Apellidos: .... Grupo: ...

Nombre: .... D.N.I.: ....

ALEM, Examen final

03 de febrero de 2016

1. Sea X un conjunto y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Decide razonadamente si es necesariamente cierta la siguiente igualdad:

$$(A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

Solución:

Podemos resolver el ejercicio de dos maneras:

- Transformando la expresión de la izquierda siguiendo las propiedades que tenemos sobre las operaciones con conjuntos:

$$\begin{aligned}
(A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) && \text{Ley de de Morgan} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) && \text{Pues } \overline{\overline{C}} = C \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \emptyset) && \text{Pues } \overline{C} \cap C = \emptyset \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup \emptyset \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
\end{aligned}$$

- Mediante una tabla de pertenencia:

A	B	C	$\overline{C}$	$A \cap \overline{C}$	$B \cap \overline{C}$	$\overline{B \cap \overline{C}}$	$(A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}}$	$\overline{B}$	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
0	0	0	1	0	0	1	**0**	1	**0**
0	0	1	0	0	0	1	**0**	1	**0**
0	1	0	1	0	1	0	**0**	0	**0**
0	1	1	0	0	0	1	**0**	0	**0**
1	0	0	1	1	0	1	**1**	1	**1**
1	0	1	0	0	0	1	**0**	1	**0**
1	1	0	1	1	1	0	**0**	0	**0**
1	1	1	0	0	0	1	**0**	0	**0**

Y vemos como las columnas correspondientes a $(A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}}$ y $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ coinciden, luego ambos conjuntos son iguales.

2. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y R la relación de equivalencia en X definida por:

$$xRy \quad \text{si} \quad 4 \mid x + 3y$$

Calcula el conjunto cociente, dando explícitamente todos sus elementos.

Solución:

Vamos a calcular todas las clases de equivalencia.

Comenzamos por clase del cero. En esta clase de equivalencia estarán todos los elementos $x \in X$ tales que $xR0$.

Decir que $xR0$ significa que $4|x + 3 \cdot 0$, es decir, que $x + 0$ es múltiplo de 4. Tenemos entonces que la clase del cero son todos los múltiplos de 4.

- $[0] = \{x \in X : xR0\} = \{x \in X : 4|(x + 3 \cdot 0)\} = \{x \in X : 4|x\} = \{0, 4, 8\}$.
- $[1] = \{x \in X : xR1\} = \{x \in X : 4|(x + 3 \cdot 1)\} = \{x \in X : 4|x + 3\} = \{1, 5, 9\}$.
- $[2] = \{x \in X : xR2\} = \{x \in X : 4|(x + 3 \cdot 2)\} = \{x \in X : 4|x + 6\} = \{2, 6\}$.
- $[3] = \{x \in X : xR3\} = \{x \in X : 4|(x + 3 \cdot 3)\} = \{x \in X : 4|x + 9\} = \{3, 7\}$.

Y ya tenemos todas las clases. Por tanto, el conjunto cociente es:

$$X/R = \{[0],\ [1],\ [2],\ [3]\}$$

3. Dado el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} 15x &\equiv 7 \pmod{16} \\ 30x &\equiv 38 \pmod{56} \end{aligned}$$

estudia si tiene solución y en caso afirmativo, da todas las soluciones comprendidas entre -100 y 100.

Solución:

Para resolver este sistema de congruencias, resolvemos la primera congruencia y la solución la introducimos en la segunda.

$15x \equiv 7$ mód 16	$mcd(15,16) = 1$.la congruencia tiene solución. Calculamos 15^{-1} mód 16. Dicho inverso vale $-1 = 15$.
$x \equiv 7 \cdot 15$ mód 16	
$x \equiv 105$ mód 16	
$x \equiv 9$ mód 16	

La solución de la primera congruencia es $x = 9 + 16k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Introducimos este valor de x en la segunda congruencia:

$30(9 + 16k) \equiv 38$ mód 56	Operamos.
$270 + 480k \equiv 38$ mód 56	
$46 + 32k \equiv 38$ mód 56	
$32k \equiv 38 - 46$ mód 56	
	La congruencia tiene solución. Dividimos todo por 8.
$4k \equiv 6$ mód 7	4^{-1}mód $7 = 2$.
$k \equiv 12$ mód 7	
$k \equiv 5$ mód 7	
$k = 5 + 7k'$	

Sustituimos el valor de k en $x = 9 + 16k$ y obtenemos todas las soluciones del sistema:

$$x = 9 + 16(5 + 7k') = 89 + 112k' : \ k' \in \mathbb{Z}$$

Y ahora, una vez que hemos obtenido todas las soluciones buscamos las que se encuentran en el rango que nos piden:

$$-100 \leqslant x \leqslant 100$$

$$-100 \leqslant 89 + 112k' \leqslant 100$$

$$-189 \leqslant 112k' \leqslant 11$$

$$\tfrac{-189}{112} \leqslant k' \leqslant \tfrac{11}{112}$$

$$-1'6875 \leqslant k' \leqslant 0'098$$

$$-1 \leqslant k' \leqslant 0$$

Luego k' puede valer -1 ó 0, lo que nos da $x = -23$ y $x = 89$. Estas son las dos únicas soluciones entre -100 y 100.

4. En este ejercicio trabajamos en $\mathbb{Z}_{53}$.
   a) Calcula 247^{3645}.
   b) Resuelve la ecuación $17x - 32 = 43 - (5x - 8)$.

   Solución:

   a) En primer lugar, y puesto que $247 \equiv 35 \bmod 53$ el cálculo que nos piden es igual a 35^{3645}.
   Por otra parte, al ser 53 primo, $\varphi(53) = 52$, lo que nos dice (teorema de Fermat) que $35^{52} = 1$.
   Realizamos la división de 3645 entre 52, y obtenemos que $3645 = 52 \cdot 70 + 5$.
   En tal caso, $35^{3645} = 35^5 = 52521875 = 41$.
   El resultado que nos piden es entonces 41.

   b) Resolvemos la ecuación:

$$17x - 32 = 43 - (5x - 8)$$

$$17x - 32 = 43 - 5x + 8$$

$$17x + 5x = 43 + 8 + 32$$

$$22x = 83$$

$$22x = 30$$

$$x = 22^{-1} \cdot 30$$

$$x = 41 \cdot 30$$

$$x = 1230$$

$$x = 11$$

   A continuación vamos a ver el cálculo de 22^{-1}.

r	c	v
53		0
22		1
9	2	−2
4	2	5
1	2	−12

   Luego $22^{-1} = -12 = 41$.

5. Dados los polinomios $p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ y $q(x) = x^4 + x^3 + x + 2$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$:
   a) Calcula $\mathrm{mcd}(p(x), q(x))$.
   b) Calcula las raíces de $p(x)$.
   c) Encuentra una factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles.

   Solución

   a) Para el cálculo del máximo común divisor nos valemos del algoritmo de Euclides. Para eso, vamos realizando divisiones hasta obtener resto igual a cero.

   - Dividimos $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ entre $x^4 + x^3 + x + 2$.

$$\begin{array}{r|cccccc} & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & & 2 & 2 & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & & \\ 2 & & & & 2 & 2 & \\ 1 & & & & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c(x) = x + 1 \\ \\ r(x) = x^3 + x^2 + 2x \end{array}$$

   - Ahora dividimos $x^4 + x^3 + x + 2$ entre $x^3 + x^2 + 2x$.

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & & 2 & 0 & & \\ 1 & & & 1 & 0 & \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c(x) = x \\ \\ r(x) = x^2 + x + 2 \end{array}$$

   - Ahora $x^3 + x^2 + 2x$ entre $x^2 + x + 2$. Podemos ver que el cociente de esta división es x y el resto 0.

   Luego $\mathrm{mcd}(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ x^4 + x^3 + x + 2) = x^2 + x + 2$ (el último resto distinto de cero).

   b) Evaluamos $p(x)$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.
   $p(0) = 2 \neq 0$.
   $p(1) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11 = 2 \neq 0$.
   $p(2) = 2^5 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 32 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 94 = 1 \neq 0$.
   Y vemos que el polinomio $p(x)$ no tiene raíces.

   c) Puesto que sabemos que $x^2 + x + 2$ es un divisor de $p(x)$, realizamos la división de $p(x)$ entre $x^2 + x + 2$.

$$\begin{array}{r|cccccc} & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & & 2 & 2 & 1 & 2 & \\ 1 & & & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

   Y vemos que $p(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + x + 2)$, y puesto que ninguno de estos polinomios tiene raíces (comprobado en el apartado anterior) son irreducibles. Es decir, ésa es la factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles.

6. Disponemos de 14 caramelos para repartir entre 4 niños. Da razonadamente el número de formas de repartir los caramelos entre los niños en cada uno de los siguientes supuestos:
   a) Cada niño debe recibir al menos un caramelo.
   b) Ningún niño puede recibir más caramelos que los otros tres compañeros juntos.
   c) El número de caramelos que ha de recibir cada niño es par.

   Solución:

   a) Puesto que cada niño debe recibir al menos un caramelo, lo que hacemos es dar un caramelo a cada niño y a continuación repartir los 10 caramelos restantes a los cuatro niños. Tenemos entonces que contar cuántas soluciones naturales tiene la ecuación
   $$x+y+z+t=10$$
   donde x es el número de caramelos que damos al primer niño en la segunda etapa (después de haberle dado 1), y el número de caramelos que le damos al segundo niño, z el número de caramelos que damos al tercer niño y t el número de caramelos que damos al cuarto niño (todos después de haberle dado ya uno).
   El número de soluciones de esta ecuación es
   $$\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}=\frac{13!}{10!\cdot 3!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2}=13\cdot 2\cdot 11=286.$$

   b) Lo que vamos a hacer es contar de cuántas formas se pueden repartir los caramelos y después contaremos aquéllas en las que un niño tiene más caramelos que los tres restantes.
   El número de formas de repartir los 14 caramelos es igual al número de soluciones naturales de la ecuación $x+y+z+t=14$, y este número es
   $$\binom{14+4-1}{4-1}=\binom{17}{3}=\frac{17!}{14!\cdot 3!}=\frac{17\cdot 16\cdot 15}{3\cdot 2}=17\cdot 8\cdot 5=17\cdot 4\cdot 10=680.$$
   Para que un niño tenga más caramelos que los otros tres compañeros juntos, este niño debe tener más de 7 caramelos (y así los otros tres tendrán en total menos de 7).
   Veamos en primer lugar en cuantos repartos el primer niño tiene 8 o más caramelos. Para esto, le damos inicialmente 8 caramelos y a continuación repartimos los 6 restantes. Tenemos entonces que contar el número de soluciones naturales de la ecuación $x+y+z+t=6$. Este número es
   $$\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=\frac{9!}{6!\cdot 3!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=3\cdot 4\cdot 7=84.$$
   El número de repartos en que el segundo niño tiene 8 o más caramelos es también 84. E igual para el tercero y el cuarto. Puesto que no puede haber un reparto en el que dos niños tengan cada uno más caramelos que los restantes, el número de repartos en que algún niño se lleva más caramelos que el resto es $4\cdot 84=336$.
   Por tanto, la solución a lo que nos plantea el enunciado es $680-336=344$.

   c) Para darle a cada niño un número par de caramelos, lo que hacemos es formar 7 grupos de 2 caramelos, y los repartimos entre los 4 niños. Entonces, tenemos que contar el número de soluciones de la ecuación $x+y+z+t=7$. Este número es:
   $$\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=10\cdot 3\cdot 4=120.$$

7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & & & = & 2 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & 2y & & & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & + & 3t & = & 0 \end{array}$$

calcula todas sus soluciones.

Solución:

Para resolver el sistema tomamos la matriz ampliada y calculamos su forma escalonada reducida (forma de Hermite) por filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(3) \\ E_{31}(4) \\ E_{41}(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{E_{12}(4) \\ E_{32}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{13}(4) \\ E_{43}(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es entonces equivalente a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & & = & 1 \\ & & y & + & 4z & & = & 0 \\ & & & & & t & = & 3 \end{array}$$

y despejando las incógnitas principales x, y, t tenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3z \\ y & = & & & z \\ t & = & 3 & & \end{array}$$

Como la incógnita z queda libre, tenemos 5 soluciones (una para cada valor de z). Estas soluciones las obtenemos dándole a z los cinco posibles valores de $\mathbb{Z}_5$, y son:

$$\begin{array}{lllll} x=1 & x=4 & x=2 & x=0 & x=3 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & y=4 \\ z=0 & z=1 & z=2 & z=3 & z=4 \\ t=3 & t=3 & t=3 & t=3 & t=3 \end{array}$$

8. Sea $B = \{(1,1,-2);\ (3,1,2);\ (4,2,-1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}^3$ y sea B_c la base canónica de dicho espacio vectorial.

   a) Comprueba que B es una base.

   b) Calcula las matrices del cambio de base de B a B_c y de B_c a B.

   c) Calcula las coordenadas del vector $v = (3,-1,2)$ en la base B.

   Solución:

   a) Puesto que tenemos tres vectores en un espacio de dimensión 3, lo que tenemos es que comprobar que estos tres vectores son linealmente independiente. Para esto, formamos una matriz con estos 3 vectores y comprobamos que su rango es igual a 3. Esto lo comprobaremos calculando su determinante y viendo que es distinto de cero. Escribiremos los vectores por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$\det(A) = 1\cdot 1\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot 4+3\cdot 2\cdot(-2)-4\cdot 1\cdot(-2)-3\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot 1 = -1+8-12+8+3-4 = 2 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero, el rango de A vale 3, luego los vectores de B forman una base de $\mathbb{Q}^3$.

   b) Comenzamos con la matriz del cambio de base de B a B_c. Esta matriz es fácil de calcular, pues sus columnas son las coordenadas de los vectores de B en la base canónica. Pero eso es justamente la matriz A que hemos estudiado en el apartado anterior. Por tanto:

$$M_{B\to B_c} = A$$

La otra matriz que nos piden es la del cambio inverso. Esta matriz será entonces la inversa de A. Calculamos entonces A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-8)]{E_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-1)]{E_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$M_{B_c\to B} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 11 & 2 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

   c) Puesto que las coordenadas de v en la base canónica son $(3,-1,2)$, para calcular sus coordenadas en B únicamente hemos de multiplicar estas coordenadas por la matriz del cambio de base:

$$(v)_B = M_{B_c\to B}\cdot(v)_{B_c} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 11 & 2 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es decir, las coordenadas de v en la base B son $(-11,-6,8)$, como podemos comprobar fácilmente:

$$-11\cdot(1,1,-2)-6\cdot(3,1,2)+8\cdot(4,2,-1) = (-11,-11,22)+(-18,-6,-12)+(32,16,-8) = (3,-1,2) = v$$

9. Sea $V = (\mathbb{Z}_7)^3$ y las aplicaciones lineales $f, g\colon V \longrightarrow V$ definidas por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (3x+4y+2z, 5x+y+3z, 4y+6z) \\ g(x,y,z) &= (2x+y, x+z, 6y+2z) \end{aligned}$$

Sea $U = N(g)$ y $W = Im(f)$. Entonces:

a) Calcula una base de $U + W$. ¿Es dicha suma directa?

b) ¿Cuál es la dimensión de $Im(g)$?

Solución:

a) Dado que nos están pidiendo la suma de los subespacios U y W, necesitamos un sistema de generadores de U y otro de W, y después unirlos. Dividimos el problema entonces en varias subetapas.

- Cálculo de un sistema de generadores de U.
  Puesto que $U = N(g)$, tenemos las ecuaciones de U (pues $U = \{(x,y,z) \in V : g(x,y,z) = (0,0,0)\}$). Resolvemos este sistema de ecuaciones para obtener una base. Para esto, escribimos la matriz de coeficientes del sistema (que no es sino la matriz de g en las bases canónicas) y obtenemos su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vemos entonces que U viene dado por 2 ecuaciones, luego $\dim(U) = 3-2 = 1$. Para obtener una base despejamos las incógnitas x e y y le damos a z el valor $z = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & = & 6z \\ y & = & 2z \end{array}$$

  Lo que nos da la siguiente base de U: $B_U = \{(6,2,1)\}$.
- Calculamos un sistema de generadores de W.
  Esto es más fácil, pues al ser $W = Im(f)$, un sistema de generadores de este subespacio es $\{f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\}$. Por tanto, un sistema de generadores de W es $\{(3,5,0),\ (4,1,4),\ (2,3,6)\}$.
  Aunque no es necesario para calcular $U + W$ vamos a obtener una base de W. Para esto realizamos transformaciones en estos tres vectores.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(5)]{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(6)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(5)]{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Y con esto, tenemos una base de W: $B_W = \{(1,0,2),\ (0,1,3)\}$. Vemos entonces que $\dim(W) = 2$.
- Obtenemos una base de $U + W$.
  En primer lugar, lo que podemos conseguir es un sistema de generadores de $U + W$. Y esto se consigue uniendo un sistema de generadores de U y uno de W. Por tanto, un sistema de generadores de $U + W$ es:

$$\{(1,0,2),\ (0,1,3),\ (6,2,1)\}$$

  Comprobamos si son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(4)]{E_{13}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Y de esta forma hemos obtenido una base de $U+W$. Esta base es $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$. Puesto que esto es una base de V concluimos que $V = U + W$.

Para responder a la pregunta de si la suma es directa, hemos de calcular $U \cap W$. Puesto que

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

tenemos que $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. Esto nos dice que la suma es directa.

b) Sabemos que $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(V) - \dim(N(g)) = 3 - 1 = 2$.

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3)$$

estudia si A es o no diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal D y di cuál es la matriz D.

Solución:

Dividimos la resolución del ejercicio en cuatro pasos:

- Cálculo del polinomio característico:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathrm{Id}) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot [(-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1(2-\lambda) - 2 \cdot 1(2-\lambda) - 1 \cdot 1(-\lambda)] \\
&= (2-\lambda) \cdot [(-\lambda)(4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2) + 2 + 2 - 4 + 2\lambda - 4 + 2\lambda + \lambda] \\
&= (2-\lambda) \cdot (-4\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 + 2 - 4 + 2\lambda - 4 + 2\lambda + \lambda) \\
&= (2-\lambda) \cdot (-\lambda^3 + (2+2)\lambda^2 + (-4+2+2+1)\lambda + (2+2-4-4)) \\
&= (2-\lambda)(2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2)
\end{aligned}$$

- Calculamos los valores propios con sus multiplicidades algebraicas.
  Para esto, calculamos las raíces del polinomio característico. Puesto que el polinomio característico tiene el factor $(2-\lambda)$ ya sabemos que $\lambda = 2$ es un valor propio. Lo que no sabemos es su multiplicidad.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & & 2 & 0 & 1 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & & 2 & 2 & \\
\hline
 & 2 & 2 & 0 & \\
2 & & 1 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & &
\end{array}$$

  Lo cual hace que el valor propio 2 tenga multiplicidad 2, al igual que el valor propio 1. En resumen, tenemos:

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda = 1$	$\alpha_1 = 2$	$d_1 = 1$ ó 2
$\lambda = 2$	$\alpha_2 = 2$	$d_2 = 1$ ó 2

- Calculamos las multiplicidades geométricas.
  - Comenzamos calculando la dimensión de V_1. Sabemos que V_1 viene dado por un sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A - \mathrm{Id}$. Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{E_{14}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)]{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vemos que V_1 viene dado por dos ecuaciones:

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & + & t & = & 0 \\ & & & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

  luego $d_1 = \dim(V_1) = 4 - 2 = 2$.
  - Calculamos ahora la dimensión de V_2. Procedemos igual que en el caso precedente, pero partiendo de la matriz $A - 2\mathrm{Id}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(2)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Y también V_2 viene dado por dos ecuaciones:

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

  luego $d_2 = \dim(V_2) = 4 - 2 = 2$.

Completamos el cuadro que teníamos más arriba.

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda = 1$	$\alpha_1 = 2$	$d_1 = 2$
$\lambda = 2$	$\alpha_2 = 2$	$d_2 = 2$

Y puesto que la suma de las multiplicidades geométricas vale 4 la matriz es diagonalizable, así que continuamos con la siguiente etapa:

- Cálculo de bases de vectores propios.
  Puesto que ya tenemos las ecuaciones de cada uno de los subespacios propios, despejamos en cada uno de ellos las incógnitas principales y le asignamos los valores $(1,0)$ y $(0,1)$ al resto.
  - Para V_1.
    Las ecuaciones de V_1 nos quedan:

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 2y & + & 2t \\ z & = & 0 & & \end{array} \right.$$

    Y ahora, eligiendo por una parte $y = 1$, $t = 0$ y por otra $y = 0$, $t = 1$ obtenemos una base de V_1. Esta base es $B_{V_1} = \{(2,1,0,0),\ (2,0,0,1)\}$.
  - Para V_2.
    De lo obtenido previamente nos quedan las siguientes ecuaciones para V_2:

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 2z & + & 2t \\ y & = & z & + & t \end{array} \right.$$

    Y la base de V_2 que tenemos es $B_{V_2} = \{(2,1,1,0),\ (2,1,0,1)\}$.

Ahora, si tomamos como matriz P aquélla cuyas columnas son los vectores propios que hemos obtenido, es decir, $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces P es regular y

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es una matriz diagonal, y es la matriz D que nos pedía el enunciado.