ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

4 de Febrero de 2020

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________ **Grupo:**______

Ejercicio 1.

1. *Calcula un número x, que en hexadecimal se escriba con dos cifras, y de forma que $2x-1$ se escriba en hexadecimal con las mismas cifras, pero al revés.*
2. *Da dos sistemas de numeración b de forma que el número que en base b se escribe como 156 (es decir, el número $(156)_b$) sea múltiplo de 7.*
3. *Sea $x = 111$ e $y = 50)_{16}$. Expresa ambos números en binario, y calcula, sin realizar operaciones en base 10 y sin restar, la expresión en binario de los números $x+y$ y $x-y$.*

Ejercicio 2. *Calcula todos los números naturales menores que 10000 que son soluciones del siguiente sistema de congruencias:*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 17x & \equiv & 43 & \text{mód } 57 \\ 10x & \equiv & 14 & \text{mód } 39 \\ 2^{1234}x & \equiv & (2^3+2^8) & \text{mód } 11 \end{array}\right.$$

Ejercicio 3.

1. *Factoriza el polinomio $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ como producto de irreducibles.*
2. *Calcula, si es posible, $(x^2+2x+2)^{-1}$ en $\mathbb{Z}_3[x]_{x^3+x^2+x+1}$.*
3. *Calcula un polinomio $p(x)$ de grado menor que 4 para el que $3x^5+2x^4+x^2+6 = p(x)$ en $\mathbb{Z}_7[x]_{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}$.*

Ejercicio 4. *Sea X el conjunto de los números naturales menores que 1000000.*

1. *¿Cuántos elementos de X tienen todas las cifras pares?*
2. *¿Cuántos elementos en X tienen exactamente tres* cincos*? ¿Y cuántos tienen al menos tres* cincos*?*
3. *¿Cuántos elementos en X tienen cuatro* cincos *consecutivos?*
4. *¿Cuántos elementos en X hay cuyas cifras sumen 8? ¿Y 12?*

Ejercicio 5. *Sea $X = \{(1,2,3),\ (3,2,1)\}$ un subconjunto de $(\mathbb{Z}_5)^3$, y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.*

1. *Calcula A^{-1}.*
2. *Comprueba que X es un conjunto de vectores linealmente independientes, y amplíalo a una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Sea esta base B_1.*
3. *Sea B_2 la base de $(\mathbb{Z}_5)^3$ para la que $M_{B_c\to B_2} = A$. Di cuál es la base B_2.*
4. *Calcula la matriz del cambio de base de B_1 a B_2.*

Ejercicio 6. *Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,2,1)$, $(-1,1,2)$ y $(1,0,-1)$ y W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+2z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{array}\right.$.*

1. *Calcula una base de cada uno de los dos subespacios.*
2. *Calcula las ecuaciones cartesianas de U.*
3. *Calcula la dimensión de $U \cap W$.*

4. *Comprueba que el vector* $(1,1,1)$ *pertenece a* $U+W$.

Ejercicio 7. *Sea* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ *la aplicación lineal definida por*

$$f(x,y,z)=(x+y+z,x-y-z,2x,y+z).$$

Y sea $A=M_{B_c}(f)$.

1. *Halla la matriz* A.
2. *Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio* $Im(f)$.
3. *Sean* $B=\{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$ *y* $B'=\{(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbb{R}^4$ *respectivamente. Calcula* $M_{B;B'}(f)$.

Ejercicio 8. *Sea* $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_2)$. *Encuentra, si es posible, una matriz regular* P *de forma de* $P^{-1}\cdot A\cdot P$ *sea una matriz diagonal.*