teoria-completa--ejercicios.pdf

teoria completa + ejercicios

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

1 - Sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{1,2}\,y = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{2,2}\,y = b_2 \end{cases}$$

1.1 - Posibles soluciones del sistema

- → Se cortan (SCD) → 1 sol.
- → Son paralelas (SI) → 0 sol
- → Coincidentes (SCI) → ∞ sol.

1.2 - Método de resolución de sistemas mediante resolución gaussiana.

- F_{ij} → cambiar ~~función~~ fila i por fila j
- $F_i(\alpha)$ → multiplicar la ~~función~~ fila por $\alpha \neq 0$
- $F_{ij}(\alpha)$ → añadir a la fila i la fila j multiplicada por α

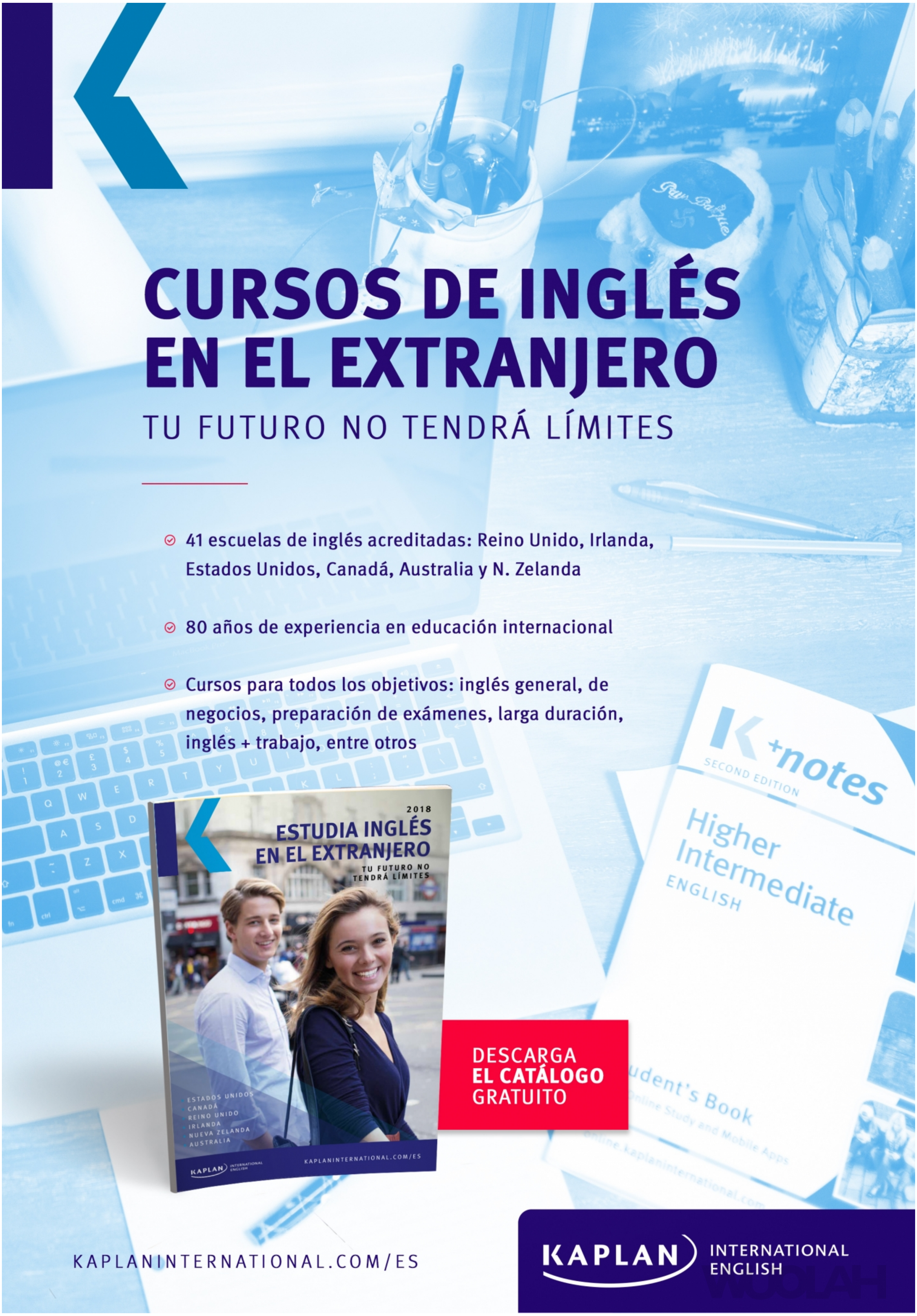
· Ejemplo.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow[F_{3,1}(1)]{F_{2,1}(-2)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_2 = 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{3,2}(3)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ -4x_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2 + 1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado, una única solución. Las rectas se cortan.

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$


CURSOS DE INGLÉS
EN EL EXTRANJERO
TU FUTURO NO TENDRÁ LÍMITES
41 escuelas de inglés acreditadas: Reino Unido, Irlanda, Estados Unidos, Canadá, Australia y N. Zelanda
80 años de experiencia en educación internacional
Cursos para todos los objetivos: inglés general, de negocios, preparación de exámenes, larga duración, inglés + trabajo, entre otros
2018
ESTUDIA INGLÉS
EN EL EXTRANJERO
TU FUTURO NO TENDRÁ LÍMITES
ESTADOS UNIDOS
CANADÁ
REINO UNIDO
IRLANDA
NUEVA ZELANDA
AUSTRALIA
KAPLANINTERNATIONAL.COM/ES
DESCARGA
EL CATÁLOGO
GRATUITO
+notes
SECOND EDITION
Higher
Intermediate
ENGLISH
KAPLANINTERNATIONAL.COM/ES
KAPLAN INTERNATIONAL ENGLISH

· Ejemplo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{3,1}\cdot(-4)]{F_{2,1}\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7 \rightarrow x_1 = -2x_2 + 5x_3 + 7 = -4\alpha + 5\alpha + 7 = \alpha + 7 \\ -7x_2 + 14x_3 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-14x_3}{-7} = 2x_3 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Las rectas son coincidentes puesto que tenemos ∞ soluciones y el sistema es compatible indeterminado (SCI)

2. Sistemas homogéneos.

Son sistemas que siempre están igualados a cero.
Estos sistemas son siempre compatible, porque siempre admiten solución nula (solución trivial)

· Ejemplo.

$$\left\{\begin{array}{l} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - 1x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{4,1}(2)]{F_{2,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & +4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)]{F_2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{4,2}(-1)]{F_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2u + 3v + 2w - x = 0 \Rightarrow u = \dfrac{-6\mu + 9\lambda - 2\lambda + \mu}{2} = \dfrac{-5\mu + 7\lambda}{2} \\ v + 3w - 2x = 0 \rightarrow v = 2\mu - 3\lambda \\ w = \lambda \\ x = \mu \end{array}\right.$$

* El sistema es compatible indeterminado (SCI).

3. Matrices

Una matriz es una tabla bidimensional de números ordenados en filas y columnas.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \dots \end{pmatrix} \to \text{Filas} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_m \end{pmatrix}$$

↑
columnas

Decimos que dos matrices son iguales cuando:

1- Las dimensiones sean iguales
2 - Los elementos correspondientes sean iguales.

Diremos que una matriz A es cuadrada si las filas y las columnas son iguales. y en este caso ponemos A_n

Una matriz que no sea cuadrada se denomina rectangular, es decir, las filas y columnas son diferentes.

Llamaremos matriz nula de orden $m \times n$, a aquella que tiene todos sus elementos nulos.

Sea A_n llamaremos diagonal de A, al conjunto de los elementos que forman la diagonal de la matriz.

Matemáticas.	Teoría.	3

3. Matrices especiales.

- Matriz fila → Matriz con una única fila
- Matriz columna → Matriz con una sola columna.
- Matriz cuadrada → Matriz con el mismo número de filas que de columnas. En este caso tenemos una diagonal.
- Matriz rectangular → Matriz con distinto número de filas que de columnas.
- Matriz diagonal → Matriz cuadrada donde los elementos fuera de la diagonal son nulos. Esta es al mismo tiempo triangular inferior y superior.
- Matriz identidad de orden "n" (I_n) → Matriz en la que los elementos de la diagonal son iguales a 1.
- Matriz triangular superior → Matriz cuadrada cuyos elementos debajo de la diagonal son nulos.
- Matriz triangular inferior → Matriz cuadrada cuyos elemento por encima de la diagonal son nulos.

4. Matrices traspuestas.

- Ejemplo.

Dada la matriz $A_{n \times m}$ definir la matriz traspuesta que se obtiene cambiando las filas por las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ a & b & x & y \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \\ 5 & x \\ 4 & y \end{pmatrix}$$

5. Operación con Matrices

5.1. Suma de matrices.

Sea $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ definimos $A_{m\times n} + B_{m\times n}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Solo podemos sumar matrices con la misma geometría.

5.2. Producto de matrices.

Sea $A_{1\times n}$ y $B_{m\times 1}$ definimos $A_{1\times n} \cdot B_{m\times 1}$

$$= (a_{11} \ldots a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11} \cdot b_{11} + \ldots a_{1n} \cdot b_{n1})$$

En este caso tendremos en cuenta la ~~geometría~~ estructura interna de las matrices.

El producto de dos matrices puede ser cero siendo las dos matrices distintas a cero.

Matemáticas | Teoría

· Matriz invertible.

Diremos que una matriz $A_{m \times n}$ ~~tiene un~~ puede invertirse si existe una matriz $B_{p \cdot q}$ tal que $A_{m \times n} \cdot B_{p \cdot q} = I$

Solo admiten inversa las matrices cuadradas.

Denotamos la matriz inversa como A^{-1}

· Ejemplo

Sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1}

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por tanto $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Una matriz que no sea invertible recibe el nombre de matriz singular.

· ~~Ejemplo~~ · Propiedades de matrices.

Sean A, B y C matrices de ordenes correspondientes, verifica:

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$(A + B) \cdot C = AC + BC$

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(A^t)^t = A$

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

· Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula:

$$\cdot (A+B)^2 = \cancel{A^2+B^2} \; \cancel{A\cdot A + B\cdot B} \; \cancel{AB+AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

· Multiplicación de una matriz por un escalar.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ~~una matriz mxn~~

$$\lambda A_{mxn} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

· Matrices elementales de orden "n"

Son las matrices resultantes de aplicar una transformación elemental ~~a~~ la matriz identidad de orden n.

Matemáticas | Teoría.

Tema 2: Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Llamamos espacio vectorial V sobre el conjunto de números reales a un conjunto V dotado de dos operaciones.

a) Suma de elementos de V: esta tiene una serie de propiedades

1- $u+v = v+u$ → conmutativa

2- $u+(v+w) = (u+v)+w$ → asociativa.

3- Existencia del elemento neutro $\vec{0} \in V \rightarrow u+\vec{0} = \vec{0}+u = u \quad \forall u \in V$

4- Existencia del elemento opuesto → $u+(-u) = -u+u = \vec{0}$

b) Producto de un elemento de V por un número real.

1- ~~Existe~~ $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$

2- $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda u \cdot \mu u \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$

3- $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$

4- $\lambda(\mu + v) = \lambda\mu + \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$

· Sea $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n$, definimos:

a) Suma de n-plas (encuplas) → $(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2 \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2$

b) Producto de un número por una n-plas → $\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$, de

$P_n(x)$ es el conjunto de vectores de valor superior o igual a n.

Definimos la suma $(a_0 + a_1 ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 ... + b_n x^n) =$

$= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_n + b_n) \in P_n(x)$

Definimos el producto entre dos polinomios $\to \lambda (a_0 + a_1 ... + a_n x^n) =$

$= \lambda a_0 + \lambda a_1 ... + \lambda a_n \cdot x^n \in P_n(x), \lambda \in \mathbb{R}$

• Subespacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial, S' un subespacio vectorial de V.
Este S' será un subespacio vectorial de V si:

- $X + Y \in S' \quad \forall x, y \in S'$
- $\lambda x \in S' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in S'$

Consecuencias

- Si $\lambda = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot x = \vec{0} \in S' \Rightarrow \vec{0} \in S'$
- Si $\lambda = -1 \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \cdot x = -x \in S' \Rightarrow -x \in S'$

todo elemento S' tiene un opuesto que pertenece a S'

Matemáticas | Teoría

· Dependencia e Independencia Lineal

Sea $H = \{a_1, a_2, \dots a_p\} \in \mathbb{R}^n$, decimos que $u \in \mathbb{R}^n$ es convinación lineal o que depende linealmente de los vectores de H si

$u = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \dots + \lambda_p a_p$.

· Ejemplo 1

Demostrar que el vector $u = (a_1, b-a, a+b, b)$ depende linealmente de los vectores $(1,-1,1,0)$, $(0,1,1,1)$

$$(a, b-a, a+b, b) = a(1,0,0,0) + (b-a)\cdot(0,1,0,0) + (a+b)\cdot(0,0,1,0)$$

$$+ b\cdot(0,0,0,1) = a\left[(1,0,0,0) - (0,1,0,0) + (0,0,1,0)\right] +$$

$$+ b\left[(0,1,0,0) + \underset{(0,0,1,0)}{(0,0,0,1)}\right] = a\cdot(1,-1,1,0) + b(0,1,1,1)$$

* Son linealmente dependiente ambos vectores.

· Ejemplo 2

Estudiar si $b = (1,2,-3)$ es conbinación lineal o depende linealmente de los vectores $(1,-1,1)$, $(2,1,-1)$

$$(1,2,-3) = \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(2,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ -3 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{3,1}\cdot(-1)]{F_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_2 = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible, el vector b no es combinación lineal de los vectores dados.

Sea $H=\{a_1, a_2, \dots a_p\} \subset \mathbb{R}^n$ definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de H. Es decir

$L(H)=\{u \in \mathbb{R}^n \mid u=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2 \dots +\lambda_p a_p\}$, entonces $L(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Prueba

① Sean u y v elementos de $L(H) \Rightarrow \begin{cases} u=\alpha_1 a_1+\dots \alpha_p a_p \\ v=\beta_1 a_1+\dots+\beta_p a_p \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u+v=\alpha_1 a_1+\beta_1 a_1+\dots \alpha_p a_p+\beta_p a_p=(\alpha_1+\beta_1)a_1+(\alpha_p+\beta_p)a_p \in L(H)$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u=\lambda(\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p)=(\lambda \cdot \alpha_1)a_1 \dots +(\lambda \cdot \alpha_p)a_p \in L(H)$

Decimos que $L(H)$ es un subespacio vectorial generado por H

· Sistema de generadores

Sea S un subespacio vectorial, si todo vector $u \in S$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{a_1, a_2, a_p\}$, decimos que H es un sistema de generadores de S.

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$, todo vector $\mathbb{R}^3$ se puede ~~separar como~~ expresar como combinación lineal, decimos que H es un sistema de generadores.

Matemáticas. Teoría

Independencia lineal

Decimos que los vectores de H son linealmente dependientes si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, no todos nulos tal que $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_p a_p = \vec{0}$. Dos vectores L.D son proporcionales.

Si la ~~única solución~~ solución trivial $\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_p = 0$ es la única solución del sistema será linealmente independiente.

· Ejemplo. Encontrar si los vectores $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (0, 1, -3)$ y $a_3 = (1, 1, 2)$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot (1, 2, -1) + \lambda_2 (0, 1, -3) + \lambda_3 (1, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 2\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & -3\lambda_2 & 2\lambda_3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{31}(-1)]{F_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{32}(+3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

→ Sistema linealmente dependiente

Si un conjunto de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ contiene al vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente

· Ejemplo. Sea $H \{ a_1, \dots, a_{i-1}, \vec{0}, a_{i+1} \dots a_p \}$

$$\alpha_1 a_1 + \dots \alpha_{i-1} \cdot a_{i-1} + \alpha \cdot \vec{0} + \alpha_{i+1} a_{i+1} \dots + \alpha_p a_p$$

$$\text{Elijo} \to \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_p = 0 \qquad \alpha_i = \alpha \in \mathbb{R}$$

Si un conjunto de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ que no contiene al vector $\vec{0}$ con $p > n$, entonces H es linealmente dependiente.

- Ejemplo: $\alpha_1 a_1 \dots + \alpha_p a_p = \vec{0}$

$$\alpha_1 (a_{11}, a_{21} \dots a_{n1}) \dots + \alpha_p (a_{1p} + a_{2p} \dots a_{np}) = (0,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} \dots & a_{2n} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} \dots & a_{3n} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \to \text{sistema con } p \text{ ecuaciones y } n \text{ incógnitas} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1p} \\ 0 & b_{22} & b_{2n} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & b_{nn} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \\ \\ \alpha_n b_{nn} + \alpha_{n+1} b_{nn+1} \dots \alpha_p b_{np} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_n = -\frac{\alpha_{n+1} B_{nn+1} \dots + \alpha_p b_{np}}{b_{nn}}$$ $\to$ Siempre obtendré unos valores, por lo que el sistema es C.D.

Mates	Teoría

La expresión de un vector v como combinación lineal de $H = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ L.I es única.

Un conjunto $H = \{a_1, \dots, a_p\}$ es L.D $\Leftrightarrow$ almenos uno de los vectores es combinación de los demás.

Prueba

Sea H L.D $\quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots$

$\dots + \lambda_p a_p = \vec{0}$

Con almenos un $\lambda \neq 0$, supongamos $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_i a_i = -\lambda_1 a_1 + \dots - \lambda_{i-1} a_{i-1} - \dots - \lambda_p a_p$$

$$a_i = \frac{-\lambda_1 a_1}{\lambda_i} - \dots - \frac{\lambda_{i-1} a_{i-1}}{\lambda_i} - \dots - \frac{\lambda_p a_p}{\lambda_i}$$

Luego a_i en combinación lineal de los demás.

Un conjunto de vectores H es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ ningún vector se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Prueba

Sea H LI, supongamos que un vector es combinación lineal de los demás $\Rightarrow$ H es L.D.

Por lo tanto ningún vector es combinación lineal de los demás.

~~Sea $H' \subseteq H$, si H' fuera l.d., entonces H también sería L.D. y ello es una contradicción. Por tanto necesariamente es L.I.~~ Sea H un conjunto de vectores LD y F otro conjunto de vectores. Se verifica que F es L.D.

Prueba

H es L.D $\Rightarrow \alpha_1 a_1 \dots + \alpha_p a_p = \vec{0}$ con algún α no nulo

$H' = \{a_1, a_2, \dots a_p, b_1, b_2 \dots b_q\}$

$\alpha_1 a_1 \dots + \alpha_p a_p + 0 b_1 + 0 b_2 \dots + 0 b_q = \vec{0}$

Esto es una combinación lineal de vectores de H' con algún coeficiente no nulo. Luego H' es linealmente dependiente

Sea $H = \{a_1, a_2 \dots a_p\}$ L.D. Entonces subconjunto H' de H es linealmente independiente.

Prueba

Sea $H = \{a_1, a_2 \dots a_k, a_{k+1}, a_p\}$ LI.
$H' = \{a_1, a_2 \dots a_k\}$

$\Rightarrow \begin{cases} H' \text{ es LD } \Leftrightarrow \\ H' \text{ es LI} \end{cases}$

Sea $A \subset A'$ con A LD $\Rightarrow A'$ LD

Sea $B \subset B'$ con B L.I $\Rightarrow B$ LD ó LI
↳ Conjunto chico

Sea $F' \subset F$ con F L.I $\Rightarrow F'$ LI

Sea $G' \subset G$ con G LD $\Rightarrow G'$ LI o LD

~~Problemas~~ Teoría.

Matemáticas

Bases

Sea $H = L\{(H)$, siendo $H = \{a_1, a_2 \dots a_p\}$. Decimos que H es un sistema generador de S' o que H genera S'.

Si el sistema de generadores fuera L.I lo denominamos base de S'

Una base de un subespacio vectorial es un sistema de generadores LI.

Todas las bases de un subespacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Llamaremos dimensión de un subespacio vectorial, al número común de elementos de una base

- Ejemplo. Sea $S = L(H) = L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, donde $v_1 = (1,1,0,2)$, $v_2 = (1,0,1,1)$, $v_3 = (0,-1,1,-1)$ y $v_4 = (1,2,-1,3)$. Determinar una base de $L(H)$.

$$\alpha_1(1,1,0,2) + \alpha_2(1,0,1,1) + \alpha_3(0,-1,1,-1) + \alpha_4(1,2,-1,3) = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{21}(-1),\ F_{32}(1),\ F_{41}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{42}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{SCI, por tanto H es L.D} \longrightarrow \text{H no es base}$$

$(\alpha_3 - 2\alpha_4)v_1 + (\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \vec{0}$, siendo $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 0$,

$v_1 = v_2 - v_3 \Rightarrow$

Si $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 = 1 \Rightarrow v_4 = 2v_1 - v_2$

Si $x \in L(H) \Rightarrow x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 =$
$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 (v_3 - v_1) + \alpha_4 (2v_1 - v_2) =$
$= (\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 =$
$= L(\{v_1, v_2\})$

$H' = \{v_1, v_2\}$ genera S', pero v_1 y v_2 no son proporcionales, por lo tanto H' es una base.

Sea H un sistema de generadores del subespacio vectorial S', si suprimimos un vector del conjunto H L.D. que sea de los demás, obtenemos un conjunto H' que también genera a S'

$X \in L\{H\} \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \ldots + \alpha_p a_p$ y

supongamos que $a_1 = \beta_2 a_2 + \ldots \beta_p a_p$

$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p = \alpha_1 (\beta_2 a_2 + \ldots + \beta_p a_p) + \ldots + \alpha_p a_p =$
$= (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_2) a_2 + \ldots (\alpha_p \beta_p + \alpha_p) a_p = \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_p a_p \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in L(H')$

Teoria.

Matemática

~~Ejemplo~~

Espacios fundamentales de una matriz.

- Espacio ~~fila~~ columna → espacio generado por las columnas de la matriz A

- Espacio fila → espacio generado por las filas de A

- Espacio nulo $(N_{(A)})$ → $N_{(A)} = \{ X \in \mathbb{R}^n / A_{m\times n} X_{n\times 1} = \vec{0} \}$

- Espacio nulo de A^t = $N(A^t) = \{ X \in \mathbb{R}^m / (A_{m\times n})^t \cdot X_{m\times 1} = \vec{0} \}$

- Ejemplo. Encontrar una base para cada uno de los espacios fundamentales de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

> Espacio columna → $a_1 = (1,-2,3)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (2,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{31}(-3)]{F_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow LD.$$

$$a_3 = \alpha a_1 + \alpha a_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow \alpha_2 = 5 \end{cases}$$

Para $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 5$, tenemos una combinación lineal de a_1 y a_2

$C(A) = L\{a_1, a_2\} = L\{(1,-2,3), (0,1,1)\}$

> Espacio fila → $a_1 = (1,0,2)$, $a_2 = (-2,1,1)$, $a_3 = (3,-1,1)$

$a_3 = a_1 - a_2 = (1,0,2) - (-2,1,1) = (3,-1,1)$

$F(A) = L\{a_1, a_2\} = L\{(1,0,2), (-2,1,1)\}$

> Espacio nulo

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \to x_1 = -2\lambda \\ x_2 + 5x_3 = 0 \to x_2 = -5\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$N(A) = L\{(-2,-5,1)\}$

> Espacio nulo de A^t

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \to x_2 = \lambda \\ x_1 - x_3 = 0 \to x_1 = -\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}\right.$$

$N(A^t) = L\{(-1,1,1)\}$

Matemáticas

· Coordenadas respecto a una base y componentes de un vector.

$S = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 / x_3 = 0 \}$

- Probar que es un subespacio vectorial

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 (1,0,0,0) + x_2 (0,1,0,0) + x_3 (0,0,0,0)$

$x_4 = (0,0,0,1)$

$H = \{ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \} \rightarrow L.I$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Entonces H es base. y por lo tanto S es un subespacio vectorial

- $H' = \{ (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,0,1) \}$ también pertenece a S puesto que cumple la condición de S $(x_3 = 0)$.

- ¿Es H' L.I?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sí es L.I}$$

Luego H' es base de S.

Sea $H = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

$H' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,0,1)\}$

$(1,2,0,4) = a_1 + 2a_2 + 4a_3$

Como H' es base:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \rightarrow \alpha_1 = -1$

$\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \rightarrow \alpha_2 = -2$

$\alpha_3 = 4$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix} = (-1) \cdot b_1 + (-2) b_2 + (4) b_3$$

* Sea $b = \{a_1, a_2 \dots a_p\} \in \mathbb{R}^n$ de un subespacio de dimensión p llamaremos coordenadas de un vector respecto de la base a los coeficientes que permiten expresar el vector como combinación lineal de los vectores de la base. *

Matemáticas | Teoría

Teorema de Rouché - Frobenius

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \dots + a_{n1}x_n = b_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_n \dots + a_{1m}x_n = b_m \end{array}\right. \Rightarrow x_1\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix}}_{\uparrow \vec{a_1}} + x_n\underbrace{\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{1m}\end{pmatrix}}_{\uparrow \vec{a_n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}}_{\uparrow \vec{b}}$$

$$x_1\vec{a_1} + \dots + x_n\vec{a_n} = \vec{b}$$

$$(A/b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{1m}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{12} & c_{1n} \\ 0 & & c_{me} & c_{2n} \\ \vdots & & & c_{nm} \\ 0 & & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz coincide con el número de columnas L.I de una matriz.

Si tenemos una matriz (A/B): $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{n1} & b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{1m} & b_m \end{array}\right)$

$Rg(A) = n$ $\qquad Rg(A/B) = n+1$

- Si el $Rg(A) \neq Rg(A/B) \Rightarrow B$ no es combinación lineal de A. por lo tanto el sistema es incompatible.

- Si el $Rg(A) = Rg(A/B) \Rightarrow B$ es combinación lineal de columnas de A por lo tanto el sistema es compatible determinado si el $Rg(A) = n$ y si el $Rg(A) < n$ el sistema es compatible ~~determi~~ indeterminado puesto que las columnas de A son L.D.

→ Ecuaciones paramétricas e implícitas.

$S = L\{(1,3,3,4),(1,3,3,4)(2,6,3,5)(3,9,3,6)\} =$

$= L\{(1,3,3,4)(2,6,3,5)(3,9,3,6)\}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\3\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\6\\3\\5\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}3\\9\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\\3&3&3\\4&5&6\end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3),\ F_{31}(-3),\ F_{41}(-4)} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&-3&-6\\0&-3&-6\end{pmatrix} \xrightarrow{F_{43}(-1),\ F_{32}} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \end{cases} \rightarrow L.D.$$

$B_S = \{(1,3,3,4),(2,6,3,5)\}$

Si $X \in S \rightarrow X = \alpha \begin{pmatrix}1\\3\\3\\4\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\6\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 3\alpha + 6\beta \\ x_3 = 3\alpha + 3\beta \\ x_4 = 4\alpha + 5\beta \end{cases}$ → Ec. paramétricas

$$\begin{pmatrix}1&2&x_1\\3&6&x_2\\3&3&x_3\\4&5&x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3),\ F_{31}(-3),\ F_{41}(-3)} \begin{pmatrix}1&2&x_1\\0&0&-3x_1+x_2\\0&-3&x_3-3x_1\\0&-3&x_4-4x_1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{43}(-1),\ F_{24}} \begin{pmatrix}1&2&x_1\\0&-3&x_3-3x_1\\0&0&x_4-x_1-x_3\\0&0&-3x_1+x_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2=0 \end{cases}$$ → Ec. implícitas

Matemáticas | Teoría

Tema 3. Ortogonalidad. Método de mínimos cuadrados

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- Definición producto escalar:

Sea $u, v \in \mathbb{R}^n$, definimos $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3 \dots u_n) \cdot (v_1, v_2, v_3 \dots v_n) =$
$= u_1 v_1 + u_2 v_2 \dots \dots v_n u_n$

- Propiedades

1) Conmutativa $\rightarrow u \cdot v = v \cdot u \quad \forall \ u, v \in \mathbb{R}^n$
2) Distributiva $\rightarrow u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \forall \ u, v, w \in \mathbb{R}^n$
3) $(\lambda u) \ v = \lambda \cdot (u \cdot v) \quad \forall \ u, v \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4) $u \cdot u \geq 0$, $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$$\begin{cases} u \cdot u = (u_1, u_2, \dots u_n) \cdot (u_1, u_2, \dots u_n) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0 \\ u \cdot u = u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

- Definición de norma

Llamamos norma de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

- Propiedades

1) $\|u\| \geq 0 \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2) $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \ u \in \mathbb{R}^n$

$u \cdot u \neq u^2$, $u \in \mathbb{R}^n$

$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 \dots + u_n^2 = \sum_{k=1}^{n} u_n^2$

Demostración de Cauchy-Schwartz.

$|u\cdot v| \le \|u\|\cdot\|v\|$

$\|x + \lambda v\|^2 \geq 0 = (u+\lambda v)\cdot(u+\lambda v) = u^2 + u\lambda v + \lambda v u \cdot \lambda^2 v^2 =$

$= u^2 + 2\lambda(v\cdot u) + \lambda^2 v^2 = \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda\cdot(u\cdot v) + \|u\|^2$

$0 \le \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda(u\cdot v) + \|u\|^2 \le \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda|u\cdot v| + \|u\|^2$

$4|u\cdot v|^2 - 4\|u\|^2\cdot\|v\|^2 \le 0$

$|u\cdot v| \le \|u\|\cdot\|v\|$

Desigualdad triangular.

$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v =$

$= \|u\|^2 + 2|u\cdot v| + \|v\|^2$

$\|u\|^2 + 2|u\cdot v| + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 =$

$= (\|u\|+\|v\|)^2$

$\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$

Definición: Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, definimos la distancia de u a v $(d(u,v)) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 \dots (u_n-v_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$

Propiedades:

a) $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$

$d(u,v)=0 \Leftrightarrow \|u-v\|=0 \Leftrightarrow u-v=0 \Leftrightarrow u=v$

b) $d(u,v) \le d(v,w) + d(w,v)$

$d(u,v) = \|u-v\| = \|u - w + w - v\| \le \|(u-w)+(w-v)\| = d(u,w) + d(w,v)$

Matemáticas

Problemas

- Se consideran los siguientes datos.

$y \to$	4	5	6	5	4
$x_1 \to$	1	0	1	2	1
$x_2 \to$	0	1	1	1	2

Aproximar mediante los mínimos cuadrados.

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$E = (c_1 - 4)^2 + (c_1 + c_2 - 6)^2 + (2c_1 + c_2 - 5)^2 + (c_1 + 2c_2 - 4)^2 + $$
$$+ (c_2 - 5)^2$$

$$\begin{pmatrix} c_1 - 4 \\ c_2 - 5 \\ c_1 + c_2 - 6 \\ 2c_1 + c_2 - 5 \\ c_1 + 2c_2 - 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A x = A^t y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

• Encontrar la expresión más sencilla posible de:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ si $x \perp y$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y)(x+y) + (x-y)(x-y) =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + x\cdot y + y\cdot x + \|x\|^2 + \|y\|^2 - x\cdot y - y\cdot x =$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Calcular los autovectores de una matriz que tiene como autovalores 1, 2, 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha \\ \alpha_2 = \alpha \\ \alpha_3 = 2\alpha \end{cases}$$

$$A \cdot v = v$$

$\Rightarrow$

Problemas Matemáticas

$\Rightarrow$ Para $\lambda = 2$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{1,2}]{F_{21}(1),\ F_{31}(-4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ 4v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{-\alpha}{2} = -2\alpha \\ v_2 = \alpha/4 = \alpha \\ v_3 = \alpha = 4\alpha \end{cases}$$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{31}(2)]{F_{21}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ -2v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 4\alpha \end{cases}$$

Los autovectores de esta matriz serán:

$$\begin{cases} v(1) = \{(-1, 1, 2)\} \\ v(2) = \{(-2, 1, 4)\} \\ v(3) = \{(-1, 1, 4)\} \end{cases} \Rightarrow \text{Los autovectores son L.I}$$

Asociado a cada autovector hay una familia uniparamétrica de vectores.

- Calcular los autovalores y autovectores de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0$ ~~soluciones~~ $\Rightarrow (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 7) = 0$

autovalores $\begin{cases} \lambda = 7 \\ \\ \lambda = +1 \end{cases}$

Para $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{1,2}]{F_2\left(\frac{-1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ -9v_2 + 6v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{\alpha}{3} = \alpha \\ v_2 = \frac{2\alpha}{3} = 2\alpha \\ v_3 = \alpha = 3\alpha \end{cases}$$

autovector $V(7) = \{(1, 2, 3)\}$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha - \beta \\ v_2 = \beta \\ v_3 = \alpha \end{cases}$$

autovector $V(1) = \{(-1, 0, 1)(-1, 1, 0)\}$

Problema examen.

1- Estudia la compatibilidad del sistema según los valores a y b.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - a x_2 + b x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & b & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{1,3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -a & b & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{2,1}(-2)]{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-a & -2+b & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{3,2}\cdot(a+2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & \rightarrow & x_1 = 2 \\ x_2 = 0 & \rightarrow & x_2 = 0 \\ (b-2)x_3 = 0 & \rightarrow & x_3 = 0 \text{ si } b \neq 2 \end{array}\right.$$

Soluciones
- Si $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado.
- Si $b = 2$, el valor de x_3 es cualquiera. (SCI)

× El parámetro a no tiene influencia en el sistema.

2- Estudiar en función del parámetro k la compatibilidad del sistema

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = k \\ x - ky + k^2z = k^2 \\ x + ky + z = -1 \\ x - ky + z = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & k & k^2 = k \\ 1 & -k & k^2 = k^2 \\ 1 & k & 1 = -1 \\ 1 & -k & 1 = 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{F_{1,2}\cdot(-1)\\ F_{1,3}\cdot(-1)\\ F_{1,4}\cdot(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & k \\ 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \\ 0 & 2k & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{4,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & k \\ 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{3,4}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & k \\ 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & -k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k-2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k \\ 2kx_2 = 0 \\ k^2-1\, x_3 = -k+1 \\ 0 = k^2-k-2 \end{cases}$$

Soluciones:
- Si $k = 2$ el sistema es compatible determinado. (SCD)
- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1$ el sistema es incompatible. (SI)
- Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado. (SCD)

Matemáticas	Problemas	2

Problema 3

Determinar las condiciones que tienen que cumplir B_1, B_2, B_3, para que el siguiente sistema sea compatible.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -4 & 5 & 2 & b_2 \\ -4 & 7 & 4 & b_3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{3,1}(4)]{F_{2,1}(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -2 & 4b_1+b_2 \\ 0 & -1 & 0 & 4b_1+b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,3}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -2 & 4b_1+b_3 \\ 0 & 0 & -2 & -8b_1+b_2-3b_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 4b_1 + b_3 \\ -2x_3 = -8b_1 + b_2 - 3b_3 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \text{Para } b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0,\ SCD \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{Para } b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0\ SCD \end{cases}$$

* Sea cual sea los valores de B_1, B_2, B_3, el sistema siempre será compatible determinado.

· Problema 4.

Sean ~~dos~~ tres matrices A, B y C, calcular las operaciones.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

- $A + C$, $B + C$ NO definido

- $A \cdot B$, $B \cdot A$ No definido.
- $A \cdot C$ No definido.
- $C \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 1 & -9 \\ -9 & -13 \end{pmatrix}$

· Problema 5.

Comprobar que $I_n \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} \end{pmatrix} = A_{m \times n}$$

Matemáticas. | ~~Tema~~. Problemas.

- Dada la matriz A, calcular su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{31}(-1)]{F_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{32}\cdot(8)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

→ La matriz A no es invertible pq no es posible llegar a la matriz identidad a partir de transformaciones elementales.

- Encontrar todos los valores para que la matriz sea simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 8 & a+c \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ a-2b+2c & 5 & -2 \\ 2a+b+c & a+c & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-2b+2c=3 & \rightarrow a+2a-4-4-2a=3 \rightarrow a=11 \\ 2a+b+c=0 & \rightarrow b=-2a+2+a=-a+2 \\ a+c=-2 & \rightarrow c=-2-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=11 \\ b=-9 \\ c=-13. \end{cases}$$

- Encontrar todos los valores para que las matrices A y B no sean invertibles simultaneamente

$$A = \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a+b-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\left(\frac{1}{3}\right)]{F_1\cdot\left(\frac{1}{a+b-1}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a+b-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-3b+2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\cdot\left(\frac{1}{2a-3b+2}\right)]{F_1\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a-3b+2} \end{array}\right)$$

*Serán simultaneamente invertible cuando: $a+b-1 \neq 0$ y/o $2a-3b+2 \neq 0$.

*La negación de una proposición que implica dos condiciones es que no se cumpla almenos una de ellas.

- Calcular el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{31}(-3)]{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -13 & -14 \\ 0 & 2 & -13 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 2$$

Matemáticas | Problemas teóricos

Cuestión 1. Sea A una matriz de orden $m \times n$ y $A^t_{m\times n}$
Demostrar que B y C son matrices simétrica

$$\begin{cases} A_{m\times n} \cdot A^t_{n\times m} = B_{m\times n} \\ A^t_{n\times m} \cdot A_{m\times n} = C_{n\times m} \end{cases}$$

1º) $B^t = (A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = B$.

*La matriz B es simétrica, porque $B^t = B$

2º) $C^t = (A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = C$

*La matriz C es simétrica, porque $C^t = C$

Cuestión 2. Sea A una matriz cuadrada, demostrar que $B = \frac{A + A^t}{2}$ es simétrica

$$B^t = \left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t + (A^t)^t\right) = \frac{1}{2} \cdot (A^t + A) = B$$

*Se deduce que B es simétrica ya que $B = B^t$

Cuestión 3. Sea A una matriz rectangular ¿Puede ser antisimétrica?

- No ya que la matrices antisimétricas solo pueden ser cuadradas.

Cuestión 4. Sea A una matriz cuadrada, demostrar que

a. $\frac{A-A^t}{2}$ es antisimétrica.

$$A^t = \left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t = \frac{1}{2}\cdot\left((A^t)^t - (A^t)^t\right) = -\frac{1}{2}\left(A^t - A\right) = \frac{-A+A^t}{2} = -A$$

Cuestión 5. Sea A una matriz cuadrada, demostrar que se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2} = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t\right) = \frac{2A}{2} = A$$

$$A = B + C = \underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\text{Parte simétrica}} + \underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\text{Parte antisimétrica}}$$

Cuestión 6. Sea A^t cuadrada y antisimétrica, probar que la diagonal es nula

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{ii} & a_{ni} \end{pmatrix} = -A^t = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow 2a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ii} = 0$$

Matemáticas | Problemas teóricos

Cuestión 7. Usando la definición de matriz inversa, demostrar que si 1 matriz tiene una fila de 0 no es regular.

$$A = \begin{pmatrix} & \times & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \times & \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz no regular.}$$

Cuestión 8. A partir de la definición de matriz inversa, demostrar que una matriz con una columna nula no tiene inversa

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & X \end{pmatrix} \neq I$$, por lo tanto

no hay inversa de la matriz.

Cuestión 9. Sea $S' = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_3 = 1 \}$

- No es subespacio vectorial porque $(0,0,0) \notin S'$

Cuestión 10. Sea $S = \{ (x, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, X_1 \cdot X_2 = 0 \}$, determinar si es espacio vectorial

$$\text{Si } X_1 \cdot X_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ \text{y/o} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto S no será un ~~espa~~ subespacio vectorial, porque la suma de los dos elementos no siempre da cero.

Por ejemplo $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin S'$

Cuestión 11. Sea $A_{m\times n}$, $S=\{X^n \in \mathbb{R} \,/\, A_{m\times n}\cdot X_{m\times n}=0\}$, comprobar si S' es un subespacio vectorial

$$\begin{cases} X_1 \in S' \Rightarrow A\cdot X_1 = 0 \\ X_2 \in S' \Rightarrow A\cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

$A(X_1+X_2) = AX_1 + A\cdot X_2 = 0$, luego $X_1+X_2 \in S'$

$A\cdot(\lambda X) = \lambda\cdot A\cdot X = 0 \quad \forall X \in S', \forall \lambda \in \mathbb{R}$, luego $\lambda X \in S'$

Por lo tanto S' será un subespacio nulo de la matriz A.

Cuestión 12. Encontrar la condición del vector b para ser combinación lineal de ~~a~~ a_1 y a_2

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2\cdot a_2 = \lambda_1(1,-1,5) + \lambda_2(3,1,7)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = y \\ 5\lambda_1 + 7\lambda_2 = z \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & y \\ 5 & 7 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{3,1}(-5)]{F_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 4 & x+y \\ 0 & -8 & z-5x \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{3,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 4 & x+y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ 4\lambda_2 = x+y \\ 0 = -x+2y+z \end{cases}$$

El vector b ~~no~~ podrá ser combinación lineal de a_1 y a_2 ~~puesto que b es independiente linealmente de a_1 y a_2~~ siempre y cuando la última fila sea 0.

Matemáticas	Problemas
	Espacio vectorial

Problema 1. Tenemos 3 vectores diferentes. Comprobar si son dependientes o no.

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = \vec{0}$

$\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (0,0,1) = (0,0,0)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ → Sistema linealmente independiente

Problema 2. Estudiar la dependencia lineal de $\{a_1, a_2\} \in \mathbb{R}^n$, $a_1 \neq \vec{0}$ y $a_2 \neq \vec{0}$

- Si fueran L.D → $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$ cuando algún α es distinto de 0

Si $\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_2 \neq 0 \rightarrow 0 \cdot a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ $\otimes$

Entonces para que sean L.D, $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 \neq 0$

- Si fueran L.I → $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$ cuando algún $\alpha \neq 0$

Si $\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_2 \neq 0 \rightarrow 0 \cdot a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

Por lo tanto para que sean L.I, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_1 \neq 0$

Problema 3. Estudiar la dependencia lineal de los vectores $\{(-1,2,-4), (3,-6,12)\}$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 (-1, 2, -4) + \alpha_2 (3, -6, 12) = \vec{0}$

Estos vectores son L.D porque los vectores son proporcionales

Problema 4. Expresar el vector (1, 1) como una combinación lineal de (1, −1), (3, 0), (2, 1)

$(1,1) = \lambda_1 (1,-1) + \lambda_2 (3,0) + \lambda_3 (2,1)$

$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + 0 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{F_{2,1}(-1)} \begin{matrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + \mu \\ \lambda_2 = \frac{2-3\mu}{3} \\ \lambda_3 = \mu \end{cases}$

El vector (1, 1) se puede expresar de muchas maneras como combinación lineal de (1, −1), (3, 0), (2, 1)

Por ejemplo: · Si $\mu = 0 \Rightarrow (1,1) = -1(1,-1) + \frac{2}{3}(3,0)$

Problema 5. Expresar $(3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c)$ como combinación lineal de (3, −1, 2), (1, 4, 1)

$\lambda_1 (3,-1,2) + \lambda_2 (1,4,1) = (3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c)$

$\begin{matrix} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 3a+b+3c \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 = -a+4b-c \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2a+b+2c \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3a+b+3c \\ -1 & 4 & -a+4b-c \\ 2 & 1 & 2a+b+2c \end{pmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow[F_{31}(2)]{F_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -a+4b-c \\ 3 & 1 & 3a+b+3c \\ 0 & 9 & 9b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(3)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -a+4b-c \\ 0 & 13 & 13b \\ 0 & 9 & 9b \end{pmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow[F_{32}(-9)]{F_2(\frac{1}{13})} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -a+4b-c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 4\lambda_2 = -a+4b-c \Rightarrow \lambda_1 = a+c \\ \lambda_2 = b \end{cases}$

$(3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c) = a+c(3,-1,2) + b(1,4,1)$

Matemáticas | Problemas.

~~Ejercicio~~ Problema 1. Estudiar la compatibilidad del sistema para todos los valores de λ.

$$\begin{cases} \lambda x - \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z = 0 \\ -\frac{1}{2} x + \lambda y - \frac{1}{2} z = 0 \\ -\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y + \lambda z = 0 \end{cases} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \lambda & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_2(-2)\ F_3(-2)]{F_1(-2)} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{31}(\lambda)]{F_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda-1 & 1+2\lambda \\ 0 & 2\lambda+1 & -2\lambda^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda-1 & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & -4\lambda^2+2\lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot(-4)\cdot 2}}{-8} = \frac{-2 \pm 6}{-8} < \begin{matrix} -\frac{4}{8} = \frac{-1}{2} \\ 1 \end{matrix}$$

Para $\lambda = 1 \rightarrow$ SCI

Para $\lambda = \frac{-1}{2} \rightarrow$ SCI

Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \frac{-1}{2} \rightarrow$ SCD

Problema 2. Demostrar que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible si $ad + bc \neq 0$

① $a = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } c = 0, \text{ no es invertible} \\ \text{si } c \neq 0, \text{ es invertible y } b \neq 0 \\ \text{si } c \neq 0 \text{ y } b = 0, \text{ ~~es in~~ no es invertible} \end{cases}$$

② $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } c = 0 \text{ y } b = 0, \text{ es no invertible} \\ \text{si } d = 0 \text{ ~~es no in~~ y } b = 0, \text{ no invertible} \\ \text{si } d = 0 \text{ y } b \neq 0, \text{ invertible} \\ \text{si } c = 0 \text{ y } b \neq 0, \text{ no invertible} \\ \text{si } b \neq 0 \text{ y } c \neq 0, \text{ sí es invertible.} \end{cases}$$

* más simplificado:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{21}(-1)]{F_1 \cdot (\frac{1}{a})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{-b}{a} + d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } d - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \text{no invertible} \\ \text{Si } d - \frac{b}{a} \neq 0 \Rightarrow \text{invertible.} \end{cases}$$

Matemáticas | Problemas Tema 2.

Problema 3. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ entonces $\vec{0}$ pertenece a S. $\rightarrow$ Sí, porque ~~λx~~ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in S$, $\Rightarrow \lambda x \in S$
En particular $\lambda = 0 \Rightarrow$ ~~$0 \cdot x \in S$~~ $0 \cdot x = \vec{0} \in S$

b) Si S es un ~~subespacio vectorial~~ subconjunto $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector nulo, entonces S es un subespacio vectorial. $\rightarrow$
$\rightarrow$ ~~Verdadero~~ Falso, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n / x \cdot y = 0\}$

$(1,0) \in S$
$(0,1) \in S$ pero $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin S$
$(0,0) \in S$

Que el vector 0 sea un elemento de S es una condición necesaria pero no suficiente para que S sea espacio vectorial

c) Todo subespacio vectorial contiene una única base.
Falso, ~~por~~ por ejemplo: $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ $\beta' = \{(2,0),(0,2)\}$
$\beta'' = \{(5,1),(0,2)\}$, son todas bases de $\mathbb{R}^2$

d) Cualquier sistema generador de $\mathbb{R}^n$ es base de $\mathbb{R}^n$
~~Verdadero~~, Falso puesto que ~~en un sistema~~ $H = \{(0,0)\ (0,1)\ (1,0)\}$
$H' = \{(0,1)\ (1,0)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = L\{(1,0)\ (0,1)\} = L\{(1,-1)\ (0,1)\ (1,0)\}$

e) Todo conjunto L.I es base de $\mathbb{R}^n$

Falso, porque $H = \{(1,0,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0,0)\}$

H es L.I y $L(H)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^7$ pero

H no es base.

f) El conjunto de soluciones del sistema tiene estructura de subespacio vectorial. → Verdadero

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\lambda - \lambda = -\lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) = (-\lambda, 2\lambda, \lambda) = \lambda(-1, 2, 1)\}$$

Subespacio generado por el vector $(-1,2,1) \Rightarrow L\{(-1,2,1)\}$

g) El conjunto solución del sistema tiene estructura de subespacio vectorial → Falso

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \quad + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\lambda + 1 + \lambda = -\lambda + 1 \\ x_2 = 2\lambda - 1 \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) = (-\lambda + 1, 2\lambda + 1, \lambda) = \lambda(-1, 2, 1) + (1, 1, 0)\}$$

$u, v \in S$ $\quad u = \alpha(-1, 2, 1) + (1, -1, 0) \in S$

$\quad v = \beta(-1, 2, 1) + (1, -1, 0) \in S$

$u + v = (\alpha + \beta) \cdot (-1, 2, 1) + (2, -2, 0) \notin S$ porque el vector $(2,-2,0)$ no es de la forma de los vectores que pertenecen a S

Matemáticas | Problemas

Ejemplo 1. Sea $H = \{(1,2), (3,7)\}$ LI, porque no son proporcionales.

Ejemplo 2. Sea $H = \{(-1,-2,-4),(2,4,8)\}$ LD porque son proporcionales.

Ejemplo 3. Sea $H' = \{(-1,2,-4)\ (3,-6,12)\}$ LD porque son
LD $(1,1,1)$
proporcionales porque contiene a H que es L.D.

Ejemplo 4. F es el conjunto siguiente $= \{ (1,1,1),(0,1,1)\ (0,0,1)\}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Este conjunto es linealmente independiente.

Ejemplo 5. Determinar dado el conjunto $A = \{(1,6,4)\ (2,4,-1)\ (-1,2,5)\}$ su dependencia lineal

Estos son linealmen de-pendiente puesto que $(2,4,-1) + (-1,2,5) = (1,6,4)$

Extraer de ese conjunto un vector linealmente independiente

$A' = \{(2,4,-1)\ (-1,2,5)\}$, LI puestos que los vectores no son proporcionales.

Ejemplo. Determinar los valores de λ que hacen al conjunto $\{(\lambda, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}), (\frac{-1}{2}, \lambda, \frac{-1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \lambda)\}$ un conjunto L.D.

$$\alpha_1(\lambda, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}) + \alpha_2(\tfrac{-1}{2}, \lambda, \tfrac{-1}{2}) + \alpha_3(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \lambda) = (0,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \lambda & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{21}(\frac{1}{2}),\ F_{31}(\frac{1}{2})]{F_1(\frac{1}{\lambda})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2\lambda} & \frac{-1}{2\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda}{4\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{4\lambda} & \frac{3\lambda}{4\lambda} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{23}(\lambda)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2\lambda} & \frac{-1}{2\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda}{4\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda^2}{4\lambda} & 0 \end{array}\right)$$

Para $\lambda = 0$ el conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo. Estudiar si un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas siendo $m < n$, puede ser C.D.

Matemáticas	Problemas	

Problema 1. Determinar una base y ecuaciones paramétricas de un subespacio cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x+2y-z+3t=0 \end{cases} \xrightarrow{F_{21}(-1)} \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 0+y+2t=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\beta+\alpha \\ y=-2\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas $\Rightarrow \begin{cases} x=\beta+\alpha \\ y=-2\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \{(1,-2,0,1),(1,0,1,0)\}$$

Problema 1. Encontrar las ecuaciones paramétricas, implícitas y una base de $S = L\{(1,1,-2)(1,1,1)\}$

$$\alpha_1(1,1,-2)+\alpha_2(1,1,1)=\vec{0}$$

$$B_S = \{(1,1,-2),(1,1,1)\}$$

Ec. paramétricas $\to \begin{cases} x_1 = \alpha+\beta \\ x_2 = \alpha+\beta \\ x_3 = -2\alpha+\beta \end{cases}$

Problema 3. Sea A una matriz cuadrada regular que satisface la ecuación $A^2 + aA + bI = 0$. Encontrar una expresión de la matriz inversa

$$A^{-1}(A \cdot A + aA + bI) = A^{-1} \cdot 0$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot A + a\, A^{-1} \cdot A + b\, A^{-1} \cdot I = 0$$

$$IA + aI + bA^{-1} = 0$$

$$A + aI + bA^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{-(A + aI)}{b}$$

Ejercicio 1. Sea $W = L\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, siendo $w_1 = (2,-1,1,3,0)$, $w_2 = (1,2,0,1,-2)$, $w_3 = (4,3,1,5,-4)$, $w_4 = (3,1,2,-1,1)$

Determinar una base de W y $W^{\perp}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{41}(-3)]{F_{21}(1)\; F_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{32}(-2)\; F_{42}(-1)\; F_{52}(2)]{F_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & +17 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{43}\left(\frac{-13}{6}\right)\; F_{53}\left(\frac{13}{6}\right)]{F_{53}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ +x_4 = 0 \end{cases} = SCI \Rightarrow L.D.$$

Como $w_4 = 0$ siempre va a ser L.I de los demás.

$B_W = \{w_1, w_2, w_4\} = \{(2,-1,1,3,0), (1,2,0,1,-2), (3,1,2,-1,1)\}$

Sea y ~~pertenece~~ $\in W^{\perp} \Rightarrow y \cdot x = \lambda_1 w_1 y + \lambda_2 w_2 y + \lambda_4 w_4 y = 0$

$$\begin{cases} w_1 y = 0 \Rightarrow (2,-1,1,3,0) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 0 \\ w_2 y = 0 \Rightarrow (1,2,0,1,-2)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 0 \\ w_4 y = 0 \Rightarrow (3,1,2,-1,1)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - 2y_5 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 + y_5 = 0 \end{cases}}$$

$W^{\perp} = \{ X \in \mathbb{R}^n \ / \ X \to$ ortogonal a todo elemento de $W \}$

Para que sea ortogonal a los elemento de W es suficiente que sea ortogonal a todos los vectores de la base.

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_4 w_4$$
$$w \cdot y = \lambda_1 w_1 \cdot y + \lambda_2 w_2 \cdot y + \lambda_4 w_4 \cdot y$$

$$\left.\begin{array}{l} w_1 \cdot y = 0 \Rightarrow 2y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ w_2 \cdot y = 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 + y_4 - 2y_5 = 0 \\ w_4 \cdot y = 0 \Rightarrow 3y_1 + 1y_2 + 2y_3 - y_4 + y_5 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones implícitas de } W^{\perp}$$

- Cambiando la primera por la segunda ecuación resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & +1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{31}(-3)]{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0 + y_4 - 2y_5 = 0 \\ 0 \quad -5y_2 + 1y_3 + y_4 + 4y_5 = 0 \\ y_3 - 5y_4 + 3y_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = -y_4 + 2y_5 \\ -5y_2 + y_3 = -y_4 - 4y_5 \\ y_3 = 5y_4 - 3y_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -\alpha + 2\beta - 2y_2 = \frac{-12}{5}\alpha + \frac{8}{5}\beta \\ y_2 = \frac{+\alpha + 4\beta + y_3}{5} = \frac{\alpha}{5} + \frac{4}{5}\beta + \frac{5\alpha}{5} - \frac{3\beta}{5} = \frac{6}{5}\alpha + \frac{1}{5} \\ y_3 = 5\alpha - 3\beta \\ y_4 = \alpha \\ y_5 = \beta \end{array}$$

$\Rightarrow$

Problemas

Matemáticas

Continuación

La base $\omega^{\perp}$ ~~por~~ resulta dando valores a α y β

si $\alpha = 5$ y $\beta = 0$ $\quad u_1 = \{(-17, 6, 25, 5, 0)\}$

si $\alpha = 0$ y $\beta = 5$ $\quad u_2 = \{(8, +1, -15, 0, 5)\}$

Comprobamos si son ortogonales:

$u_1 \cdot \omega_2 = (-17, 6, 25, 5, 0) \cdot (1, 2, 0, 1, -2) = -17 + 12 + 5 = 0$

La base de $\omega^{\perp} = \{(-17, 6, 25, 5, 0), (8, 1, -15, 0, 5)\} = \{u_1, u_2\}$

Ejercicio 2. Sea $\omega = \{(0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})\}$. Encontrar una base de $\omega^{\perp}$

Si $x \in \omega^{\perp} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (0, 1, 0) = 0$

$(x_1, x_2, x_3) \cdot (\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}) = 0$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{-4}{5} x_1 + \frac{3}{5} x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -4 x_1 + 3 x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Una base de $\omega^{\perp}$ podría ser $(3, 0, 4)$, para $\lambda = 4$

Llegamos a la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = L\{(-4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Rg(A)^{\perp} = L\{(3, 0, 4)\}$$

$N(A) = L\{(3, 0, 4)\} = Rg(A)^{\perp}$ puesto que A^t = soluciones del sistema

· Ejercicio 3. Dos vectores no nulos pero sí ortogonales son linealmente independiente. Probamos si esto es cierto.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 \quad \text{con} \quad a_1 \perp a_2$$

$$0 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) a_1 = \alpha_1 a_1 a_1 + \alpha_2 a_2 a_2^{=0} = \alpha_1 \|a_1\|^2$$, de aquí se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

· Ejercicio 4. Discutir cuales son los vectores ortogonales al vector 0

Todos son ortogonales al vector cero porque $a_1 \cdot \bar{0} = 0 \quad \forall a_1 \in \mathbb{R}^n$

· Ejercicio 5. Encontrar todos los vectores comunes a un espacio vectorial y su ortogonal

$$\cdot \text{Sea } x \in E \cap E^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} x \in E \Rightarrow x \cdot y = 0 \quad \forall y \in E^{\perp} \\ x \in E^{\perp} \Rightarrow x \cdot y = 0 \quad \forall y \in E \end{cases}$$

Tomemos en particular $y = x$

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Problemas — Matemáticas

Ejercicio 1. Determinar si $(-1,1,0,2)$ es ortogonal a $W = L\{(0,0,0,0), (1,-5,-1,2), (4,0,9,2)\}$

El $\vec{0}$ es siempre L.D por tanto $\Rightarrow W = L\{(1,-5,-1,2),(4,0,9,2)\}$

$(-1,1,0,2)\cdot(4,0,9,2) = -4+0+90+4 = 0$

$(-1,1,0,2)\cdot(1,-5,-1,2) = -1-5+4 \neq 0$

$(-1,1,0,2)$ no es ortogonal a $W \Rightarrow \perp$

Ejercicio 2. Para qué valor de k son ortogonales los siguientes vectores: $u=(2,1,2)$ y $v=(3,1,k)$

$u\cdot v = 0 \Rightarrow (2,1,2)\cdot(3,2,k) = 0 \Rightarrow 6+2+2k = 0 \Rightarrow k = -4$

Ejercicio 3. Encontrar unas ecuaciones paramétricas para el complemento ortogonal de W si $W = L\{(2,-5,4)\}$

Si $x\ y\ z \in W \Rightarrow (x,y,z)\cdot(2,-5,4) = 2x-5y+4z = 0$

Ec. implícitas del ~~ortog~~ $W^{\perp} = 2x-5y+4z$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = \dfrac{+5\alpha - 4\lambda}{2} \\ y = \alpha \\ z = \lambda \end{cases}$

base $W^{\perp} = \{(\frac{5}{2},1,0),(-2,0,1)\}$

Ejercicio 4. Determina $W^{\perp}$ a la ecuación $x-2y-3z=0$ y ecuaciones paramétricas de

$$W=\{(x,y,z)/x-2y-3z=0\}=\{(x,y,z)/(x,y,z)\cdot(1,-2,-3)=0\}$$

$$W^{\perp}=L\{1,-2,-3\}$$

Ec. implícitas = ~~...~~ $x-2y-3z=0$

Ec paramétricas $\Rightarrow \begin{cases} x=2\alpha+3\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Sea $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&5&0\\1&1&2\end{bmatrix}$

a) Encontrar base para espacio columna y nulo de A.

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&5&0\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_{21}}\begin{pmatrix}3&5&0\\1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{F_{21}(-3)\\F_{31}(-1)}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_{32}(-1)}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x+2y-z=0 & \rightarrow x=-6\alpha+\alpha=-5\alpha\\ -y+3z=0 & \rightarrow y=3\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$$

Base $R(A)=\{(1,3,1),(2,5,1)\}$

Base $N(A)=\{(-5,3,1)\}$

Problemas   Matemáticas

Ejercicio 7. Sea $W = L\{v_1, v_2\} = L\{(-1,2,1),(2,2,4)\}$, encontrar una base de W y $W^\perp$

Una base de $W = \{(-1,2,1),(2,2,4)\}$

$(-1,2,1)\cdot(x,y,z) \Rightarrow -x+2y+z=0$
$(2,2,4)\cdot(x,y,z) \Rightarrow 2x+2y+4z=0$ $\Rightarrow$ Ec implícitas de $W^\perp$

$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y+2z=0 \\ 3y+3z=0 \\ z=\alpha \end{matrix} \begin{matrix} \Rightarrow x=-\alpha \\ \Rightarrow y=-\alpha \\ \end{matrix}$

Una base de $W^\perp = \{(-1,-1,1)\}$

~~Ejercicio 8. Sea el vector $v = (2,1,3)$~~

$B = \{(-1,2,1),(2,2,4),(-1,-1,1)\}$

Sea $v = (2,1,3)$

$\left.\begin{matrix} v_1 = \alpha_1(-1,2,1)+\alpha_2(2,2,4) \in W \\ v_2 = \alpha_3(-1,-1,1) \in W^\perp \end{matrix}\right\}$ $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \cdot v_2 = 0$,

decimos que v_1 es la proyección de v sobre W y v_2 es la proyección de v sobre $W^\perp$

$v = \text{prog}_{v \text{ sobre } W} + \text{prog}_{v \text{ sobre } W^\perp} \Rightarrow \begin{cases} \text{prog}_{v \text{ sobre } W} \in W \\ \text{prog}_{v \text{ sobre } W^\perp} \in W^\perp \end{cases}$

$\text{prog}_W \cdot \text{prog}_{W^\perp} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v \\ v_2 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 8 Determinar la proyección ortogonal de u sobre ω y $\omega^{\perp}$, siendo $u = (0,1,-1)$ y $\omega = \{(-1,2,1)\ (2,4,2)\}$

$B\omega = \{(-1,2,1)\}$

$B\omega^{\perp} = (-1,2,1)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow -x+2y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\beta+\alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$

$B\omega^{\perp} = \{(2,1,0),\ (1,0,1)\}$

$u = \text{proyección}_{u\ \text{sobre}\ \omega} + \text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega^{\perp}}$

$\text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega} = \alpha_1 \cdot (-1,2,1)$

$u\ (-1,2,1) = \alpha_1\ (-1,2,1)\cdot(-1,2,1) + \overset{=0}{\cancel{\text{proy}_{\omega^{\perp}}\cdot(-1,2,1)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{(0,1,1)\ (-1,2,1)}{6} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega} = \frac{1}{6}(-1,2,1)$

$\text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega^{\perp}} = u - \text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega} = (0,1,-1) - \frac{1}{6}(-1,2,1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right)$

$\frac{1}{6}\cdot(1,2,1)\cdot\frac{1}{6}(1,4,-7) = 0$

$\begin{cases} \text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega} = \frac{1}{6}(-1,2,1) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \\ \text{proy}_{u\ \text{sobre}\ \omega^{\perp}} = \frac{1}{6}(1,4,-7) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{6}\right) \end{cases}$

Problemas | Matemáticos

Ejercicio 6 Sean $W = \{(1,2,0,1,-2),(2,-1,1,3,0),(3,1,2,-1,1)\}$, una base y $W^{\perp} = \{(-17,6,25,5,0)\}$ una base ortonormal.
Una base de R^5 es $B = \{(1,2,0,1,-2)(2,-1,1,3,0)(3,1,2,-1,1)(-17,6,25,5,0)$
$(8,1,-15,0,8)\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$$U = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 \quad \text{con } U_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \in W$$
$$U_2 = \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 \in W^{\perp}$$

Todo vector u se puede poner como $U = U_1 + U_2$ con $U_1 \in W$, $U_2 \in W^{\perp}$
Llamamos al vector U_1 proyección ortogonal de U sobre W. y al vector U_2 proyección ortogonal de U sobre $W^{\perp}$
Por tanto $U_1 \cdot U_2 = 0$ porque un vector pertenece a W y otro a $W^{\perp}$

Ejercicio 7. Calcular las proyecciones ortogonales sobre W y sobre $W^{\perp}$ del vector $(1,0,0,0,0)$. Con respecto al ejercicio anterior.

$$(1,0,0,0,0) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5$$

$$(1,0,0,0,0) \cdot a_4 = \lambda_1 a_1 a_4 + \lambda_2 a_2 a_4 + \lambda_3 a_3 \cdot a_4 + \lambda_4 a_4 \cdot a_4 + \lambda_5 a_5 \cdot a_4$$
$$(1,0,0,0,0)\, a_5 = \lambda_1 a_1 a_5 + \lambda_2 a_2 a_5 + \lambda_3 a_3 a_5 + \lambda_4 a_4 a_5 + \lambda_5 a_5 a_5$$

$$\begin{cases} -17 = \lambda_4 \cdot \|a_4\|^2 + \lambda_5 a_5 a_4 \\ 8 = \lambda_4 a_4 a_5 + \lambda_5 \|a_5\|^2 \end{cases}$$

resolviendo encuentro $U_2 = \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5$
$U_1 = U - U_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_1 =$ proyección $\perp$ de U sobre W y $U_2 =$ proyección $\perp$ de U sobre $W^{\perp}$

Producto escalar con matrices

$$(-a_1-)\cdot\begin{pmatrix}|\\u\\|\end{pmatrix}\quad(-a_1-)\lambda_1\begin{pmatrix}|\\a_1\\|\end{pmatrix}+(-a_1-)\cdot\lambda_2\begin{pmatrix}|\\a_2\\|\end{pmatrix}+(-a_1-)\cdot\lambda_p\begin{pmatrix}|\\a_p\\|\end{pmatrix}\cdot$$

$$+\cancel{(-a_1-)\,\mu_1\begin{pmatrix}|\\b_1\\|\end{pmatrix}+(-a_1-)\,\mu\cdot\begin{pmatrix}|\\b_p\\|\end{pmatrix}}^{=0}$$

$$(-a_2-)\lambda_1\begin{pmatrix}|\\a_1\\|\end{pmatrix}+(-a_1-)\cdot\lambda_2\begin{pmatrix}|\\a_2\\|\end{pmatrix}\quad(-a_1-)\lambda_p\begin{pmatrix}|\\a_p\\|\end{pmatrix}$$

$$=(-a_p-)=(-a_p-)\cdot\lambda_1\begin{pmatrix}|\\a_1\\|\end{pmatrix}+(-a_p-)\cdot\lambda_2\begin{pmatrix}|\\a_2\\|\end{pmatrix}+(-a_p-)\cdot\lambda_p\begin{pmatrix}|\\a_p\\|\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-a_1-\\-a_2-\\\vdots\\-a_p-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\\u\\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1-\\-a_2-\\\vdots\\-a_p-\end{pmatrix}\cdot\left[\lambda_1\begin{pmatrix}|\\a_1\\|\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}|\\a_2\\|\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_p\begin{pmatrix}|\\a_p\\|\end{pmatrix}\right]$$

$$A=\begin{pmatrix}|&|&&|\\a_1,&a_2,&\dots,&a_p\\|&|&&|\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^t\cdot u=A^t\cdot A\cdot\Delta},\ \text{donde}\ \Delta=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_p\end{pmatrix}$$

Este sistema, el sistema normal, nos permite encontrar los coeficientes de proyección ortogonal del vector u sobre el espacio generado por las columnas de A

Problemas

Matemáticas

Ejemplo 8. Calcula la proyección ortogonal de u sobre ω y de u sobre $\omega^{\perp}$, siendo $u=(0,1,-1)$ y $\omega = L\{(-1,2,1),(-2,4,2)\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

matriz dada, en función de las columnas

$A^t \cdot u = A^t \cdot A \, \Lambda \Rightarrow$ sistema normal

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6\lambda_1 + 12\lambda_2 = 1 \\ 12\lambda_1 + 24\lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6} - 2\alpha \\ \lambda_2 = \alpha \end{cases}$$

- $proy_{\omega} u = \left(\frac{1}{6} - 2\alpha\right) \cdot (-1,2,1) + \alpha \cdot (-2,4,2) = \frac{1}{6}(-1,2,1)$

- $proy_{\omega^{\perp}} u = u - proy_{\omega} u = (0,1,1) - \frac{1}{6}(-1,2,1) = \left(\frac{+1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right)$

Ejemplo 9. Calcular la proyección ortogonal del vector $u = (2,1,3)$ con respecto a $W = L\{(-1,2,1),\ (2,2,4)\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6d_1 + 6d_2 = 3 \\ 6d_1 + 24d_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{-2}{6} \\ d_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$proj_W u = \left(\frac{-2}{6}\right) \cdot (-1,2,1) + \frac{5}{6} (2,2,4) = \left(\frac{12}{6}, \frac{6}{6}, \frac{18}{6}\right)$$

$$proj_{W^\perp} u = (2,1,3) - \left(\frac{12}{6}, \frac{6}{6}, \frac{18}{6}\right) = (0,0,0)$$

En este caso se deduce que el vector u pertenece a W porque $proj_W u = \vec{u}$ y la $proj_{W^\perp} u = 0$

Problemas | Mates

Problema 1 Dados los puntos $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$

a) Ajustar una recta por el método de los mínimos cuadrados

b) " una parábola " " " " "

a) $(ax_1+b-(-1))^2+(ax_2+b-1)^2+(ax_3+b-2)^2+(ax_4+b-2)^2$

$$=(-a+b+1)^2+(b-1)^2+(\cancel{2}ax_3+b-2)^2+(2a+b-2)^2=$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}-a+b-1\\ b-1\\ 2a+b-2\\ 2a+b-2\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}-a+b\\ b\\ 2a+b\\ 2a+b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\right\|^2=$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|a\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\right\|^2$$

Esto es un sistema incompatible.

Este cuadrado será mínimo cuando α

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\operatorname{proy}_W Y \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$A^TAx=A^TY\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1/2\end{cases}$$

La recta que mejor se ajusta es: $\boxed{y = x + \frac{1}{2}}$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$(a-b+c+1)^2 + (c-1)^2 + (a+b+c-2)^2 + (4a+2b+c-2)^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a-b+c \\ c \\ a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2,$$

donde $a = \alpha_1$, $b = \alpha_2$, $c = \alpha_3$ $\Rightarrow A \cdot \Delta = \text{proy}_W y$

$$A^t \cdot A x = A^t \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema sale: $\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{3}{2} \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$

La parábola que más se ajusta será: $\boxed{y = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1}$

Mates

Problemas

Problema 1 continuación

$$\text{proy}_W y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = y$$

$\text{proy}_{W^\perp} y = 0 \Rightarrow \|b - b_1\| = 0$, por tanto los 4 puntos pasan por la parábola, no se comete ningún error.

Problema 2 Se pesa una sustancia n veces produciendo $p_1, \ldots, p_n$ resultados. Queremos determinar el peso de la sustancia por el método de los mínimos cuadrados

$$|p_1 - p|^2 + |p_2 - p|^2 + \ldots + |p_n - p|^2 =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \right\|^2$$

Será mínimo cuando $p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \text{proy}_W y$, siendo

$y = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ y $W = L\{1, 1, 1, \ldots, 1\}$

$$A^t \cdot Ax = A^t \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 1, 1, 1, \ldots, 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1, 1, 1, \ldots, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

$n\alpha = p_1 + p_2 \ldots + p_n$ la mejor aproximación es $\alpha = \dfrac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}$

- Determinar

- Sea $W = \{(x,y,z) / x+y+z=0\}$. Determinar una base [illegible] ortonormal de W y $W^{\perp}$

$W = \{(x,y,z) / (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0\}$

$W^{\perp} = L\{(1,1,1)\}$

base ortonormal de $W^{\perp} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$$W = \left\{ x+y+z \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha-\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

Tomamos $\begin{cases} b_1 = (-1,1,0) \\ b_2 = (-1,1,0) + d(-1,0,1) \end{cases}$ $\left\{ b_1 \cdot b_2 = 0 \Rightarrow d = -2 \right.$

Por tanto $b_2 = (-1,1,0) + (-2)(-1,0,1) = (1,1,-2)$

$W = \{(-1,1,0), (1,1,-2)\}$

base ortonormal de $W = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

$\Rightarrow y \; \alpha = -1$

Problemas

Matemáticas

① $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ Calcula β para que la matriz será diagonalizable.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ 3 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)\cdot(\alpha-\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-5-5\lambda+\lambda+\lambda^2)\cdot(\alpha-\lambda) = -5\alpha+5\lambda-5\lambda\alpha+5\lambda^2+$$
$$+\lambda\alpha-\lambda^2+\lambda^2\alpha-\lambda^3$$

$$\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = \alpha \end{cases}$$

Si $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & \beta \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & -6 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -6x_2 + \beta x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{6}\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

$$V(\lambda) = \{(0, \tfrac{\beta}{6}, 1)\} \rightarrow \mathrm{Dim}(v(\lambda)) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow$$ No diagonalizable para todo β

Si $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 = 0 \\ \beta x_3 = 0 \\ x_2 = \varphi \end{cases}$$

Si $\beta \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \varphi \quad x_3 = 0 \Rightarrow \{(0,1,0)\}$

Si $\beta = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \gamma \quad x_3 = \varphi \Rightarrow \{(0,1,0)(0,0,1)\}$

Solo será diagonalizable cuando $\beta = 0$ y cuando $\alpha \neq 5$ y $\alpha \neq -1$
ó y $\alpha = -1$

② Sea A una matriz de orden 3, se sabe

1) es diagonalizable
2) $\lambda_1 = B$ autovalor de A
3) $y \neq 0$ es un vector tal que $A \cdot y = y$ (esto significa que hay un autovalor 1)
4) $\dim V(A - I) = 2$ $\to$ tenemos 2 autovectores L.I y por tanto $\lambda = 1$
5) $\det(A) = 2$ $\quad Tr = 4$

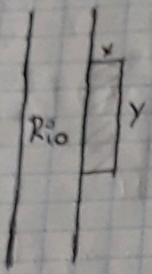
Determinar los autovalores de la matriz A

$Tr = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 1 + b = 2 + b$

$4 = 2 + b \Rightarrow \boxed{b = 2}$

Los autovalores son: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

Optimización



Superficie -> $S = x\,y$

Longitud -> $L = y + 2x$

$$\begin{cases} y = \dfrac{S}{x} \\ L = \dfrac{S}{x} + 2x \end{cases}$$

$$L' = \frac{-S}{x^2} + 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{S}{2}}$$

$$y = \frac{S}{x} = \frac{S}{\sqrt{S/2}} = \sqrt{2S}$$

$$\text{longitud mínima} = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{2}} + \sqrt{2S} = 2\sqrt{2S}$$

- Calculo de máximos de una función

Si el máximo ocurre en los extremos del intervalos tendremos un máximo absoluto, mientras que si se produce a lo largo del intervalo tendremos máximos relativos. ~~(dentro del intervalo)~~

Si ocurre dentro del intervalo el máx. absoluto puede ser también relativo.

- Procedimiento para calcular máximos absolutos y mínimos absolutos

1º- Evaluamos la función en los dos puntos terminales del intervalo

2º Buscamos los puntos de tangencia horizontal (derivada nula)

3º ~~El apartado~~ El mayor valor será el máximo absoluto y el menor valor será el mínimo absoluto

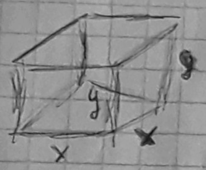
Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada empleando $108\ cm^2$ de cartón. ¿Qué dimensiones tendrá una caja de volúmen máximo?

Fórmulas a usar en la resolución

$$\begin{cases} S = x^2 + 4xy \to \text{superficie} \to y = \dfrac{S - x^2}{4x} \\ V = x^2 y \to \text{volúmen} \to V = x^2 \cdot \dfrac{S-x^2}{4x} = x \cdot \dfrac{S-x^2}{4} \end{cases}$$

$$\partial V = 27 - \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow x = 6$$

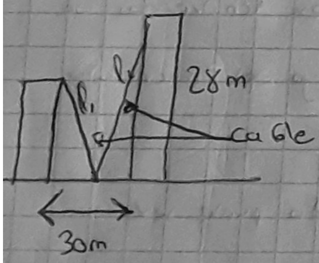
[* Razones trigonométrica * $\Rightarrow \dfrac{\text{grados} \cdot \pi}{180}$]



$$\begin{cases} x = 6\ cm \\ y = \dfrac{72}{24} = 3\ cm \end{cases}$$

Volúmen máximo $= 6^2 \cdot 3 = 108\ cm^3$

Ejemplo: 2 postes de 12 y 28 m de altura distan 30 m entre sí. Se desea tender un cable fijado en un único punto del suelo entre los puntos de ambos postes. ¿En qué punto del suelo para meteremos el cable para usar el mínimo cable?



$$\begin{cases} L = l_1 + l_2 = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{28^2 + (30-x)^2} \\ \partial L = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{144+x^2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{+2x-60}{\sqrt{28^2 \cdot (30-x)^2}} = \end{cases}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{144+x^2}} + \frac{x - 30}{\sqrt{28^2 \cdot (30-x)^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{144+x^2}} = \frac{x-30}{\sqrt{28^2(30-x)^2}}$$

$$\left(\sqrt{28^2(30-x)^2} \cdot x\right)^2 = \left((x-30) \cdot \sqrt{144+x^2}\right)^2$$

$$(28^2(30-x)^2) \cdot x = (x-30) \cdot (144+x^2) \Rightarrow x = 9$$

$$L = \sqrt{144 + 9^2} + \sqrt{28^2 (30-9)^2} = \sqrt{144+9^2} + 28 \cdot (30-9) =$$

Problemas | Matemáticas

• Ejemplo 2. Calcular los extremos absolutos de la función $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ en el intervalo $[0, 2]$

$$g(x) = x \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = x \cdot (x^2+1)^{-1/2}$$

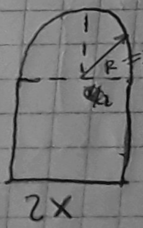
$$g'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot x \cdot (x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$$g(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 0 \rightarrow \text{mínimo absoluto } g(0)$$

$$g(2) = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{máximo absoluto } g(2)$$

• Ejemplo 3. Se llama ventana de norma a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de 16 m de perímetro y área máxima.



$\Rightarrow R = x$

$$\begin{cases} \text{perímetro} = 16 = 2x + 2y + \pi \cdot x \\ \text{área} = 2x \cdot y + \frac{\pi x^2}{2} \Rightarrow \text{Función objetivo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{16 - 2x - \pi \cdot x}{2} \\ A = 2x \cdot \frac{16 - 2x - \pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = 16x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} \end{cases}$$

Funciones compuestas

$$h(x) = f(x) \circ g(x) = g(f(x))$$

si $\begin{cases} g(x) = x^3 \\ f(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$h(x) = (\operatorname{sen} x)^3$$

- Derivación implícita

$$y^3 - y^2 - 5y - x^2 = -4$$

$$3y^2y' - 2yy' - 5y' - 2x = 0$$

$$y'(3y^2 - 2y - 5) - 2x = 0$$

$$\boxed{y' = \frac{2x}{3y^2 - 2y - 5}}$$

- Evaluar la derivada en el $(2,0)$, $(0,y)$, $(1,1)$

$(2,0) \Rightarrow y' = \dfrac{4}{-5} \Rightarrow$

$(0,y) \Rightarrow y' = \dfrac{2 \cdot 0}{3y^2 - 2y - 5} = 0 \Rightarrow$

$(1,1) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{0} =$

↳ No definida

En todos esos puntos se cumple la ecuación.

- La ecuación $y^3 - xy^2 = 4$, define a y como función implícita de x en el intervalo $\{-2 \leq x \leq 2$

- Determinar y' como función de x e y
- Determina y'' como función de x e y
- Ecuación de la recta tangente en $(1,2)$
- Indicar si $f(x)$ es creciente o decreciente para $x=1$
- Indicar si $y=f(x)$ tiene algún punto con tangente horizontal

- $3y^2y' - y^2 - 2xyy' = 0$

$$y' = \frac{y^2}{3y^2-2xy} = \frac{y}{3y-2x}$$

- $$y'' = \frac{\overbrace{y'\cdot(3y-2x)}^{3y} + y\cdot(3y'-2)}{(3y-2x)^2} = \frac{3y+y(3y'+2)}{(3y-2x)^2} =$$

$$= -\frac{3yy'-3y}{(3y-2x)^2} = -\frac{3\cdot\frac{y'}{(3y-2x)^2}+3y}{(3y-2x)^2} = -\frac{6y^2+6xy}{(3y-2x)^2}$$

- $y - y_0 = y'(x-x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{6-2}(x-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

- $y'(1,2) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Creciente

- Si $y=0 \Rightarrow 0 \neq 4$, No se satisface la ecuación

No hay ningún punto con tangente horizontal

Matemáticas.

· Demostrar que la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto (x_0, y_0) viene dada por la ecuación $\frac{y \cdot y_0}{b^2}+\frac{x \cdot x_0}{a^2}=1$

$$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot 2x + \frac{1}{b^2} \cdot 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{\left(\frac{-2x}{a^2}\right) b^2}{2y} = \frac{-x b^2}{a^2 y}$$

$$y - y_0 = \frac{-x b^2}{a^2 y} \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{-x^2}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x x_0}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$y \cdot y_0 \cdot a^2 = -b^2 x_0 (x - x_0) + y_0 \cdot a^2 \cdot y_0$$

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2$$

$$\frac{a^2 y y_0}{a^2 b^2} + \frac{b^2 x x_0}{a^2 b^2} = \frac{b^2 x_0^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y_0^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

- Suponiendo que la ecuación dada define a y como ~~ecuación~~ función implícita de X, calcular $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, así como la ecuación de la recta tangente:

a) $2x^3y - y^3 - 1 = 0$ en $P(1,1)$

b) $tg(x+y) = x$ en $P(0,0)$

c) $x^3y^3 + 3xy - y = 9$ en $P(2,-1)$

a) $6x^2y + 2x^3y' - 3y^2y' = 0$

$$y' = \frac{6x^2y}{2x^3 - 3y^2} = \frac{6x^2y}{2x^3 - 3y^2}$$

$$y'' = \frac{(12xy + 6x^2y')\cdot(2x^3 - 3y^2) + (6x^2y)\cdot(6x^2 - 6yy')}{(2x^3 - 3y^2)^2}$$

$$y - 1 = \frac{6}{-1}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -6x + 7}$$

b) $\left(1 + tg^2(x+y)\cdot(1+y')\right) = 1$

$$\cancel{1+}\,tg^2(x+y) + (1 + tg^2(x+y))\,y' = \cancel{1}$$

$$y' = \frac{-tg^2(x+y)}{1 + tg^2(x+y)} = \frac{\frac{-sen^2(x+y)}{cos^2(x+y)}}{\frac{cos^2(x+y) + sen^2(x+y)}{cos^2(x+y)}} =$$

$$= \frac{-sen^2(x+y)}{1} = -sen^2(x+y)$$

$$y'' = -2\,sen(x+y)\cdot cos(x+y)\cdot(1+y')$$

$y - 0 = 0(x-0) \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow$ tangente horizontal

Matemáticas

... Continuación:

c) $3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + 3y + 3xy' - y' = 0$

$$y' = \frac{-3y - 3x^2y^3}{3x^3y^2 + 3x} = \frac{-y - x^2y^3}{x^3y^2 + 3x}$$

~~+ Se dice que dos gráficas son ortogonales en su intersección si su recta tangente en ese punto son ⊥ entre sí.~~

Probar que las siguientes parejas de funciones definidas implícitamente son ortogonales en su intersección

a) $2x^2 + y^2 = 6$ e $y^2 = 4x$

b) $y^2 = x^3$ e $2x^2 + 3y^2 = 5$

c) $x + y = 0$ e $x^2 + y^2 = 4$

d) $x^3 = 3(y-1)$ e $x(3y - 29) = 3$

a) $4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y} = m$

$2yy^2 = 4x \Rightarrow y' = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y} = m'$

$\boxed{m = \frac{-1}{m'}}$

En el punto de intersección $\Rightarrow -\frac{2x}{y} = \frac{-1}{2/y} \Rightarrow \boxed{4x = y^2}$

↳ es un punto de la segunda curva

b) $g^2 = x^3$; $2x^2 + 3y^2 = 5$

$y_1' \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y}$

$y_2' \Rightarrow 4x + 6yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-4x}{6y} = \frac{-2x}{3y}$

$\frac{3x^2}{2y} = \frac{+3y}{2x} \Rightarrow 6x^3 = 6g^2 \Rightarrow \boxed{x^3 = g^2}$

d) $x^3 = 3(y-1)$ $\qquad x(3y-29) = 3$

$3x^2 = 3y' \Rightarrow y' = x^2$

$3y + 3xy' - 29 = 0 \Rightarrow y' = \frac{29-3y}{3x}$ *

$x^2 = \frac{-3x}{29-3y} \Rightarrow x^2(29-3y) = 3x \Rightarrow \boxed{x(-29+3y)=3}$

Matemáticas

Funciones vectoriales de variables reales

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\,\hat{i} + f_2(t)\,\hat{j} + f_3(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{g}(t) = g_1(t)\,\hat{i} + g_2(t)\,\hat{j} + g_3(t)\,\hat{k}$$

Suma Resta $\Rightarrow \vec{f}(t) \pm \vec{g}(t) = (f_1(t) \pm g_1(t), f_2(t) \pm g_2(t), f_3(t) \pm g_3(t))$

- Vector tangente unitario

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}}$$

$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t, bt)$ en $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$

$\vec{r}(0) = (a, 0, 0)$ $\qquad \vec{T}(0) = \frac{(0, a, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, a, b\frac{\pi}{2})$ $\qquad \vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-a, 0, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{r}(\pi) = (-a, 0, b\pi)$ $\qquad \vec{T}(\pi) = \frac{(0, -a, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$r'(t) = (-a\,\text{sen}\, t, a\cos t, b)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(-a\,\text{sen}\, t)^2 + (a\cos t)^2}_{a^2\underbrace{(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}_{1} = a^2} + b^2}} \cdot (-a\,\text{sen}\, t, a\cos t, b) =$$

$$= \frac{(-a\,\text{sen}\, t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2 + b^3}}$$

Derivada del producto escalar de vectores

$\vec{u}(t) - u_1(t), u_2(t), u_3(t) = u(t)\hat{i} + u(t)\hat{j} + u(t)\hat{k}$

$\vec{v}(t) - v_1(t), v_2(t), v_3(t) = v(t)\hat{i} + v(t)\hat{j} + v(t)\hat{k}$

$\rightarrow h(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = u_1(t) \cdot v_1(t) + u_2(t) \cdot v_2(t) + u_3(t) \cdot v_3(t)$

$\rightarrow h'(t) = u_1'(t) \cdot v_1(t) + u_1(t) \cdot v_1'(t) + u_2'(t) v_2(t) + u_2(t) \cdot v_2'(t) +$
$u_3'(t) \cdot v_3(t) + u_3(t) \cdot v_3'(t) = u_1'(t) v_1(t) + u_2'(t) v_2(t) + u_3'(t) v_3(t)$
$+ u_1(t) v_1'(t) + u_2(t) \cdot v_2'(t) + u_3(t) \cdot v_3'(t) =$
$= (u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t)) \cdot (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) +$
$+ (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \cdot (v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t)) =$
$= \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$(\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t))' = T'(t) \cdot T(t) + T(t) \cdot T'(t) = 2\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$,
pq $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ y la derivada de 1 es 0. Por tanto $\vec{T}$ es
ortogonal a $\vec{T}'(t)$

Definimos el vector normal unitario como $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$

Ecuación de la recta tangente a $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{R}(t) = \vec{r}(t_0) + \lambda \cdot \vec{T}(t)$

Matemáticas

• Ejemplo: Sea $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j} + 3t\vec{k}$, calcular el vector tangente unitario y el vector normal unitario o principal cuando $t = 1$

$$r'(t) = 1\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 3^2t^4 + 3^2}} = \frac{1\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{10 + 9t^4}}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{1\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{19}} =$$

$$= \frac{(1,3,3)}{\sqrt{19}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\sqrt{\vec{T}'(t)}}$$

$$\vec{T}'(t) = \left[(10+9t^4)^{-1/2}\cdot(1,3t^2,3)\right]' = \frac{36t^3}{2\sqrt{10+9t^4}}\cdot(1,3t^2,3) + \frac{1}{\sqrt{10+9t^4}}\cdot(0,6t,0) =$$

$$\cancel{= \frac{(36t^3, 108t^5, 36t^3)}{2\sqrt{10+9t^4}} + \frac{(0,6t,0)}{\sqrt{10+9t^4}}}$$

$$\vec{T}'(1) = \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot 19^{-1/2}\cdot 36\cdot(1,3,3) + (19)^{-1/2}\cdot(0,6,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{19}}\left(\frac{-18}{19}, \frac{-54}{19} + 6, \frac{-54}{19}\right) = \frac{1}{19\sqrt{19}}\cdot(-18, -60, -54)$$

$$\vec{N}(1) = \frac{\frac{1}{19\sqrt{19}} \cdot (-18,-60,-54)}{\sqrt{\left(\frac{-18}{19\sqrt{19}}\right)^2 + \left(\frac{-60}{19\sqrt{19}}\right)^2 + \left(\frac{-54}{19\sqrt{19}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{(-18,-60,-54)}{\sqrt{(+18)^2 + (+60)^2 + (+54)^2}}$$

Ejemplo. Calcular el vector tangente unitario y el vector normal de la función $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), t)$ en $t = \frac{\pi}{4}$, así como la recta tangente.

$$r'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t), 1)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{(-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t), 1)}{\sqrt{(-2\,\text{sen}(t))^2 + (2\cos(t))^2 + 1^2}}$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}{\sqrt{4\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$T'(t) = \frac{(-2\cos(t), -2\,\text{sen}(t), 0) \cdot \sqrt{\sqrt{5}}}{(\sqrt{5})^2}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{(-2\cos(t), -2\,\text{sen}(t), 0)}{\sqrt{4}}$$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$