# EjerciciosPractALEMResueltos.pdf

*APUNTES ALEM + EJER PRACT + EJER EXAM*

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

# PRÁCTICAS DE ALEM

**1.** En el conjunto partes $P(\{1,2,3,4,5\})$ definimos la siguiente relación binaria: $ARB$ si $\#A = \#B$.

a) Demostrar que $R$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: Si $A \in P(\{1,2,3,4,5\}) \Rightarrow \#A = \#A \Rightarrow ARA$.
- Simétrica: Si $ARB \Rightarrow \#A = \#B \Rightarrow \#B = \#A \Rightarrow BRA$
- Transitiva: Si $ARB$ ~~y~~ $BRC \Rightarrow \#A = \#B$ y $\#B = \#C \Rightarrow \#A = \#C \Rightarrow ARC$.

b) Calcular la clase del $[\{1,2\}]$ DUDA ¿Pq esos?

$[\{1,2\}] = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

c) Calcular el cardinal del conjunto cociente.

$$\# \frac{P(\{1,2,3,4,5\})}{R} = 6$$

En una clase están todos los elementos de $P(\{1,2,3,4,5\})$ de cardinal 0, en otra los de cardinal 1, ..., en otra los de cardinal 5. Por tanto el conjunto cociente tiene 6 elementos.

**2.** Sea $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ sobre el conjunto $X \times X$ definimos la siguiente relación binaria: $(a,b) R (c,d)$ si $a+b = c+d$.

$(1,2) \not R (4,5)$ No, porque $1+2=3$ y $4+5=9$.

a) Demostrar que $R$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: Si $(a,b) \in X \times X \Rightarrow a+b = a+b \Rightarrow (a,b) R (a,b)$.
- ~~Simétrica: Si $(a,b) \in X \times X$~~
- ~~Sim~~
- Simétrica: Si $(a,b) R (c,d) \Rightarrow a+b = c+d \Rightarrow c+d = a+b \Rightarrow$ $\Rightarrow (c,d) R (a,b)$
- Transitiva: Si $(a,b) R (c,d)$ y $(c,d) R (e,f) \Rightarrow a+b = c+d$ y $c+d = e+f \Rightarrow a+b = e+f \Rightarrow (a,b) R (e,f)$.

b) Calcular el cardinal del conjunto cociente.

$\# \frac{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}{R} = 11.$

11, ya que estarían la clase de las parejas cuyas coordenadas suman 2, las que suman 3, ..., las que suman 12.

c) Calcular la clase del $[(2,5)]$

Todas las parejas cuyas coordenadas sumen 7.

¿Pq?

$[(2,5)] = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,3\}, \{5,2\}, \{6,1\}\}$

**3.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y definimos sobre él, la siguiente relación binaria: $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los nº enteros.

relacionado

$1'23 \not\sim 2'5 \qquad 7'29 \sim 2'29$

a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: si ~~$x \sim y$~~ $x \in \mathbb{R} \rightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim x$
- Simétrica: si $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ e $y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y + y - z \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim z.$

b) Calcular la clase del $[7'21]$.

$[7'21] = \{0'21, 1'21, 2'21, 107'21, \ldots, -0'79, -1'79, -2'79, \ldots\}$

Hay infinitos elementos.

c) Calcular el cardinal del conjunto cociente.

$\# \frac{\mathbb{R}}{\sim} = \{[r] \text{ tq } r \in \mathbb{R}\} = \{[r] \text{ tq } r \in [0,1[\}$

Hay tantos cardinales como intervalos.

**4.** Dado el conjunto ordenado $(P(\{1,2,3,4,5,6\}), \leq_i)$. $A \leq_i B$ si $A \subseteq B$. Calcular los elementos notables de $B = \{\{3,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2\}\}$

Maximales $(B) = \{\{3,4,5\}, \{2,4,6\}\}$ $\quad \nexists$ Máximo $(B)$.

Cotas inf $B = \{\emptyset\}$

Inf $(B) = \{\emptyset\}$

Minimales $(B) = \{\{2\}, \{3,4,5\}\}$ $\quad \nexists$ Mínimo $(B)$

Cotas sup $B = \{\{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $\qquad$ Sup$(B) = \{2,3,4,5,6\}$

Dado el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^2 \leq p)$. Calcular los elementos notables de $B = \{(1,0),(0,1),(2,1),(3,1)\}$.

$(a,b) \leq p (c,d)$ si $a \leq_u c$ y $b \leq_u d$

$\text{Maximales}(B) = \{\cancel{(1,0)}, \cancel{(0,1)}, (3,1)\}$ $\quad$ $\text{Máximo}(B) = \{(3,1)\}$.

$\text{Minimales}(B) = \{(0,1), \cancel{(2,1)}, (1,0)\}$ $\quad$ $\nexists \text{Mínimo}(B)$.

(Cotas superiores de $B$) $= \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } 3 \leq_u a,\ 1 \leq_u b\}$

$\text{Sup}(B) = \{(3,1)\}$

(Cotas inferiores de $B$) $= \{(0,0)\}$ $\quad$ $\text{Inf}(B) = (0,0)$.

Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación

$f: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x,y) = x+y$.

$f((2,3)) = f((3,2))$ No es inyectiva.

vamos a demostrar que $f$ es sobreyectiva. Para ello, veremos que $\mathbb{Z} \subseteq Im(f)$

$\cancel{z \in \mathbb{Z} \Rightarrow} f((0,z)) = z$.

$z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (0,z) \in \mathbb{Z}^2$ y $f((0,z)) = z \Rightarrow z \in Im(f)$.

Dada la aplicación biyectiva $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Calcular la inversa de $f$. $\quad f(x) = \frac{3x-7}{5}$

A → B

B → A.

$f: \mathbb{R} \xrightarrow{?\ \longleftarrow\ y} \mathbb{R}$

$f(?) = y \Rightarrow \frac{3?-7}{5} = y \Rightarrow ? = \frac{5y+7}{3}$.

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f^{-1}(y) = \frac{5y+7}{3}$

Demostrar que si $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ son aplicaciones inyectivas, entonces la composición es también una aplicación inyectiva.

$g \cdot f : A \longrightarrow C$.

$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(\cancel{f}f(a')) \underset{\boxed{\text{pq } g \text{ es inyectiva}}}{\Rightarrow} f(a) = f(a') \underset{\text{pq } f \text{ es inyectiva}}{\Rightarrow} a = a'$.

Nota:

La composición de aplicaciones sobreyectivas, es también una aplicación sobreyectiva. Por tanto la comp de app biyectivas, es también una app biyectiva.

Sean $f: A \xrightarrow{\substack{a \to b \\ a' \to b'}} B$ y $g: B \to C$ dos aplicaciones. Demostrar que si la composición es inyectiva y f sobreyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva

$b, b'$

$g(b) = g(b') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow (g \cdot f)(a) = (g \cdot f)(a') \Rightarrow a = a' \Rightarrow$

$\boxed{\text{Como } f \text{ es sobreyectiva } \exists a, a' \in A \text{ tq } f(a) = b \text{ y } f'(a) = b'}$

$\boxed{\text{pq } g \cdot f \text{ es inyectiva}}$

$\Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow b = b'$

Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación

$f: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f((a,b)) = a - b.$

$f((1,4)) = f((0,3)) \rightarrow$ por lo tanto no es inyectiva.

Vamos a ver que f es sobreyectiva, para ello demostraremos que: $\mathbb{Z} \subseteq Im(f)$

$f((z,0)) = z$ si $z \geq 0$

~~$z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$~~

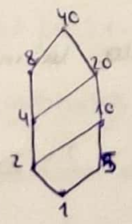
si $z < 0$ $f((0,-z)) = z$.

$z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (z+|z|, |z|) \in \mathbb{N}^2$ y $f((z+|z|, |z|)) = z$

$\Downarrow$

$z \in Im(f)$.

Representar gráficamente el conjunto ordenado $(\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}, \leq_m)$



Resuelve la ecuación diofántica $141x + 99y = 27$.

$m.c.d\{141, 99\} = 3$

Como $3|27$ la ecuación tiene solución y tiene las mismas soluciones que $47x + 33y = 9$.

$mcd\{47, 33\} = 1$

ALGORITMO EXT EUCLIDES

$(a_0, a_1) = (47, 33) \overset{q=1}{=} (33, 14) \overset{q=2}{=} (14, 5) \overset{q=2}{=} (5, 4) \overset{q=1}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -2) = (-2, 5) = (5, -7) = (-7, \sim)$.

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 3) = (3, -7) = (-7, 10) = (10, \sim)$.

$47(-7) + 33 \cdot 10 = 1$. $47(-63) + 33 \cdot 90 = 9$.

Multiplico x9 pq en la original era 9 ($47x + 33y = \underline{9}$)

$(x_0, y_0) = (-63, 90)$. Por tanto el conjunto de todas sus soluciones es: $\{(-63 + 33k, 90 - 47 \cdot k)\}$

Resuelve la ecuación en congruencias $242x \equiv 6 \pmod{288}$.

$m.cd\{242, 288\} = 2$.

Como $2|6$ tiene solución la ecuación. Además tiene las mismas soluciones que $\boxed{121x \equiv 3 \pmod{144}}$ se divide entre el m.c.d.

Si $au + mv = 1 \rightarrow$ si $\underline{121u + 144v = 1} \Rightarrow u \pmod{144}$ es una solución de $121x \equiv 3 \pmod{144}$.

ALGORITMO EXT EUCLIDES.

$(a_0, a_1) = (144, 121) \overset{q=1}{=} (121, 23) \overset{q=5}{=} (23, 6) \overset{q=3}{=} (6, 5) \overset{q=1}{=} (5, 1) \overset{q=5}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -5) = (-5, 16) = (16, -21) = (-21, \sim)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 6) = (6, -19) = (-19, 25) = (25, \sim)$.

~~121(-21)~~ $\underline{144(-21) + 121(25) = 1}$. $u = 25$.

$25 \bmod 144 = 25 \Rightarrow \{25 + 144k + 9 \; k \in \mathbb{Z}\}$

¿Cuántos números impares hay en el intervalo [500, 2500] verificando que terminan en 3 y que al multiplicarlos por 2 y dividirlos entre 7, dan de resto 1?

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 3 \pmod{10} \\ 2x \equiv 1 \pmod 7. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1+2K \ \cancel{\equiv 3 \pmod{10}}. \\ 1+2K \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 2K \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow K \equiv 1 \pmod 5. \Rightarrow \\ \Rightarrow K = 1+5\bar{K} \end{array}$$

$x = 1+2K = 1+2(1+5\bar{K}) = 3+10\bar{K}.$

$2(3+10\bar{K}) \equiv 1 \pmod 7$; $\quad 6+20\bar{K} \equiv 1 \pmod 7$; $\quad 20\bar{K} \equiv -5 \pmod 7$;

$20 \bmod 7 = 6$

$6\bar{K} \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow m.c.d\{6,7\} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{K} = 5+7.\bar{\bar{K}}$ Es 5 pq $5.6 = 30-2 = 28$; $28 \,|\underline{7}$, $0 \quad 4$ Como da resto 0, sirve.

$500 \leq 53+70\bar{\bar{K}} \leq \cancel{20}\,2500 \Rightarrow 447 \leq 70\bar{\bar{K}} \leq 2447 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{447}{70} \leq \bar{\bar{K}} \leq \frac{2447}{70} \Rightarrow 6'39 \leq \bar{\bar{K}} \leq 34'95 \Rightarrow 7 \leq \bar{\bar{K}} \leq 34.$

$34-27+1 = 8$ (Mayor − Menor + 1).

¿Cuántos divisores tiene el número 504?

| | |
|---|---|
| 504 | 2 |
| 252 | 2 |
| 126 | 2 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$

$(3+1).(2+1)(1+1) = 4.3.2 = 24.$

Aplicando el corolario inmediatamente posterior al teorema fundamental de la aritmética, sabemos ~~es~~ que 24 es el nº de divisores positivos de 504, por tanto 504 tiene 48 divisores (I).

Calcular en $\mathbb{Z}_{16}$ $11+8$.

$11+8 = 3$; $\rightarrow 11+8 = 19/16 = 3$ (de resto)

$11.9 = 3$; $\quad 3^{-1} = 3.11 = 33 \bmod 16 = 1$.

$-9 = 7 \quad \nexists\, 4^{-1} =$ pq el $m.c.d\{4,16\} \neq 1$.

Calcular las unidades de $\mathbb{Z}_{18}$.

$U(\mathbb{Z}_{18}) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$

Del 0 al 17 los que tengan m.cd con 18 = 1.

Calcular las unidades de $\mathbb{Z}_9$.

$U(\mathbb{Z}_9) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

Sean $a(x) = x^4+x^3+x^2+2x+1$ y $b(x) = x^4+x^3+2x^2+3x+1$ $\mathbb{Z}_5[x]$.

Calcular un m.c.d $\{a(x), b(x)\}$.

$$(a_0(x),a_1(x)) = (x^4+x^3+x^2+2x+1,\ x^4+x^3+2x^2+3x+1) = (x^4+x^3+2x^2+3x+1,\ 4x^2+4x) =$$
$$= (4x^2+4x,\ x+1) = (x+1,\ 0)$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x^2+2x+1 & x^4+x^3+2x^2+3x+1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+2x^2+3x+1 & 4x^2+4x \\ 4x^4+4x^3 & 4x^2+3 \\ \hline 2x^2+3x+1 & \\ 3x^2+3x & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

m.c.d $= x+1$.

Calcular la descomposición en irreducibles del polinomio $a(x) = 2x^5+x^3+x^2+2x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

Comenzaremos poniendo $a(x)$ como producto de polinomios irreducibles.

El 2 es raíz de $a(x)$, entonces sabemos por el teorema del factor que $x-2 \mid a(x)$ → divide

$\overset{\shortparallel}{x+1}$ en $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{array}{l|l} 2x^5+x^3+x^2+2x+1 & x+1 \\ x^5+x^4 & 2x^4+x^3+x+1 \\ \hline x^4+x^3+x^2+2x+1 & \\ 2x^4+2x^3 & \\ \hline x^2+2x+1 & \\ 2x^2+2x & \\ \hline x+1 & \\ 2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a(x) = \underbrace{(x+1)}_{\text{Irred}}\underbrace{(2x^4+x^3+x+1)}_{\text{no tiene raíces}}$

pq no sale de resto 0.

$2x^4+x^3+x+1$ no tiene raíces, vamos a ver si es múltiplo de algún polinomio mónico e irreducible de grado 2.

Los mónicos de grado 2 son $x^2+ax+b \to \{0,1,2\}$

$a=\{0,1,2\}$ $3\times 3=9$ valores mónicos

$\cancel{x^2}$, $x^2+1$, $\cancel{x^2+2}$, $\cancel{x^2+x}$, $\cancel{x^2+x+1}$,

$x^2+x+2$, $\cancel{x^2+2x}$, $\cancel{x^2+2x+1}$, $x^2+2x+2$.

He tachado los que tienen raíces, por tanto, los únicos polinomios mónicos e irreducibles de grado 2 de $\mathbb{Z}_3[x]$ son $x^2+1$, $x^2+x+2$, $x^2+2x+2$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+x^3+x+1 & x^2+1 \\ x^4+x^2 & 2x^2+x+1 \\ \hline x^3+x^2+x+1 & \\ 2x^3+2x & \\ \hline x^2+1 & \\ 2x^2+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$= (x+1)(x^2+1)(2x^2+x+1) = a(x)$.

$a(x) = (x+1)(x^2+1)\,2\cdot 2\,(2x^2+x+1)$

$\boxed{a(x) = 2(x+1)(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

Calcular las raíces y sus multiplicidades del polinomio ~~$a(x)=x^4+x^3$~~

$a(x) = x^4+4x^3+x^2+4x+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Raíces $=\{4\}$

$a'(x) = 4x^3+\cancel{1}2x^2+2x+4$ $\qquad a'(4)=0$.

$a''(x) = 2x^2+4x+2$ $\qquad a''(4)=0$

$a'''(x) = 4x+4$ $\qquad a'''(4)=0$.

$a''''(x) = 4$ $\qquad a''''(4)=4 \neq 0$.

Tiene multiplicidad 4 pq la 4ª derivada es la 1ª que no se anula.

¿Tiene el polinomio $a(x)=x^3+x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$?

Sabemos que las raíces múltiples de un polinomio son aquellos valores que anulan simultáneamente al polinomio y a su derivada.

$a'(x) = 3x^2+2x$

$a'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x=0;\ x(3x+2)=0 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=-2/3 \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} a(0)=1 \neq 0 \\ a(-2/3)=\frac{31}{27} \neq 0. \end{array} \right\}$ No tiene raíces múltiples.

Calcular en $\mathbb{Z}_7[x]$ el resto de dividir $x^{199}+x^2+2$ entre $x+5$

$x^{199}+x^2+2 \bmod \underset{x-2}{x+5} = 2^{199}+2^2+2 = (*)$

Donde pone $x$, ponemos $2$:

$2^1 = 2$ $\qquad 199 \,|\, 3$ $\quad$ 19 66 $\quad$ 1 $\qquad 199 = 3 \cdot 66 + 1$.

$2^2 = 4$

$2^3 = 1$.

$(*) = 2^{3 \cdot 66+1} + 2^2 + 2 = (2^3)^{66} \cdot 2^1 + 4 + 2 = 2+4+2 = \boxed{1}$

Dar un cuerpo de cardinal 49

$49 = 7^2$

$\mathbb{Z}_7[x]_{x^2} \rightarrow$ Anillo conmutativo con 49 elementos.
$\hookrightarrow$ No sirve.

$\mathbb{Z}_7[x]_{x^2+1} \rightarrow x^2+1$ como no tiene raíces y es de grado 2 es irreducible. Por tanto, es un cuerpo con 49 elementos.

¿Es $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$ un cuerpo?

Anillo conmutativo con 32 elementos.

Será cuerpo $\Leftrightarrow x^5+x+1$ es irreducible.

No tiene raíces.

Vamos a ver si existe o no un polinomio mónico e irreducible de grado 2 que lo divida.

Los mónicos de grado 2 son $x^2$, $\cancel{x^2+1}$, $\cancel{x^2+x}$, $x^2+x+1$

$x^2+x+1$ es el único polinomio mónico e irreducible de grado 2.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + \qquad + x + 1 & x^2+x+1 \\
\underline{x^5 + x^4 + x^3} & x^3+x^2+1 \\
\quad x^4 + x^3 \quad + x + 1 & \\
\quad \underline{x^4 + x^3 + x^2} & \\
\qquad\quad x^2 + x + 1 & \\
\qquad\quad \underline{x^2 + x + 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

No es cuerpo pq el resto es 0 y entonces es ireducible

9

¿Es $x+1$ una unidad de $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$?

Hacemos el mcd por el Alg. Euclides, si da 1 es unidad, si no, no.

$$(a_0(x), a_1(x)) = (x^5+x+1, x+1) = (x+1, 1) = (1, 0).$$

$x=1$

$1+1+1 = 3 \,\underline{|2}$, resto $1$ → Teorema del resto

$$\text{mcd}\{x^5+x+1, x+1\} = 1.$$

Por tanto $x+1$ es una unidad.

Calcular $(x+1)^{-1}$

Si $(x+1)u(x) + (x^5+x+1)v(x) = 1 \implies (x+1)^{-1} = u(x) \bmod (x^5+x+1)$.

$q(x) = x^4+x^3+x^2+x$

$$(a_0(x), a_1(x)) = (x^5+x+1, x+1) = (x+1, 1) = (1, 0).$$

$$(s_0(x), s_1(x)) = (1, 0) = (0, 1) = (1, \dots)$$

$$(t_0(x), t_1(x)) = (0, 1) = (1, x^4+x^3+x^2+x) = (x^4+x^3+x^2+x, \dots)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + \quad x+1 & x+1 \\
\hline
x^5+x^4 & x^4+x^3+x^2+x \\
x^4 \quad +x+1 & \\
x^4+x^3 & \\
x^3+x+1 & \\
x^3+x^2 & \\
x^2+x+1 & \\
x^2+x & \\
1 &
\end{array}$$

$\cancel{(x+1) + (x^5+x+1)(x^4+x^3+x^2+x) = 1}$.

$$(x^5+x+1)\cdot 1 + (x+1)(x^4+x^3+x^2+x) = 1.$$

$$(x+1)^{-1} = (x^4+x^3+x^2+x) \bmod x^5+x+1 = x^4+x^3+x^2+x.$$

**Resolver en $\mathbb{Z}_7[x]_{x^4+2x+4}$ resolver $(3x+2)Y + x+2 = (2x+1)Y + 2x$**

$$aY + b = cY + d$$

$$(a-c)Y = d-b.$$

$$Y = (a-c)^{-1}(d-b). \qquad (3x+2)Y - (2x+1)Y = 2x - x - 2$$

$$(3x+2)Y + (5x+6)Y = 2x+6x+5$$

$$(3x+2+5x+6)Y = x+5$$

$$(x+1)Y = x+5$$

$$(a_0(x), a_1(x)) = (x^4+2x+4, x+1) = (x+1, 3) = (3, 0).$$

$$\text{mcd}\{x^4+2x+4, x+1\} = 1.$$

Como el mcd vale 1, $x+1$ es una unidad y por tanto $Y = (x+1)^{-1}\cdot(x+5)$.

¿ Son los vectores $(1,1,1), (0,1,1), (2,3,3)$ de $\mathbb{R}^3$ L.I ?

$a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(2,3,3) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} a + 2c = 0 \\ a+b+3c = 0 \\ a+b+3c = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c=1 \\ a=-2 \\ b=-1 \end{array} \quad \text{Sist. Comp. Ind } (\infty \text{ sol})$$

Este sistema tiene además del $(0,0,0)$ más soluciones, por lo que los vectores son L.D.

Sea $B = \{(1,1),(0,1)\}$

a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{Z}_7^2$

Como $\mathbb{Z}_7^2$ es un espacio vectorial de dimensión 2, para demostrar que B es una base de $\mathbb{Z}_7^2$, nos basta ver que los vectores de B son L.I.

$$a(1,1) + b(0,1) = (0,0) \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array} \quad \text{son L.I.}$$

b) Calcular las coordenadas del vector $(3,5)$ respecto la base B

$a(1,1) + b(0,1) = (3,5)$

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ a+b=5; \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{a=3} \\ \boxed{b=2} \end{array} \qquad (3,5) =_B (3,2).$$

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(1,2,3,4),(2,4,1,3),(1,1,1,1),(2,3,4,0)\}$. Calcular una base de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,3,4),(0,4,3,2)\} \rightarrow$ una base de U

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por $\{(2,3,4,5),(3,1,2,3),(0,0,3,6)\}$ calcular un complementario de U.

"Recordemos" que un complementario de U es un subespacio vectorial W de $\mathbb{Z}_7^4$ tal que $\mathbb{Z}_7^4 = U \oplus W$.

Para calcular W utilizaremos un método dado en teoría

Vamos a calcular una base de U, para ello triangulizaremos la matriz.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B_U = \{(2,3,4,5),(0,0,3,6)\}$

2) Ampliamos la base de U a base $\mathbb{Z}_7^4$

$B_{\mathbb{Z}_7^4} = \{(2,3,4,5),(0,0,3,6),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$

3) $W = \langle\{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\rangle$

Dadas las bases $B = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,3,1)\}$ y $B' = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcular la expresión matricial del cambio de base de B a B'.

$(1,1,1) \equiv B'(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$

$(1,2,2) \equiv B'(1,0,-\frac{1}{3})$

$(1,3,1) \equiv B'(1,\frac{1}{2},-\frac{7}{6})$

$a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3) = (1,2,2)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a+2b = 2 \\ 3a+3b+3c = 2 \end{array}\right\} \; 2b = 0 \quad 3+3c = 2; \quad 3c = -1; \quad c = -\frac{1}{3}$$

$a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3) = (1,1,1)$.

Hacemos el sistema

$a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3) = (1,3,1)$.

La expresión matricial es: $(x_1',x_2',x_3') = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & -7/6 \end{pmatrix}$

b) Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(1,0,1)$. Calcular las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B'.

Multiplicar el $(1,0,1)$ por la matriz.

$(1,0,1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/6 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & -7/6 \end{pmatrix} = (2,0,-8/6)$.

$\vec{v} \equiv B'(2,0,-4/3)$.

Sean $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,0,0), (0,3,1), (0,0,2)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Si $\vec{x} \equiv_B (1,1,2)$, calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base $B'$.

Si $\vec{x}_B \equiv (1,1,2)$

$\vec{x} = 1(1,1,1) + 1(0,1,1) + 2(0,0,1)$.

$\vec{x} = (1,2,4) \rightarrow$ Igualamos esto a las coord de $B'$

$a(1,0,0) + b(0,3,1) + c(0,0,2) = (1,2,4)$.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ 3b=2 \\ b+2c=4 \end{array}\right| \begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \\ c=0. \end{array} \Rightarrow \vec{X} \equiv_{B'} (1,4,0).$$

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,4),(1,4,2)\}$

Calcular las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base.

$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$



1º) Calculamos una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_U = \{(2,3,4)\}$$

2º) Vamos a calcular las coordenadas de los vectores de la base de U respecto de la base B.

$(2,3,4) = B$.

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(2,3,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ a+c=3 \\ b+c=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4b+c=1 \\ b+c=4 \end{array}\right\} \quad 2c=0 \quad \boxed{c=0} \quad \boxed{a=3} \quad \boxed{b=4}$$

$$(x,y,z)=\lambda(3,4,0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=4\lambda \\ z=0 \end{array}}$$

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_7^3$ generados por $\{(2,3,4),(1,5,2)\}$ y $\{(0,2,3),(2,3,1)\}$ ¿Es $\mathbb{Z}_7^3 = U+W$?

Sabemos que U+W está generado por la unión.

$$U+W = \langle\{(2,3,4),(1,5,2),(0,2,3),(2,3,1)\}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{U+W} = \{(2,3,4),(0,2,3),(0,0,4)\}$$

Como U+W es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ de dimensión 3, entonces $\mathbb{Z}_7^3$ es igual a U+W

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$

$f(x,y,z,t)=(x+y+z,\ y+t,\ x+2y+z+t)$

a) calcular una base de imagen de f

$$Im(f) = \langle\{f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\}\rangle$$

$$Im(f) = \langle\{(1,0,1),(1,1,2),\cancel{(1,0,1)},(0,1,1)\}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{Im(f)} = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$$

b) ¿Es f un epimorfismo? ¿es sobreyectiva?

No porque $\mathbb{Z}_5^3$ no tiene la misma imagen

Como $\dim(Im) = 2$ y $\dim(\mathbb{Z}_5^3) = 3 \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{Z}_5^3 \Rightarrow$ f no es un epimorfismo.

c) ¿Qué cardinal tiene el codominio?

Tiene $5^3$ elementos = 125 elementos.

d) ¿Qué cardinal tiene la Im(f)?

Im(f) es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 2

Por tanto Im(f) es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$. En consecuencia, cardinal de la Im(f) = cardinal $\mathbb{Z}_5^2$ = 25.

e) ¿Es f un monomorfismo?

Sabemos que f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ el núcleo de f se reduce al 0 $\Rightarrow N(f) = \{(0,0,0,0)\}$. Por tanto, f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ $\dim N(f) = 0$.

Sabemos por el corolario posterior al 1er teorema de isomorfía, que

$$\underbrace{\dim(\mathbb{Z}_5^4)}_{4} = \dim N(f) + \underbrace{\dim Im(f)}_{2}$$

$\dim N(f) = 2$, luego no es un monomorfismo.

f) Calcular una base del núcleo.

$$N(f) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y+t=0 \\ x+2y+z+t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y+t=0 \\ y+t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y+t=0. \end{array}\right\}$$

$\dim N(f) = 2$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=4z \\ y=4t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \boxed{z=0} \\ \boxed{t=1} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \boxed{y=4} \\ \boxed{x=1} \end{array}$$

$B_{N(f)} = \{(1,4,0,1), (4,0,1,0)\}$

$\boxed{z=0}\ \boxed{t=1}$ $\quad x+y=4z$

$\boxed{z=1}\ \boxed{t=0}$ $\quad y=4t$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio: Calcular una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $(0,1,0,0) \in N(f)$ y $Im(f) = \langle\{(1,1,1),(0,1,1)\}\rangle$

$f(1,0,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,1,0,0) = (0,0,0)$. $\quad 2(1,1,1)+3(0,1,1) = (2,5,5)$

$f(0,0,1,0) = (0,1,1)$.

$f(0,0,0,1) = (2,5,5)$

La expresión matricial de $f$ es de la forma $(x',y',z') = (x,y,z,t)A$ donde $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&0&0\\0&1&1\\2&5&5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&0&0\\0&1&1\\2&5&5 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&0&0\\0&1&1\\2&5&5 \end{pmatrix} \quad f(x,y,z,t) = (x+2t,\ x+z+5t,\ x+z+5t)$$

Sea $U$ el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^4$ generado $\{(1,2,3,4),(2,1,3,4),(3,3,6,1),(1,4,5,2)\}$. Calcular una base de $\mathbb{Z}_7^4$ sobre $U$.

1º) Calculamos una base de $U$.

Triangularizando:

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\2&1&3&4\\3&3&6&1\\1&4&5&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\0&4&4&3\\0&4&4&3\\0&2&2&5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\0&4&4&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,3,4),(0,4,4,3)\}$

Ampliamos la base de $U$, a la base de $\mathbb{Z}_7^4$.

$B_{\mathbb{Z}_7^4} = \{(1,2,3,4),(0,4,4,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

$B_{\mathbb{Z}_7^4/U} = \{[(0,0,1,0)],[(0,0,0,1)]\}$

Sea $\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\1&2&1&1\\2&3&1&0 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una aplicación lineal $f:\mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4$, respecto de las bases $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$. Calcular $f(1,2,3)$.

La expresión matricial $f$ respecto las bases $B$ y $B'$ es

$$\underbrace{(x',y',z',t')}_{\substack{\text{Coordenadas de } f(\vec{v}) \\ \text{respecto de la base } B'}} = \underbrace{(x,y,z)}_{\substack{\text{Coordenadas de } \vec{v} \\ \text{respecto de la base } B}} \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\1&2&1&1\\2&3&1&0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular las coordenadas del (1,2,3) respecto de la base B.

$(1,2,3) \equiv_B (0,1,2)$. $\qquad \vec{v}(1,2,3)$

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,2,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+c=2 \\ b+c=3 \end{array}\right\}$$

$$(0,1,2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,3,3,1).$$

$f(1,2,3) \equiv_{B'} (0,3,3,1)$.

$f(1,2,3) = 0(1,1,1,1) + 3(0,1,1,1) + 3(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1)$.

$f(1,2,3) = (0,3,1,2)$

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_7{}^4$ generados por $\{(4,3,5,2),(1,6,3,4),(1,2,1,1)\}$ y $\{(2,3,4,6),(5,6,5,4),(0,2,2,3)\}$ respectivamente. Calcular la $\dim U \cap W$.

Sabemos por un corolario del 2º teorema de isomorfía que

$\dim U + \dim W = \dim U+W + \dim U \cap W$

$\dim U = 2$.

Triangularizamos para calcular la dimensión de U.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(4,3,5,2),(0,3,5,4)\}$

$\dim W = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_W = \{(2,3,4,6),(0,2,2,3)\}$$

* Unimos $B_U + B_W$ para sacar la $\dim U+W$.

$U+W = \langle\{(4,3,5,2),(0,3,5,4),(2,3,4,6),(0,2,2,3)\}\rangle$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\dim U+W = 4$.

$\dim U \cap W = 0$ (Despejando de la fórmula)