3 + x \Rightarrow a'(1) = 0 \quad // \quad a'(4) = 0$$

$$a''(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow a''(1) = 3 \quad // \quad a''(4) = 3$$

1 y 4 tienen multiplicidad 2.

CALCULAR DETERMINANTE : ALG. DE LAPLACE — TEMA 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

1°. Buscar hacer 0 en una fila o una columna

Fila 2 // Col 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \cdot (-1)^{\boxed{2+1}} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$C_3 + C_1$

$C_4 + 2C_1$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$C_2 + 4C_1$

$C_4 + 4C_1$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ — TEMA 4

$$A^{-1} = \frac{|\bar{A}|^t}{|A|}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MARTIZ REGULAR — TEMA 4

Matriz Regular $\leftrightarrow$ $|A| = 0$

¿ES UNA BASE? — TEMA 5

$B = \{(1,2,3), (3,1,2), (2,1,1)\}$ base de $\mathbb{Z}_5^3$

Base $\leftrightarrow$ $\dim(\mathbb{Z}_5^3) = \dim(B)$ + B es L.I

L.I

Metodo 1

$a(1,2,3) + b(3,1,2) + c(2,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$ L.I $\leftrightarrow$ $a = b = c = 0$

Metodo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Son L.I}$$

$\boxed{\text{Calcular una Base}}$ Tema 5

$$U = \{(1,2,3,4),(2,4,1,3),(1,1,1,1),(2,3,4,0)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_u = \{(1,2,3,4),(0,4,3,2)\}$$

$\boxed{\text{Calcular las Coordenadas de un Vector Respecto de una Base}}$ Tema 5

$$B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2)\} \qquad \vec{X}_B \equiv (1,2,1)$$

$$B' = \{(1,0,0),(0,3,1),(0,2,2)\} \qquad \vec{X}_{B'} \equiv (?,?,?)$$

1º Calculamos el valor de $\vec{x}$. Como $\vec{X}_B \equiv (1,2,1)$:

$$\vec{x} = 1\cdot(1,1,1) + 2(0,1,1) + 1(0,0,2)$$

$$\vec{x} = (1,3,0)$$

2º Calculamos $\vec{X}_{B'}$

$$\vec{X}_{B'} \equiv (a,b,c)$$

$$a(1,0,0) + b(0,3,1) + c(0,2,2) = (1,3,0)$$

$$\left.\begin{array}{rl} a & = 1 \\ 3b + 2c & = 3 \\ b + 2c & = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{X}_{B'} \equiv (1,4,3)}$$

CALCULAR UN COMPLEMENTARIO — TEMA 5

$U = \{(2,3,4,5), (3,1,2,3), (0,0,3,6)\}$

1º. Calculamos una base de U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_U = \{(2,3,4,5), (0,0,3,6)\}$$

2º Ampliamos B_U a una base de $\mathbb{Z}_4$. Deben ser L.I

$$B_U = \{(2,3,4,5), (0,0,3,6), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

$W = \langle\{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}\rangle \rightarrow$ complementario de U.

CALCULAR LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS RESPECTO UNA BASE — TEMA 5

Calcular ec. paramétricas de $U = \{(2,3,4), (1,4,2)\}$ respecto de

$B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

1º. Calculamos una base de U

$$B_U = \{(2,3,4)\}$$

2º. Calculamos $(2,3,4) \equiv_B (a,b,c)$

$$(2,3,4) \equiv_B (3,4,0)$$

3º.

$$(x,y,z) = \lambda(3,4,0) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{ ec. paramétricas}$$

Calcular Ecuaciones Paramétricas Respecto de una Base II — Tema 5

$U = \{x^2+2x+3,\ 3x^2+x+1,\ x^2+2x\}$ respecto de $B = \{x^2+x,\ x^2+1,\ x+1\}$

1°. Calculo una base de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_U = \{x^2+2x+3,\ 2\}$$

2°. Calcula $(x^2+2x+3) \equiv_B (a,b,c)$ y $2 \equiv_B (a',b',c')$

$$(1,2,3) \equiv_B (a,b,c) \rightarrow (1,2,3) \equiv_B (0,1,2)$$

$$(0,0,2) \equiv_B (a',b',c') \rightarrow (0,0,2) \equiv_B (4,1,1)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(0,1,2) + \mu(4,1,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4\mu \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = 2\lambda + \mu \end{array}\right\}$$

Calcular una base de Im(f) y N(f) — Tema 6

1 $f: \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ - $f(x,y,z,t) = (2x+3y+z+t,\ x+y+z+t,\ 3x+z+t)$

<u>Im(f)</u>

- Calculo Im(f)

$$Im(f) = \langle\{f(1,0,0,0),\ f(0,1,0,0),\ f(0,0,1,0),\ f(0,0,0,1)\}\rangle$$

$$Im(f) = \{(2,1,3),\ (3,1,0),\ (1,1,1),\ (1,1,1)\}$$

...

$$B_{Im(f)} = \{(2,1,3),\ (0,2,3)\}$$

N(f)

- Calculo N(f)

$$N(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 3x \quad + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

$$\dim(\mathbb{Z}_5^4) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(N(f))$$

$$4 = 2 - N(f) \rightarrow \underline{N(f) = 2}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z + t = 0 \\ 2y + 3z + 3t = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z = \cancel{0}1 \\ t = \cancel{1}0 \end{array} \rightarrow (3,1,1,0)$$

$$\begin{array}{l} z = 0 \\ t = 1 \end{array} \rightarrow (3,1,0,1)$$

$$B_{N(f)} = \{(3,1,1,0),(3,1,0,1)\}$$

MONOMORFISMO // EPIMORFISMO

TEMA 6

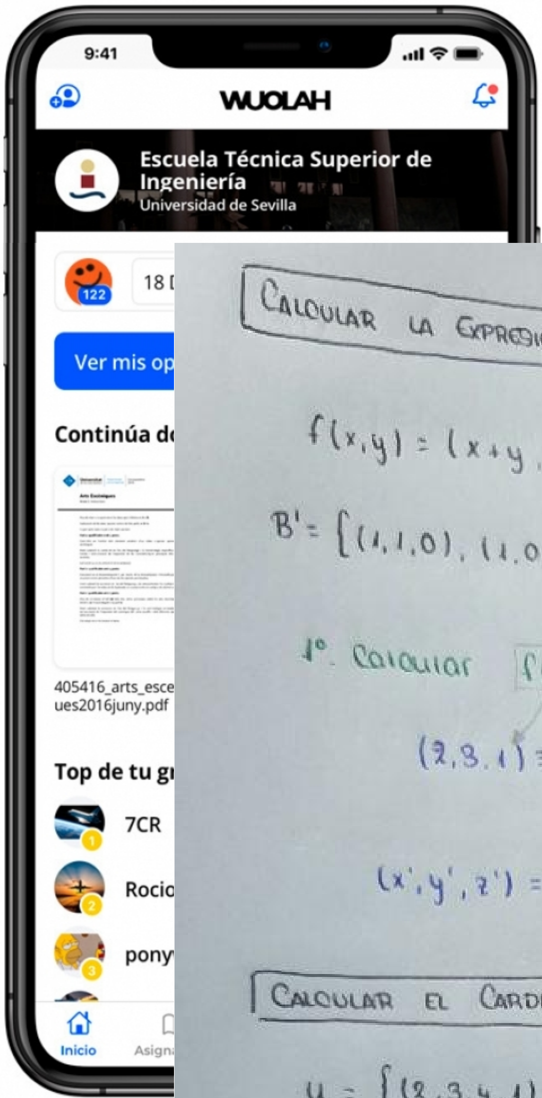
- **MONOMORFISMO**

$$N(f) = \{(0,0,0,0)\}$$

- **EPIMORFISMO**

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = A$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}_x^A$$



Calcular la expresion matricial respecto de las bases — Tema 6

$f(x,y) = (x+y,\ x+2y,\ x)$ respecto $B = \{(1,1),(1,2)\}$ y

$B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

1º. Calcular $f(1,1) \equiv_{B'} (a,b,c)$ y $f(1,2) \equiv_{B'} (a',b',c')$

$(2,3,1) \equiv_{B'} (2,0,1)$ $\qquad$ $(3,5,1) \equiv_{B'} (0,3,5)$

$$(x',y',z') = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Exp. Matricial.}$$

Calcular el cardinal — Tema 6

$U = \{(2,3,4,1),(3,4,1,2),(2,0,4,4)\}$ de $\mathbb{Z}_5^4$

- Calculamos $\dim(U)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

$$\# U = \# \mathbb{Z}_5^2 = 5^2 = 25$$

¿Es $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$? — Tema 6

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W)$$

¿Es $\mathbb{Z}_A^B = U \oplus W$? — Tema 6

$$\mathbb{Z}_A^B = U \oplus W \iff \mathbb{Z}_A^B = U + W \text{ y } U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$$

Estudiar un Sistema de Ecuaciones   Tema 7

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + 2z + t = 2 \\ 2x + y + az + 2t = 3 \end{array}\right\}$$

1º. Calculo los valores que hacen 0 el determinante.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0 \iff a = 0$$

2º. Estudio el sistema de acuerdo a:

S.C.D $\rightarrow$ rang(A) = rang(A^*) = nº incognitas

S.C.I $\rightarrow$ rang(A) = rang(A^*) $\neq$ nº incognitas

S.I $\rightarrow$ rang(A) $\neq$ rang(A^*)

$\boxed{a \neq 0} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S.C.I

$\boxed{a = 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

rang(A) = rang(A^*) = 3 $\Rightarrow$ S.C.I

Regla de Cramer   Tema 7

Solo aplicable a S.C.D

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = \boxed{1} \\ x - y + z = \boxed{0} \\ x + y - z = \boxed{2} \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\-1\end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \text{(Idem y y z)}$$