examenlaiachienero2020.pdf

Examen_Laiachi_enero_2020

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

EXAMEN LAIACHI ENERO 2020

(1p) Aplica el Teorema Chino del Resto para resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 3[5] \\ 3x \equiv 2[4] \end{cases}$$

En primer lugar, debemos simplificar y despejar la 3ª congruencia:

$3x \equiv 2[4] \rightarrow 3x * 3^{-1} \equiv 2 \ * 3^{-1}[4]$

$Siendo\ 3^{-1}\ el\ inverso\ de\ 3\ en\ módulo\ 4\ (que\ es\ 3)$

$Multiplicando\ por\ 3, queda\ la\ congruencia \rightarrow x \ \equiv \ 2[4]$

Ahora debemos verificar que podemos usar el teorema del chino:

$Solo\ podemos\ aplicar\ el\ Teorema\ del\ Chino\ si\ se\ verifica\ que:$

$mcd(3,5) = mcd(5,4) = mcd(3,4) = 1 \ \rightarrow \ Efectivamente\ se\ verifica$

Podemos aplicar el Teorema del chino. Operamos:

$M = 3 * 5 * 4 = 60$

$M_1 = 5 * 4 = 20 \quad M_2 = 3 * 4 = 12 \quad M_3 = 5 * 3 = 15$

Ahora calculamos las u y las v que cumplen el Teorema de Bezout, podemos hacerlo a ojo o aplicando el Algoritmo de Euclides (el de la tablita):

$1 = 20 * v_1 + 3 * u_1 \ \rightarrow \ v_1 = \ -1 \quad u_1 = 7$

$1 = 12 * v_2 + 5 * u_2 \ \rightarrow \ v_2 = \ -2 \quad u_2 = 5$

$1 = 15 * v_3 + 4 * u_3 \ \rightarrow \ v_3 = \ -1 \quad u_3 = 4$

Lo que hacemos ahora es convertir el sistema en una sola congruencia y resolverla.

$$x \equiv a[M]$$

$a = M_1 * v_1 * a_1 + M_2 * v_2 * a_2 + \ M_3 * v_3 * a_3 = 20 * (-1) * 2 + 12 * (-2) * 3 + 15 * (-1) * 2 =$
$-40 - 72 - 30 = -142 \ \rightarrow \ -142[60] = \ -22 = 38$

Por tanto, la congruencia final nos queda así:

$$\boxed{x \equiv 38[60]} \xrightarrow{\text{La resolvemos}} \boxed{x = 60 * K + 38}$$

(1p) ¿Cuántos números de 3 cifras en base 5 contienen las secuencias 01 y 10?

Los números en base 5 son {0,1,2,3,4}. Es decir, hay 5 posibilidades.

Y estamos hablando de un número de tipo XXX, donde cada cifra puede tener 5 posibilidades. Aunque tenemos que tener en cuenta lo siguiente:

- Podemos considerar que la primera cifra puede tener un cero, aunque no sería un número como tal. Si es en base 5 podemos pensar como en binario, que podemos poner 01. Imaginemos la contraseña de un candado, por ejemplo. De 3 cifras y 5 números posibles.
- Si no consideramos que la primera cifra pueda ser 0.

Debemos tener en cuenta los 2 casos:

1º Considerando que la primera cifra puede ser 0

Buscamos los números que tienen las secuencia 01 o 10:

- $X01 \rightarrow$ Consideramos la secuencia 01 como un número en sí mismo. Lo llamamos; por ejemplo, A. La secuencia seria de tipo XA. Calculamos las posiciones donde puede estar A (binomial) y multiplicamos por las posibilidades que tiene X (por el principio del producto).

  $$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! * 1!} = 2\ posiciones\ de\ A \quad \Big| \quad X\ puede\ ser\ \{0,1,2,3,4\}$$

  Por tanto, $5 * 2 = 10\ posibles\ números\ con\ la\ secuencia\ 01$

  Serían: {001,101,201,301,401,010,011,012,013,014}

- $X10 \rightarrow$ Igual que el apartado anterior. Llamamos a la secuencia 10 como B. Buscamos números de tipo XB. Exactamente igual que antes nos salen 10 números con la secuencia 10.
  Serían: {010,110,210,310,410,100,101,102,103,104}
- Pero cuidado, debemos tener en cuenta aquellos números que tienen las 2 secuencias juntas (en rojo). Debemos aplicar el criterio de inclusión – exclusión.

$$\boxed{Criterio\ de\ inclusión - exclusión \rightarrow |A + B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

Por lo que el número total de secuencias con 01 o 10 serían: $\boxed{10 + 10 - 2 = \mathbf{18\ números}}$

2º Si no consideramos que la primera cifra pueda tener un 0

Hacemos como en el apartado anterior:

- $X01 \rightarrow$ Volvemos a llamar a la secuencia 01 como A. Buscamos un número de tipo XA. Pero ahora la primera cifra no puede ser 0, por lo que A solo puede estar en 2ª posición.

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1! * 1!} = 1 \; posición \; A \qquad \Bigg| \qquad X \; puede \; ser \; \{1,2,3,4\}$$

Por tanto, $4 * 1 = 4 \; posibles \; números$.

Estos serían: {101,201,301,401}

- X10 $\rightarrow$ Llamamos a 10 como B. Buscamos números del tipo XB. Y la X no puede ser 0 si está en primera posición.

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! * 1!} = 2 \; posiciones \; de \; A$$

$X \; puede \; ser \; \{1,2,3,4\}$ en 1ª posición

$X \; puede \; ser \; \{0,1,2,3,4\}$ en 2ª posición

Aplicamos el Principio de la suma:

Serían 4 posibilidades de números de forma XB $\rightarrow$ {110,210,310,410}

Serían 5 posibilidades de números de forma BX $\rightarrow$ {100,101,102,103,104}

En total sería $4 + 5 = 9 \; posibles \; números \; con \; la \; secuencia \; 10$.

Todos ellos serían: {110,210,310,410,100,101,102,103,104}

- Aplicamos como antes el criterio de inclusión-exclusión para los números con 01 y 10. Los marcados en rojo.

Por lo que el número total de secuencias con 01 o 10 serían: $\boxed{9 + 4 - 1 = \mathbf{12 \; números}}$

(2,5 p) Dada la aplicación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \; f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Para todo vector, estudia si la matriz asociada respecto a la base canónica es diagonalizable.

Siendo la base canónica, es más fácil. Ya que podríamos pones las coordenadas de la aplicación lineal directamente. Aunque lo resolveremos como si se tratara de una base distinta a la canónica.

$\boxed{\boldsymbol{B_c} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})}$ $\longrightarrow$ Base canónica de dimensión 3

En primer lugar calculamos la imagen de los vectores de la base canónica respecto a la aplicación lineal f(x,y,z):

- $f(1,0,0) = (0,1,1)$
- $f(0,1,0) = (1,0,1)$
- $f(0,0,1) = (1,1,0)$

Lo que debemos calcular ahora serían las coordenadas en la base respecto a la que trabajamos. Es decir, los parámetros α ,β ,γ de tal forma que al multiplicarlos por la base nos de las imágenes de los vectores de la base.

Habría que averiguar α ,β ,γ tal que:

$$\alpha_1 * (1,0,0) + \beta_1 * (0,1,0) + \gamma_1 * (0,0,1) = (0,1,1)$$
$$\alpha_2 * (1,0,0) + \beta_2 * (0,1,0) + \gamma_2 * (0,0,1) = (1,0,1)$$
$$\alpha_3 * (1,0,0) + \beta_3 * (0,1,0) + \gamma_3 * (0,0,1) = (1,1,0)$$

La matriz asociada sería

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Como la base respecto a la que trabajamos es la canónica, no tenemos que complicarnos mucho. Ya que las coordenadas respecto a la base canónica de la aplicación son las coordenadas de los propios vectores de la aplicación.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos la matriz A, tenemos que calcular su polinomio característico.

Lo podemos obtener haciendo el determinante de la matriz $|A - xI|$. Siendo I la matriz identidad de 3 x 3.

$$A - xI = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

O podemos aprendernos la forma del polinomio característico de las matrices de 3 x 3.

Es el siguiente:

$$\boxed{P_A(x) = -x^3 + trz(A)x^2 - trz\big(Adj(A)\big)x + \det(A)}$$

Lo calculamos:

La traza de A es la suma de los elementos de la diagonal

$$trz(A) = 0 + 0 + 0 = 0$$

La traza de adjunta es el determinante de 2x2 de los números resultantes de tachar los elementos de la diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Por tanto:

$$trz\big(Adj(A)\big) = -1 - 1 - 1 = -3$$

Calculamos ahora el determinante de A:

$$|A| = 0 * (-1)^2 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 * (-1)^3 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 * (-1)^4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

El polinomio característico quedaría así:

$$P_A(x) = -x^3 + 3x + 2$$

Hay que sacar las raíces del mismo. Hacemos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 0 & 3 & 2 \\
-1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & -1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\
-1 & & 1 & -2 & \\
\hline
 & -1 & 2 & \boxed{0} & \\
2 & & -2 & & \\
\hline
 & -1 & 0 & &
\end{array}$$

Hay dos raíces

$\boxed{x_1 = -1}$

$\boxed{x_2 = 2}$

Multiplicidades algebráicas

$\boxed{ma_1 = 2}$

$\boxed{ma_2 = 1}$

La primera condición para que una matriz sea diagonalizable:

$$\sum ma(x) = nº\ filas\ y\ columnas\ de\ A = 3$$

Como $2 + 1 = 3$ **SE CUMPLE**

$$\boxed{P_A(x) = (x + 1)^2 * (x - 2)}$$

Ahora debemos calcular los subespacios asociados y las multiplicidades geométricas:

1er subespacio propio: $\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{ma_1 = 2}$

$$V_{-1} = A - (-1) * I = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la forma escalonada reducida mediante Hermite (por filas):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ da\ lugar\ al\ la\ ecuación: x + y + z = 0 \rightarrow z = -x - y$$

Sacamos una base del subespacio: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La base del subespacio es, por lo tanto: $\boxed{B = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle}$

La dimensión del subespacio es el cardinal de una de sus bases (todas tienen el mismo). El cardinal sería el nº de vectores de la base. Y la multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio, por lo tanto:

$$\boxed{mg_1 = 2}$$

2º subespacio propio: $\boxed{x_2 = 2}$ $\boxed{ma_2 = 1}$

$$V_2 = A - 2 * I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hermite por filas:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ da\ lugar\ a\ las\ ecuaciones \begin{cases} x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow x = y = z$$

Sacamos una base del subespacio: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La base del subespacio es, por lo tanto: $\boxed{B = \langle (1,1,1) \rangle}$

La dimensión del subespacio, cardinal de la base y multiplicidad geométrica es:

$$\boxed{mg_2 = 1}$$

La segunda condición para que una matriz sea diagonalizable:

$$ma(x) = mg(x)$$

$$ma_1 = mg_1 = 2 \quad | \quad ma_2 = mg_2 = 1$$

SE CUMPLE

Entonces la matriz A que hemos evaluado **SÍ ES DIAGONALIZABLE**

Aunque no nos lo piden, la matriz P tal que $P * A * P^{-1} = matriz\ diagonal$ se puede obtener poniendo las bases de los subespacios como columnas de dicha matriz P.

Quedaría así $\rightarrow$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2p) a) Estudia si $m(x) = x^2 - 2x - 1$ es irreducible en $Z_3[x]$

b) Indica si se cumple esta congruencia $(X^{2020} - X^{2019} - X) \equiv 0[m(x)]$

a) Como el polinomio es de grado 2, solo tendríamos que ver si tiene raíces y ver si se puede dividir por los polinomios de la mitad de su grado para abajo. Es decir, ver si podemos dividirlo entre los polinomios de grado 1. Y por lo tanto, si se puede poner como producto de polinomios de grado 1.

Vemos si tiene raíces en Z_3

$$\begin{cases} m(0) = -1 = 2 \neq 0 \\ m(1) = 1 - 2 - 1 = -2 = 1 \neq 0 \\ m(2) = 1 - 1 - 1 = 2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{No tiene raíces}}$$

Si probamos a dividirlo por los polinomios de grado 1. Que serían: $x, x+1$ y $x+2$. Vemos que no se pueden dividir. Por lo que podemos afirmar que:

$$\boxed{m(x) \text{ ES IRREDUCIBLE}}$$

b) La congruencia $(X^{2020}-X^{2019}-X) \equiv 0[m(x)]$nos dices que el resultado de dividir esa operación por el polinomio m(x) da resto 0.

$$\overline{x^2-2x-1}=0;\ \overline{x^2}=\overline{2x+1} \rightarrow \beta=\bar{x};\ \beta^2=2\beta+1$$

Buscamos una potencia de β donde podamos reducir el polinomio.

$$\beta^3=\beta^2*\beta=\beta(2\beta+1)=2\beta^2+\beta=2(2\beta+1)+\beta=\beta+2+\beta=2\beta+2$$

$$\beta^4=\beta+\beta^3=\beta*(2\beta+2)=2\beta^2+2\beta=2*(2\beta+1)+2\beta=4\beta+2+2\beta=2$$

Por lo que:

$2020=505*4$

$2019=504*4+3$

$$X^{2020}-X^{2019}-X=2-(2*\beta^3)-\beta=$$

$$2-\beta-1-\beta=\beta+1$$

Entonces el resto de dividir el polinomio entre m(x) no es 0, la congruencia **NO SE CUMPLE**

(1,5p) a) Da un ejemplo de aplicación inyectiva y sobreyectiva.

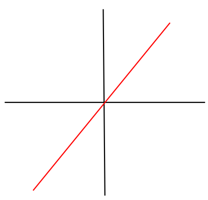
b) Calcula A x B siendo X el producto cartesiano. ¿Es lo mismo |AxB| que |BxA|? ¿Está B x A en biyección?

c) Sea la relación |A|= |B| donde |A| y |B| son las partes del conjunto potencia. Calcula si es una relación de equivalencia, la clase de equivalencia de [∅] y [(1,2,3] y el conjunto cociente.

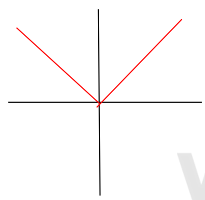
P = {1,2,3}. A={a,b,c,d} B{1,2,3,4}

- $f: R \rightarrow R;\quad f(x)=x \rightarrow$ Sería una aplicación inyectiva, ya que para todo el codominio. Hay a lo sumo, una preimagen. Además seria biyectiva.
  $f: R \rightarrow R;\quad f(x)=|x| \rightarrow$ Sería una aplicación sobreyectiva, ya que para todo el dominio hay una imagen en el codominio.

$f(x)=x$



$f(x)=|x|$



b) El producto cartesiano son duplas:

$AxB = \{a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4\}$

$BxA = \{1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d, 4a, 4b, 4c, 4d\}$

El producto cartesiano no es conmutativo, pero el cardinal sí es el mismo.

Sí que están en biyección, ya que para cada elemento de A y de B le encontramos una imagen en BxA, (sobreyectividad) y dicha imagen no se repite (inyectividad).

c)

¿Relación de equivalencia?

$$\left.\begin{array}{l} \text{¿aRa?} \rightarrow |a|=|a| \rightarrow \text{SI} \\ \text{aRb, ¿bRa?} \rightarrow |a|=|b| \rightarrow \text{SI} \\ \text{aRb, bRc} \rightarrow \text{¿aRc?}\ |c|=|a| \rightarrow \text{SI} \end{array}\right\} \quad \text{Relación de equivalencia}$$

[∅]={∅}

P = {1,2,3}

$P/_R = \{[\emptyset],[1],[2],[3],[1,2],[1,3],[2,3],[1,2,3]\}$

‘

(2p) Siendo $V \in Z_5{}^2$ *un* Z_5 espacio – vectorial. Y U un subconjunto de V tal que: $U = \{(x, y) \in V / \ 3x - 2y = 0\}$.

a) ¿Es U un Z_5 subespacio-vectorial?

b) Calcula una base de u B_u y su dimensión.

c) ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 posee V? ¿Y de dimensión 2?

Podemos resolver el enunciado a y b juntos.

a y b) Para que U sea un Z5 espacio vectorial, se deben cumplir las condiciones de los espacios vectoriales. Estar cerrado para la suma y el producto de escalares.

$$\left.\begin{array}{l} f(a+b) = f(a) + f(b) \\ f(a) * \alpha = f(a * \alpha) \end{array}\right\}$$

*Laiachi es más partidario de juntar las dos condiciones en una, pero da igual: $f(a) - \lambda f(b) = f(a - \lambda b)$

Calculamos una base de u:

$3x - 2y = 0 \rightarrow x = 2 * 3^{-1}\ (que\ es\ 2) y = 2 * 2y = 4y$

$\binom{x}{y} = \binom{4y}{y} = y * \binom{4}{1} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{B_u = (4, 1)}}$

Todos los vectores que están en combinación lineal con la base de U, deben de cumplir las condiciones de los espacios vectoriales.

Si calculamos los 5 vectores, comprobamos que cumplen las condiciones. Por lo tanto, U está cerrado para las sumas y el producto por escalares de Z5. Por lo que es un subespacio vectorial de V. Y a su vez, un Z5 subespacio-vectorial.

c) Al estar en $Z_{5,}$ habrá 5 subespacios vectoriales de dimensión 1.

Si fueran de dimensión 2 habría $5 * 5 = 25$ subespacios.