EjerciciosPractALEMResueltosResumenCombinatoria.pdf

APUNTES ALEM + EJER PRACT + EJER EXAM

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

RESUMEN.

INTERVIENE EL ORDEN

- VARIACIONES SIMPLES.
  No se puede repetir
  No ordenamos todos
  $m < n$

$$\boxed{V_{n,m} = n(m-1)(n-m+1)}$$

$$\boxed{V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

- PERMUTACIONES SIMPLES.
  No se puede repetir
  Todos ordenados

$$\boxed{P_n = n!}$$

- PERMUTACIONES CON REPETICIÓN.
  Ordenaciones de todos (n)
  α_1 veces, α_2 veces, α_3 ...

$$\boxed{P_{Rn}^{\alpha_1,\alpha_2} = P_n^{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!}}$$

- VARIACIONES CON REPETICIÓN
  Se pueden repetir
  Ordenaciones $m > n$, $m < n$, $m = n$

$$\boxed{VR_{n,m} = n^m}$$

NO INTERVIENE EL ORDEN

- COMBINACIONES SIMPLES.
  No se pueden repetir elementos
  $m \leq n$.

$$\boxed{C_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}}$$

$$\boxed{C_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}}$$

- COMBINACIONES CON REPETICIÓN
  Se pueden repetir
  ↓
  Como caso particular

$$\boxed{C^R_{m,k} \binom{m+k-1}{k}}$$

$x_1 + x_2 + \dots x_m = k$
nº de sol enteras $x_i \geq 0$

$$CR_{m,k} = \binom{m+k-1}{k}$$

$x_i > k'$ $\quad y_1 + k' + \dots = k - nk'$

1. VARIACIONES SIMPLES.

Son ordenaciones de un conjunto de n elementos de los que tomamos m $(m<n)$. En dichas ordenaciones, no se pueden repetir los elementos, e interviene el orden de dichas ordenaciones.

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ejemplo:

Con los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

a) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar?

a) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $n=7$ $m=3$ $m<n$

$\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{4}$
$\underline{2}\ \underline{1}\ \underline{4}$

- Interviene el orden
- No se pueden repetir
- $m<n$

$$V_{7,3} = 7\cdot6\cdot5 = 210$$

$$V_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

b) $V_{7,4} = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$ números distintos

2. PERMUTACIONES SIMPLES.

Son variaciones simples de n elementos tomados de n en n.

- Interviene el orden
- No se pueden repetir
- De n tomamos n (Todos)

$$P_n = n!$$

Ejemplo:

Con los dígitos del 1 al 7 ¿Cuántos números de 7 cifras distintas podemos formar?

$$P_7 = 7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \boxed{5040}$$

3. VARIACIONES CON REPETICIÓN.

Son ordenaciones de un conjunto de n elementos, de los que tomamos m, donde $m \geq n$, $m \leq n$.

En dichas ordenaciones interviene el orden y los elementos se pueden repetir.

$$\boxed{VR_{n,m} = n^m}$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m

$$\boxed{V^R_{m,k} = m^k}$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Ejemplo:

¿Cuántas quinielas deberíamos rellenar para asegurarnos de acertar los 14 resultados?

$\{1, x, 2\}$

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$ quinielas distintas.

4. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN.

Son ordenaciones de m elementos tomados de n en m, en los que hay algunos que se repiten α_1 veces, α_2 veces, etc....

$$PR_m^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots} = P_m^{\alpha_1, \alpha_2 \ldots} = \frac{m!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots !}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots < m.$

Ejemplo:

¿Cuántas palabras diferentes, tengan o no sentido, se pueden formar con todas las letras de la palabra "matemáticas"?

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

m = 2 veces

a = 3 veces

t = 2 veces

$$P_{11}^{2,3,2} = \frac{11!}{2!\,3!\,2!} = 1663200 \text{ palabras}$$

5. COMBINACIONES SIMPLES.

Son ordenaciones de un conjunto de m elementos de los que sacamos k de ellos, sin intervenir el orden y sin poder repetirse. Equivale a sacar el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto A de m elementos

$$\boxed{C_{m,k} = \underbrace{\binom{m}{k}}_{\text{nº combinatorio}} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}} \quad \text{con } k \leq m.$$

Ejemplo:

Se sacan 4 cartas de la baraja española. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sacar?

$$C_{40,4} = \binom{40}{4} = \frac{40!}{36!\,4!} = \boxed{91390}$$

6. COMBINACIONES CON REPETICIÓN.

Disponemos de bolas de m colores. ¿Cuántas cajas distintas de k bolas podemos formar?

$$\boxed{C^R_{m,k} = \binom{m+k-1}{k} = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!\,k!}}$$

* Se pueden repetir
* No interviene el orden.

Ejemplo:

En una heladería se sirven helados de 20 sabores diferentes. ¿Cuántas compras distintas de 12 helados pueden efectuarse?

- No orden
- Se pueden repetir

$$\left.\right\} C^R_{20,12} = \binom{20+12-1}{12} = \binom{31}{12} = \frac{31!}{(31-12)!\,12!} =$$

$$= \frac{31!}{19!\,12!} = 141120525$$

¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 24$ de manera que $x_i > 2 \ \forall i \in \{1,2,3,4\}$?

El nº de soluciones enteras de una ecuación de m incógnitas igual a k, con $x_1 \geq 0$ es $C^R_{m,k} = \binom{m+k-1}{k}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24 \quad (1) \qquad x_i \geq 2$

$y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 + y_4 + 2 = 24$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24 - 8$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16 \; (2)$

$$C^R_{4,16} = \binom{4+16-1}{16} = \binom{19}{16} = \frac{19!}{3!\,16!}$$

Sea U el SV de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por $\{(2,3,4,5),(3,1,2,3),(0,0,3,6)\}$

Calcular un complementario de U.

1º) Calculo una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(2,3,4,5),(0,0,3,6)\}$

2º) Ampliamos la base de U a base de $\mathbb{Z}_7^4$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{\mathbb{Z}_7^4} = \{(2,3,4,5),(0,0,3,6),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

3er) los vectores añadidos son el complementario de U

$W = \langle\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\rangle$

Dadas las bases $B=\{(1,1,1),(1,2,2),(1,3,1)\}$ y $B'=\{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) calcular la expresión matricial de cambio de base de B a B'.

$a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3)=(1,1,1)$.

$$\left.\begin{aligned} a&=1 \\ 2a+2b&=1 \\ 3a+3b+3c&=1 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a=1} \quad 2+2b=1;\ \boxed{b=\frac{-1}{2}} \quad 3-\frac{3}{2}+3c=1;\ \frac{3}{2}+3c=1;\ 3c=\frac{-1}{2};\ \boxed{c=\frac{-1}{6}}$$

$(1,1,1)\equiv B'(1,-1/2,-1/6)$.

$a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3)=(1,2,2)$;

$$\left.\begin{aligned} a&=1 \\ 2a+2b&=2 \\ 3a+3b+3c&=2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a=1} \quad 2+2b=2;\ \boxed{b=0} \quad 3+3c=2;\ \boxed{c=\frac{-1}{2}}$$

$(1,2,2)\equiv B'(1,0,-1/2)$.

$a(1,2,3) + b(0,2,3) + c(0,0,3) = (1,3,1)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a + 2b = 3 \\ 3a + 3b + 3c = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{a = 1} \\ \boxed{b = 1/2} \\ 3 + \frac{3}{2} + 3c = 1 \; ; \; 3c = 1 - \frac{9}{2} \; ; \; \boxed{c = -\frac{7}{6}} \end{array}$$

$(1,3,1) \equiv B'(1, 1/2, -7/6)$.

$$(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/6 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & -7/6 \end{pmatrix}$$

b) Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(1,0,1)$. Calcular las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B'.

$$(x_1', x_2', x_3') = (1,0,1) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/6 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & -7/6 \end{pmatrix} = (2, 0, -4/3).$$

$\vec{v} \equiv B'(2, 0, -4/3)$

Sean $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,0,0), (0,3,1), (0,0,2)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Si $\vec{x} \equiv B(1,1,2)$. Calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B'.

$\vec{x} \equiv B(1,1,2)$

$\vec{x} = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = 1(1,1,1) + 1(0,1,1) + 2(0,0,1) =$

$= (1,2,4)$

$\vec{x} = (1,2,4)$.

$a(1,0,0) + b(0,3,1) + c(0,0,2) = (1,2,4)$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ 3b = 2 \\ b + 2c = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{a = 1} \\ \boxed{b = 4} \\ 4 + 2c = 4 \; ; \; \boxed{c = 0} \end{array} \qquad \boxed{\vec{x} \equiv B'(1,4,0)}$$

Sea U el SV de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,4),(1,4,2)\}$. Calcular las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base.
$B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

1º) Calculamos una base de U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_U=\{(2,3,4)\}$$

2º) Vamos a calcular las coordenadas de los vectores de la base de U respecto de la base B.

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(2,3,4).$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ a+c=3 \\ b+c=4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=2+4b \quad \boxed{a=3} \\ 2+4b+c=3; \quad c=1+b; \quad \boxed{c=0} \\ b+1+b=4; \quad 2b=3; \quad \boxed{b=4} \end{array}$$

$$(x,y,z)=\lambda(3,4,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=4\lambda \\ z=0 \end{array}\right\}$$

Sean U y W los SV de $\mathbb{Z}_7^3$ generados por $\{(2,3,4),(1,5,2)\}$ y $\{(0,2,3),(2,3,1)\}$. ¿Es $\mathbb{Z}_7^3=U+W$?

1º) Calculamos base de U+W.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(U+W)=\{(2,3,4),(0,2,3),(0,0,4)\} \rightarrow \mathrm{Dim}(U+W)=3$$
$$\mathrm{Dim}(\mathbb{Z}_7^3)=3$$

Por tanto $\mathbb{Z}_7^3=U+W$ sí.

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$

$f(x,y,z,t) = (x+y+z,\ y+t,\ x+2y+z+t)$

a) Calcular una base de la imagen de f.

Cogemos los vectores de la base canónica.

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0,0) = (1,0,1) \\ f(0,1,0,0) = (1,1,2) \\ f(0,0,1,0) = (1,0,1) \\ f(0,0,0,1) = (0,1,1) \end{array}\right\}$$

Triangularizamos para calcular una base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(Im(f)) = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ ✓

b) ¿Es f un epimorfismo?

No, porque $\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{Z}_5^3) = 3$.

c) ¿Qué cardinal tiene el codominio?

$\# \mathbb{Z}_5^3 = 5^3 = 125$ elementos.

d) ¿Qué cardinal tiene la Imagen de f?

Im(f) es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 2. Por tanto $\# \mathbb{Z}_5^2 = 5^2 = 25$ elementos.

e) ¿Es f un monomorfismo?

f es un monomorfismo $\Leftrightarrow \dim(N(f)) = 0$.

$$\underset{4}{\dim \mathbb{Z}_5^4} = \underset{2}{\dim N(f)} + \underset{2}{\dim(Im f)}$$

$\dim(N(f)) = 2 \rightarrow$ Por tanto, no es un monomorfismo.

5

f) Calcular una base del núcleo.

$N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y+t=0 \\ x+2y+z+t=0 \end{array} \right\}$

$B(N(f)) = \left\{ (1,4,0,1), (4,0,1,0) \right\}$

$\dim(N(f)) = 2.$

DUDA Calcular una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $(0,1,0,0) \in N(f)$ y $Im(f) = L\{(1,1,1),(0,1,1)\}$

$f(0,1,0,0) = (0,0,0)$

$f(1,0,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,0,1,0) = (0,1,1)$

$f(0,0,0,1) =$

¿Cómo calculo ese?

Escaneado con CamScanner

Sea U el sv de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por $\{(1,2,3,4), (2,1,3,4), (3,3,6,1), (1,4,5,2)\}$. Calcular una base de $\mathbb{Z}_7^4$ sobre U

1º) Calculamos una base de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,3,4), (0,4,4,3)\}$

AQUI

$\dim U = 2$

$\dim(\mathbb{Z}_7^4) = 4$.

Ampliamos la base de U a base de $\mathbb{Z}_7^4$

$B(\mathbb{Z}_7^4) = \{(1,2,3,4), (0,4,4,3), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$B\ \dfrac{\mathbb{Z}_7^4}{U} = \{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$, respecto de las bases

$B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$.

Calcular $f(1,2,3)$.

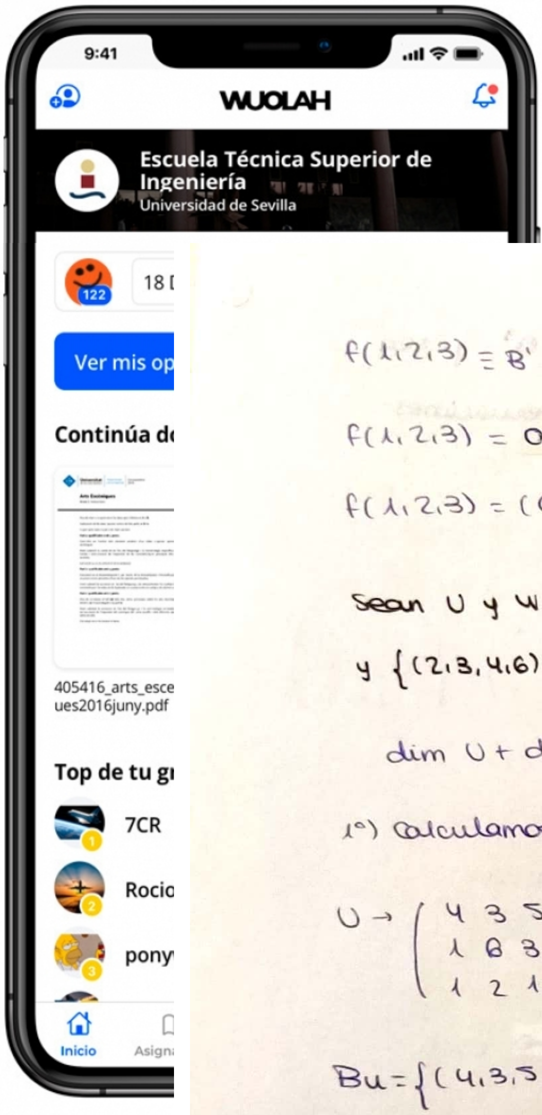
1º) Calculamos las coordenadas del $(1,2,3)$ respecto de la base B

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,2,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+c=2 \\ b+c=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1+4b \ ; \ \boxed{a=0} \\ 1+4b+c=2 \ ; \ c = 1+b \ ; \ \boxed{c=2} \\ b+1+b=3 \ ; \ 2b=2 \ ; \ \boxed{b=1} \end{array} \qquad (1,2,3) \equiv_B (0,1,2).$$

$$(x', y', z', t') = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x', y', z', t') = (0,1,2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,3,3,1)$$



$f(1,2,3) = B'(0,3,3,1)$.

$f(1,2,3) = 0(1,1,1,1) + 3(0,1,1,1) + 3(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1) =$

$f(1,2,3) = (0,3,1,2)$.

Sean U y W los sv de $\mathbb{Z}_7^4$ generados por $\{(4,3,5,2),(1,6,3,4),(1,2,1,1)\}$ y $\{(2,3,4,6),(5,6,5,4),(0,2,2,3)\}$ respectivamente. Calcular la $\dim U \cap W$.

$\dim U + \dim W = \dim U+W + \dim U \cap W$

1º) Calculamos una base de U y una de W

$$U \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(4,3,5,2),(0,3,5,4)\} \to \dim(U) = 2$

$$W \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_W = \{(2,3,4,6),(0,2,2,3)\} \to \dim W = 2$.

$$B(U+W) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\dim(U+W) = 4$.

$$\underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim U}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim W}} = \underset{4}{\underset{\shortparallel}{\dim U+W}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\dim U \cap W}}$$

$\dim U \cap W = 0$.

Sea $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{Q}^3$ y sea $U=\langle\{(1,2,1),(1,3,2),(2,5,3)\}\rangle$. Calcular las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B.

1º) Calculamos una base de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & +1 & +1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U=\{(1,2,1),(0,1,1)\}$

$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(1,2,1) \rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=0 \end{matrix} \quad c=1.$

$(1,2,1)\equiv B(1,0,1)$

$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(0,1,1) \rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix} \quad c=1.$

$(0,1,1)\equiv B(0,0,1).$

$(x,y,z)=\lambda(1,0,1)+\mu(0,0,1) \qquad \left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda+\mu \end{matrix}\right\}$

Sea $f:\mathbb{Q}^2\rightarrow\mathbb{Q}^3$, $f(x,y)=(x,x+y,x-y)$ una aplicación lineal. Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases $B=\{(1,1),(1,2)\}$ y $B'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

$(x',y',z')=(x,y)\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$

$f(1,1)=(1,2,0)$

$f(1,2)=(1,3,-1)$

calculamos las coordenadas del vector $\vec{v}$ de B respecto B'.

$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(1,2,0).$

$\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a+c=2 \\ b+c=0 \end{matrix}\right\}; \quad \begin{matrix} a-c=1; \quad a=1+c \quad ; \boxed{a=3/2} \\ 1+c+c=2; \quad 2c=1; \boxed{c=1/2} \\ b=-c \quad \boxed{b=-1/2} \end{matrix}$

$(1,2,0)\equiv B'(3/2,-1/2,1/2)$

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,3,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+c=3 \\ b+c=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=1-b \ ; \ \boxed{a=5/2} \\ 1-b+c=3 \ ; \ c=2+b \ ; \boxed{c=1/2} \\ b+2+b=-1 \ ; \ 2b=-3 \ ; \ \boxed{b=\frac{-3}{2}} \end{array}$$

$(1,3,-1) \equiv B'(5/2, -3/2, 1/2)$

$$(x', y', z') = (x, y)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \checkmark$$

Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una app lineal $f: \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ respecto de las bases $B = \{(2,1),(3,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

calcular $f(2,3)$.

$$(x', y', \cancel{z'}) = (x, y, \cancel{z})\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1º) calculamos las coordenadas del vector $(2,3)$ respecto de la base B

$(2,3) \equiv B(2,1)$

$a(2,1) + b(3,1) = (2,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3b=2 \\ a+b=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2(3+4b)+3b=2 \ ; \quad 1+3b+3b=2 \ ; \ \boxed{b=1} \\ a=3+4b \qquad a=3+4 \ ; \ \boxed{a=2} \end{array}$$

2º) calculamos las coordenadas de B.

$$(x', y', z') = (2,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (4,0,0).$$

3º) $f(2,3)$ respecto B'.

$f(2,3) = 4(1,1,0) + 0(1,0,1) + (0,1,1) = (4,4,0)$.

⑩

Calcular una aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ verificando que $f(1,2) = (2,3,1)$ y $f(2,5) = (3,4,2)$.

$B(\mathbb{Z}_7^2) = \{(1,2),(2,5)\}$

$(1,2)A = (2,3,1)$ y $(2,5)A = (3,4,2)$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{I} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}}$

$f(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{f(x,y) = (4x+6y, 5y, x)}$

¿Existe una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ verificando que $f(1,0,0) = (2,3)$, $f(0,1,0) = (1,1)$, $f(1,1,0) = (1,2)$?

$U \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Por tanto no es base de $\mathbb{R}^3$,

ya que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y $\dim(U) = 2$

Para que sea app tiene que verificar que:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $f(a\vec{v}) = af(\vec{v})$

3) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$\cancel{f(1,0,0) = (2,3) = (1,1)+(1,2) =}$

$f(1,1,0) = (1,2) = (2,3) + (1,1) = (3,4) \neq (1,2)$

No se cumple.

11

Sea U el SV de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,4),(1,4,2)\}$. Calcular una base del espacio vectorial cociente $\frac{\mathbb{Z}_5^3}{U}$

1º) Calculamos una base de U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_U = \{(2,3,4)\}$$

2º) Ampliamos a una base de $\mathbb{Z}_5^3$.

$$B(\mathbb{Z}_5^3) = \{(2,3,4),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

3º) $$\frac{\mathbb{Z}_5^3}{U} = \{[(0,1,0)],[(0,0,1)]\}$$

Dada la app lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$f(x,y,z) = (2x+z, 2x+y)$.

a) Calcular una base de la Imagen de f.

Cogemos los valores de la base canónica

$f(1,0,0) = (2,2)$
$f(0,1,0) = (0,1)$
$f(0,0,1) = (1,0)$

$Im(f) = <\{(2,2),(0,1),(1,0)\}>$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_{Im(f)} = \{(2,2),(0,1)\}$$

b) Calcular una base del núcleo.

$$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{1}{\dim N(f)} + \underset{2}{\dim Im(f)}$$

$N(f) = \{\vec{0}\}$

$$N(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+z=0 \\ 2x+y=0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+z=0 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} z=-2\lambda \\ x=\lambda \\ y=-2\lambda \end{matrix}$$

Sol $(\lambda,-2\lambda,-2\lambda)$.
$\downarrow$
$B_{N(f)} = (1,-2,-2)$

(12)

Sean $U = \langle\{(1,2,3,4),(1,0,4,1)\}\rangle$ y $W = \langle\{(1,2,1,1),(1,2,3,3)\}$ de $\mathbb{Z}_5^4$. ¿Es $\mathbb{Z}_5^4 = U \oplus W$?

$\mathbb{Z}_5^4 = U \oplus W$:

1) $\mathbb{Z}_5^4 = U + W$

2) $U \cap W = \{\vec{0}\}$

$$U+W \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(U+W) = 4 \\ \dim(\mathbb{Z}_5^4) = 4 \end{array}\right\} \text{ sí} \to \mathbb{Z}_5^4 = U + W$$

$U \cap W = \{(0,0,0)\}$

Sea U un SV de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1)\}$. Calcular las ecuaciones cartesianas de U respecto de la base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Escaneado con CamScanner

① Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$, probar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

qp

② Calcular $|A|$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{Z}_7)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7 = 0 \qquad \boxed{|A| = 0}$$

③ Calcular $|A|$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} = 3 + 6 - \cancel{3} - \cancel{2} = 9 = 4$$

$$\boxed{|A| = 4}$$

④ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$. Calcular α_{12}

α_{12} = Fila 1, Columna 2.

$$\alpha_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(1-3) = -1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 = \boxed{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

3 Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular el determinante de la matriz aplicando el desarrollo de laplace por la segunda columna.

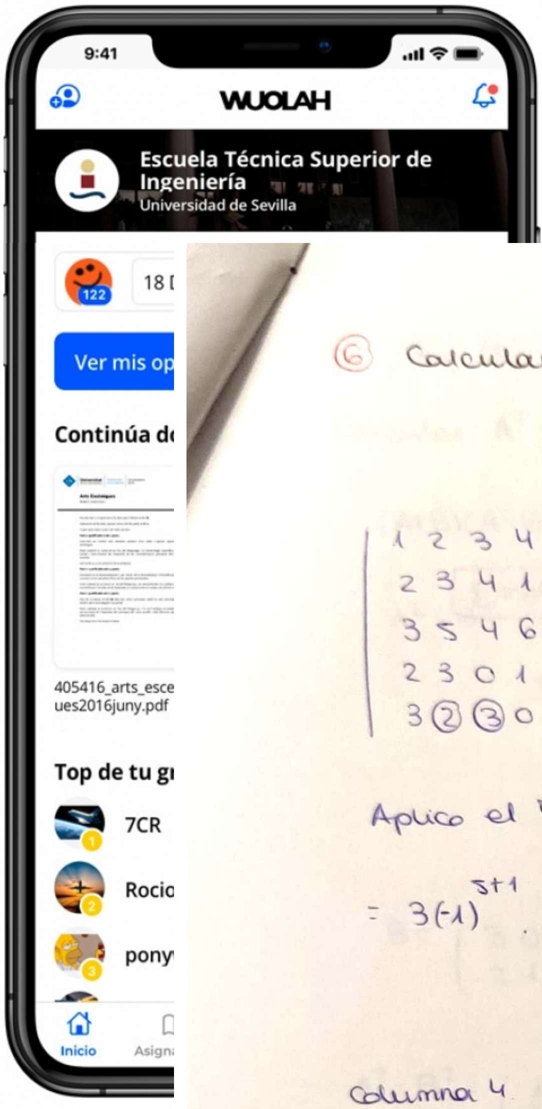
$\cancel{|A| = 2(-1)^{1+2}}$ $\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{3} & 1 \\ 3 & 1 & \end{vmatrix}$

$$|A| = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$\underline{\mathbb{Z}_5}$

$$|A| = -2.(3+\cancel{2}-\cancel{2}-9) - 1(3+\cancel{2}+6-\cancel{2}-1-18) =$$

$$= 3.(4) + 4.0 = 12 = \boxed{2}$$



⑥ Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{5\times5}(\mathbb{Z}_7)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Por columnas}]{\text{Hacemos Gauss}} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Aplico el Desarrollo de Laplace a la fila 5.

$$= 3(-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

Columna 4

$$= 3 \cdot 4(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{-12} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (48 + 24 + 2 - 2 - 16 - 72) \cdot 2 =$$

$$= 2(-16) = 2 \cdot 5 = 10 = \boxed{3}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

⑦ Calcular la inversa de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-2 = 2. \quad \boxed{|A| = 2}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

⑧ Calcular A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 = 2; \quad \boxed{|A| = 2}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9 A y B $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tq $A+B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&3\end{pmatrix}$.

Calcular A^2-B^2.

$$(A+B)(A-B) = A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2 = A^2-B^2.$$

A^2-B^2

$$\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix} \\ + \\ A-B=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&3\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

$2A=\begin{pmatrix}2&-2\\2&+4\end{pmatrix}$; $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2\\2&4\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&-3\\3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{-2}\\\cancel{0}&\cancel{3}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2-B^2=\begin{pmatrix}-5&-4\\2&1\end{pmatrix}}$$

10 Calcular el anillo $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $M_{2x2}(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&6\\6&6\end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&6\\6&6\end{pmatrix}$$

Calculamos $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1 \qquad A^t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \qquad \bar{A}^t=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&6\\6&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\6&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&6\\6&0\end{pmatrix}}$$

(11) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{Z}_5)$. ¿Para qué valores de a la matriz es regular?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplico el desarrollo de Laplace por la tercera fila.

$$a(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 3 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -a(a+2a-a^3-3) + 1(1+4a+6a-a^2-6-4) =$$

$$= 4a(4a^3+3a+2) + 4a^2+1 = a^4+2a^2+3a+4a^2+1 =$$

$$= \cancel{a^4+a^2+4}$$

$\cancel{a^4+a^2+4=0}$

$a^4+a^2+3a+1=0.$

- Si $a=0 \to 1\neq 0$ NO.
- Si $a=1 \to 1+1+3+1=0;\ 1\neq 0$ NO
- Si $a=2 \to 1+4+1+1=0;\ 2\neq 0$ NO
- $\boxed{\text{Si } a=3} \to 1+4+4+1=0\quad 0=0$ Sí ✓
- $\boxed{\text{Si } a=4} \to 1+1+2+1=0\quad 0=0$ Sí ✓

Por tanto la matriz es regular para aquellos valores en los que a sea igual a 0, 1, 2.

(12) sea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ¿A^n?

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(13) Sean $a(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ y $b(x) = 3x^2 + 2x + 4$ dos polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcular la suma y el producto.

(14) ¿Es irreducible el polinomio $x^2+x \in \mathbb{Z}_3[x]$?

Si $x=0 \to 0$
Si $x=1 \to 2 \neq 0$
Si $x=2 \to 0$

Como $x^2+x \to x(x+1)$ no es irreducible ya que lo he puesto en forma de dos polinomios de grado 1 y no hay ninguno con grado 0.

(15) ¿Es irreducible el polinomio $x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$?

Si $x=0 \to 1$
Si $x=1 \to 1$

Es irreducible Porque no podemos ponerlo como producto de un polinomio de grado 1 por otro de grado 2, ya que nunca nos daría x^3+x+1

(16) Calcular la descomposición en irreducibles de $a(x) = (4x+3)(3x+2) \in \mathbb{Z}_7[x]$.

Como los polinomios son de grado 1, podemos decir que son irreducibles, y por tanto tenemos una descomposición en irreducibles del polinomio $a(x)$. Sin embargo, dicha descomposición no es la descomposición en irreducibles ya del polinomio $a(x)$, ya que no son mónicos

$4x+3 \to$
$3x+2 \to$

$(4x+3)(3x+2) = 0$
$12x^2+8x+9x+6 = 0$;

$5x^2+3x+6=0$

$x = 1 \to 0 = 0$
$x = 2$.

(17) ~~Si a(x) y b(x) son 2 polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$ y $2x^2+3x+1$ es un mcd de a(x) y b(x) ⟹ ta~~

(17) Dados $a(x) = (4x+4)(2x+3)$ y $b(x) = (3x+1)(4x+1)$ de $\mathbb{Z}_5(x)$. Calcular $\text{mcd}\{a(x), b(x)\}$ y $\text{mcm}\{a(x), b(x)\}$

$a(x) = 4.4(4x+4)\,2.3(2x+3) = 1(x+1).1(x$

(18) Sea $a(x) = 3x^3+4x^2+2x+3$ y $b(x) = 2x^2+2x+1$ dos polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcular $a(x)$ div $b(x)$ y $a(x)$ mod $b(x)$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+4x^2+2x+3 & 2x^2+2x+1 \\ \hline 2x^3+2x^2+x & 4x+4 \longrightarrow a(x) \text{ div } b(x) \\ \hline 3x^2+3x+3 & \\ 4x^2+4x+2 & \\ \hline 2x \;\; 6 \longrightarrow a(x) \text{ mod } b(x) & \end{array}$$

(19) Calcular un mcd y un mcm de los polinomios $a(x) = x^4+x+1$ y $b(x) = x^2+2x+3$ de $\mathbb{Z}_5[x]$.

Algoritmo de Euclides.

$(a_0(x), a_1(x)) = (x^4+x+1,\ x^2+2x+3) = \cancel{(3,0)}.\ (x^2+2x+3,\ 3) = (3,0)$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x+1 & x^2+2x+3 \\ \hline 4x^4+3x^3+2x^2 & x^2+3x \\ \hline 3x^3+2x^2+x+1 & \\ 2x^3+4x^2+x & \\ \hline x^2+2x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x+1 & x^2+2x+3 \\ \hline 4x^2+3x+2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$\boxed{\text{mcd} = 3}$ ✓

(20) Calcular las raíces del polinomio $x^3+2x^2+x+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$x^3+2x^2+x+2=0$
- Si $x=0 \to 2 \neq 0$ ✗
- Si $x=1 \to 1+2+1+2=0$; $1 \neq 0$ ✗
- Si $x=2 \to 3+3+2+2=0$; $0=0$ ✓
- Si $x=3 \to 2+3+3+2=0$ $0=0$ ✓
- Si $x=4 \to 4+2+4+2=0$ $2 \neq 0$ ✗

Las raíces del polinomio x^3+2x^2+x+2 son 2 y 3.

(21) ¿Es irreducible el polinomio $x^4+x^2+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$?

Vemos si tiene raíces:

$x^4+x^2+2=0$
- Si $x=0 \to 2 \neq 0$ NO
- Si $x=1 \to 1+1+2=0$; $1 \neq 0$ NO
- Si $x=2 \to 2^4+2^2+2=0$; $1 \neq 0$

No tiene raíces

Los polinomios mónicos de grado 2 de $\mathbb{Z}_3[x]$ son:

$\cancel{x^2}$, x^2+1, $\cancel{x^2+x}$, $\cancel{x^2+2}$, $\cancel{x^2+x+1}$, x^2+x+2, $\cancel{x^2+2x+1}$, x^2+2x+2, $\cancel{x^2+2x}$.

Hemos tachado los que tienen raíces

Por tanto, los únicos polinomios mónicos e irreducibles de grado 2 de $\mathbb{Z}_3[x]$ son esos.

$x^4+x^2+2 \mod x^2+1$
$x^4+x^2+2 \mod x^2+x+2$
$x^4+x^2+2 \mod x^2+2x+2$

Como los tres restos nos han dado $\neq$ de 0, el polinomio es irreducible.

11

22 Calcular en $\mathbb{R}[x]$ el resto de dividir $x^{114}+x^{68}x^2-2x+1$ entre $x-1$.

$$x^{114}+x^{68}+x^2-2x+1 \;\underline{\left|\; x-1 \right.}$$

$$2$$

Aplicamos el teorema del resto que dice que:

Si $a(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K \Rightarrow a(x) \bmod x-\alpha = a(\alpha)$.

Es decir $\alpha = 1$ (en este caso)

$$a(\alpha) = 1^{114}+1^{68}+1^2-2(1)+1 = \cancel{1}+\cancel{1}+1-\cancel{2}+1 = 2.$$

$\boxed{\text{El resto es } 2}$

23 Calcular en $\mathbb{Z}_5[x]$ el resto de dividir $x^{1002}+x^{77}+1$ entre $x+3$.

Aplicamos el teorema del resto:

$$x^{1002}+x^{77}+1 \;\underline{\left|\; x+3 \right.}$$

$$\boxed{2}$$

$\cancel{\alpha = 3}$

$\cancel{a(\alpha) = 3^{1002}+3^{77}+1} =$ Tengo que buscar una potencia ~~q~~ de 2 que de 1.

$x+3 = x-2$ en $\mathbb{Z}_5$ (para poder aplicar el teorema del resto).

$\alpha = -2$.

$2^1 = 2$ $\quad 2^4 = 1$ $\qquad 1002 \;\underline{|\;4}\;$ resto 2, cociente 250 $\qquad 77 \;\underline{|\;4}\;$ resto 1, cociente 19

$2^2 = 4$

$2^3 = 3$

$$2^{1002}+2^{77}+1 = (2^4)^{250}\cdot 2^2 + (2^4)^{19}\cdot 2^1 + 1 =$$

$$= 4+2+1 = \boxed{2}$$

(24) Calcular las raíces y sus multiplicidades del polinomio $x^3+2x+3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Teorema del factor $\rightarrow a(x) = (x-\alpha)^m \cdot b(x)$.

Raíces: $\{2, 4\}$

$$x^3+2x+3=0 \left| \begin{array}{l} \text{Si } x=0 \rightarrow 3 \neq 0 \text{ NO.} \\ \text{Si } x=1 \rightarrow 1+2+3=0; \ 1 \neq 0 \text{ NO} \\ \text{Si } x=2 \rightarrow 3+4+3=0; \ 0=0 \text{ SÍ.} \\ \text{Si } x=3 \rightarrow 2+1+3=0 \ \ 1\neq 0 \text{ NO.} \\ \text{Si } x=4 \rightarrow 4+3+3=0; \ 0=0 \text{ Sí} \end{array} \right.$$

$\underline{\mathbb{Z}_5}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+2x+3 & \underline{x+3} \rightarrow x-2 \\ 4x^3+2x^2 & x^2+2x+1 \\ \hline \cancel{2x^2}+2x+3 & \\ 3x^2+4x & \\ \hline \quad \cancel{x}+3 & \\ \quad 4x+\cancel{2} & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

(25) Sabemos que $\mathbb{Q}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$. Demostrar que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}$ en U

Sea $(x,y,z), (x',y',z') \in U$.

① $(x,y,z) - (x',y',z') = (x-x', y-y', z-z')$

$x-x'+y-y'+z-z' = x+y+z\cancel{6} - (x',y',z') \in U$

$x-x'+y-y'+z-z' = \underbrace{x+y+z}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \underbrace{(x'+y'+z')}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$.

② $a(x,y,z) = (ax, ay, az) \in U$.

$ax+ay+az = a\underbrace{(x+y+z)}_{0} = 0$.

(26) Calcular todos los elementos del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^2$ generado por $\{(1,2),(2,0)\}$

$\langle\{(1,2),(2,0)\}\rangle = \{a(1,2) + b(2,0) \text{ tq } a,b \in \mathbb{Z}_3\}$

$= \{(0,0),(2,0),(1,0),(1,2),(0,2),(2,2),(2,1),(1,1),(0,1)\}$

(27) Sean U_1 y U_2 los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_2^3$ generados por $\{(1,1,0)\}$ y $\{(1,0,1)\}$ respectivamente. Calcular todos los elementos de U_1+U_2.

Como U_1 es $\langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y U_2 es $\langle\{(1,0,1)\}\rangle$,

entonces $U_1+U_2 = \langle\{(1,1,0),(1,0,1)\}\rangle =$

$= \{a(1,1,0) + b(1,0,1) \text{ tq } a,b \in \mathbb{Z}_2\} =$

$= \{(0,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

28) Calcular el polinomio característico y los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

$|A - \lambda I| = 0$ → Los valores propios de la matriz A, serán las raíces de dicho polinomio (polinomio característico).

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$
$$\searrow \lambda = -1$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3}$$

Los valores propios de la matriz A son $\boxed{-1 \text{ y } 3}$

29) Calcula una base de los subespacios vectoriales propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Sabemos que los valores propios son -1 y 3.

$\underline{\lambda = -1}$

$$V(-1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V(-1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ \cancel{2x + 2y = 0} \end{array} \right\}$$

$\dim V(-1) = 2 - 1 = 1$

$B\, V(-1) = \{(1,-1)\}$

$V(3) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} -2x+2y=0 \\ \cancel{2x-2y=0} \end{matrix} \right\}$

$\dim V(3) = 2-1 = 1.$

$B_{V(3)} = \{(1,1)\}$

(30) Calcular las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Sabemos que los valores propios son -1 y 3. Además, hemos visto que el -1 y el 3 tienen multiplicidad geométrica, ya que ~~dim V(-1)~~ $\dim V(-1) = \dim V(3) = 1$.

Vamos a calcular la multiplicidad algebraica.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$

$P'_A(\lambda) = 2\lambda - 2 \qquad \left.\begin{matrix} P'_A(-1) = -4 \neq 0 \\ P'_A(3) = 4 \neq 0 \end{matrix}\right\}$ Tienen multiplicidad 1 pq es en la 1ª derivada en la que se anulan

(31) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ diagonalizable?

Sí, ya que la multiplicidad algebraica de -1, vale 1 y la de 3 también vale 1, que al sumarlas $(1+1=2)$ nos da 2, que coincide con el tamaño de la matriz A.
Y antes habíamos visto que sus M.A coincidían con sus M.G

(32) Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

Valores propios $\rightarrow -1, 3$.

M.A $\rightarrow 1$

M.G $\rightarrow 1$.

Como $MA(-1) + MA(3) = 1+1 = 2$.
Puede ser diagonalizable

$M.A = M.G = 1.$

$A = P D P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{V(-1)} = (1,-1)$

$B_{V(3)} = (1,1).$

33 Diagonalizar, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z}_7)$.

1º) $\underline{P_A(\lambda)}$

$|A - \lambda I| = 0$;

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{matrix} \right| =$$

$$\begin{matrix} 4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & 1 \end{matrix}$$

$= (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 12(2-\lambda) = 0$;

$(4-4\lambda-\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 24 + 12\lambda = 0$; $(\lambda^2 - 5\lambda + 4)(2-\lambda) - 24 + 12\lambda = 0$

$2\lambda^2 - \lambda^3 - 10\lambda + 5\lambda^2 + 8 - 4\lambda - 24 + 12\lambda = 0$; $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 16 = 0$;

$6\lambda^3 + 5\lambda + 5 = 0$;

$P_A(\lambda) = 6\lambda^3 + 5\lambda + 5$

2º) Valores propios

$6\lambda^3 + 5\lambda + 5 = 0$ $\nearrow \lambda = 2$ $\searrow \lambda = 3$

3º) Multiplicidad Algebraica y Mult Geométrica

$P_A(\lambda) = 6\lambda^3 + 5\lambda + 5$

$P_A'(\lambda) = 4\lambda^2 + 5$ $P_A'(2) = 2 + 5 = 0$ $P_A'(3) = 1 + 5 = 6 \neq 0$

$P_A''(\lambda) = \lambda$ $P_A''(2) = 2 \neq 0$

$\lambda = 2 \to M.A = 2$ $\lambda = 3 \to M.A = 1$.

Mult Geométrica

$$V(2) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \cancel{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4-2 & 2 & 5 \\ 6 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$V(2) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x+2y+5z=0 \\ \cancel{6x+6y+z=0} \end{array} \right\}$ Vemos si son LI. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim V(2) = 3 - 1 = 2$.

$B_{V(2)} = \{(6,1,0),(1,0,1)\} \leftarrow 2x = 5y + 2z$

$y = 1 \quad z = 0 \quad x = 6$.

$y = 0 \quad z = 1 \quad x = 1$.

$V(3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} x+2y+5z=0 \\ 6+5y+z=0 \\ 6z=0 \end{array} \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{6} \end{pmatrix}$

$\dim V(3) = 3 - 2 = 1$.

$B_{V(3)} = \{(1,3,0)\}$

$x + 2y + 5z = 0; \quad x = -2y - 5z$

$x = 5y + 2z$.

$x = 5y + 2z;$

$x = 1. \quad y = 3 \quad z = 0; \rightarrow$

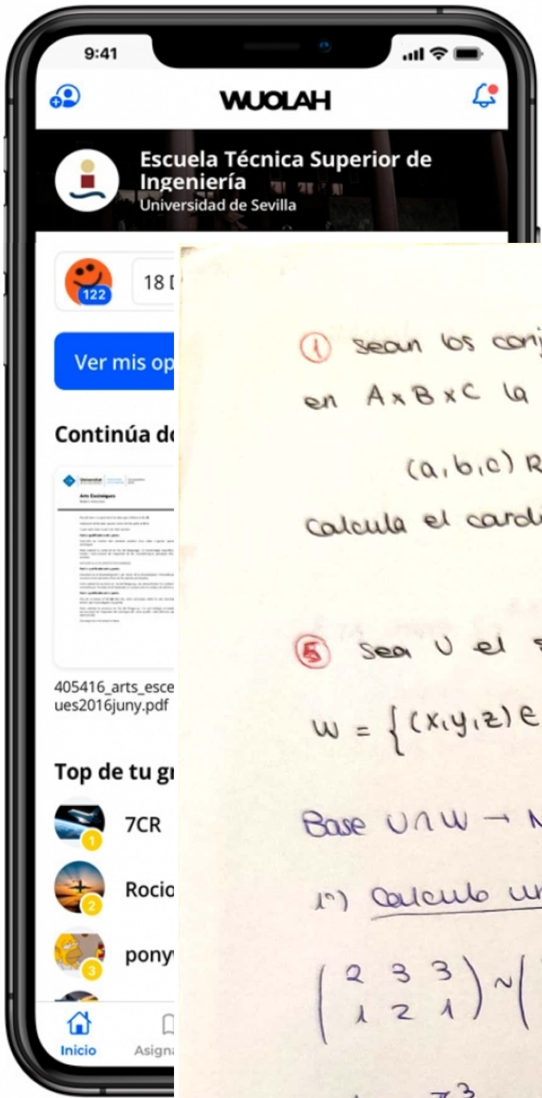
Podemos afirmar que la matriz A es diagonalizable.

$A = P.D.P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}$$

Se pone el 2 dos veces pq tiene M.A = 2



① Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ y $C=\{5,6,7\}$. Definimos en $A\times B\times C$ la relación de equivalencia.

$$(a,b,c)\,R\,(a',b',c') \text{ si } a+b+c = a'+b'+c'.$$

Calcula el cardinal del conjunto cociente $\dfrac{A\times B\times C}{R}$

⑤ Sea U el sv de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,3),(1,2,1)\}$ y $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_7^3 \,/\, x+y+z=0\}$. Calcula una base de $U\cap W$.

Base $U\cap W \rightarrow$ Necesito las ecuaciones cartesianas L.I de U y W.

1º) Calculo una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_U=\{(2,3,3),(0,4,3)\}$$

$$\underset{3}{\dim \mathbb{Z}_7^3} = \underset{2}{\dim U} + \underset{1}{\text{nº ecuaciones}}$$

2º) Calculo las ec. cartesianas de U.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 3 & 4 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 8z+9x-12x-6y = \qquad \begin{matrix} 2 & 0 & x \\ 3 & 4 & y \end{matrix}$$

$$= \boxed{4x+y+z=0}$$

3º) Ec cart de U y W L.I.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 4x+y=0 \\ 6y+z=0 \end{matrix}\right\}$$

$\cancel{x=4^{-1}\cdot 6\lambda = 2\cdot 6\lambda = 12\lambda}$

$\cancel{x=5\lambda}$

$\cancel{y=\lambda}$

$\cancel{z=6\lambda}$; $\cancel{z=\lambda}$ $\boxed{y=\lambda}$ $\boxed{z=6\lambda}$

$x = 4^{-1}\cdot 6\lambda = 2\cdot 6\lambda = 12\lambda$

$\boxed{x=5\lambda}$

$$\left.\begin{matrix} x=5\lambda \\ y=\lambda \\ z=6\lambda \end{matrix}\right\} \quad (5,1,6) \qquad B_{U\cap W}=\{(5,1,6)\}$$

⑥ ¿cuántos números de 6 dígitos tienen exactamente 3 dígitos iguales a 0?

Importa el orden
con repetición

$$VR_n^m = n^m = 6^3 = 216.$$

⑩ Calcula, en $\mathbb{Z}_7[x]$, el resto de dividir $x^{977} + x^{83} + 2$ entre $x+3$

Como $x+3$ es $x-4$ (en $\mathbb{Z}_7$) $\Rightarrow$ por el teorema del resto sabemos que $x^{977} + x^{83} + 2 \bmod x+3 = 4^{977} + 4^{83} + 2$.

$4^1 = 4$ $\quad$ $4^3 = 1$ $\rightarrow$ Cogemos la potencia que da 1.

$4^2 = 2$

$$977 = 3 \cdot 325 + 2 \qquad 83 = 3 \cdot 28 + 0$$

$$4^{3\cdot 325 + 2} + 4^{3\cdot 28} + 2 = 4^{3\cdot 325} \cdot 4^2 + (4^3)^{28} + 2 =$$

$$= \underbrace{(4^3)^{325}}_{1} \cdot \underbrace{4^2}_{16} + \underbrace{(4^3)^{28}}_{1} + \underbrace{2}_{2} = 16 + 1 + 2 = 19 = 5.$$

$\boxed{\text{El resto es } 5}$

Resuelve en $\mathbb{Z}_{121}$ la ecuación $9x + 2 = 2x + 7$.

$7x = 5; \qquad x = 7^{-1} \cdot 5.$

$(121, 7) = (7, 2) = (2, 1) = (1, 0).$

$(1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, \ldots)$

$(0, 1) = (1, -17) = (-17, 52) = (52, \ldots)$

$121u + 7v = 1; \quad 121(-3) + 7(52) = 1.$

$7^{-1} = 52.$

$x = 5 \cdot 52 = 260 \qquad x = 260 \bmod 121 = 18$

$\boxed{x = 18}$

② Calcula todas las soluciones de la ecuación en congruencias $1210x \equiv 110 \pmod{2560}$.

$121x \equiv 11 \ (\text{mód } 256)$

$\text{mcd}\{256, 121\} = 10$

$(a_0, a_1) = (256, 121) \overset{q=2}{=} (121, 14) \overset{q=8}{=} (14, 9) \overset{q=1}{=} (9, 5) \overset{q=1}{=} (5, 4) \overset{q=1}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -8) = (-8, 9) = (9, -17) = (-17, 26) = (26, \ldots)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -2) = (-2, 17) = (17, -19) = (-19, 36) = (36, -55) = (55, \ldots)$

$256u + 121v = 1.$

$256(26) + 121(-55) = 1;$

$256(26) - 121(55) = 1.$

$256(260) - 121(550) = 10;$

Busco $121^{-1} = -55$

$-55 \bmod 256 = 201.$

~~[illegible]~~.

~~Soluciones~~: $\{($ ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ $)$ ~~[illegible]~~ $\}$

~~$x \equiv 605 \ (\text{mod } 256)$~~

$\boxed{\cancel{x = 605 + 256k}}$ → $\boxed{\cancel{[illegible]}}$

$121x \equiv 11 \ (\text{mód } 256)$

$x \equiv 2211 \ (\text{mód } 256)$

$x \equiv 163 \ (\text{mód } 256)$; $\boxed{x = 163 + 256k}$

④ Sea $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_7^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ 2x+y+z+t=0 \\ x+3y+3z+3t=0 \end{matrix} \right\}$ Calcula una base de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \end{matrix}\right\}$ Ecuaciones L.I de U.

$$\underset{4}{\dim \mathbb{Z}_7^4} = \underset{2}{\dim U} + \underset{2}{\text{nº ecuaciones}}$$

$\left.\begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\beta \\ t=6\lambda+6\beta \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \to (0,1,0,6) \\ \to (0,0,1,6). \end{matrix}$

$x = \cancel{6\lambda}+6\beta - 6\cancel{\lambda} - 6\beta = 0$

Base de U $\to$ $B_U = \{(0,1,0,6), (0,0,1,6)\}$ ✓

③ ¿Es x^2+1 una unidad de $\mathbb{Z}_2[x]\, x^4+x^2+1$?

x^2+1 será unidad $\Leftrightarrow$ el mcd$\{x^4+x^2+1, x^2+1\} = 1$.

Algoritmo Extendido de Euclides. $q(x)=x^2$ $q(x)=x^2+1$.

$(a_0(x), a_1(x)) = (x^4+x^2+1, x^2+1) = (x^2+1, 1) = (1, 0)$

$(s_0(x), s_1(x)) = (1,0) = (0,1) = (\cancel{1+x^2+1}) = (1, \dots)$

$(t_0(x), t_1(x)) = (0,1) = (1, x^2) = (x^2, \dots)$

$\mathbb{Z}_2$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4}+\cancel{x^2}+1 & x^2+1 \\ \cancel{x^2}+\cancel{x^2} & x^2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2}+1 & 1 \\ \cancel{x^2} & x^2+1 \\ \hline \cancel{1} & \\ \cancel{1} & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$x^4+x^2+1 . U(x) + x^2+1 . V(x) = 1.$

$x^4+x^2+1(1) + \underbrace{x^2+1\,(x^2)} = 1.$

Sí es unidad, ya que el mcd vale 1.

⑥ Calcula los valores propios de la matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1º) $\underline{P_A(\lambda)}$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + \cancel{1} - \cancel{1} + \lambda =$$

$$= (1+\lambda^2-2\lambda)(2-\lambda) + \lambda =$$

$$= 2 - \cancel{\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 4\lambda + 2\lambda^2 + \cancel{\lambda} =$$

$$= \boxed{4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 2}$$

$4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$
- $\lambda = 0 \rightarrow 2 \neq 0$ NO
- $\lambda = 1 \rightarrow 4+4+1+2 = 11 = 1 \neq 0 \rightarrow$ NO.
- $\lambda = 2 \rightarrow 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 2 + 2 \quad 2 \neq 0 \rightarrow$ NO
- $\lambda = 3 \rightarrow 4(3)^3 + 4(3)^2 + 3 + 2 \rightarrow 4 \neq 0 \rightarrow$ NO.
- $\lambda = 4 \rightarrow 4(4)^3 + 4(4)^2 + 4 + 2 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$ NO

⑧ ¿Cuántos números impares de tres cifras podemos construir con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

_ _ I

Variaciones sin repetición

~~$V_6^5 = 6^5 = 7776$~~

~~$V_3^5 = 243$~~ ~~729 - 243 = 486~~

~~$V_3^6 = 729$~~

$\overline{6} \times \overline{5} \times \overline{3} = \boxed{90}$

③ Calcular todos los números enteros pares que al dividirlos entre 5 dan resto 3 y al dividirlos entre 7 dan resto 4.

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{2}x \equiv 3 \pmod 5 \\ \cancel{2}x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 0 \pmod 2 \end{array}\right\}$$

④ ¿Es irreducible el polinomio $x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$?

1º) Raíces

$$x^3+x+1=0 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \to 1 \neq 0 \to NO \\ x=1 \to 1\neq 0 \to NO \\ \cancel{x=2 \to 2^3+1+1=0 \quad 0=0 \to Sí} \end{array}\right.$$

~~2º)~~ $\cancel{x^3+x+1 \text{ entre } x-2 \Rightarrow x}$

No tiene raíces.

2º) Vemos los polinomios mónicos de grado 2.

$2^2 \Rightarrow \cancel{x}, \cancel{x^2}, x^2\cancel{+1}, x^2\cancel{+x}, x^2+x+1$

He tachado los que tienen raíces.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^4+x^3 & x^3+x^2+1 \\ \hline x^4+x^3+x+1 & \\ x^4+x^3+x^2 & \\ \hline x^2+x+1 & \\ x^2+x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como el resto nos ha dado igual a 0, el polinomio es REDUCIBLE

$$x^3+x+1=(x^2+x+1)(x^3+x^2+1).$$

Escaneado con CamScanner