ResumenesT2a7ALEM.pdf

ResumenesT2a7_ALEM

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

COROLARIO TEMA 2

- TEOREMA DE BEZOUT: Dos números son primos relativos (a, b); si se pueden expresar mediante $au + bv = 1$ tq $u, v \in \mathbb{Z}$

- TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA. $\forall$ número ≥ 2 se puede expresar de forma única como producto de primos positivos
  - Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \Rightarrow (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1) =$ divisores POSITIVOS

- Si d es un mcd de a y b, $-d$ también lo es.
- Idem mcm

- TEOREMA: $\text{mcd}\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}\} = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)}$

  mcm '' $= p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)}$

  - $\text{mcd}\{a,b\} \cdot \text{mcm}\{a,b\} = a \cdot b$

- ALGORITMO DE EUCLIDES: Salida mcd

- TEOREMA DE BEZOUT GENERALIZADO: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ y $d = \text{mcd}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Entonces $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ tiene solución $\Leftrightarrow d \mid b$. Además tendría las mismas soluciones que $\frac{a_1}{d}x_1 + \frac{a_2}{d}x_2 + \ldots + \frac{a_n}{d}x_n = \frac{b}{d}$

- Ecuaciones diofánticas con dos incógnitas. Si el $\text{mcd}\{a,b\} = 1$ en $ax+by=c$, Entonces el conjunto de soluciones (si (x_0, y_0) es solución) es $\{(x_0 + b\cdot k, y_0 - a\cdot k) \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

- ALGORITMO EXTENDIDO DE EUCLIDES: Salida: $d = \text{mcd}\{a,b\}$ y $as + bt = d$

- Ecuaciones en congruencias

- TEOREMA RESOLVER CONGRUENCIAS
  1) $ax \equiv b \pmod m$ tiene solución $\Leftrightarrow \text{mcd}\{a,m\} \mid b$
  2) Si $d = \text{mcd}\{a,m\}$ y $d \mid b$: simplificamos $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \left(\text{mod } \frac{m}{d}\right)$
  3) Si $\text{mcd}\{a,m\} = 1$ y u es solución: $\{u + km \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$
  4) $ax \equiv b - c \pmod m = ax + c \equiv b \pmod m$
  5) $ax \equiv b \pmod m = (a \bmod m)x \equiv (b \bmod m) \pmod m$
  6) Si $u, v \in \mathbb{Z}$ y $au + bv = 1 \Rightarrow bu \bmod m$ es solución de $ax \equiv b \pmod m$

- Sistemas de congruencias

- TEOREMA: $a \in \mathbb{Z}_m$ tiene inverso para el producto $\Leftrightarrow \text{mcd}\{a,m\} = 1$
  Además si $au + bv = 1 \Rightarrow u \pmod m$ es el inverso de a

COROLARIO TEMA 3

- $gr(a(x) \cdot b(x)) = gr(a(x)) + gr(b(x))$
- $a(x) \in K[x]$, a será irreducible si.
  1) $gr(a(x)) \geq 1$
  2) si $a(x) = b(x) \cdot c(x) \Rightarrow gr(b(x)) = 0$ o $gr(c(x)) = 0$

K[x] sea un cuerpo
- 1) Todo polinomio de $K[x]$ de grado 1 es irreducible
  2) $a(x) \in K[x]$ es irreducible y $u \in K \setminus \{0\} \Rightarrow u \cdot (a(x))$ también lo es

- Un polinomio es mónico si el coeficiente líder es 1

∘ TEOREMA: Sea K un cuerpo. Todo polinomio $\in K[x]$ cuyo grado ≥ 1 se puede expresar de forma única como $a(x) = u P_1^{\alpha}(x) \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n}(x)$ siendo P polinomios mónicos e irreducibles y $u \in K \setminus \{0\}$ y $\alpha \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$

∘ TEOREMA (T.2): mcd y mcm aplicable a polinomios mónicos e irreducibles

∘ ALGORITMO DE EUCLIDES (T2). aplicable a polinomios
  - Si $d(x)$ es un mcd de $a(x)$ y $b(x) \Rightarrow a(x)b(x)$ div $d(x)$ es un mcm

∘ TEOREMA DEL FACTOR: Sea α una raíz de $a(x) \Leftrightarrow x - \alpha \mid a(x)$

∘ TEOREMA: Sea $a(x) \in K[x]$
  1) $gr(a(x)) = 1 \rightarrow a(x)$ irreducible
  2) $gr(a(x)) \geq 2 \rightarrow$ si $a(x)$ tiene al menos una raíz $\Rightarrow$ reducible
  3) $gr(a(x)) \in \{2, 3\} \rightarrow a(x)$ es irreducible $\Leftrightarrow \nexists$ raíces
  4) $gr(a(x)) \in \{4, 5\} \rightarrow a(x)$ es irreducible $\Leftrightarrow \nexists$ raíces y no es divisible por polinomios mónicos e irreducibles de grado 2
  5) $gr(a(x)) \in \{6, 7\} \rightarrow$ " divisible por polinomios mónicos e irre. de grado 2 o 3

∘ Teorema del resto: Sea $a(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K \Rightarrow a(x) \bmod x - \alpha = a(\alpha)$

- Multiplicidades de raíces
- $a(x) \in K[x]_{m(x)}$ $a(x)$ es unidad si $mcd\{a(x), m(x)\} = 1$
- $K[x]_{m(x)}$ es cuerpo $\Leftrightarrow m(x)$ es irreducible
- $a(x)^{-1}$: análogo a x^{-1} en Tema 2

COROLARIO TEMA 4

- Propiedades de los determinantes
  1) $|A| = |A^t|$
  2) Si intercambiamos 2 filas (o columnas) de A, la nueva matriz: $-|A|$
  3) Si multiplicamos todos los elementos de una fila (o columna): $\alpha|A|$
  4) Si a una fila de A le sumamos otra multiplicada por un elemento de K obtenemos otra matriz con el mismo determinante
  5) Si $A, B \in M_{n\times n}(K) \Rightarrow |A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

- Desarrollo de Laplace

- Una matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ es regular si tiene inversa para el producto y $|A| \neq 0$
- La matriz adjunta de A: $\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- TEOREMA: Si $A \in M_{n\times n}(K)$ es regular $\Rightarrow A^{-1} = |A|^{-1} \cdot (\bar{A})^t$

- Otra forma de calcular inversas $\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & x_1 & 1 & 0 \\ \lambda & x_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_1' & x_1' \\ 0 & 1 & x_2' & x_3' \end{array}\right)$
  - Intercambiando filas
  - Multiplicando elementos de una fila por $\alpha \in K\setminus\{0\}$
  - Sumando una fila multiplicada a otra

COROLARIO TEMA 5

- Sea U un subconjunto no vacío de V, entonces es subespacio vectorial de V si:
  1) Si $u, v \in U \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in U$
  2) Si $a \in K$ y $\vec{u} \in U \Rightarrow a \cdot \vec{u} \in U$

- Calcular elementos de subespacios vectoriales $<\{(1,1,0),(0,1,1)\}> = \{a(1,1,0)+b(0,1,1)\}$

- 1) $U_1 + \ldots + U_n = < U_1 \cup \ldots \cup U_n >$
  2) $U_1 = <S_1>, \ldots, U_n = <S_n> \Rightarrow U_1 + \ldots + U_n = < S_1 \cup \ldots \cup S_n >$

- Diremos que V es suma directa ($\oplus$) de U y W
  1) $V = U + W$
  2) $U \cap W = \{\vec{0}\}$

  $\}$ U y W serían complementarios

  Suma directa: $\forall$ vector de V existe $U+W$ igual

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es linealmente dependiente si:
  $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ En caso contrario $(a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0) \Rightarrow LI$

- Sea S subconjunto de V
  1) S es $LD \Leftrightarrow \exists \vec{v} \in S$ tq $\vec{v} \in < S \setminus \{\vec{v}\} >$
  2) Si $\vec{0} \in S \Rightarrow S$ es LD
  3) Si S es LD y $\vec{v} \in V \Rightarrow S \cup \{\vec{v}\}$ es LD
  4) Si S es LI y $\vec{v} \in V \Rightarrow S \cup \{\vec{v}\}$ es LI

+
- Ecuaciones cambio de base
- Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial

- Una base de V debe cumplir:
  1) B es LI
  2) $V = <B>$

- TEOREMA DE LA BASE: Todo $V \setminus \{\vec{0}\}$ tiene al menos una base. Todas las bases tienen el mismo cardinal (dimensión).

  $\dim(\vec{0}) = 0$

  1) $\text{Dim}(K^n) = n$
  2) $\text{Dim}(M_{n \times m}(K)) = n \times m$
  3) $\text{Dim}(K[x]_n) = n+1$

  $\}$ Todos tienen su propia base canónica

- TEOREMA DE LA AMPLIACIÓN DE LA BASE: Coro: Si $\dim(V) = n \Rightarrow n$ vectores LI de V son una base

- Sea U subespacio vect. de V, $U = V \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$

- Cálculo de complementario
  1) Calculamos una base de U (B_U)
  2) Ampliamos la base B_U a B de V
  3) $W = < B \setminus B_U >$ es complementario

COROLARIO TEMA 6

- $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$; $f(a\cdot\vec{v}) = a\cdot f(\vec{v})$ } Es homomorfismo o aplicación lineal

- Si f es una apl. lineal:
  1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$
  2) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$
  3) Definición de $N(f)$
  4) Definición de $Im(f)$

∘ Tipos de aplicaciones lineales especiales
  - monomorfismo: Ap.Lin inyectiva
  - epimorfismo: Ap.Lin sobreyectiva
  - isomorfismo: Ap.Lin. biyectiva

- Sea f una Ap.Lin.
  1) Si f es isomorfismo $\Rightarrow f^{-1}$ también lo es
  2) f es monomorfismo $\Leftrightarrow N(f) = \{\vec{0}\}$
  3) Si $V = <\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n> \Rightarrow Im(f) = <Im(\vec{v}_1), \ldots, Im(\vec{v}_n)>$
  4) Si f es monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ son LI $\in V \Rightarrow \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ son LI $\in V'$

∘ TEOREMA: Una Ap.Lin queda perfectamente determinada cuando conocemos las imágenes de los vectores de una base de V. Además la Ap.Lin es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ las imágenes forman una base de V'
  - Dos espacios V y V' son isomorfos si $\exists$ un isomorfismo $f: V \longrightarrow V'$
  - Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(V')$

- Ecuaciones de una Ap.Lin
  1) f es isomorfismo $\Leftrightarrow$ su matriz asociada es regular
  2) Base canónica por defecto

∘ TEOREMA: Sea f una Ap.Lin: $\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(Im(f))$

∘ TEOREMA: U y W subespacios vectoriales de V $\Rightarrow \dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

- Cuando pregunten si una aplicación $f: V \longrightarrow V'$ es epimorfismo, o sobreyectiva, hay que comprobar que $\dim(V')$ (codominio) $= \dim(Im(f))$

COROLARIO TEMA 7

- Denotaremos el rango por filas de una matriz como $RF(A)$ y por columnas $RC(A)$

∘ TEOREMA: Si $A \in M_{n \times n}(K) \Rightarrow RF(A) = RC(A)$
Al número $RF(A) = RC(A)$ lo llamaremos rango de A $\text{rang}(A)$

∘ TEOREMA: El rango de una matriz es el máximo de los órdenes de sus submatrices cuadradas regulares

- Tipos especiales de sistemas
  - Sistemas compatibles (con solu) $\begin{cases} \text{Determinado (1 solu)} \\ \text{Indeterminado (} > 1 \text{ solu)} \end{cases}$
  - Sistemas incompatibles

Dos sistemas son equivalentes si tienen la misma solución

- 1) Si intercambiamos la posición de dos ecuaciones de un sistema, obtenemos un sistema equivalente
  2) Si multiplicamos una ecuación por un elemento del cuerpo $\neq 0$, obtenemos un sistema equivalente
  3) Si a una ecuación le ~~multiplicamos~~ sumamos otra ecuación multiplicada por un elemento del cuerpo, obtenemos una ecuación equivalente

∘ MÉTODO DE GAUSS: lo mismo que hacíamos para triangularizar

∘ TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS
- Un sistema es compatible si el rango de la matriz coincide con el de su ampliada
- Si además este coincide con el número de incógnitas, es determinado

∘ CRAMER: Un sistema es de Cramer si su matriz de coeficientes es regular. Los sistemas de Cramer son siempre SCD

$AX = B \Rightarrow$ Su única solu es $|A|^{-1}(|M_1| \dots |M_n|)$ donde M_i es la matriz que se obtiene quitando la columna i y poniendo B en su lugar

- Ecuaciones Cartesianas de un subespacio vectorial

1) U viene dado por $\dim(V) - \dim(U)$ ecuaciones cartesianas LI
2) Si nos dan (o nos piden) las ecuaciones cartesianas y no nos definen respecto de qué base: la canónica