
APELLIDOS: GRUPO:
NOMBRE: D.N.I.:

ALEM, Convocatoria de Septiembre
14 de septiembre de 2016

1. Sean $f, g: \mathbb{Z}_{51} \rightarrow \mathbb{Z}_{51}$ las aplicaciones dadas por $f(x) = 31x + 33$ y $g(x) = 33x + 31$.
Estudia si f y g son o no inyectivas y sobreyectivas. ¿Alguna de las aplicaciones tiene inversa?
2. Sea $X = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y R la relación de equivalencia en X definida por:

$$xRy \quad \text{si} \quad (x^2 - y^2) \text{ es múltiplo de } 9$$

Calcula el conjunto cociente, dando explícitamente todos sus elementos.

3. Calcula los números que hay entre 20000 y 30000 que acaben en 39, al escribirlos en base 4 acaban en 13 y al escribirlos en base 8 acaban en 27.
4. Da tres soluciones de la ecuación diofántica $15x + 18y + 20z = 33$. En una de ellas, x debe ser mayor que 10, en otra y debe ser menor que 5 y en la tercera, tanto y como z deben ser mayores que 15.
5. Dados los polinomios $p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 2$ y $q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2$ con coeficientes en \mathbb{Z}_3 :
- Calcula $\text{mcd}(p(x), q(x))$.
 - Calcula las raíces de $p(x)$.
 - Encuentra una factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles.
6. Tenemos un grupo de 10 personas, de las que 6 son hombres y 4 son mujeres. Elegimos 4 de ellas:
- ¿De cuántas formas distintas podemos hacer la elección?
 - ¿En cuántas de ellas hay más mujeres que hombres?
 - ¿En cuántas hay un número par de hombres?
7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_3

$$\begin{array}{rrcr} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 2 \\ & & 2y & + & (a+1)z & = & 1 \end{array}$$

estudia si es compatible o incompatible según el parámetro a .

Si para $a = 0$ es compatible, resuélvelo.

8. Sea $B = \{(1, 2, 3); (3, 2, 1); (4, 2, 3)\}$ un subconjunto de $(\mathbb{Z}_5)^3$ y sea B_c la base canónica de dicho espacio vectorial.
- Comprueba que B es una base.
 - Calcula las matrices del cambio de base de B a B_c y de B_c a B .
 - Calcula las coordenadas del vector $v = (3, 4, 2)$ en la base B .
9. Sea $f: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal definida como

$$f(x, y, z) = (2x - y + 3z, 4x + 3y - z, 3x + y + z)$$

- Calcula la matriz de f en la base canónica.
 - Calcula una base del núcleo de f .
 - Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio $\text{Im}(f)$.
10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$$

estudia si A es o no diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal D y di cuál es la matriz D .