Tema-1.pdf

Tema 1

Tema 1 CONJUNTOS, RELACIONES Y APLICACIONES

Un conjunto es una colección de objetos a los que llamaremos elementos del conjunto.
Si X es un elemento de un conjunto A escribiremos $X \in A$
Diremos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, $A \subseteq B$, si todo elemento de $A \in B$.
Diremos que dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
Admitiremos la existencia de un conjunto sin elementos, lo llamaremos conjunto vacío $\emptyset$
El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos.

$\emptyset$ no tiene elementos

$2 \in \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\emptyset \subseteq \emptyset$ $\quad$ $\{\{1\}\} \neq \{1\}$

$4 \notin \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\emptyset \notin \emptyset$ $\quad$ $1 \neq \{1\}$

$\{1\} \notin \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\emptyset \notin \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $\{1, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$

→ Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

① Intersección A y B.

$$A \cap B = \{x \ \text{tg} \ x \in A \ \text{y} \ x \in B\}$$

tal que

② Unión A y B

$$A \cup B = \{x \ \text{tg} \ x \in A \ \text{ó} \ x \in B\}$$

③ Diferencia de A y B

$$A \setminus B = \{x \in A \ \text{tg} \ x \notin B\}$$

diferentes subconjuntos que puedes hacer con un conjunto

④ Conjunto de partes de A (conjunto potencia de A)

$$P(A) = \{X \ \text{tg} \ X \subseteq A\}$$

⑤ Producto cartesiano de A y B

$$A \times B = \{(a, b) \ \text{tg} \ a \in A \ \text{y} \ b \in B\}$$

A los elementos de $A \times B$ se les llama pares ordenados.

⑥ Si $A_1, A_2 \ldots A_n$ son conjuntos entonces el producto cartesiano de todos ellos es

$$A_1 \times A_2 \times A_n = \{\underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \text{ tq } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$$

A sus elementos se les llama n-tuplas

Ejemplos:

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$A \setminus B = \{2\}$

$B \setminus A = \{5, 7\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7)\}$

$A^3 = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), \ldots, (2,1,1), \ldots (3,1,2), \ldots\}$

- El cardinal de un conjunto es el número de elementos de dicho conjunto. $\# X \rightarrow$ cardinal del conjunto X

$\# \{1, 2, 3, 4, 5\} = 5$

nº elementos del conjunto

$\# \mathbb{N} = \infty$

- Proposición

① A $\# P(A) = 2^{\# A}$

② $A_1, A_2 \ldots A_n$ son conjuntos $\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N) = \# A_1 \cdot \# A_2 \cdot \ldots \cdot \# A_N$

Ejercicio

$\rightarrow \# P(\{1, 2, 3, 4\}) = 2^4 = 16$

$\rightarrow$ Si $A = \{1, 2, 3\}$

$\# A^3 = \#(A \times A \times A) = \# A \cdot \# A \cdot \# A = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Relaciones de equivalencia:

Sea A un conjunto, una relación binaria sobre el conjunto A es un subconjunto de R de $A \times A$.

Si $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado con y.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (4,5), (5,2)\}$ es una relación binaria sobre el conjunto A.

$1 R 2 \quad 4 \not R 3 \quad 2 \not R 1$

Una relación binaria R sobre un conjunto A diremos que es una relación de equivalencia si verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: Si $a \in A$ entonces aRa. Todo elemento de A debe estar relacionado consigo mismo.
2. Simétrica: Si aRb entonces bRa.
3. Transitiva: Si aRb y bRc entonces aRc

Si R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A y $a \in A$ entonces llamaremos clase del elemento a al conjunto $[a] = \{x \in A \text{ tg } xRa\}$

- Proposición. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces:
  1. aRb si y solo si $[a] = [b]$
  2. $a \not R b$ si y solo si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A entonces llamaremos conjunto cociente $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tg } a \in A\}$

Ejercicio. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (5,6), (6,5)\}$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Calcular el cardinal del cojunto cociente.

1 $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tg } a \in A\} = \{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\} \overset{3}{=} \{\{1,2,3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$

2 $[1] = \{1, 2, 3\} = [2] = [3] \quad [4] = \{4\} \quad [5] = \{5, 6\} = [6]$ cardinal es 3

Ejercicio. En el conjunto $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ definimos la siguiente relación binaria: xRy si $x-y$ es múltiplo de 3.

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathbb{Z}$

b) Calcular la clase del $[0]$

c) Calcular el cardinal del cojunto cociente

a) Reflexiva: si $z \in \mathbb{Z}$ entonces $z - z = 0$ que es múltiplo de 3, por tanto zRz

Simétrica: si aRb entonces $\Rightarrow$ $a-b$ es múltiplo de 3, por tanto $-(a-b)$ es múltiplo de 3, por consiguiente $b-a$ es múltiplo de 3, en consecuencia bRa.

Transitiva: si aRb y $bRc \Rightarrow a-b$ es múltiplo de 3 y $b-c$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow a-b+b-c$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow a-c$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow aRc$

b) $[0] = \{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } zR0\} = \{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

los múltiplos de 3 están relacionados con el 0.

c) $\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{[z] \text{ tq } z \in \mathbb{Z}\}$

$[0] = \{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, -2, -5, -8\} = \{1+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

$[2] = \{2, 5, 8, 11, \ldots, -1, -4, -7 \ldots\} = 2+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

Como al dividir un número entero entre 3 el resto me da 0, 1 o 2 entonces todo número entero está en $[0]$, $[1]$ ó $[2]$. Por tanto el cojunto cociente tiene 3 elementos:

$\frac{A}{R} = \{[0], [1], [2]\} = \{\{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}, \{1+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}, \{2+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}\}$

Respuesta: $\# \frac{\mathbb{Z}}{A} = 3$

Relaciones de orden:

Una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto A diremos que es una relación de orden si verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: Si $a \in A$ entonces $a \leq a$
2. Antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$
3. Transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$

Un conjunto ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden sobre dicho conjunto.

Ejemplos de conjuntos ordenados.

$(\mathbb{N}, \leq_u)$ $(\mathbb{Z}, \leq_u)$ $(\mathbb{Q}, \leq_u)$ $(\mathbb{R}, \leq_u)$

↳ orden usual

Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (→ números naturales) definimos la siguiente relación binaria: $a \leq_m b$ si b es un múltiplo de a.

Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_m)$ es un conjunto ordenado.

1. Reflexiva: si $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a$ es múltiplo de $a \Rightarrow a \leq_m a$
2. Antisimétrica: si $a \leq_m b$ y $b \leq_m a \Rightarrow b$ es múltiplo de a y a es múltiplo de $b \Rightarrow a = b$
3. Transitiva: si $a \leq_m b$ y $b \leq_m c \Rightarrow b$ es múltiplo de a y c es múltiplo de $b \Rightarrow c$ es múltiplo de $a \Rightarrow a \leq_m c$

Un conjunto ordenado $(A, \leq)$ diremos que es totalmente ordenado si para todo $(a, b) \in A \times A$ se verifica que $a \leq b$ ó $b \leq a$.

Ejemplo. $(\mathbb{N}, \leq_u)$ es totalmente ordenado. Sin embargo, $(\mathbb{N}, \leq_m)$ no es totalmente ordenado ya que $2 \not\leq_m 7$ y $7 \not\leq_m 2$.

Elementos notables de un conjunto ordenado.

Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y B es un subconjunto no $\emptyset$ de A entonces:

1. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es un elemento maximal de B si verifica lo siguiente:
   - Si $b \in B$ y $\beta \leq b \Rightarrow \beta = b$.
2. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es un elemento minimal de B si verifica lo siguiente:
   - Si $b \in B$ y $b \leq \beta \Rightarrow \beta = b$
3. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es el máximo de B si $b \leq \beta$ para todo $b \in B$.
4. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es el mínimo de B si $\beta \leq b$ para todo $b \in B$.
5. Un elemento $a \in A$ diremos que es una cota superior de B si $b \leq a$ para todo $b \in B$.
6. El supremo de B $Sup(B)$ es el mínimo del conjunto formado por todas las cotas superiores de B.
7. Un elemento $a \in A$ diremos que es una cota inferior de B si $a \leq b$ para todo $b \in B$.
8. El ínfimo de B $Inf(B)$ es el máximo del conjunto formado por todas las cotas inferiores de B.

Ejemplo. Dado el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq_m)$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ calcular los elementos notables de B.

1. $Maximales(B) = \{3, 4, 5\}$
2. $Minimales(B) = \{1\}$
3. $\nexists$ $Máximo(B)$
4. $Mínimo(B) = 1$
5. Cotas superiores de $B = \{0, 60, 120, 180, \ldots\} = \{60k \text{ tq } k \in \mathbb{N}\}$
6. $Sup(B) = 60$
7. Cotas inferiores de $B = \{1\}$
8. $Inf(B) = 1$

→ Orden producto cartesiano.

Si $(A_1, \leq_1), (A_2 \leq_2), \dots (A_n, \leq_n)$ son conjuntos ordenados entonces en el conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ podemos definir una relación de orden de la siguiente forma:

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_p (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si $a_1 \leq_1 b_1$, $a_2 \leq_2 b_2, \dots, a_n \leq_n b_n$

A dicho orden lo llamaremos orden producto cartesiano.

Ejemplo. Dados los conjuntos ordenados $(\mathbb{Z}, \leq_u)$ y $(\mathbb{N}, \leq_m)$ entonces $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ lo podemos ordenar con el orden producto cartesiano: $(a, b) \leq_p (c, d)$ si $\underset{\mathbb{Z}}{a \leq_u c}$ y $\underset{\mathbb{N}}{b \leq_m d}$

$(-2, 4) \leq_p (0, 8)$
$(2, 5) \not\leq_p (3, 9)$

Calcular los elementos notables del conjunto

$B = \{(2,3), (3,6), (-1,-1), (4,7)\}$

Maximales $(B) = \{(3,6), (4,7)\}$

$\nexists$ Máximo (B)

Minimales $(B) = \{(-1,-1)\}$

Mínimo $(B) = (-1,-1)$

(Cotas sup. de $B) = \{(a,b)$ tq $4 \leq_u a$ y b múltiplo de $42\}$

$Sup(B) = (4, 42)$

(Cotas inf. de $B) = \{(a,b)$ tq $a \leq_u -1$ y $b = 1\}$

$Inf(B) = (-1,-1)$

→ Orden lexicografico

El orden producto cartesiano en $\mathbb{N}^n$ es $(a_1, a_2, \dots a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si $a_1 \leq_u b_1$, $a_2 \leq_u b_2, \dots, a_n \leq_u b_n$. Este orden no es total ya que por ejemplo en $\mathbb{N}^3$ $(2,3,-1) \leq_p (1,4,0)$ y $(1,4,0) \not\leq_p (2,3,-1)$.

Existen órdenes en $\mathbb{N}^n$ que son totales, por ejemplo, el orden lexicografico que se define de la siguiente forma:

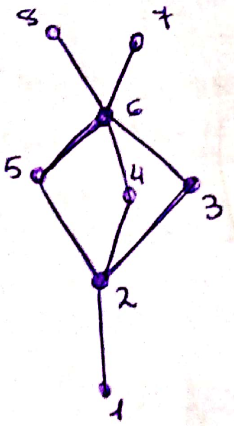
$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{lex} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si
- $a_1 <_u b_1$
- ó
- $\exists\, i \in \{1, \dots, n-1\}$ tq $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots, a_i = b_i$ y $a_{i+1} < b_{i+1}$
- ó
- $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

Ejemplo. Ordenar de menor a mayor con el orden lexicográfico los elementos del siguiente conjunto

$\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2),(2,3,1),(1,0,4)\}$

$(0,0,2) \leq_{lex} (0,1,1) \leq_{lex} (1,0,4) \leq_{lex} (1,1,1) \leq_{lex} (2,3,1)$

→ Representación gráfica de órdenes.



$2 \leq 6 \quad 4 \not\leq 5 \quad 1 \leq 8 \quad 7 \not\leq 8$

Calcular los elementos notables de $B=\{2,3,4\}$

Maximales$(B)=\{3,4\}$

$\nexists$ Máximo (B)

Minimales$(B)=\{2\}$

Mínimo $(B)=2$

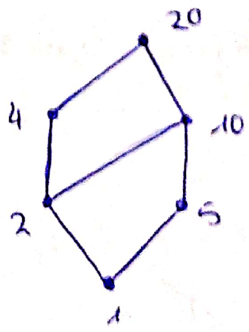
(Cotas sup de B)$=\{6,7,8\}$

Sup$(B)=6$

(Cotas inf. de B)$=\{1,2\}$

Inf$(B)=2$

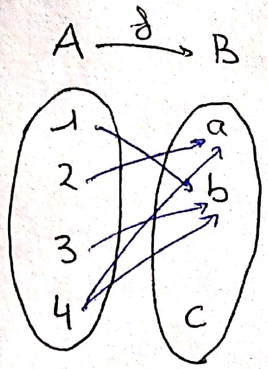
Ejercicio. Representar gráficamente el siguiente conjunto ordenado: $(\{1,2,4,5,10,20\}, \leq_m)$



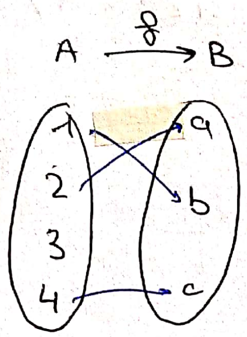
→ Aplicaciones entre conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos, una aplicación f de A en B que denotaremos $f: A \longrightarrow B$ es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le asocia un único elemento del conjunto B

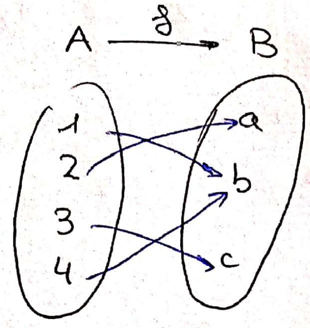
• Ejemplos



No es aplicación



NO es aplicación



Sí es aplicación

Si $a \in A$ entonces al elemento que le asocia f en B lo denotaremos por $f(a)$ y diremos que es la Imagen del elemento a

A los conjuntos A y B los llamaremos el Dominio y el codominio de f respectivamente

La Imagen de f es $Im(f) = \{f(a) \text{ tq } a \in A\}$

Ejercicio. Dada la aplicación $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = 2n+1$. Calcular $Im(f)$

$$Im(f) = \{f(n) \text{ tq } n \in \mathbb{N}\} = \{2n+1 \text{ tq } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

→ Tipos especiales de aplicaciones.

Una aplicación $f: A \longrightarrow B$ diremos que es:

1. Inyectiva: si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$
2. Sobreyectiva: si $Im(f) = B$ (esto equivale a que $B \subseteq Im(f)$)
3. Biyectiva: si es inyectiva y sobreyectiva

Ejemplo. Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ es inyectiva y no es sobreyectiva

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+1}{3} = \frac{2b+1}{3} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 2a+1 = 2b+1 \Rightarrow$$

$$\overset{-1}{\Rightarrow} 2a = 2b \overset{:2}{\Rightarrow} a = b$$

Comprobamos que no es sobreyectiva:

Para demostrar que una aplicación no es sobreyectiva hay que dar un elemento del codominio que no esté en la imagen.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \notin Im(f)$ ya que si un número racional lo multiplico $\times 2$, le sumo 1 y lo divido $:3$ me vuelve a dar un nº racional y sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional.

Ejemplo. Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

Como $f(2) = f(-2)$ la aplicación no es inyectiva.

$3 \in \mathbb{N}$ y $3 \notin Im(f)$ ya que 3 no es el cuadrado de un nº entero.

Ejemplo. Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \dfrac{7x-5}{2}$ es biyectiva

Inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{7a-5}{2} = \frac{7b-5}{2} \overset{\times 2}{\Rightarrow} 7a-5 = 7b-5 \overset{+5}{\Rightarrow} 7a = 7b \Rightarrow$$

$$\overset{:7}{\Rightarrow} a = b$$

Por tanto f es inyectiva.

Para demostrar que f es sobreyectiva deberemos de probar que $\mathbb{Q} \subseteq Im(f)$

Si $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2q+5}{7} \in \mathbb{Q}$ y $f\left(\frac{2q+5}{7}\right) = q \Rightarrow$

$\Rightarrow q \in Im(f)$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$?\ \ \ \ q$
$\frac{7?-5}{2} = q \Rightarrow ? = \frac{2q+5}{7}$

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ dos aplicaciones. La aplicación composición de f y g es la aplicación $g \circ f: A \longrightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = \frac{2n+1}{3}$, calcular $g \circ f$

$Dom(g \circ f). \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z^2) = \frac{2z^2+1}{3}$

Nota: Obsérvese que una cosa es $g \circ f$ y otra cosa es $f \circ g$. Por ejemplo en el ejemplo anterior $f \circ g$ no tiene sentido.

Por oposición la composición de aplicaciones es asociativa y no es conmutativa.

Nota:

1. Decir que la composición de aplicaciones es asociativa significa que si tenemos 3 aplicaciones $f: A \rightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

2. Decir que la composición de aplicaciones no es conmutativa significa que aún en el caso en que $g \circ f$ y $f \circ g$ tengan sentido en general $g \circ f \neq f \circ g$ Como muestra el siguiente ejemplo:

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x) = x+1$ $\qquad g(y) = y^2$

$g \circ f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z+1) = (z+1)^2$

$f \circ g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z^2) = z^2+1$

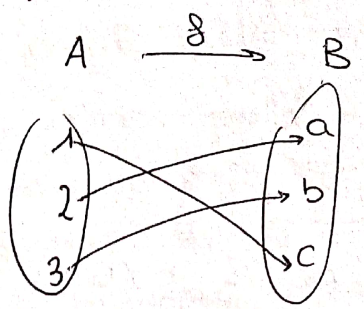
$f \circ g \neq g \circ f$

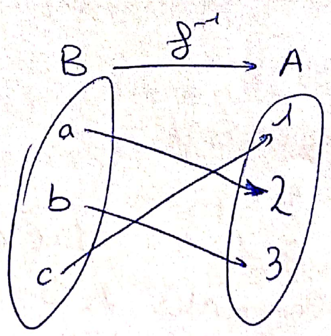
Sea A un conjunto la aplicación identidad sobre el conjunto A es la aplicación $1_A: A \to A$ definida por $1_A(a) = a$.

Proposición: si $f: A \to B$ es una aplicación biyectiva $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ una única aplicación $g: B \to A$ verificando que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

La aplicación g de la proposición anterior diremos que es la inversa de f: f^{-1}

Ejemplo.





$f^{-1} \circ f = 1_A$

$f \circ f^{-1} = 1_B$

Ejercicio Dado la aplicación biyectiva $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$ calcular f^{-1}

$f(?) = y \Rightarrow \dfrac{3?+2}{5} = y$

$\Rightarrow ? = \dfrac{5y-2}{3}$

$f^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$f^{-1}(y) = \dfrac{5y-2}{3}$