Relación De Ejercicios del Tema IV

(*Espacios vectoriales, operaciones con subespacios, bases y dimensión.*)

Ejercicio 1. *Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes*

(11) *En* $\mathbb{Q}^4$, $\mathbb{Z}_2^4$, $\mathbb{Z}_3^4$,$\mathbb{Z}_5^4$, $\mathbb{Z}_7^4$, *se considera el subconjunto*

$$\Big\{(3,-1,-4,0),(0,1,8,-1),(3,-1,5,4),(0,0,3,3)\Big\}.$$

(12) *El conjunto* $\{1-\mathsf{x},\mathsf{x}\}$ *en* $\mathbb{R}[\mathsf{x}]_2$.

(13) *En* $\mathbb{Q}[\mathsf{x}]_3$ *y* $\mathbb{Z}_5[\mathsf{x}]_4$, *se considera el conjunto* $\{-\mathsf{x},\mathsf{x}^2-2\mathsf{x},3\mathsf{x}+5\mathsf{x}^2\}$.

(14) *En* $\mathbb{Z}_3[\mathsf{x}]_3$, *se considera el conjunto* $\{2\mathsf{x},\mathsf{x}^3-3,1+\mathsf{x}-4\mathsf{x}^3,\mathsf{x}^3+18\mathsf{x}-9\}$.

(15) *En* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, *se considera el subconjunto:*

$$\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

La notación $\mathbb{K}[\mathsf{x}]_n$ *se refiere al* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de polinomios de grado menor que* n.

Ejercicio 2. *¿Cuáles de los siguientes subconjuntos* $H\subseteq V$ *son además subespacios vectoriales?*

(1) $V=\mathbb{R}^2$,
$H=\{(x,y)|\,y\geq 0\}$;

(2) $V=\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$,
$H=\left\{A\in V|\,A=\begin{pmatrix}a&b\\4b&c\end{pmatrix}\right\}$;

(3) $V=\mathbb{Z}_5[\mathsf{x}]_4$,
$H=\{p\in V|\,deg(p)=4\}$;

(4) $V=\mathbb{Z}_2[\mathsf{x}]_n$,
$H=\{p\in V|\,p(0)=1\}$;

(5) $V={\mathbb{Z}_3}^3$,
$H=\{(x,y,z)\in V|ax-y=bz,a,b\in\mathbb{Z}_3\}$;

(6) $V=\mathbb{Q}^3$,
$H=\{(x,y,z)\in V|ax-by=z,a,b\in\mathbb{Z}\}$

Ejercicio 3. *Sea* $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_{19}^3|\;8x-18y+7z=0\}$ *y consideramos los vectores* $u=(1,2,4)$, $v=(-3,1,6)$, $p=(1,-8,0)$ *y* $q=(0,-7,1)$ *de* $\mathbb{Z}_{19}^3$.

(31) *Compruebe que* V *es un* $\mathbb{Z}_{19}$*-espacio vectorial.*

(32) *Demuestre que* $u,v,p,q\in V$.

(33) *¿Cual de los conjuntos* $\{u,v\}$, $\{p,q\}$ *es un conjunto generador de* V.

Ejercicio 4. *Sea* $A=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&4&-2\\1&0&4\end{pmatrix}$ *una matriz in* $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$. *Consideramos los siguientes subconjunto de* $\mathbb{Z}_5^3$:

$$V:=\Big\{v\in\mathbb{Z}_5^3|\;Av=0\Big\},\quad W=\Big\{v\in\mathbb{Z}_5^3|\;Av=-3v\Big\}.$$

Demuestre que ambos V y W son $\mathbb{Z}_5$-subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$. Calcule sus ecuaciones paramétricas y luego sus dimensiones.

Ejercicio 5. *Sean $V = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_{11}^2 |\ x = 0\}$ y $W = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_{11}^2 |\ y = 0\}$ subconjuntos de $\mathbb{Z}_{11}^2$.*

(51) Representa gráficamente V y W en el plano $\mathbb{Z}_{11}^2$

(52) Verifique que V y W son dos $\mathbb{Z}_{11}$-subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_{11}^2$.

(53) Representa gráficamente el subconjunto $V \cup W$ en el plano $\mathbb{Z}_{11}^2$ deduce que este conjunto no es un subespacio vectorial.

Ejercicio 6. *Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 \quad - 6x_5 = 0 \\ \quad x_2 - 5x_3 \quad + 3x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - \ \ x_5 = 0 \end{cases}$$

denotaremos por $V \subseteq \mathbb{Z}_7^5$ el conjunto de sus soluciones.

(61) Demuestre que V es un $\mathbb{Z}_7$-subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^5$.

(62) Compruebe que si $u \in V$, entonces todas las coordenadas canónicas de u puedan expresarse solamente en función de las coordenadas x_3 y x_5.

(63) Deduce la forma generale de un vector de V y construye una familia de generadores de V.

(64) ¿Es posible encontrar un vector $v \in V$ tal es que $\mathscr{L}(\{v\}) = V$?

Ejercicio 7. *Sea $V = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ el $\mathbb{Z}_3$-espacio vectorial con base canónica $\{e_1 := (1,0), e_2 := (0,1)\}$. Consideramos un conjunto X de dos elementos, por ejemplo $X = \{0,1\}$. Dotaremos el conjunto $W := \mathrm{Maps}(X,V)$ de todas las aplicaciones de X hacia a V con las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} + : W \times W &\longrightarrow W \\ (f,g) &\longmapsto \Big(f + g := \big[x \mapsto f(x) + g(x)\big]\Big) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z}_3 \times W &\longrightarrow W \\ (\lambda, f) &\longmapsto \Big(\lambda \cdot f := \big[x \mapsto \lambda f(x)\big]\Big). \end{aligned}$$

(71) Demuestre que W es un $\mathbb{Z}_3$-espacio vectorial.

(72) Compruebe que los vectores $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \subseteq W$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{F_1} V \\ 0 &\longmapsto e_1 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &\xrightarrow{F_2} V \\ 0 &\longmapsto e_2 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &\xrightarrow{F_3} V \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto e_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &\xrightarrow{F_4} V \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto e_2 \end{aligned}$$

son linealmente independiente y a su vez un conjunto generador.

(73) Calcule la dimensión de W.

Ejercicio 8. *Consideramos $V = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$, de manera canónica, como $\mathbb{Z}_7$-espacio vectorial.*

(81) Demuestre que el subconjunto $\big\{(x,y) \in V |\ 2x - 4y = 5\big\}$ no es un subespacio vectorial de V.

(82) Representa gráficamente el subconjunto $X = \big\{(x,y) \in V |\ 3x - 5y = -1\big\}$ y encuentre el subespacio $\mathscr{L}(X)$ de V generado por X.

Ejercicio 9. *Consideramos $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, de manera canónica, como $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial.*

(91) *Demuestra que cualquier subespacio de V con dimensión 1 tiene exactamente 5 vectores.*

(92) *Comprueba que el subconjunto $\{(x, y, z) \in V \mid 2x - 4y = 0, z = 0\}$ es un subespacio vectorial de V y encuentra una base.*

(93) *Sea W el conjunto de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_5$*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Compruebe que W es un $\mathbb{Z}_5$-subespacio vectorial de V y calcule su dimensión. Representa gráficamente W en el espacio usual de tres dimensiones.

(94) * *Calcule cuantos subespacios vectoriales de V hay con dimensión 2.*

Ejercicio 10. *Consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_{11}[\mathsf{x}]_3$ de todos los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$.*

(101) *Demuestre que $\mathbb{Z}_{11}[\mathsf{x}]_3$ es un $\mathbb{Z}_{11}$-espacio vectorial y encuentre una base. ¿Cuales su dimensión?*

(102) *Compruebe que el subconjunto $V = \{p(\mathsf{x}) \in \mathbb{Z}_{11}[\mathsf{x}]_3 \mid \mathsf{x}p'(\mathsf{x}) = p(\mathsf{x})\}$ ($p'(\mathsf{x})$ es la derivada de $p(\mathsf{x})$) es un $\mathbb{Z}_{11}$-subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_{11}[\mathsf{x}]_3$.*

(103) *¿Cuales la forma general de los elementos de los vectores de V?*

(104) *¿Es V igual a $\mathbb{Z}_{11}[\mathsf{x}]_3$? (Justifica tu respuesta).*

(105) *Calcule una base y la dimensión de V.*

Ejercicio 11. *En un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, los vectores $S = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1)\}$ vienen dados por sus coordenadas en una cierta base. Comprueba que S es un base y halla las coordenadas del vector $(1, 0, 2)$ en dicha base.*

Ejercicio 12. *Para las bases de $V := \mathbb{R}^3$*

$$B = \{v_1 = (4, 0, 7), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (3, 1, 3)\}$$
$$B' = \{v'_1 = (1, 0, 2), v'_2 = (4, 1, 5), v'_3 = (1, 0, 3)\}$$

calcula las matrices de cambio de base. Responde a la misma pregunta cuando

$$V = \mathbb{Z}_7^3, \quad V = \mathbb{Z}_{11}^3 \quad \text{y} \quad V = \mathbb{Z}_{13}^3.$$

Ejercicio 13. *Sea $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*

(131) *Se definen las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (f, g) &\longmapsto \big(f + g : r \mapsto f(r) + g(r)\big) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, f) &\longmapsto \big(\lambda \cdot f : r \mapsto \lambda f(r)\big) \end{aligned}$$

Comprobar que con estas operaciones V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(132) *Consideramos los siguientes subconjunto de V:*

$$V_1 = \{\varphi \in V |\, \varphi(0) = \varphi(1) = -\varphi(-1)\}\,;\ V_2 = \{l \in V |\, \forall r \in \mathbb{R}, l(r) = ar + b,\ \textit{para algún}\ a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Comprobar que V_1 y V_2 son dos subespacios complementarios de V. $V_1 \oplus V_2 = V$.

Ejercicio 14. *Consideramos $V := \mathrm{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de manera canónica, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sean $u, v, w \in V$ definidas por*

$$\Big(u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big[x \mapsto 1\big]\Big); \quad \Big(v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big[x \mapsto Sen(4x)\big]\Big); \quad \Big(w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big[x \mapsto Cos(4x)\big]\Big).$$

(141) *Compruebe que el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.*

(142) *Demuestre que las aplicaciones*

$$\Big(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big[x \mapsto Sen^2(2x)\big]\Big); \quad \Big(g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big[x \mapsto Sen(2x)Cos(2x)\big]\Big)$$

son vectores del subespacio vectorial $\mathscr{L}\big(\{u, v, w\}\big)$ generado por el conjunto $\{u, v, w\}$.

Ejercicio 15. *Para cada uno de los casos que a continuación se detallan, halla las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio $\mathscr{L}(X)$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, generado por el conjunto X y calcule su dimensión. Completa la base de $\mathscr{L}(X)$ a una base de V.*

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $V = (\mathbb{Z}_5)^3$,
$X = \{(1, 2, 4), (0, 4, 2)\}$;

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}^3$,
$X = \big\{(2, \frac{1}{3}, \sqrt{3}), (1, -\frac{1}{5}, 3)\big\}$;

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$,
$X = \Big\{(\frac{3}{4}, \pi), (1, \sqrt{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})\Big\}$;

(4) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$, $V = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$,
$X = \big\{(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{5})\big\}$;

(5) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$,
$X = \big\{(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}), (-\frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})\big\}$;

(6) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{11}$, $V = \mathbb{Z}_{11}^3$,
$X = \big\{(2, -\frac{3}{6}, -\frac{7}{8}), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{9}, \frac{7}{8})\big\}$.

Ejercicio 16. *Para cada una de la siguiente pajera U, W de subespacios del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, calcule $U \cap W$ y $U + W$, proporcionando en cada caso una base.*

$$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^2,\ U = \{(x, y) \in V |\, \sqrt{2}x - y = 0\},\ W = \{(x, y) \in V |\, x = 2y\};$$
$$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^3,\ U = \{(x, y, z) \in V |\, 2x - y + z = 0\},\ W = \{(x, y, z) \in V |\, x + y + z = 0\};$$
$$\mathbb{K} = \mathbb{Q},\ V = \mathbb{Q}^3,\ U = \{(x, y, z) \in V |\, x - \frac{1}{2}y + z = 0\},\ W = \{(x, y, z) \in V |\, x + z = 0\}.$$

Comprobar que en todos eso casos se satisface la siguiente ecuación:

$$dim_{\mathbb{K}}(U + W)\ =\ dim_{\mathbb{K}}(U) + dim_{\mathbb{K}}(W) - dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

Ejercicio 17. *Consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.*

(171) *Probar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, ax + by + cz = 0,\ \textit{donde}\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*

(172) *Calcule la dimensión de los subespacios $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x - y = 0\}$ y $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 2x + y - z = 0\}$.*

(173) *Comprobar que cualquier subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *de dimensión* 2 *es, salvo isomorfismos, de forma* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, ax + by + cz = 0,\ \textit{para ciertos números no nulos}\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$. *Encuentra una descripción geométrica de estos subespacios.*

(174) *Demostrar que cualquier subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *de dimensión* 1 *es, salvo isomorfismos, de forma* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, ax+by+cz = 0,\ \textit{donde exactamente dos de los números}\ a, b, c \in \mathbb{R},\ \textit{no son nulos}\}$. *Encuentra una descripción geométrica de estos subespacios.*

(175) *Compruebe que los únicos subespacio no propios de* $\mathbb{R}^3$ *son los del tipo descrito en los apartados (173) o (174). Un subespacio propio es aquel que es distinto del espacio total y del subespacio cero.*

Ejercicio 18. *Encuentra la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores*

(181) *El subconjunto* $\{(1, 2, 3), (3, 4, 5)\}$ *de* $\mathbb{Z}_7^3$.

(182) *El subconjunto* $\{(1, 2, 3, -1), (0, -2, 1, 3), (0, 3, 4, -1)\}$ *de* $\mathbb{Z}_5^4$.

(183) *El subconjunto* $\{1 + \mathsf{x} + \mathsf{x}^2, 2 - \mathsf{x}^2 + \mathsf{x}^3, 1 - \mathsf{x} - 2\mathsf{x}^2 + \mathsf{x}^3, 1 + 3\mathsf{x} + 4\mathsf{x}^2 - \mathsf{x}^3\}$ *de* $\mathbb{Z}_5[\mathsf{x}]_3$.

(184) *El subconjunto* $\{1 - \mathsf{x}, \mathsf{x} + \mathsf{x}^2, \mathsf{x} + \mathsf{x}^3\}$ *de* $\mathbb{Z}_3[\mathsf{x}]_3$.

Ejercicio 19. *Sea* V *un* $\mathbb{Z}_7$*-espacio vectorial de dimensión* 4 *y* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *una base de* V. *Denotaremos por* W *el subespacio de* V *generado por el conjunto* $\{e_1, e_3\}$. *Consideramos el subespacio* $U := \mathscr{L}(\{u, v\})$ *generado por los siguientes vectores de* V:

$$u = e_1 + 5e_2 + e_3 + e_4, \quad v = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4.$$

(191) *Compruebe que los* $\{u, v\}$ *son linealmente independiente.*

(192) *De un sistema de ecuaciones de* U *relativo a la base* $\mathcal{B}$ *de* V.

(193) *De un base de* W *y compruebe que* $U \cap W = \{0\}$.

(194) *Estudia si* V *se descompone como suma directa* $V = U \oplus W$.

Ejercicio 20. *Sea* H *el* $\mathbb{Z}_7$*-subespacio de* $\mathbb{Z}_7^4$ *definido mediante el sistema de ecuaciones:*

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Consideramos $u = (1, 1, 1, 1), v = (1, 0, 0, 0)$ *dos vectores de* $\mathbb{Z}_7^4$ *y* $L := \mathscr{L}(\{u, v\})$ *el subespacio generado por* $\{u, v\}$.

(201) *Determine el subespacio* $H \cap L$ *y calcule una base de* H.

(202) *Compruebe que* H *y* L *son dos subespacio complementarios.*

(203) *Dado un vector* $w = (x, y, z, t)$ *de* $\mathbb{Z}_7^4$ *determine la descomposición de* w *como suma de dos vectores uno en* H *y otro en* L.

Ejercicio 21. *Sea P el subespacio de $\mathbb{Z}_{11}^4$ definido mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$P : \begin{cases} t + x + y + \ \ z = 0 \\ t \qquad + y + 2z = 0 \end{cases}$$

(211) Justifica, sin cálculos, que la dimensión de P es 2. Luego determine una base $\{u_1, u_2\}$ de P.

(212) Sean $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0)$ dos vectores y $V = \mathscr{L}(\{v_1, v_2\})$ el subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$. Demuestre que $P+V = \mathscr{L}(\{u_1, u_2, v_1, v_2\})$ y deduce una base escalonada respecto a la base canónica de $\mathbb{Z}_{11}^4$.

(213) Deduce que P y V no son complementarios dando una base del subespacio $P \cap V$.

(214) Consideramos $W = \mathscr{L}(\{v_1, v_3\})$ donde $v_3 = (1, 1, 0, 0)$. Compruebe si P y W son dos subespacios complementarios y en su caso describe la proyección sobre W paralela a P.