# ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

## 16 de Enero de 2020

**Alumno:**______________________________________ **D.N.I.:**________________ **Grupo:**________

**Ejercicio 1.** *Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *¿Existe el inverso de* 251 *en* $\mathbb{Z}_{512}$*? En caso afirmativo, calcúlalo.*
2. *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica* $251x + 512y = 13$ *en las que* $x$ *esté comprendida entre* 1000 *y* 3000*?*
3. *¿Existe algún número natural,* $n \geq 1$ *tal que* $251^n = 1$ *en* $\mathbb{Z}_{512}$*? ¿Y tal que* $152^n = 1$*? En los casos en que exista, da uno.*

**Solución:**

1. Para que exista el inverso, debe ocurrir que $\text{mcd}(251, 512)$ valga 1. Lo calculamos con el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{rcrcr} 512 & = & 251 \cdot 2 & + & 10 \\ 251 & = & 10 \cdot 25 & + & 1 \end{array}$$

Puesto que $\text{mcd}(251, 512) = 1$ sí existe el inverso.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 512 | | 0 | |
| 251 | | 1 | |
| 10 | 2 | $-2$ | $0 - 2 \cdot 1 = -2$ |
| 1 | 25 | 51 | $1 - 25 \cdot (-2) = 51$ |

Y vemos que $251^{-1} = 51$.

2. Resolvemos la ecuación. Para esto, la transformamos en una congruencia y la resolvemos:

$$\begin{array}{rcll} 251x & \equiv & 13 \text{ mód } 512 & \text{Multiplicamos por } 251^{-1} = 51 \text{ (calculado en el apartado anterior).} \\ 251 \cdot 51x & \equiv & 13 \cdot 51 \text{ mód } 512 & \text{Operamos y reducimos módulo } 512. \\ x & \equiv & 151 \text{ mód } 512 & \text{Extraemos la solución.} \end{array}$$

$$x = 151 + 512k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Una vez calculado $x$, hallamos $y$ (aunque realmente no es necesario para responder el ejercicio).

$$251(151 + 512k) + 512y = 13$$

$$37901 + 128512 + 512y = 13$$

$$512y = -37888 - 128512k$$

$$y = \tfrac{-37888-128512k}{512} = -74 - 251k.$$

Como piden que $x$ esté entre 1000 y 3000, acotamos en ese rango:

$$1000 \leq 151{+}512k \leq 3000 \Longrightarrow 849 \leq 512k \leq 2849 \Longrightarrow \frac{849}{512} \leq k \leq \frac{2849}{512} \Longrightarrow 1'6 \leq k \leq 5'6 \Longrightarrow 2 \leq k \leq 5.$$

Es decir, $k$ puede valer $2, 3, 4, 5$, lo que nos da cuatro soluciones en las que $x$ está comprendido entre 1000 y 2000.

3. Puesto que $\mathrm{mcd}(251, 512) = 1$, sabemos por el teorema de Fermat que $251^{\varphi(512)} = 1 \mod 512$. Por tanto, un valor de $n$ válido es $n = \varphi(512)$.

   Calculamos entonces $\varphi(512)$. Puesto que $512 = 2^9$ entonces $\varphi(512) = 2^9 - 2^8 = 256$. Por tanto, $n = 256$ es una solución.

   Para el caso 152 no podemos aplicar el teorema de Fermat, pues $\mathrm{mcd}(152, 512) \neq 1$. Ahora, quizá podría obtenerse un exponente $n$ por otro método. Pero si hubiera un número natural $n \geq 1$ tal que $152^n = 1$ en $\mathbb{Z}_{512}$, entonces $152 \cdot 152^{n-1} = 1$. Sea $u = 152^{n-1} \mod 512$. Tenemso que $152 \cdot u = 1$, luego $u = 152^{-1}$. Pero el número 152 no tiene inverso en $\mathbb{Z}_{512}$. Vemos entonces que el tal $n$ no existe.

**Ejercicio 2.** *Calcula todas las soluciones naturales menores que* 5000 *del sistema de congruencias:*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 19x & \equiv & 40 & \textit{mód}\ 60 \\ 5x & \equiv & 167 & \textit{mód}\ 231 \end{array}\right.$$

**Solución:**
Resolvemos el sistema:

| | |
|---|---|
| Tomamos la primera congruencia: | $19x \equiv 40$ mód 60 |
| Puesto que $\text{mcd}(19, 640) = 1$ tiene solución.<br>Multiplicamos por $19^{-1} = 19$ | $361x \equiv 760$ mód 60 |
| Reducimos módulo 60. | $x \equiv 40$ mód 60 |
| Extraemos la solución. | $x = 40 + 60k : k \in \mathbb{Z}$ |
| Sustituimos en la segunda congruencia. | $5(40 + 60k) \equiv 167$ mód 231 |
| Operamos. | $300k \equiv -33$ mód 231 |
| Reducimos módulo 231 | $69k \equiv 198$ mód 231 |
| Dividimos todo por 3 = mcd(69,231). | $23k \equiv 66$ mód 77 |
| Multiplicamos por $67 = 23^{-1}$ mód 77 | $1541k \equiv 4422$ mód 77 |
| Reducimos módulo 77. | $k \equiv 33$ mód 77 |
| Extraemos k | $k = 33 + 77k'$ |
| Sustituimos $k$ en $x = 40 + 60k$. | $x = 40 + 60(33 + 77k')$ |
| Operamos. | $x = 2020 + 4620k'$ |

A continuación detallamos los cálculos de los inversos:

| | | |
|---|---|---|
| 60 | | 0 |
| 19 | | 1 |
| 3 | 3 | $-3$ |
| 1 | 6 | 19 |

Luego $19^{-1}$ mód $60 = 19$.

| | | |
|---|---|---|
| 77 | | 0 |
| 23 | | 1 |
| 8 | 3 | $-3$ |
| 7 | 2 | 7 |
| 1 | 1 | $-10$ |

Es decir, $23^{-1}$ mód $77 = -10 = 67$.

**Ejercicio 3.** *Sea* $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^5+x^4+2x^2+2x+1}$.

1. *¿Cuántos elementos tiene* $A$*?*
2. *Realiza, si es posible, los siguientes cálculos en* $A$*:*
   - $(x^3+1)(x^3+2)$.
   - $(x^3+x^2+x+1)^{-1}$.
   - $(x^2+2x+2)^{-1}$
3. *¿Es* $A$ *un cuerpo? Justifica la respuesta.*

**Solución:**

1. $A$ tiene $3^5 = 243$ elementos. Estos son de la forma $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}_3$.
2. Realizamos los cálculos:
   - Multiplicamos los dos polinomios:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{4-7} & & & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \qquad (x^3+1)(x^3+2) = x^6+2.$$

Y ahora reducimos módulo $x^5+x^4+2x^2+2x+1$.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 1 & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & & & \\ 1 & & & & 1 & 2 & & \\ 1 & & & & & 1 & 2 & \\ 2 & & & & & & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad c(x) = x+2; \quad r(x) = x^4+x^3+x.$$

Por tanto, $(x^3+1)(x^3+2) = x^4+x^3+x$.

   - Comprobamos si existe el inverso. Para eso, calculamos $\mathrm{mcd}(x^5+x^4+2x^2+2x+1, x^3+x^2+x+1)$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 & 0 & 1 & & \\ 2 & & & 2 & 0 & 1 & \\ 2 & & & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \qquad r(x) = 2x^2+2 \qquad \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & \\ 2 & & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad r(x) = 0$$

Puesto que $\mathrm{mcd}(x^5+x^4+2x^2+2x+1, x^3+x^2+x+1) = 2(2x^2+2) = x^2+1 \neq 1$ no existe $(x^3+x^2+x+1)^{-1}$.

   - Al igual que en el apartado anterior, comprobamos si existe el inverso.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 1 & & & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c(x) = x^3+2x^2+1 \\ \\ r(x) = 2 \end{array}$$

Como $\mathrm{mcd}(x^5+x^4+2x^2+2x+1, x^2+2x+2) = 2 \cdot 2 = 1$ existe el inverso. Lo calculamos con el algoritmo extendido de Euclides:

| | | |
|---|---|---|
| $x^5+x^4+2x^2+2x+1$ | | $0$ |
| $x^2+2x+2$ | | $1$ |
| $2$ | $x^3+2x^2+1$ | $2x^3+x^2+2$ |
| $1$ | | $x^3+2x^2+1$ |

Y vemos que $(x^2+2x+2)^{-1} = x^3+2x^2+1$.

3. Para que sea un cuerpo todo elemento distinto de cero debe tener inverso. Puesto que $x^3+x^2+x+1$ no tiene inverso, $A$ no es un cuerpo.

**Ejercicio 4.** *Consideramos las letras de la palabra RECONOCER*

1. *¿De cuántas formas podemos ordenarlas?*
2. *¿En cuántas ordenaciones aparecen juntas la N y una E?*
3. *¿En cuántas ordenaciones están juntas todas las vocales?*
4. *¿En cuántas ordenaciones aparece una E inmediatamente después de una R?*
5. *¿En cuántas ordenaciones hay juntas una R y una E?*

**Solución:**

1. Se trata de permutaciones con repetición. El número de formas de ordenar las letras es
$$\frac{9!}{2!2!2!2!} = 22680.$$
2. Distinguimos dos casos:
   - Aparece la secuencia NE. Ordenamos las letras de RRCCOOEX. Lo podemos hacer de $\frac{8!}{2!2!2!} = 5040$ formas.
   - Aparece la secuencia EN. Igual que el caso anterior. Se puede hacer de 5040 formas.

   Las ordenaciones en que aparece la secuencia ENE las hemos contado dos veces. De éstas hay $\frac{7!}{2!2!2!} = 630$.
   Entonces, ordenaciones en las que están juntas la N y una E hay $5040 + 5040 - 630 = 9450$.
3. La elección de una tal ordenación lo hacemos en dos etapas:
   - Ordenamos las vocales (OOEE). Esto se puede hacer de $\frac{4!}{2!2!} = 6$ formas distintas.
   - Ordenamos las letras RRCCNV. Esto se puede hacer de $\frac{6!}{2!2!} = 180$ formas distintas.

   Y con esto ya tenemos una ordenación en las que las cuatro vocales están juntas. El número de formas de hacerlo es $6 \cdot 180 = 1080$.
4. Consideramos la secuencia RE como una letra. Tenemos entonces que ordenar entonces las letras de RENCCOOX. Se pueden ordenar de $\frac{8!}{2!2!} = 10080$ formas. Sin embargo, ordenaciones como RENCCOORE están contadas dos veces, pues está contada como XNCCOORE y como RENCCOOX. Contamos entonces cuántas ordenaciones tienen dos veces la secuencia RE, o lo que es lo mismo, contamos ordenaciones de NCCOOXX. De estas hay $\frac{7!}{2!2!2!} = 630$.

   Con esto, el número de ordenaciones en que aparece una E inmediatamente después de una R es $10080 - 630 = 9450$.
5. Vamos a introducir alguna notación:
   - $Z$ va a denotar el conjunto de todas las ordenaciones de las letras de la palabra RECONOCER. Ya hemos visto que $|Z| = 22680$.
   - $Z_{RE}$ es el conjunto de elementos de $Z$ en los que aparece la secuencia RE. Hemos visto que $|Z_{RE}| = 9450$.
   - $Z_{ER}$ está formado por los elementos de $Z$ en los que aparece la secuencia ER. $|Z_{ER}| = 9450$.
   - $Z_{ERE}$. Son los elementos de $Z$ en los que aparece la secuencia ERE. Podemos ver fácilmente que $|Z_{ERE}| = \frac{7!}{2!2!} = 1260$.
   - $Z_{RER}$. Ordenaciones de RECONOCER en las que aparece la secuencia RER. $|Z_{RER}| = 1260$.
   - $Z_{ERER}$. Ordenaciones en que aparece la secuencia ERER. $|Z_{ERER}| = \frac{6!}{2!2!} = 180$.
   - $Z_{RERE}$. Ordenaciones en las que aparece RERE. Hay 180.
   - $Z_{ER-RE}$. Son los elementos de $Z$ en los que una E y una R aparecen juntas, con la E delante, y la otra E y la otra R aparecen también juntas, pero ahora con la R delante. Para calcular el cardinal de $Z_{RE-ER}$ consideramos las letras XYCONOC, y en cada ordenación sustituimos X por ER e Y por RE. El número total de ordenaciones es entonces $\frac{7!}{2!2!} = 1260$.

Lo que nos piden es que calculemos $|Z_{RE} \cup Z_{ER}|$. Por el principio de inclusión-exclusión sabemos que $|Z_{RE} \cup Z_{ER}| = |Z_{RE}| + |Z_{ER}| - |Z_{RE} \cap Z_{ER}|$.

Nos queda hallar $|Z_{RE} \cap Z_{ER}|$. Notemos que $Z_{RE} \cap Z_{ER} = Z_{ERE} \cup Z_{RER} \cup Z_{ER-RE}$, pues si en una ordenación aparecen ER y RE puede ser, bien porque tengamos la secuencia ERE, bien la secuencia RER o bien que tengamos ER por un lado y RE por otro.

El principio de inclusión-exclusión nos dice ahora que $|Z_{ERE} \cup Z_{RER} \cup Z_{ER-RE}|$ vale:

$$|Z_{ERE}|+Z_{RER}|+|Z_{ER-RE}|-|Z_{ERE}\cap Z_{RER}|-|Z_{ERE}\cap Z_{ER-RE}|-|Z_{RER}\cap Z_{ER-RE}|+|Z_{ERE}\cap Z_{RER}\cap Z_{ER-RE}|$$

Y $Z_{ERE} \cap Z_{RER} = Z_{ERER} \cup Z_{RERE}$, mientras que $Z_{ERE} \cap Z_{ER-RE} = Z_{RER} \cap Z_{ER-RE} = \emptyset$. Si ahora recopilamos los resultados tenemos:

- $|Z_{ERE} \cap Z_{RER}| = |Z_{ERER} \cup Z_{RERE}| = |Z_{ERER}| + |Z_{RERE}| - |Z_{ERER} \cap Z_{RERE}| = 180 + 180 - 0 = 360$.
- $|Z_{ERE} \cap Z_{ER-RE}| = |Z_{RER} \cap Z_{ER-RE}| = |Z_{ERE} \cap Z_{RER} \cap Z_{ER-RE}| = 0$.
- $|Z_{RE} \cap Z_{ER}| = |Z_{ERE} \cup Z_{RER} \cup Z_{ER-RE}| = 1260 + 1260 + 1260 - 360 - 0 - 0 + 0 = 3420$.
- $|Z_{ER} \cup Z_{RE}| = |Z_{ER}| + |Z_{RE}| - |Z_{ER} \cap Z_{RE}| = 9450 + 9450 - 3420 = 15480$.

Y este último es el resultado final.

**Ejercicio 5.** *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ *dos matrices* $2 \times 3$ *con coeficientes en* $\mathbb{Q}$.

1. *Calcula la forma escalonada reducida por filas de la matriz* $A$.
2. *Estudia para qué valores del parámetro* $a$, *existe una matriz regular* $P \in M_2(\mathbb{Q})$ *tal que* $P \cdot A = B$.

**Solución:**

1. Realizamos operaciones elementales en $A$ hasta llegar a una forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Luego la forma escalonada reducida de $A$ es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Para que exista una tal matriz $P$ es necesario (y suficiente) que la forma escalonada reducida de $B$ coincida con la de $A$. Realizamos transformaciones elementales por filas en $B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a+6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Y vemos que si $a = 1$ ambas formas escalonadas coinciden. Por tanto, para $a = 1$ existe una matriz regular $P$ tal que $P \cdot A = B$. La matriz $P = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ cumple esa condición.

**Ejercicio 6.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ *y sea* $B_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,1),(1,1,1)\}$ *un subconjunto de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.

1. *Comprueba que* $B_1$ *es una base de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.
2. *Sea* $B_2$ *una base tal que* $M_{B_2\to B_1} = A$. *Calcula la base* $B_2$.
3. *Calcula la matriz del cambio de base de* $B_c$ *a* $B_1$*, donde* $B_c$ *es la base canónica de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.

**Solución:**

1. Para comprobar que $B_1$ es una base, formamos una matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de los vectores de $B_1$ en $B_c$ y calculamos el rango. Si el rango es 3, $B_1$ será una base.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \mathrm{rg}(C) = 3 \text{ pues } \det(C) = 1+1+0-0-0-1 = 1 \neq 0.$$

2. Calculamos $M_{B_2\to B_c}$. Sabemos que $M_{B_2\to B_c} = M_{B_1\to B_c}\cdot M_{B_2\to B_1} = C\cdot A$. Multiplicamos ambas matrices:

$$M_{B_2\to B_c} = C\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores de $B_2$ son las columnas de esta matriz. Es decir:

$$B_2 = \{(1,0,1),\ (1,1,1),\ (0,0,1)\}.$$

También podríamos haber calculado $B_2$ como sigue: Supongamos que $B_2 = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, y llamemos $u_1, u_2, u_3$ a los tres vectores de $B_1$. Entonces, el que la matriz de cambio de base de $B_2$ a $B_1$ nos dice que:

- $v_1 = 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3 = (1,1,0)+(0,1,1) = (1,0,1)$.
- $v_2 = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 1\cdot u_3 = (1,1,1)$.
- $v_3 = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 1\cdot u_3 = (1,1,0)+(1,1,1) = (0,0,1)$.

Como vemos, coinciden.

3. Tenemos que $M_{B_c\to B_1} = (M_{B_1\to B_c})^{-1} = C^{-1}$. Realizamos el cálculo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $M_{B_c\to B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 7.** *Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y sean $f, g : V \to V$ las aplicaciones lineales:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+2y+z, 3x+3y+2z, 4x+2y+2z) \\ g(x,y,z) &= (x+3z, 2x+y+4z, x+4y) \end{aligned}$$

*Sean $U = N(f)$ y $W = Im(g)$.*

1. *Calcula una base de $U$ y las ecuaciones cartesianas de $W$.*
2. *Calcula la dimensión del subespacio $Im(f)$.*
3. *Calcula una base de $U + W$. ¿Es dicha suma directa?*

**Solución:**

1. Tenemos que:
$$\begin{aligned} U = N(f) &= \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 : x+2y+z=0;\ 3x+3y+2z=0;\ 4x+2y+2z=0\}. \end{aligned}$$
Tenemos entonces que los vectores de $U$ vienen dados como las soluciones de un sistema de ecuaciones. Resolvemos el sistema, para lo cual calculamos la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Es decir:
$$U \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & + & 2z & = 0 \\ & y & + & 2z & = 0 \end{array} \right. \quad \text{o, si preferimos,} \quad U \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3z \\ y & = & 3z \end{array} \right.$$
Tenemos que $U$ viene dado por dos ecuaciones, luego $\dim(U) = 3 - 2 = 1$. Una base la obtenemos dándole a $z$ un valor no nulo, por ejemplo, $z = 2$. Una base de $U$ es entonces $B_U = \{(1,1,2)\}$.

   Vamos ahora a obtener las ecuaciones cartesianas de $W = \mathrm{Im}(g)$. Calculamos las imágenes de los vectores de una base (la canónica) de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

   - $g(1,0,0) = (1,2,1)$.
   - $g(0,1,0) = (0,1,4)$.
   - $g(0,0,1) = (3,4,0)$.

   Estos tres vectores forman un sistema de generadores de $W$. A partir de ellos obtenemos una base:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Una base de $W$ es $B_W = \{(1,0,3),\ (0,1,4)\}$. A partir de la base escribimos las ecuaciones paramátricas, y una vez obtenidas eliminamos los parámetros para obtener las ecuaciones cartesianas de $W$ (en este caso será una ecuación cartesiana).

   $(x,y,z) \in W$ si, y sólo si, $(x,y,z) = a(1,0,3) + b(0,1,4)$ para algunos elementos a,b $\in \mathbb{Z}_5$.
$$\begin{array}{rcrcr} x & = & a & & \\ y & = & & & b \\ z & = & 3a & + & 4b \end{array}$$
Lo que nos da la ecuación $z = 3x + 4y$, o $2x + y + z = 0$. Podemos comprobar fácilmente que los tres vectores $(1,2,1)$, $(0,1,4)$ y $(3,4,0)$ satisfacen esta ecuación.

2. Sabemos que $\dim(\mathrm{N}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) = 3$. Como sabemos que $\dim(\mathrm{N}(f)) = 1$ vemos que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

3. Formamos un sistema de generadores de $U+W$ uniendo una base de $U$ y una base de $W$ (que hemos calculado en apartados anteriores). El sistema de generadores es $\{(1,0,3),\ (0,1,4),\ (1,1,2)\}$. A partir de él obtenemos una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, una base de $U+W$ es $B=\{(1,0,3),\ (0,1,4)\}$.

Vemos que $\dim(U+W)=2$. Puesto que $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)$ la dimensión del subespacio $U\cap W$ vale 1. Por tanto, la suma no es directa (tendría que valer cero para que sí lo fuera).

Este apartado se podría haber simplificado si nos percatamos de que el vector $(1,1,2)$, que forma una base de $U$, pertenece a $W$, pues cumple la ecuación de $W$. Esto significa que $U\subseteq W$, luego $U+W=W$ y $U\cap W=U$.

**Ejercicio 8.** *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por*

$$f(x, y, z) = (-2x + z, -x - y + z, -2x + z).$$

*Y sea $A = M_{B_c}(f)$.*

1. *Halla la matriz $A$.*
2. *Calcula los valores propios de $A$.*
3. *Calcula una base de vectores propios de $A$. Llama a esta base $B$.*
4. *Calcula $M_B(f)$.*
5. *Calcula las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$.*

**Solución:**

1. Tenemos que $f(1, 0, 0) = (-2, -1, -2)$, $f(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$. Por tanto:
$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculamos el polinomio característico de $A$:
$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)((-2-\lambda)(1-\lambda) - (-2)) \\ &= (-1-\lambda)(-2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda) \\ &= (-1-\lambda)\lambda(\lambda + 1) \\ &= -\lambda(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$
La matriz $A$ tiene dos valores propios: $\lambda = 0$, con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica 2.

3. Calculamos una base de cada uno de los subespacios propios, y las unimos:
   - Subespacio $V_0$. Este subespacio viene definido por un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es $A - 0Id = A$. Resolvemos el sistema:
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{12}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-6)]{E_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Luego $V_0 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ & y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$, es decir, $V_0 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{z}{2} \\ y & = & \frac{z}{2} \end{array} \right.$
   Una base de $V_0$ la obtenemos dándole a $z$ el valor 2, y nos queda $B_{V_0} = \{(1, 1, 2)\}$.

- Subespacio $V_{-1}$. Repetimos lo el apartado anterior pero con la matriz $A - (-Id) = A + Id$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V_{-1} \equiv x - z = 0$, luego $\dim(V_{-1}) = 2$ y una base es $B_{V_1} = \{(1,0,1),\ (0,1,0)\}$.

La base $B$ se obtiene uniendo ambas bases: $B = \{(1,1,2),\ (1,0,1),\ (0,1,0)\}$.

4. Calculamos la imagen de los tres vectores de $B$:

   - $f(1,1,2) = (0,0,0)$.
   - $f(1,0,1) = (-2+1, -1+1, -2+1) = (-1,0,-1) = 0 \cdot (1,1,2) - 1 \cdot (1,0,1) + 0 \cdot (0,1,0)$.
   - $f(0,1,0) = (0,-1,0) = 0 \cdot (1,1,2) + 0 \cdot (1,0,1) - 1 \cdot (0,1,0)$.

   Luego $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Sabemos que $\dim(Im(f)) = 2$ (pues $\mathrm{rg}(A) = 2$). Además, los vectores de $V_{-1}$ pertenecen a $\mathrm{Im}(f)$. Por tanto, tenemos que $\mathrm{Im}(f) = V_{-1}$. Las ecuaciones están calculadas más arriba: $\mathrm{Im}(f) \equiv x - z = 0$.