WUOLAH

Zukii
www.wuolah.com/student/Zukii

27321

Resolucion.pdf

Examen Final 2020 Resuelto

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

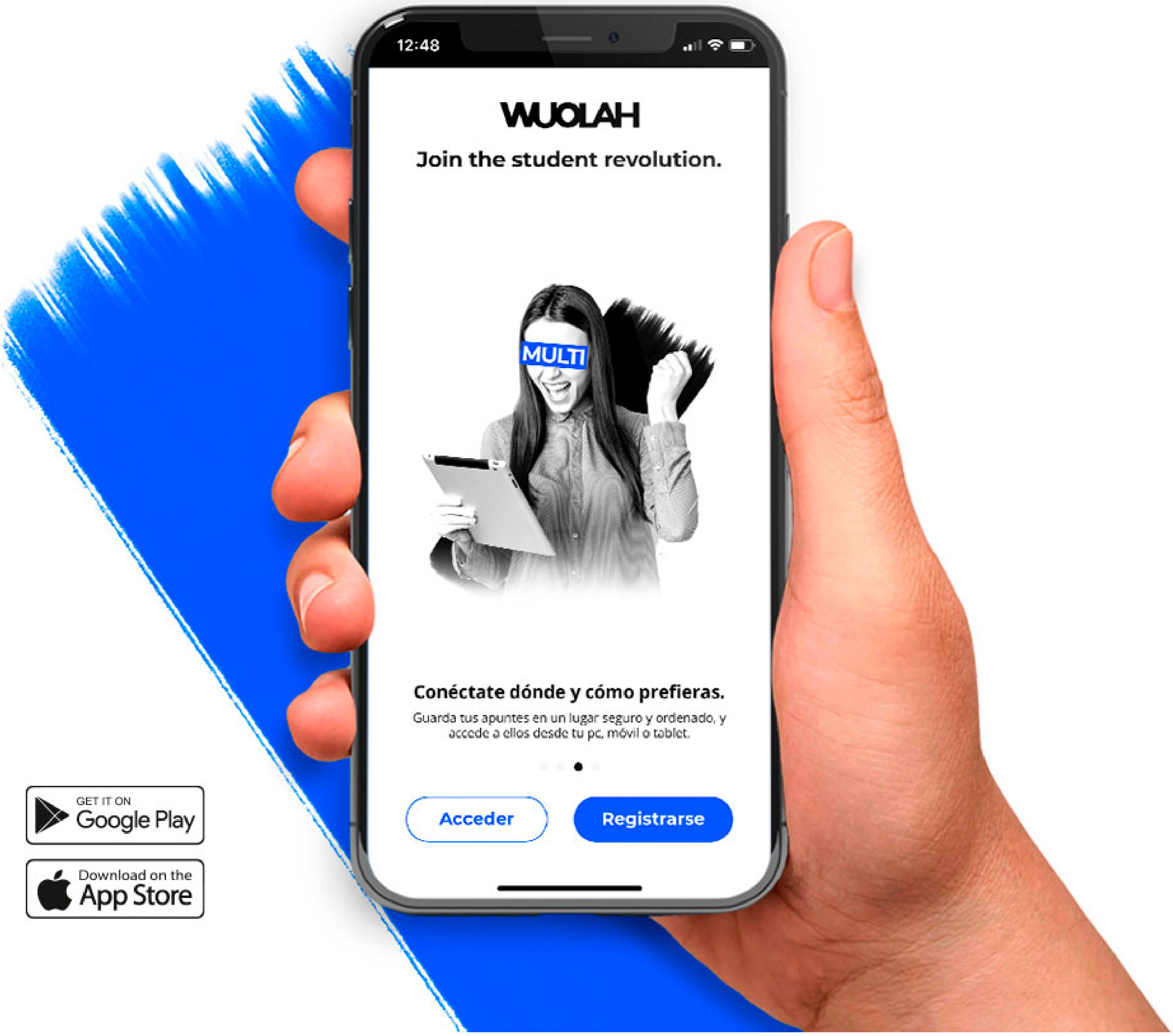
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.

Available on the App Store
GET IT ON Google Play

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Exámenes, preguntas, apuntes.



GET IT ON Google Play

Download on the App Store

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Grado en Ingeniería Informática	Convocatoria ordinaria 22 de enero de 2019

Apellidos:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

Firma:

1. Calcula el inverso, para el producto, de 121 en $\mathbb{Z}_{347}$.

2. ¿Es $x^2 + 2x + 1$ una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+x}$?

3. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por
$$\{(2,3,4,1),(1,4,2,3),(1,2,3,4),(2,1,0,2)\}.$$
Calcula el cardinal de U.

4. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \mid x+y+z=0\}$ y sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(1,2,3),(3,1,2)\}$. Calcula una base de $U \cap W$.

5. Estudia el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}.$$

6. Sean $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,3)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Las coordenadas de un vector $\vec{x}$ respecto de la base B son $(1,2,1)$. Calcula las coordenadas de dicho vector $\vec{x}$ respecto de la base B'.

7. Diagonaliza, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

8. ¿Cuántos números, escritos en base 5, tienen 7 dígitos y exactamente 3 de dichos dígitos son iguales a cero?

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Resolución:

1.

1. Calcula el inverso, para el producto, de 121 en $\mathbb{Z}_{347}$.

Usamos la Tabla de Bezout para ver el inverso. Buscamos la v, tal que el mcd(121,347) = 347 * u + 121 * v:

a	b	r	c	u	v
				1	0
				0	1
347	121	105	2	1	-2
121	105	16	1	-1	3
105	16	9	6	7	-20
16	9	7	1	-8	23
9	7	2	1	15	-43
7	2	1	3	-53	152
2	1	0	(no nos interesa ya)		

Último resto no nulo -> mcd -> en esta fila estan las inversas.

Al ser el mcd 1, existe inversa para 121.

Cuentas:

347 / 121 = 2 * 121 + 105

105 / 16 = 6 * 16 + 9

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

23 – (-43 * 3) = 152

1 = -53 * 347 + 152 * 121

Al ser la inversa, 121 * 152 en Z347 tiene que ser 1 (mira en la calculadora y divide) -> Resto = 1 = Identidad

<u>Entonces la inversa de 121 módulo 347 es 152.</u>

2.

2. ¿Es $x^2 + 2x + 1$ una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+x}$?

Nos pide ver si el mcd entre x^2 + 2x + 1 y x^3 + x^2 + x en Z5 es 1. (el resto de dividir el primero entre el segundo es 1)

Volvemos a aplicar bezout.

a	b	r	c	u	V
				1	0
				0	1
x^3+x^2+x	x^2+2x+1	2x+1	x^2+2x+1	1	-x^2-2x-1
x^2+2x+1	2x+1	4	3x+2	-3x-2	-
2x+1	4	1	3x	-	-
4	1	0	4	-	-

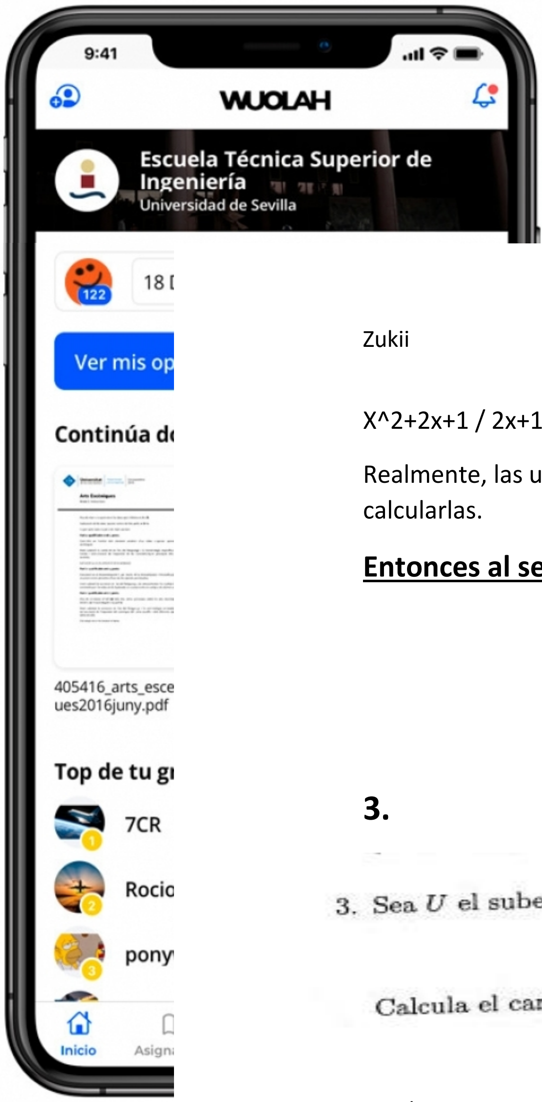
Cuentas:

X^3+x^2+x / x^2+2x+1 = 2x+1 + (x+4) * (x^2 + 2x + 1) (Teorema del Resto)

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.
Available on the App Store
GET IT ON Google Play

Zukii

X^2+2x+1 / 2x+1 = 4 + (3x+2) * (2x+1)

Realmente, las u y las v nos dan igual y perdemos tiempo calculándolas, mejor no calcularlas.

<u>Entonces al ser último resto no nulo 1, podemos afirmar que es unidad</u>

3.

3. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por

$$\{(2,3,4,1),(1,4,2,3),(1,2,3,4),(2,1,0,2)\}.$$

Calcula el cardinal de U.

Una base tiene que cumplir que sea conjunto generador y que sus vectores sean LI. Lo mejor para ver si es LI, es ver el rango de la matriz que forma, el cual nos dirá el número de vectores LI, en este caso, lo haré por determinantes.

El det(4x4) = 0

Todos los det(3x3) son 0

Pero 2x2 hay det != 0 → El rango es dos, entonces:

<u>La base está formada por dos vectores, y al ser subespacio de Z5^2, y el cardinal de Z5^2(misma dimensión) es 25 (5* 5), entonces el cardinal de U es 25 también.</u>

4.

4. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3 \mid x+y+z=0\}$ y sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(1,2,3),(3,1,2)\}$. Calcula una base de $U \cap W$.

WUOLAH
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Para la intersección, necesitamos las ecuaciones de ambos subespacios.

Pasamos la base de W a ecuaciones. (x,y,z)=A(1,2,3)+B(3,1,2)

X = A + 3B

Y = 2A + B

Z = 3A + 2B

(se podría hacer un sistema, pero es innecesario)

Z + 5B = 3A; A = 5Z + 4B

X = 5Z + 4B + 3B = 5Z

Y = 2(5Z + 4B) + B = 3Z + 2B (No nos importa al tener la ecuación despejada antes)

X = 5Z

Vemos que los vectores de la base cumplen la ecuación(Importante). Sí

Entonces la intersección de estos subespacios vectoriales son los vectores que cumplen las ecuaciones de ambos subespacios.

X + 2Z = 0

X + Y + Z = 0

Pasamos de ecuación a base, ya que nos piden la base de la intersección. (Se puede hacer dando valores, o despejando cada incógnita y expresando un vector cualquiera del subespacio)

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Entonces:

X = 5Z

5Z + Y + Z = 0; Y = -6Z = Y = Z = 3X (inversa de 5 módulo 7)

(x,y,z) = (X, 3X, 3X) = X (1,3,3) y **la base es (1,3,3)**, la cual **cumple las ecuaciones de la intersección**(1+6=0,1+3+3=0)(**MUY IMPORTANTE),** y cumplen la fórmula de:

Nºecuaciones = dim K – dim V, en este caso, al haber dos ecuaciones y al ser la dim de K (Z7 ^3) 3, la dim de V es 1, que es el número de vectores de su base.

5.

5. Estudia el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Al haber solo 2 ecuaciones para 3 incógnitas, sabemos ya que este sistema nunca va a ser Sistema Compatible Determinado (1 solución para cada incógnita), entonces tenemos que ver los casos donde el rango de la matriz A se anule, y ver cómo se comporta A|B (ver si el rango con la ampliada es diferente al de la matriz sin los términos independientes)

Rg $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ -> F2 – F1 ->$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ -> Entonces si a = 1, rg(A) = 1 (la última fila sería todo ceros, y el rango sería 2), **pero si a != 1, rg(A) = 2 = rg(A|B) != nºincógnitas , entonces sería Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones) SCI**

Entonces si a = 1

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ > F2 – F1 -> **RG (A) = 1 = RG (A|B) = 1 != nºincógnitas, entonces es un Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones) SCI**

<u>Para todo a ∈ R, el sistema es SCI</u>

6.

6. Sean $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,3)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Las coordenadas de un vector $\vec{x}$ respecto de la base B son $(1,2,1)$. Calcula las coordenadas de dicho vector $\vec{x}$ respecto de la base B'.

Sabemos que un vector x, se escribe en la base B como (1,2,1), entonces sabemos que ese vector en la base canónica se puede escribir como:

(x,y,z) = **1**(1,1,1)+**2**(0,1,1)+**1**(0,0,1) = (1,1+2,1+2+1) = $(1,3,4)_C$

Y para hallar este vector en B’, buscamos los escalares para multiplicar a los vectores de esa base y así conseguir el vector x en esa base.

(1,3,4) = a(1,2,3)+b(0,2,3)+c(0,0,3);

a = 1

3 = 2a + 2b; 3 – 2a = 2b; 1 = 2b; **3 = b** (inverso de 2 en Z5 es 3)

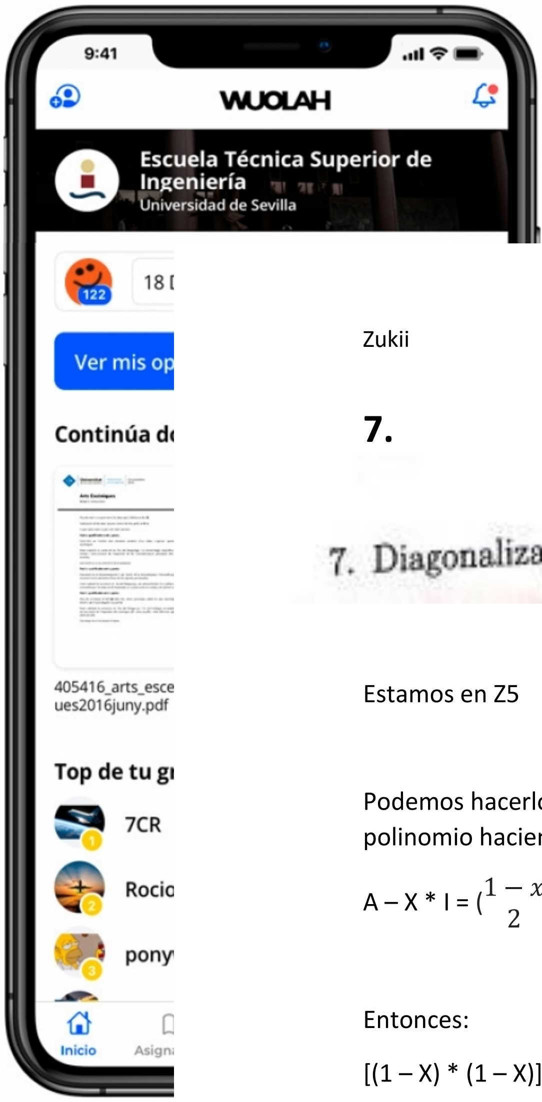
4 = 3a + 3b + 3c; 4 – 3a – 3b = 3c; 4 – 3 – 9 = 3c = 1 + 1 = 3c; 2 = 3c; 2 * 2 = c; **4 = c**

<u>Entonces el vector en la Base B’ es (1,3,4), que coincide con el de la base canónica.</u>

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.
Available on the App Store
GET IT ON Google Play

Zukii

7.

7. Diagonaliza, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

Estamos en Z5

Podemos hacerlo con la fórmula que existe, o de la forma tradicional, consiguiendo el polinomio haciendo el determinante de la matriz A – X * I

A – X * I = $\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}$

Entonces:

[(1 – X) * (1 – X)] – 2 *2 = 1 – X – X + X^2 – 4 = X^2 – 2X – 3 = X^2 + 3X + 2;

Para ver las raíces, hacemos Ruffini o el clásico método de resolución de una ecuación de segundo grado.

Al final, veremos que las raíces son 3 y 4, ya que 3^2+3*3+2 = 0 y 4 ya que 16 + 12 + 2 = 0 (en Z5), y sus multiplicidades algebraicas (las veces que sale como solución) son 1 para cada raíz.

Entonces los subespacios propios son: (sustituimos en la matriz los valores propios, y con las ecuaciones que nos quedan vemos una base de ese subespacio propio y vemos si coincide para ver si podemos diagonalizar).

E_3 = {(x,y) ∈ Z5^2 / -2x + 2y = 0 , 2x – 2y = 0} -> {(x,y) ∈ Z5^2 / 3x + 2y = 0}

Entonces si pasamos de ecuación a base, pero previamente vemos dependencia en las ecuaciones, veríamos que la segunda ecuación es 4 veces la primera, entonces tenemos solo **una** ecuación realmente, que es 3x + 2y = 0

Despejando:

2x = 2y; y = x

Entonces

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

(x,y) = (x,x) = x(1,1), donde (1,1) es la base de subespacio, la cual cumple las ecuaciones. Así, la dimensión de este subespacio propio es 1(Multiplicidad geométrica), que coincide con la MA de 3.

E_4 = {(x,y) ∈ Z5^2 / -3x + 2y = 0 , 2x – 3y = 0} -> {(x,y) ∈ Z5^2 / 2x + 2y = 0}

Vemos dependencias y nos damos cuenta de que la primera ecuación es la primera, entonces solo hay una ecuación y la ecuación es 2x + 2y = 0; 2x = 3y; 4x = y (inversa de 3 módulo 5 es 2).

(x,y) = (x,4x) = x(1,4), donde (1,4) es la base, y entonces la dimensión de este subespacio propio es 1(Multiplicidad geométrica), que coincide con la MA de 4.

<u>Entonces al coincidir todas las multiplicidades algebraicas y geométricas, y al ser suma igual a 2, que el número de filas y columnas de la matriz A, sabemos que la matriz es DIAGONALIZABLE.</u>

Entonces hay que buscar una matriz de paso tal que:

$A = PDP^{-1}$

AP = PD (así no hacemos inversa)

Donde D = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, que es una matriz diagonal, donde aparecen las raíces en la diagonal y P es una matriz donde aparecen en columnas, las bases de cada subespacio propio: P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

P*D = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A*P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces así verificamos que no nos hemos equivocado en el proceso, y efectivamente es Diagonalizable

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

8.

8. ¿Cuántos números, escritos en base 5, tienen 7 dígitos y exactamente 3 de dichos dígitos son iguales a cero?

Base 5: {0,1,2,3,4}

7 dígitos

3 son 0.

Lo primero es suponer que, al ser números de 7 dígitos, el primer dígito ha de ser distinto de 0, ya que si no sería de 6.

Luego, los **posibles lugares que pueden ocupar los 0, son la combinatoria de 6 a 3, C^{6}_{3}**, cuyo resultado es 6! / 3! * 3! = 6 * 5 * 4 / 3! = 5 * 4 = 20

Y nos sobran **cuatros huecos, los cuales ninguno puede ser 0, ya que el enunciando nos dice que son exactamente 3 ceros. Entonces habrá, cuatro posibles huecos, y cuatro posibles valores**, lo cual es 4^4 = 16 * 16 = 256

Entonces hay 20 * 256 (Principio del producto) posibles números con tres ceros, 7 dígitos escritos en base 5 = 5120

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.