UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencia.

Relación De Ejercicios del Tema V

(*Aplicaciones Lineales y Diagonalización.*)

Ejercicio 1. *Consideramos las siguientes aplicaciones:*

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+2,y-4,3z)$
(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ f(x)=(x,2x,3x)$.
(iii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y$.
(iv) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=(x-y,z+y)$.
(v) $f:\mathbb{Z}_7^2\to\mathbb{Z}_7^3,\ f(x,y)=(x-y,x+y,2x-3y)$.
(vi) $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5^2,\ f(x)=(2x,4x)$.
(vii) $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5^2,\ f(x)=(-x,4x)$.
(viii) $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5^2,\ f(x)=(2x-1,x+2)$.
(ix) $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5^2,\ f(x)=(3-x,4x-1)$.
(x) $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5^2,\ f(x)=(3x,-2x)$.

(11) ¿Cuál de esas aplicaciones es lineal? (Justifica tu respuesta).

(12) Representa gráficamente las aplicaciones situadas en la columna de la derecha. ¿Que diferencia hay entre una aplicación que es lineal y otra que no lo es?

(13) Calcule la matriz asociada, respecto de las bases canónicas, de cada una de las aplicaciones que es lineal.

(14) Calcule la imagen y el núcleo de cada una de las aplicaciones que son lineales.

(15) Deduce cual de esas aplicaciones lineas es un monomorfismo y cual de ellas es un epimorfismo.

Ejercicio 2. *A cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ consideramos su reflexión $(-x,y)$ sobre el eje OY. Compruebe que $\mathscr{R}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $\mathscr{R}(x,y)=(-x,y)$ es una aplicación lineal y que es un isomorfismo. Calcule la matriz de $\mathscr{R}$ en las bases canónicas. ¿Cuales la aplicación inversa de $\mathscr{R}$?*

Ejercicio 3. *Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo cualquiera. Demuestre que cualquier aplicación linear del $\mathbb{k}$-espacio vectorial $\mathbb{k}\times\mathbb{k}$ hacia el $\mathbb{k}$-espacio vectorial $\mathbb{k}$ es de forma*

$$f_{(\alpha,\beta)}:\mathbb{k}\times\mathbb{k}\longrightarrow\mathbb{k},\ \Big((x,y)\longmapsto\alpha x+\beta y\Big),\quad \text{para algún par de escalares } (\alpha,\beta)\in\mathbb{k}^2.$$

En el caso que $\mathbb{k}=\mathbb{Z}_5$, cuantas aplicaciones lineales hay de $\mathbb{Z}_5^2$ hacia $\mathbb{Z}_5$? Consideramos $\mathscr{L}(\mathbb{Z}_5^2,\mathbb{Z}_5)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{Z}_5^2$ hacia $\mathbb{Z}_5$, de manera canónica como $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial. Cuales la dimensión de $\mathscr{L}(\mathbb{Z}_5^2,\mathbb{Z}_5)$? Es cierto que, para cualquier cuerpo $\mathbb{k}$, la dimensión de $\mathscr{L}(\mathbb{k}^2,\mathbb{k})$ es 2? (Justifica la respuesta).

Ejercicio 4. *Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(3x+2y-z,5x-2y,-9x+10y-2z)$.*

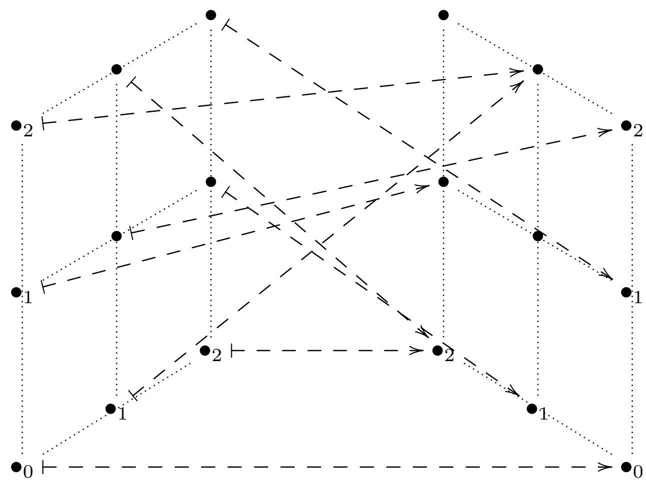
(41) ¿Pertenece el vector $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ a la imagen de f?

(42) ¿Existe algún vector de la forma $(2,5,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, que pertenezca al núcleo de f?

(43) ¿Es f un isomorfismo de espacios vectoriales?

(44) Consideramos el conjunto de vectores $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$. Demuestre que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcule la matriz de f, respecto de la base canónica y $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 5. *En la siguiente figura se representa una aplicación de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ hacia $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$:*



Por ejemplo la image del vector $(0,0)$ es $(0,0)$ y la del vector $(0,1)$ es $(2,1)$ y así sucesivamente.

(51) Compruebe que esa aplicación es una aplicación $\mathbb{Z}_3$-lineal. Si consideramos un vector cualquiera $(x,y) \in \mathbb{Z}_3^2$ ¿Cuales su imagen mediante esa aplicación?

(52) Calcule las dimensiones de su núcleo y de su imagen.

(53) Determine sus valores propios y las ecuaciones parasimpáticas de sus subespacios propios.

Ejercicio 6. *Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (x+y-z, x-y, -x+2z, x+z)$.*

(61) Calcule una base del núcleo de f.

(62) Calcule las ecuaciones implícitas de la imagen de f.

(63) Calcule la expresión matricial de f respecto de las siguientes bases:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}, \qquad B' = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}.$$

Responde a las mismas preguntas escogiendo en este caso la aplicación lineal $g : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^4$ definida como sigue:

$$g(x,y,z) = (x-y+z, x+y+z, -x-y, x+z), \quad \textit{para cualquier vector } (x,y,z) \in \mathbb{Z}_7^3.$$

Ejercicio 7. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya asociada matriz en las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.*

(71) Consideramos las siguientes bases nuevas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$:

$$\overline{e}_1 = (1,2,0),\ \overline{e}_2 = (3,1,1),\ \overline{e}_3 = (1,2,2);\ \ \overline{u}_1 = (1,2),\ \overline{u}_2 = (1,3).$$

Calcular las matrices de cambios de bases.

(72) Calcular la matriz de f respecto de esas nuevas bases.

Ejercicio 8. *Sea V el conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$ y que consideramos como grupo abeliano con la operación suma de matrices.*

(81) Comprobar que V tiene una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(82) Probar que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales entre V, y el espacio $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de todos los endomorfismos de $\mathbb{R}^2$. ¿Que propiedades más tiene ese isomorfismo?

(83) Demostrar que el siguiente conjunto de matrices es un base de V:

$$B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(84) Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to V$ definida por:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y & x+z \\ y+2z & x-2z \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base B de V.

Ejercicio 9. *Sea V el conjunto de todos los polinomios en una indeterminada y con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir $V = \mathbb{R}[\mathsf{x}]$. Consideramos V como grupo abeliano con la operación suma de polinomios.*

(91) Probar que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(92) Calcular una base de V. ¿Es V de dimensión finita?

(93) Sea $f : V \to V$ enviando $p(\mathsf{x}) \mapsto p(\mathsf{x}) - p'(\mathsf{x})$, donde $p'(\mathsf{x})$ es el polinomio derivado de $p(\mathsf{x})$. Probar que f es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal y calcular su núcleo. ¿Es f un monomorfismo?

Ejercicio 10. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que, respecto de la bases canónica, tiene asociada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Hallar las dimensiones del núcleo y la imagen de f dependiendo de los valores que toman $a, b \in \mathbb{R}$.*

Ejercicio 11. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cuya dimensión es: $dim_{\mathbb{K}}(V) = 4$; llamase $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a una base de V. Determinar un endomorfismo de V, $f : V \to V$, tales que, siendo el rango de f,* $\operatorname{rank}(f) = 2$, *sea además* $(1^o)\operatorname{rank}(f \circ f) = 2$, $(2^o)\operatorname{rank}(f \circ f) = 1$, $(3^o)\operatorname{rank}(f \circ f) = 0$.

Ejercicio 12. *Consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ de todas las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de $\mathbb{R}^3$ hacia $\mathbb{R}$.*

(121) Determinar una base de V. ¿Tiene V dimensión finita?

(122) Comprobar que el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es linealmente independiente en V, donde los φ_i, $i = 1, 2, 3$ vienen definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\varphi_1(x, y, z) = 2x - y + z,\ \varphi_2(x, y, z) = x + y,\ \varphi_1(x, y, z) = x - 3z.$$

Ejercicio 13. *Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $\mathscr{E}(V)$ el $\mathbb{k}$-espacio vectorial de todas las aplicaciones de lineales de V hacia V. Un endomorfismo $p \in \mathscr{E}(V)$ se dice que es* un proyector *si se tiene que $p = p^2$.*

(131) *Supongamos que V se descompone como suma directa $V = U \oplus W$ y denotaremos por $\pi : V \to U$ el epimorfismo canónico dado por la proyección de V sobre U paralelamente a W, y por $\tau : U \to V$ el monomorpfismo canónico. Demuestre que $\tau \circ \pi$ es un proyector.*

(132) *Demuestre que para cualquier $f \in \mathscr{E}(V)$ se tiene las siguientes equivalencias:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Img}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) \,=\, \{0\} &\iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2). \\ V \,=\, \operatorname{Img}(f) + \operatorname{Ker}(f) &\iff \operatorname{Img}(f) = \operatorname{Img}(f^2). \end{aligned}$$

¿Son ciertas esas equivalencias para un proyector?

Ejercicio 14. *Para cada una de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \\ -3 & 0 & -9 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}).$$

(141) *Calcule el polinomio característico de A y determine sus valores propios.*

(142) *Describe las ecuaciones paramétricas de los subespacios vectoriales propios de A.*

(143) *Determine las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada valor propio.*

(144) *Estudia si A es diagonalizable o no.*

Ejercicio 15. *Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ el endomorfismo del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$ definido de la forma siguiente:*

$$f(x, y, z) \,=\, (2y + z, \frac{3}{2}y, \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z).$$

(151) *Calcular la matriz $mat(f)$ asociada a $f$respecto de la base canónica.*

(152) *Calcular el espectro de f así como los subespacio propios de f.*

(153) *Estudia si es diagonalizable la matriz $mat(f)$.*

Ejercicio 16. *Consideramos $V := \operatorname{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ hacia $\mathbb{R}$, de manera canónica como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

(161) *Demuestre que las siguientes familias de vectores de V generan el mismo subespacio vectorial*

$$\Big\{\big(x \longmapsto Cos(nx)\big)\Big\}_{n\,\in\,\mathbb{N}}, \quad \Big\{\big(x \longmapsto Cos^n(x)\big)\Big\}_{n\,\in\,\mathbb{N}}.$$

(162) *Compruebe que las siguientes familias de vectores de V son linealmente independientes:*

$$(i) \Big\{\big(t \longmapsto |t-a|\big)\Big\}_{a\,\in\,\mathbb{R}} \qquad (ii) \Big\{\big(t \longmapsto t^a e^{bt}\big)\Big\}_{a\,\in\,\mathbb{R}_+,\, b\,\in\,\mathbb{R}} \qquad (iii) \Big\{\big(t \longmapsto Cos(at)\big)\Big\}_{a\,\in\,\mathbb{R}_+}$$

$$(iv) \Big\{\big(x \longmapsto Sen(at)\big)\Big\}_{a\,\in\,\mathbb{R}_+\setminus\{0\}} \qquad (v) \Big\{\big(t \longmapsto Sen^n(t)\big)\Big\}_{n\,\in\,\mathbb{N}}$$

Cos y Sen denotan las funciones coseno y seno.

Ejercicio 17. *Sea $V = \mathbb{R}[X]_n$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado inferior o igual a n. Consideramos la siguiente aplicación*

$$\psi : V \longrightarrow V, \quad \Big(P(X) \longmapsto \psi(P(X)) = (X+1)(X-3)P'(X) - XP(X)\Big)$$

(171) Sea $P(X)$ un vector propio de ψ, demuestre que grado$(P(X)) \leq 1$.

(172) Deduce los valores y vectores propios de ψ.

Ejercicio 18. *Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones con variables en $\mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x + \sqrt{2}y - z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

(181) Comprobar que el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones (1) *es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Tal espacio se le denota por V.*

(182) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z) \;=\; (2x - y + z,\, x + \sqrt{2}y - z,\, x + 2y + 2z)$$

¿Que relación hay entre f y el subespacio V de las soluciones del sistema (1)*?*

(183) Calcular la matriz $mat(f)$ de f respecto de la base canónica y su rango $\mathrm{rank}(mat(f))$.

(184) Estudia si es diagonalizable la matriz $mat(f)$.

Ejercicio 19. *Consideramos la siguiente sucesión de números reales $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la recurrencia*

$$u_{n+3} \;=\; -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n, \quad \Big(\textit{los valores } \; u_0, u_1, u_2 \; \textit{ vienen dados}\Big)$$

Sea $X_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^3$ para $n \in \mathbb{N}$.

(191) Demuestre que existe una matriz A tales que $X_{n+1} = AX_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(192) Estudia si A es diagobalizable.

(193) Calcule A^n y deduce u_n en función de u_0, u_1, u_2 y de n.

(194) Precise la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} u_{n+3} \;=\; -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n \\ u_0 = 1,\; u_1 = 0,\; u_2 = -1. \end{cases}$$

Ejercicio 20. *Sea $V = \mathbb{R}[X]_4$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado inferior o igual a 4. Consideramos la siguiente aplicación*

$$f : V \longrightarrow V, \quad \Big(P(X) \longmapsto f(P(X)) = X(X-1)P'(X) - 4XP(X)\Big)$$

(201) *Verifique que f es un endomprfismo de V.*

(202) *Sea $\mathcal{B} = \{e_1 = 1 = X^0, e_2 = Xe_3 = X^2, e_4 = X^3, e_5 = X^4\}$ la base canónica de V. Calcule la matriz A asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$.*

(203) *Estudia si A es diagonalizable.*

Ejercicio 21. *Sea $V = \mathbb{R}[X]_n$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado inferior o igual a n, y sea ϕ la aplicación definida por:*

$$\phi : V \longrightarrow V, \quad \Big(P(X) \longmapsto \phi(P(X)) = (X-1)P'(X)\Big)$$

Determine la matriz de ϕ respecto de la base canónica de V y demuestre que ϕ es diagonalizable.

Ejercicio 22. *Nos proponemos a resolver la ecuación diferencial:*

$$y''' - y'' + y' - y \,=\, 0. \tag{2}$$

Denotaremos por y la función con variable t, la solución de esa ecuación et consideramos el vector $Z(t) = \big(y(t), y'(t), y''(t)\big)$.

(231) *Demuestre que existe una matriz A tales que $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.*

(232) *Calcule el polinomio característico de A.*

(233) *Diagonalize A y resuelve el sistema diferencial $\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t)$.*

(234) *Deduce la forma general de las soluciones de la ecuación diferencial (2).*

(235) *Precise si verifique el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y \,=\, 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

Ejercicio 23. *Consideramos la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1- & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con entradas en $\mathbb{R}$ y sea ϕ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociado a A en la base canónica.*

(231) *Verifique que A no es diagonalizable.*

(232) *Encuentre dos vectores propios de A linealmente independientes y complete esa base a una base de $\mathbb{R}^3$.*

(233) *Escribe la matriz de ϕ en esa base.*

(234) * *Se considera el sistema diferencial: $\frac{d\mathsf{x}}{dt} = A\mathsf{x}$, donde $\mathsf{x} = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$.*

Ejercicio 24. *Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión $n \neq 0$ y $f \in \mathscr{L}(V)$ un endomoprfismo de V. Supongamos que exista un vector $v \in V$ para el cual la familia de vectores $\{v, f(v), f^2(v), \cdots, f^{n-1}(v)\}$ es una base de V. Denotemos $W = \{g \in \mathscr{L}(V) |\, f \circ g = g \circ f\}$.*

(241) *Compruebe que W es un $\Bbbk$-subespacio vectorial de $\mathscr{L}(V)$.*

(242) Demuestre que W es el subespacio $\mathscr{L}(\{v, f(v), f^2(v), \cdots, f^{n-1}(v)\})$ generado por el conjunto $\{v, f(v), f^2(v), \cdots, f^{n-1}(v)\}$.

(243) Determine la dimensión de W.

Ejercicio 25. *Supongamos que un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V se descompone como suma directa $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ de subespacios. Denotemos por $F_i = \{f \in \mathscr{L}(V) | \operatorname{Img}(f) \subset V_i\}$, $i = 1, \cdots, r$. Demuestre que $\mathscr{L}(V)$ se descompone como suma directa $\mathscr{L}(V) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ de subespacios vectoriales.*

Ejercicio 26. *Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita.*

(261) Demuestre que existe $f \in \mathscr{L}(V)$ tal que $\operatorname{Img}(f) = \operatorname{Ker}(F)$ si y solamente si la dimensión de V es par.

(262) Supongamos que existe $f \in \mathscr{L}(V)$ tales que

$$\forall v \in V,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \ \textit{tales que}\ \ f^n(v) = 0.$$

Comprueba que existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tale que $f^N = 0$ (la compsición de f consigo mismo N-veces es cero).

Ejercicio 27. *Sea A una matriz cuadrara con entradas en $\mathbb{C}$*

(271) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \ \textit{es diagonalizable} \ \Leftrightarrow A \ \textit{es diagonalizable.}$$

(272) Compruebe que

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \ \textit{es diagonalizable} \ \Leftrightarrow A = 0$$

(273) A es diagonalizable si y solamente si A^2 es diagonalizable y $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$.
$\big(\operatorname{Ker}(B) = \{v \in \mathbb{C}^n | \, Bv = 0\}\big)$