ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

22 de Enero de 2019

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo:**_____

Ejercicio 1. *Calcula todas las soluciones del siguiente sistema de congruencias*

$$\begin{array}{rcll} 34x & \equiv & 18 & \textit{mód } 76 \\ 33x & \equiv & 15 & \textit{mód } 78 \\ 32x & \equiv & 12^{938} & \textit{mód } 79 \end{array}$$

comprendidas entre -30000 *y* 30000

Solución:
Antes de resolver el sistema, vamos a calcular 12^{938} mód 79.
Puesto que $\text{mcd}(12, 79) = 1$, el teorema de Fermat nos dice que $12^{\varphi(79)} \equiv 1$ mód 79.
Y al ser 79 un número primo, $\varphi(79) = 79 - 1 = 78$.
Si dividimos 938 entre 78 obtenemos que $938 = 78 \cdot 12 + 2$. Por tanto:

$$12^{938} \equiv 12^2 \equiv 144 \equiv 65 \text{ mód } 79.$$

Y así, la última congruencia del sistema la podemos escribir $32x \equiv 65$ mód 79.
Vamos ahora a resolver el sistema. Para eso, comenzamos con la primera congruencia. La solución de esta la introduciremos en la segunda, y la solución de las dos primeras la introduciremos en la tercera.

- Comenzamos resolviendo $34x \equiv 18$ mód 76.

  Puesto que $\text{mcd}(34, 76) = 2$ y 18 es múltiplo de 2, dividimos todo por 2.

$17x \equiv 9$ mód 38	Hemos dividido por 2.	38		0	
$9 \cdot 17x \equiv 9 \cdot 9$ mód 38	Pues 17^{-1} mód $38 = 9$.	17		1	
$x \equiv 5$ mód 38	Ya que $81 \equiv 5$ mód 38.	4	2	-2	$0 - 2 \cdot 1 = -2$
$x = 5 + 38 \cdot k_1 : k_1 \in \mathbb{Z}$		1	4	9	$1 - 4 \cdot (-2) = 9$

  Luego $x = 5 + 38k_1$ es la solución de la primera congruencia.

- Resolvemos ahora la segunda, pero sustituyendo x por lo que nos ha salido en el apartado anterior.

  Puesto que en esta segunda congruencia todos los coeficientes son múltiplos de 3 podríamos dividir por 3. Pero vamos a esperar a hacer la división una vez hayamos sustituido.

$33(5 + 38k_1) \equiv 15$ mód 78	Hemos sustituido x por el valor obtenido previamente.
$165 + 1254k \equiv 15$ mód 78	$33 \cdot 5 = 165$ y $33 \cdot 38 = 1254$.
$1254k_1 \equiv -150$ mód 78	$15 - 165 = -150$.
$6k_1 \equiv 6$ mód 78	pues $-150 \equiv -72 \equiv 6$ mód 78
$k_1 \equiv 1$ mód 13	Puesto que $\text{mcd}(78, 6) = 6$, hemos dividido por 6.
$k_1 = 1 + 13 \cdot k_2$	

  Entonces, $x = 5 + 38 \cdot (1 + 13k_2) = 43 + 494k_2$ es la solución de las dos primeras congruencias.

- Por último, resolvemos la tercera congruencia. Para ello repetimos el proceso hecho en la segunda.

$32(43 + 494k_2) \equiv 65$ mód 79	Sustituimos el valor de x en la congruencia.
$1376 + 15808k_2 \equiv 65$ mód 79	$32 \cdot 43 = 1376$ y $32 \cdot 494 = 15808$.
$33 + 8k_2 \equiv 65$ mód 79	$1376 = 17 \cdot 79 + 33$; $15808 = 200 \cdot 79 + 8$.
$8k_2 \equiv 32$ mód 79	$65 - 33 = 32$.
$k_2 \equiv 320$ mód 79	8^{-1} mód $79 = 10$ y $23 \cdot 10 = 320$.
$k_2 \equiv 4$ mód 79	$320 = 4 \cdot 79 + 4$.
$k_2 = 4 + 79 \cdot k$.	

  Sustituimos ahora el valor de k_2:

$$x = 43 + 494k_2 = 43 + 494(4 + 79k) = 43 + 494 \cdot 4 + 494 \cdot 79k = 43 + 1976 + 39026k = 2019 + 39026k.$$

Y $x = 2019 + 39026 \cdot k : k \in \mathbb{Z}$ es la solución del sistema de congruencias.

Por último, vemos para que valores de k, está la solución x en el intervalo pedido:

Es claro que si $k = 0$, entonces $x = 2019$ y pertenece al intervalo $[-30000, 30000]$.

Pero para $k = -1$, el valor de x es -37003, que queda fuera del intervalo, y para $k = 1$, $x = 41045$, que también queda fuera.

Luego la única solución del sistema de congruencias comprendida entre -30000 y 30000 es $x = 2019$.

Ejercicio 2.

Sea x un número de dos cifras. Si le restamos 6 y el resultado lo expresamos en hexadecimal, obtenemos las mismas cifras que x pero en orden inverso. ¿Cuál es el número x?

Solución:

Si las dos cifras de x son a (cifra de las decenas) y b (cifra de las unidades), entonces $x = 10 \cdot a + b$.

Lo que nos dice el enunciado es que el número $x - 6$, escrito en hexadecimal tiene las cifras b y a. Por tanto, lo que tenemos es que:

$$10 \cdot a + b - 6 = 16 \cdot b + a.$$

Transformamos esta ecuación:

$$10a + b - 6 = 16b + a \implies 10a + b - 16b - a = 6 \implies 9a - 15b = 6 \implies 3a - 5b = 2.$$

Las soluciones tienen que ser números enteros, y comprendidos entre 1 y 9 (pues son cifras de un número en decimal). Resolvemos la ecuación diofántica $3a - 5b = 2$.

$3a - 5b = 2$	
$3a \equiv 2 \text{ mód } 5$	Pues $3a - 2$ tiene que ser múltiplo de 5.
$2 \cdot 3a \equiv 2 \cdot 2 \text{ mód } 5$	Ya que $3^{-1} \text{ mód } 5 = 2$.
$a \equiv 4 \text{ mód } 5$	
$a = 4 + 5k$	

Sustituimos a en la ecuación y despejamos b.

$$3(4 + 5k) - 5b = 2 \implies 12 + 15k - 2 = 5b \implies 5b = 10 + 15k \implies b = 2 + 3k.$$

Para que a esté entre 1 y 9, k sólo puede valer 0 ó 1. En ambos casos, b también está entre 1 y 9.

Tenemos entonces dos soluciones:

$a = 4,\ b = 2; \qquad a = 9,\ b = 5.$

Esto nos da los números $x = 42$ y $x = 95$.

Podemos comprobar como $42 - 6 = 36 = 24)_{16}$ y $95 - 6 = 89 = 59)_{16}$.

Por tanto, x puede valer 42 ó 95.

Ejercicio 3. *Sean $m(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ y $q(x) = x^5 + 2x^3 + 2$ dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$, y sea $A = \mathbb{Z}_3[x]_{m(x)}$.*

1. *Calcula mcd$(m(x), q(x))$.*
2. *Factoriza $m(x)$ como producto de irreducibles.*
3. *Encuentra, si es posible, un elemento $\alpha \in A$ tal que $\alpha \cdot (2x^2 + 2x + 2) + x^3 + x + 1 = x^4 + 2$.*

Solución:

1. Para calcular el máximo común divisor de $m(x)$ y $q(x)$ nos valemos del algoritmo de Euclides.

   - Dividimos $m(x)$ entre $q(x)$.

   $$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & & 0 & & & & \\ 1 & & & 1 & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & 0 & \\ 1 & & & & & & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

   $$c(x) = 1$$

   $$r(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x$$

   - Ahora $x^5 + 2x^3 + 2$ entre $x^4 + 2x^3 + x^2 + x$.

   $$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & & & \\ 2 & & & 2 & 2 & & \\ 2 & & & & 2 & 2 & \\ 0 & & & & & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

   $$c(x) = x + 1$$

   $$r(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 2$$

   - Ahora $x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ entre $2x^3 + x^2 + 2x + 2$.

   $$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & & 1 & 0 & & \\ 2 & & & 2 & 0 & \\ 2 & & & & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   $$c(x) = x \cdot 2 = 2x$$

   $$r(x) = 0$$

   El último resto distinto de cero es $2x^3 + x^2 + 2x + 2$, y como no es mónico, lo multiplicamos por el inverso del coeficiente líder (que vale 2) para obtener el máximo común divisor que nos piden:

   $$\text{mcd}(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2, x^5 + 2x^3 + 2) = 2 \cdot (2x^3 + x^2 + 2x + 2) = x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

2. Para factorizar $m(x)$, lo dividimos previamente por $x^3 + 2x^2 + x + 1$, que sabemos que es un divisor suyo:

   $$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 & & \\ 2 & & & 2 & 1 & 1 & \\ 2 & & & & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   Como vemos el resto es 0 (algo que ya sabíamos), y el cociente $x^2 + 2x + 2$.

   Tenemos entonces que $m(x) = (x^3 + 2x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 2)$.

   Y ahora factorizamos cada uno de estos divisores.

   - Sea $q_1(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$. Se tiene que $q_1(0) = 1$, $q_1(1) = 2$ y $q_1(2) = 1$. Puesto que $q_1(x)$ es de grado 3, y no tiene raíces, es irreducible.
   - Sea $q_2(x) = x^2 + 2x + 2$. Entonces $q_2(0) = q_2(1) = 2$, mientras que $q_2(2) = 1$. Tampoco tiene raíces luego es irreducible.

La factorización de $m(x)$ como producto de irreducibles es entoneces:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 1).$$

3. Resolvemos la ecuación que nos piden. Puesto que la incógnita es α vamos a dejar a la izquierda el término que tiene α y a la derecha el resto.

$$\alpha \cdot (2x^2+2x+2)+x^3+x+1 = x^4+2 \implies \alpha \cdot (2x^2+2x+2) = x^4+2-x^3-x-1 = x^4+2x^3+2x+1.$$

Si $2x^2 + 2x + 2$ tiene inverso en A, entonces podremos encontra α como ese inverso multiplicado por $x^4 + 2x^3 + 2x + 1$. Comprobamos si existe el inverso y lo calculamos:
Dividimos $m(x)$ entre $2x^2 + 2x + 2$.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & 2 & 0 & 0 & 2 & \\ 2 & & & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c(x) = 2 \cdot (x^3 + 1) = 2x^3 + 2. \\ \\ r(x) = 1 \end{array}$$

Es claro que $\mathrm{mcd}(m(x), 2x^2 + 2x + 2) = 1$, luego existe el inverso. Además, tenemos que $m(x) = (2x^2 + 2x + 2) \cdot (2x^3 + 2) + 1$, luego $1 = m(x) + (2x^2 + 2x + 2) \cdot (x^3 + 1)$. Por tanto

$$(2x^2 + 2x + 2)^{-1} = x^3 + 1.$$

En tal caso, tenemos que $\alpha = (x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \cdot (x^3 + 1)$. Realizamos este cálculo. Para ello, multiplicamos estos dos polinomios y el resultado lo dividimos entre $m(x)$ y nos quedamos con el resto:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{4-8} & & & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & & & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 & & & & \\ 2 & & & 2 & 2 & 2 & & & \\ 2 & & & & 2 & 2 & 2 & & \\ 2 & & & & & 2 & 2 & 2 & \\ 1 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Y puesto que el resto de la última división es $2x^2 + 2x + 2$ concluimos que $\alpha = 2x^2 + 2x + 2$.

Ejercicio 4. *Tenemos un grupo formado 15 personas, 8 de ellas mujeres y el resto hombres.*

- *¿De cuántas formas podemos elegir 8 personas de estas 15?*
- *¿De cuántas formas podemos elegir 8 personas, de forma que haya más mujeres que hombres?*
- *Necesitamos elegir 4 parejas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo? (una pareja está formada por dos personas, sin mirar si son hombres o mujeres).*
- *Necesitamos elegir 4 parejas, cada pareja formada por un hombre y una mujer. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?*

Solución:

1. En primer lugar elegimos 8 personas entre un grupo de 15. Puesto que el orden en que las elijamos no importa, el número total de formas distintas de hacerlo es

$$\binom{15}{8} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} = 6435.$$

2. Para que haya más mujeres que hombres, tenemos tres posibilidades:

   - Cinco mujeres y tres hombres. Las 5 mujeres las podemos elegir de $\binom{8}{5} = 56$ formas distintas, y los tres hombres de $\binom{7}{3} = 35$. En total, podemos elegir las cinco mujeres y tres hombres de $56 \cdot 35 = 1960$ formas distintas.
   - Seis mujeres y dos hombres. Podemos elegirlos de $\binom{8}{6} \cdot \binom{7}{2} = 28 \cdot 21 = 588$ formas.
   - Siete mujeres y un hombre. Se pueden elegir de $\binom{8}{7} \cdot \binom{7}{1} = 8 \cdot 7 = 56$.
   - Ocho mujeres y cero hombres. Sólo hay una forma de elegirlas.

   En total, podemos formar el grupo de 8 con más mujeres de $1960 + 588 + 56 + 1 = 2605$ formas distintas.

3. Para elegir 4 parejas, lo hacemos en varias etapas. Vamos a ir detallándolas y contando de cuántas formas podemos completar cada una de las etapas. El resultado final será el producto de todas estas cantidades:

   - Elegimos las 8 personas que formarán las 4 parejas. Esto lo podemos hacer de 6435 formas (visto en el primer apartado).
   - A una primera persona le elegimos su pareja. Esto lo podemos hacer de 7 formas.
   - A otra persona le elegimos su pareja. Esto se puede hacer de 5 formas.
   - A otra persona le elegimos su pareja. Esto lo podemos hacer de 3 formas.
   - Por último, nos quedan dos personas. Estas dos forman la cuarta pareja.

   Si ahora multiplicamos las cantidades obtenidas:

$$6435 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 675675.$$

   lo que nos da que podemos formar las 4 parejas de 675675 formas distintas.

4. Por último, si nuestras parejas deben estar formadas por un hombre y una mujer, el proceso podría ser el siguiente:

   - Seleccionamos a las 4 mujeres. Esto se puede hacer de $\binom{8}{4} = 70$ formas distintas.
   - Una primera mujer elige su pareja. Puede hacerlo de 7 formas distintas.
   - Una segunda mujer elige su pareja, lo cual puede hacerlo de 6 formas distintas.
   - Una tercera mujer elige su pareja, lo que puede hacer de 5 formas distintas.
   - la cuarta mujer elige su pareja entre los 4 hombres que quedan.

   En total, el número de maneras distintas de formar las 4 parejas Hombre-Mujer es:

$$70 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 58800.$$

Ejercicio 5. *Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & ay & + & z & = & -1 \\ -2x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & ay & + & (a+2)z & = & a+2 \end{array}$$

Determina, en función del parámetro a, cuándo es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:
Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}; \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 4 \\ 3 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a+2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada en función del parámetro a. Comenzamos por la matriz de coeficientes. Para eso, calculamos el determinante de la submatriz formada por las dos primeras filas y las columnas primera y tercera:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 = 4 \neq 0.$$

Luego $\mathrm{rg}(A) \geq 2$ (independientemente del valor de a.
Calculamos el determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} &= a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \\ &= a \cdot (2(a+2) + 3 + 0 - 0 - 3(a+2) - 2) \\ &= a \cdot (2a + 4 + 3 - 3a - 6 - 2) \\ &= a \cdot (-a - 1) \\ &= 4a(a+1) \end{aligned}$$

Y tenemos que si $a = 0$ ó $a = 4$, el rango de A vale 2. En los otros casos, es decir, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, el rango de A vale 3.

Para calcular el rango de $(A|b)$, a las columnas 1 y 3 le añadimos la cuarta, y calculamos el determinante de la matriz que resulta:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix} &= 2(a+2) + 12(a+2) + 0 - 0 - 3(a+2) - 0 \\ &= 2a + 4 + 2a + 4 - 3a - 6 \\ &= a + 2 \end{aligned}$$

Y por tanto, para $a = 0$ y $a = 4$ el rango de $(A|b)$ vale 3.
En resumen, tenemos:

- Si $a = 0$ ó $a = 4$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\mathrm{rg}(A|b) = 3$. El sistema es incompatible.
- Si $a = 1$, $a = 2$ ó $a = 3$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$. El sistema es compatible determinado.

Ejercicio 6. *Sea* $B_1 = \{(1,-1,0),\ (0,-1,1),\ (1,1,-1)\}$, *y sea* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Comprueba que* B_1 *es una base de* $\mathbb{R}^3$

Sea B_2 *una base de* $\mathbb{R}^3$ *tal que la matriz del cambio de base de* B_2 *a* B_1 *es la matriz* P.

- *Calcula la base* B_2.
- *Si* u *el vector cuyas coordenadas en* B_1 *son* $(1,1,1)$. *Calcula el vector* u *y sus coordenadas en* B_2.

Solución:

- Para comprobar que B_1 es una base, formamos una matriz cuyas columnas son los vectores de B_1 (mejor dicho, sus coordenadas en la base canónica). Si esta matriz es regular, B_1 será una base. Para comprobar si es o no regular, calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1) = -1.$$

  donde para calcular el determinante hemos desarrollado por la primera fila.

  Al ser el determinante distinto de cero, los vectores de B_1 forman una base de $\mathbb{R}^3$.

- Vamos a calcular la matriz del cambio de base de B_2 a B_c (donde B_c denota a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

  Tenemos que $M_{B_2\to B_c} = M_{B_1\to B_c} \cdot M_{B_2\to B_1}$. Además, $M_{B_1\to B_c}$ es la matriz de la que hemos calculado antes el determinante, mientras que $M_{B_2\to B_1}$ es la matriz P. Entonces:

$$M_{B_2\to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  Y al ser esta la matriz del cambio de base de B_2 a B_c, sus columnas son las coordenadas de los vectores de B_2 en la base canónica. Por tanto:

$$B_2 = \{(3,-4,2),\ (2,-1,0),\ (3,2,-3)\}.$$

- Si el vector u tiene coordenadas $(1,1,1)$ en la base B_1 significa que

$$u = 1\cdot(1,-1,0) + 1\cdot(0,-1,1) + 1\cdot(1,1,-1) = (2,-1,0).$$

  Por último, podemos ver que el vector u es el segundo vector de la base B_2. Sus coordenadas en B_2 son entonces $(0,1,0)$.

Ejercicio 7. *Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_2)^4$ generado por los vectores $(1,1,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,0,1)$ y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_2)^4$ de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Calcula las ecuaciones cartesianas y una base de $U+W$.

Solución:
Puesto que nos están pidiendo información sobre el subespacio suma, vamos a tomar una base de cada uno de ellos (realmente, bastaría con tomar un sistema de generadores de U y uno de W).

En primer lugar, calculamos una base de U. Esta base la obtenemos a partir del sistema de generadores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{E_{12}(1) \\ E_{32}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y tenemos como base de U a $B_U = \{(1,0,0,1),\ (0,1,1,1)\}$.

En cuanto a W vemos que su dimensión vale $4-2=2$. Elegimos los valores $x=1$, $y=0$ y $x=0$, $y=1$ para formar una base, y tenemos:

$$B_W = \{(1,0,1,1),\ (0,1,1,1)\}.$$

Uniendo estas dos bases, lo que tenemos es un sistema de generadores de $U+W$. A partir de este sistema de generadores obtenemos una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y por tanto, una base de $U+W$ es

$$B_{U+W} = \{(1,0,0,1),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,0)\}.$$

A partir de esta base escribimos las ecuaciones paramétricas de $U+W$:

$$\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & \quad b \\ z & = & \qquad c \\ t & = & a+b \end{array}$$

Lo que nos da la ecuación cartesiana $t = x+y$ para $U+W$. Es decir:

$$U+W \equiv x+y+t=0.$$

Ejercicio 8. *De una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ sabemos que $(2,3,1)$ pertenece al núcleo (kernel) de f, $(1,2,4)$ es un vector propio de valor propio 2 y $f(1,1,1) = (4,0,3)$.*

- *Calcula la matriz de f en la base canónica.*
- *Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio Im(f).*

Solución:

- De la aplicación f sabemos que:

  - $f(2,3,1) = (0,0,0)$, ya que $(2,3,1) \in \mathrm{N}(f)$.
  - $f(1,2,4) = 2 \cdot (1,2,4) = (2,4,3)$, pues $(1,2,4)$ es un vector propio de valor propio 2.
  - $f(1,1,1) = (4,0,3)$.

  Puesto que $B = \{(2,3,1),\ (1,2,4),\ (1,1,1)\}$ es una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$ (lo cual puede comprobarse fácilmente), tenemos totalmente determinada a la aplicación lineal f.

  Es más, si B_c es la base canónica de $(\mathbb{Z}_5)^3$, los datos que tenemos nos dicen que:

$$M_{B,B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Para calcular $M_{B_c}(f)$ nos apoyamos en la expresión $M_{B_c}(f) = M_{B,B_c}(f) \cdot M_{B_c \to B}$.

  Y dado que necesitamos $M_{B_c \to B}$, y esta matriz es la inversa de $M_{B \to B_c}$, la calculamos:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(3)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(4)]{E_{21}(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(4)]{E_{12}(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(4)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(4)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

  Y vemos que $M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

  Entonces:

$$M_{B_c}(f) = M_{B,B_c}(f) \cdot M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Para las ecuaciones de Im(f) partimos de un sistema de generadores de este subespacio. Este sistema de generadores lo obtenemos calculando las imágenes de los vectores de una base. Elegimos la base B (también podemos tomar la base canónica o cualquier otra base).

  El sistema de generadores del que partimos es entonces $\{(2,4,3),\ (4,0,3)\}$ (hemos quitado el $(0,0,0)$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Las ecuaciones paramétricas de Im(f) son:

$$\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & b \\ z & = & 2a + b \end{array}$$

  Y vemos que Im(f) viene dado por una ecuación cartesiana que es $z = 2x + y$, o $2x + y + 4z = 0$.

Ejercicio 9. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Estudia si A es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal.

Calcula A^{20}.

Solución:

Calculamos el polinomio característico de A, es decir, el determinante de la matriz $A - \lambda Id$.

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) + (-2) + (-2) - (-2)(-\lambda) - 2(-2-\lambda) - (-1)(1-\lambda) \\
&= (-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) - 2 - 2 - 2\lambda + 4 + 2\lambda + 1 - \lambda \\
&= 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 - 2 - 2\lambda + 4 + 2\lambda + 1 - \lambda \\
&= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1
\end{aligned}$$

También se podría haber calculado a partir de la expresión $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Adj}(A))\lambda + \det(A)$.

- $\mathrm{tr}(A) = 1 + 0 + (-2) = -1$.
- $\mathrm{tr}(\mathrm{Adj}(A)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 1 = -1$.
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 2 - (0 - 4 - 1) = -4 - (-5) = 1$.

Y por tanto

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Adj}(A))\lambda + \det(A) = -\lambda^3 + (-1)\lambda^2 - (-1)\lambda + 1 = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Calculamos ahora las raíces del polinomio característico:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & -1 & -2 & -1 \\ -1 & & 1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & -1 & -1 \\ -1 & & 1 \\ \hline & -1 & 0 \end{array}$$

La matriz A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Las multiplicidades algebraicas son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_{-1} = 2$. Tenemos entonces el siguiente cuadro:

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda = 1$	$\alpha_1 = 1$	$d_1 = 1$
$\lambda = -1$	$\alpha_{-1} = 2$	$d_{-1} = 1$ ó 2

Calculamos d_{-1} que sabemos que es igual a $3 - \mathrm{rg}(A + Id)$.

$$A + Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y como $\mathrm{rg}(A + Id) = 1$ concluimos que $d_{-1} = 3 - 1 = 2$. Por tanto, A es diagonalizable. Además, el subespacio V_{-1} viene dado por la ecuación $2x+y+z = 0$, luego una base es $B_{V_{-1}} = \{(1, -2, 0),\ (1, 0, -2)\}$.

Para calcular una base de V_1 calculamos la forma escalonada reducida de $A - Id$.

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{E_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ y una base de V_1 es $B_{V_1} = \{(1, 1, -1)\}$.

Ya tenemos la matriz P que buscábamos. Sus columnas son los vectores propios que hemos obtenido. Es decir, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, y $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Llamamos D a esta última matriz. Entonces, $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, luego

$$A^{20} = (PDP^{-1})^{20} = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{20}P^{-1} = PIdP^{-1} = Id.$$

Ya que $D^{20} = \begin{pmatrix} 1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$