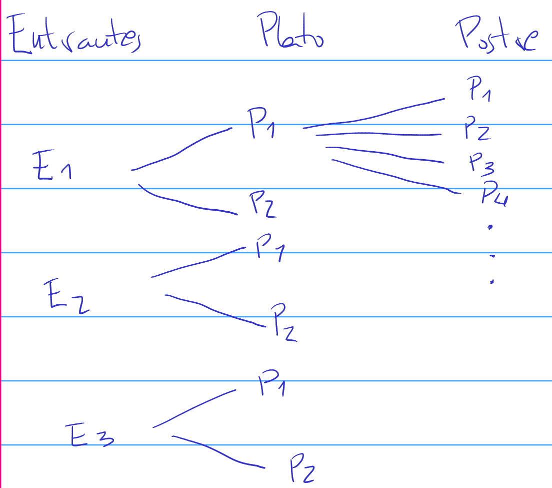
RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 2

Ejercicio 1



$\boxed{\text{Claramente hay } 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ menús distintos.}}$

Ejercicio 2

Similar al anterior

Ejercicio 3

Equipo 1: 12 jugadores
Equipo 2: 15 jugadores
Cada jugador le da la mano a cada jugador del equipo contrario.
Cada apretón de manos es de la forma

$$\text{Jugador equipo 1} \longleftrightarrow \text{Jugador equipo 2}$$

$$\underset{\text{12 opciones}}{\downarrow} \qquad\qquad \underset{\text{15 opciones}}{\downarrow}$$

$\Rightarrow$ Hay $\boxed{12 \cdot 15 = 180 \text{ apretones de manos.}}$

Ejercicio 6

a) Números de teléfono de 8 dígitos.

Tenemos 10 dígitos y queremos extraer subconjuntos de 8 números de forma que

i) Influye el orden

ii) Se pueden repetir los dígitos.

Por tanto, tenemos $VR_{10,8} = 10^8$ posibilidades.

Pero los números que empiezan por 0 no son de 8 cifras, por lo que tengo que restarlos.

Los números que empiezan por 0 son $VR_{10,7} = 10^7$

Por tanto, el número de números de teléfono es $\boxed{10^8 - 10^7 = 9 \cdot 10^7 = 90000000}$

b) Ahora tenemos 9 dígitos

$$\boxed{VR_{9,8} = 9^8}$$

Ejercicio 11

a) Números que se pueden formar de 4 cifras: $VR_{10,4} = 10^4$

Números que empiezan por cero: $VR_{9,3} = 9^3$

Números de cuatro cifras: $\boxed{10^4 - 9^3}$.

b) Números con las cuatro cifras distintas.

Números con cero

Elegimos una posición: _ <u>0</u> _ _

Tenemos 3 opciones (el 0 no puede ser la primera)

$\underbrace{\text{9 pos.} \quad \text{8 pos.} \quad \text{7 pos.}}$

Total: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

Como hay 3 opciones $= 3 \cdot 504 = 1512$

Números sin cero

_ _ _ _ $\Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

9 pos, 8 pos, 7 pos, 6 pos

Total $= 1512 + 3024 = \boxed{4536}$

c) Al menos 2 cifras iguales

Fijamos 2 cifras. Tenemos las siguientes opciones

$(1^a, 2^a), (1^a, 3^a), (1^a, 4^a)$
$(2^a, 3^a), (2^a, 4^a)$
$(3^a, 4^a)$

} 6 posibilidades de fijar 2 cifras.

Supongamos que hemos fijado 2 cifras (que van a ser iguales). Distinguimos 2 casos:

CASO 1: Hemos fijado la primera. Por ejemplo

$\underline{0}\quad \underline{\ \ }\quad \underline{0}\quad \underline{\ \ }$

9 posibilidades (El 0 no vale) 10 posibilidades 10 posibilidades

En total: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Como hay 3 casos en los que fijo la primera cifra $\Rightarrow 3 \cdot 900 = 2700$ posib.

CASO 2: No hemos fijado la primera. Por ejemplo:

$\underline{\ \ }\quad \underline{0}\quad \underline{\ \ }\quad \underline{0}$

10 pos. 10 pos. 10 pos

En total: 1000.

Como hay otras 3 posibilidades: 3000.

Por tanto, la solución es $3000 + 2700 = \boxed{5700}$.

(c) Números con 4 cifras distintas y ninguna coincide ni con 4 ni con 5

CASO 1: Números con 0.

Elijo la posición del 0: tengo 3 posibilidades $\rightarrow$ 2ª, 3ª y 4ª cifra. Por ejemplo

$\underline{\ \ }\quad \underline{0}\quad \underline{\ \ }\quad \underline{\ \ } \longrightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

7 pos 6 pos 5 pos

Como hay 3 casos distintos, el caso 1 nos da $210 \cdot 3 = 630$

CASO 2: Números sin cero

$\underline{\ \ }\quad \underline{\ \ }\quad \underline{\ \ }\quad \underline{\ \ } \Rightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

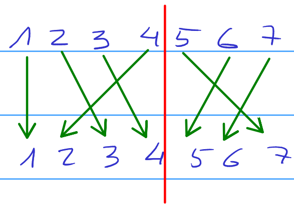
7 pos 6 pos. 5 pos. 4 pos.

En total: $210 + 840 = \boxed{1050}$

Ejercicio 13

$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $A_1=\{1,2,3,4\}$ $A_2=\{5,6,7\}$

a) Las permutaciones de A que no intercambian elementos de A_1 con A_2 son, en realidad, permutaciones de A_1 y de A_2. Además, por cada permutación de A_1 y A_2 obtendremos una permutación de A. Por tanto:

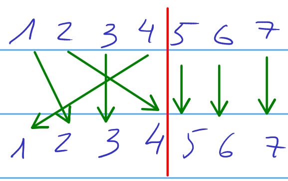


Permutaciones de $A_1 = P_4 = 4!$

Permutaciones de $A_2 = P_3 = 3!$

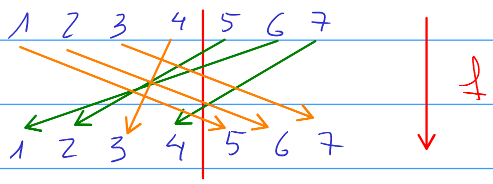
En total: $4!\cdot 3!$

b) Las permutaciones que dejan fijos los elementos de A_2 son las permutaciones de A_1, esto es, $4!$



c) Ninguna permutación puede cambiar todos los elementos de A_1 en elementos de A_2, puesto que A_1 tiene 4 elementos y A_2, 3.

Hacemos el problema contrario: ¿cuántas permutaciones transforman elementos de A_2 en elementos de A_1?



Claramente, las permutaciones que nos piden son aquellas que llevan:

i) Todos los elementos de A_2 a elementos de A_1

ii) Tres elementos de A_1 a elementos de A_2

iii) Solo un elemento de A_1 lo manda a A_1

Caso 1: $f(1)$ está en A_1

- Hay 4 opciones para $f(1)$
- Como $f(2), f(3), f(4)$ están en A_2, hay $3! = 3\cdot 2 = 6$ posibles elecciones.
- Como $f(5), f(6), f(7)$ está en A_1 y ya he elegido $f(1)$, hay $3! = 3\cdot 2 = 6$ posibilidades

Luego el caso 1 tiene $4\cdot 6\cdot 6 = 144$ posibilidades.

Como tenemos 4 casos distintos ($f(1)\in A_1$, $f(2)\in A_1$, ...) $\Rightarrow$ En total $= 4\cdot 144 = 576$

Ejercicio 16

a) Puesto que en los subconjuntos

1) no influye el orden.

2) no se pueden repetir las personas,

utilizamos combinaciones.

El apartado a) es $C_{57,6} = \binom{57}{6} = \frac{57!}{6!\,51!}$

b) Solo hombres: $C_{32,6} = \binom{32}{6} = \frac{32!}{26!\,6!}$

Personas del mismo sexo = Solo hombres + Solo mujeres = $\frac{32!}{26!\,6!} + \frac{25!}{6!\,19!}$

Al menos una mujer y al menos un hombre =

Sea S_1 : Solo hombres y S_2 : Solo mujeres.

Claramente, lo que nos piden es

$$\text{Todos} - S_1 - S_2 = \frac{57!}{6!\,51!} - \frac{32!}{26!\,6!} - \frac{25!}{6!\,19!}$$

Ejercicio 17

(1) $C_{30,4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,26!}$

(2) Solo podemos seleccionar personas de las 18 emparejadas. Por tanto: $C_{18,4} = \binom{18}{4}$

(3) Sean: N = muestras sin solteros $= \binom{18}{4}$

T = total de muestras $= \binom{30}{4}$

M = muestras con, al menos, un soltero

Claramente: $M = T - N = \binom{30}{4} - \binom{18}{4}$