TEMA 5

Espacios vectoriales (segunda parte)

Ejercicio 1. En el conjunto $\mathbb{C}^n$ se considera la suma usual y se define el producto por números reales

$$\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n)$$

Estudia si $\mathbb{C}^n$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. En el conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual que n se considera la suma usual y se define el producto por escalares reales

$$ap(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq 1 \\ p(x) & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

Estudia si $\mathbb{R}_n[x]$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Demuestra las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto de vectores que tiene dos vectores iguales es linealmente dependiente.
2. Un conjunto de vectores en el que un vector es múltiplo de otro es linealmente dependiente.

Ejercicio 4. Determina si los siguientes conjuntos de vectores generan al espacio vectorial dado:

1. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x$, $3+4x^2$.
2. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x$, $3+4x^2$, x.
3. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Muestra que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puede ser generada por matrices regulares.

Ejercicio 6. Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de estos. Verifica la verdad o falsedad de esta afirmación en los ejemplos siguientes:

1. $\{(a, b) \in \mathbb{Z}_3^2 \mid b = 1\}$; $\{(2, 1)\}$
2. $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$; $\{x-1, x^2-1\}$.

Ejercicio 7. ¿Cuántas bases hay en $\mathbb{Z}_2^2$?

Ejercicio 8. Determina si los siguientes conjuntos de vectores generan el espacio vectorial dado:

1. $V = (\mathbb{Z}_5)_2[x]$. $\{1+4x,\ 3+4x^2\}$.
2. $V = (\mathbb{Z}_5)_2[x]$. $\{1+4x,\ 3+4x^2,\ x\}$.

Ejercicio 9. En el espacio de las matrices simétricas de orden 2, consideramos las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Calcula las matrices de cambio de base entre ambas.

2. Calcula las coordenadas de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
en las bases B y B'.

Ejercicio 10. Sea $V = \mathbb{Z}_7^4$, y sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$U_1 = L((1,4,4,0),(2,2,1,2),(0,0,3,6))$$
$$U_2 \equiv \{2x + 5y + t = 0$$

1. Calcula una base de $U_1 \cap U_2$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,1,0,0)$ en la base anterior?

Ejercicio 11. Determina si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n[x]$:

1. $P_1 = \{a + bx^2 + cx^3 \in \mathbb{R}^n[x] /\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$
2. $P_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}^n[x] /\ p(x) + p(-x) = 0\}$
3. $P_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}^n[x] /\ p(x) + p'(x) = 0\}$

Ejercicio 12. Para los subespacios de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) /\ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \right\}$$
$$W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) /\ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A \right\}$$

calcular $U \cap W$ y $U + W$.

Ejercicio 13.

1. Calcula la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores
$$\{(b,0,0,0),(0,a,1,1+a),(a,1+a,1+a,2+2a),(b,0,0,1-a)\}$$
según los valores de a y b.
2. ¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes en el conjunto
$$\{(b,0,a,b),(0,a,1+a,0),(0,1,1+a,0),(0,1+a,2+2a,1-a)\}$$
según los valores de a y b?