# TEMA 1

## Conjuntos, aplicaciones y relaciones

**Ejercicio 1.**
Dados los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\}; \quad B = \{e, f, g, h\}; \quad C = \{a, e, i, o, u\}$$

Determina los siguientes conjuntos:

$$A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A \backslash B, A \backslash (B \cup C), (A \cap B) \cup C, C \cap (A \backslash B), B \times C, C \times B, A \times B \times C$$

**Ejercicio 2.**
Dado el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, determina el conjunto $\mathcal{P}(X)$.

**Ejercicio 3.**
Demuestra que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$ entonces $B \subseteq C$.

**Ejercicio 4.**
Da un ejemplo de conjuntos $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ que verifiquen que

$$(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2) \neq (X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2).$$

**Ejercicio 5.**
Sean $A$ y $B$ dos conjuntos de cardinal finito tales que $|A| \leq |B|$. Demuestra que el conjunto de aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ tiene cardinal

$$|B| \cdot (|B| - 1) \cdots (|B| - |A| + 1) = \frac{|B|!}{(|B| - |A|)!}$$

**Ejercicio 6.**
Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

1. $$\begin{gathered} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ f(n) = n^2 \end{gathered}$$

2. $$\begin{gathered} f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{gathered}$$

3. $$\begin{gathered} f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ f(n) = n + 1 \end{gathered}$$

4. $$\begin{gathered} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ f(n) = n + 1 \end{gathered}$$

5.
$$\begin{array}{c} f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \\ f(x)=\frac{3x+2}{4} \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ f(x)=+\sqrt{x} \end{array}$$

**Ejercicio 7.**
Dada la aplicación $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(n)=n^2$, demuestra que tiene más de una inversa por la izquierda, pero que no tiene inversas por la derecha. Da dos inversas por la izquierda de $f$.

**Ejercicio 8.**
Dadas dos apliacaciones $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$ demuestra que:

1. Si $f$ y $g$ son inyectivas entonces $g\circ f$ es inyectiva.
2. Si $g\circ f$ es inyectiva entonces $f$ es inyectiva.
3. Si $g\circ f$ es inyectiva y $f$ es sobreyectiva entonces $g$ es inyectiva.
4. Si $f$ y $g$ son sobreyectivas entonces $g\circ f$ es sobreyectiva.
5. Si $g\circ f$ es sobreyectiva entoces $g$ también lo es.
6. Si $g\circ f$ es sobreyectiva y $g$ es inyectiva entonces $f$ es sobreyectiva.

**Ejercicio 9.**
Sean $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ y $f:X\to Y$ la aplicación definida por $f(1)=f(3)=a$; $f(2)=b$. Calcula los siguientes conjuntos:

$$f_*(\{1,3\});\quad f_*(\{1,2\});\quad f^*(\{a\});\quad f^*(\{b\});\quad f^*(\{a,b\})$$

**Ejercicio 10.**
Sean $X$ y $Y$ dos conjuntos, $A$ y $B$ subconjuntos de $X$ e $Y$ respectivamente y $f:X\to Y$ una aplicación. Demuestra que:

1. $f_*(f^*(B))\subseteq B$, y se da la igualdad si $f$ es sobreyectiva.
2. $A\subseteq f^*(f_*(A))$, y se da la igualdad si $f$ es inyectiva.
3. $f_*(A\cap f^*(B))=f_*(A)\cap B$.

Da un ejemplo en donde las inclusiones de los dos primeros apartados sean estrictas.

**Ejercicio 11.**
En el conjunto $\mathbb{R}$ definimos la siguiente relación:

$$xRy \text{ si } x-y\in\mathbb{Z}$$

1. Prueba que $R$ es una relación de equivalencia.
2. Describe el conjunto cociente.

**Ejercicio 12.**
En el conjunto $\mathbb{Q}$ definimos la siguiente relación:

$$xRy \text{ si existe } h\in\mathbb{Z} \text{ tal que } x=\frac{3y+h}{3}$$

1. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia.
2. ¿Están $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ en la misma clase?
3. Describe el conjunto cociente.

**Ejercicio 13.**

Sea el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3\}$. En el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definimos la siguiente relación:
$ARB$ si la suma de los elementos de $A$ es igual a la suma de los elementos de $B$.
Entendemos que la suma de los elementos del conjunto vacío vale 0.

1. Prueba que $R$ es una relación de equivalencia.
2. Describe el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$.