TEMA 5

Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Comprueba que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes ¿Cuáles se pueden escribir en función de los demás?

$$\{v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,0,1), v_4 = (1,0,2)\}$$

Ejercicio 2. Estudia si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}_2[x]$:

1. $\{p(x) = x + x^2,\ q(x) = -x - x^2\}$,
2. $\{1 + 2x + 3x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 + x - x^2,\ x + 2x^2\}$,
3. $\{p_1(x) = x + 2x^2,\ p_2(x) = 1 + x + 2x^2,\ p_3(x) = 2 + 2x + x^2\}$.

Encuentra en todos los casos un subconjunto con el mayor némero posible de vectores linealmente independientes.

Ejercicio 3. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

1. En $\mathbb{Q}^4$, $\mathbb{Z}_2^4$, $\mathbb{Z}_3^4$, $\mathbb{Z}_5^4$ y $\mathbb{Z}_7^4$: $(3,-1,-4,0)$, $(0,1,8,-1)$, $(3,-1,5,4)$, $(0,0,3,3)$.
2. $1 - x$ y x en $\mathbb{R}_2[x]$.
3. En $\mathbb{Q}_3[x]$ y $(\mathbb{Z}_5)_4[x]$: $-x$, $x^2 - 2x$, $3x + 5x^2$.
4. En $(\mathbb{Z}_3)_3[x]$: $2x$, $x^3 - 3$, $1 + x - 4x^3$, $x^3 + 18x - 9$.
5. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Comprueba que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base y halla las coordenadas del vector x en dicha base para cada uno de los siguientes casos:

1. $$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,0,1) \\ e_2 = (1,2,2) \\ e_3 = (0,1,1) \end{array}\right\} x = (1,0,2)$$

2. $$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,1,1,1) \\ e_2 = (0,1,1,1) \\ e_3 = (0,0,1,1) \\ e_4 = (0,0,0,1) \end{array}\right\} x = (1,0,1,0)$$

Da también las matrices de cambio de base.

Ejercicio 5. Para las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{v_1 = (4,0,7), v_2 = (2,1,1), v_3 = (3,1,3)\},$$

$$B' = \{v_1' = (1,0,2), v_2' = (4,1,5), v_3' = (1,0,3)\}$$

calcula las matrices de cambio de base.

Ejercicio 6. Sea $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con

$$w_1 = (1,0,0,-1), w_2 = (0,1,-1,0), w_3 = (0,1,0,-1), w_4 = (0,1,1,1).$$

Demuestra que B es una base de $\mathbb{Z}_{11}^4$. Sea $x = -3(1,2,0,0) + 2(-1,0,1,1) + (0,0,-2,1) - 2(-1,0,-1,0)$. Calcular las coordenadas de x respecto de la base B. Calcula las matrices de cambio de base $M_{B_C \to B}$ y $M_{B \to B_C}$. Si $B' = \{(1,2,0,0), (-1,0,1,1), (0,0,-2,1), (-1,0,-1,0)\}$, demuestra que B' es una base de $\mathbb{Z}_{11}^4$ y calcula $M_{B \to B'}$.

Ejercicio 7. Estudia si son o no subespacios los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

1. $W = \{(a,b,a+b) \in \mathbb{R}^3 / \; a,b \in \mathbb{R}\}$
2. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \; a+b+c = 1\}$
3. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \; a^2+b^2+c^2 = 0\}$
4. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \; a^2-b^2 = 0\}$

Ejercicio 8. Determina si los siguientes conjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

1. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \;$ A tiene inversa $\}$
2. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \; A = -2A^t\}$

Ejercicio 9. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos $H \subseteq V$ son además subespacios vectoriales?

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy
3. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_5)$; $H = \{D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_5) \mid D$ es diagonal$\}$
4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_7)$; $H = \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_7) \mid T$ es triangular superior$\}$
5. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$; $H = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \mid S$ es simétrica$\}$
6. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & c \end{pmatrix}\right\}$.
7. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2) \mid A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
8. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
9. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{11})$; $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{11}) \mid \text{rango}(A) = 1\}$
10. $V = (\mathbb{Z}_5)_4[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_5)_4[x] \mid gr(p) = 4\}$.
11. $V = \mathbb{Q}_4[x]$; $H = \{p \in \mathbb{Q}_4[x] \mid p(0) = 0\}$.
12. $V = (\mathbb{Z}_2)_n[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_2)_n[x] \mid p(0) = 1\}$.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$ y sea $H_1 = \{x \in \mathbb{Q}^m \mid Ax = 0\}$; muestra que H_1 es un subespacio de $\mathbb{Q}^m$. Sea $H_2 = \{x \in \mathbb{Q}^m \mid Ax \neq 0\}$; muestra que H_2 no es un subespacio de $\mathbb{Q}^m$.

Ejercicio 11. Halla las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por los vectores $(1,1,0), (0,1,1)$.

Ejercicio 12. Completa $\{(1,1,0),(2,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 13. Calcula las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio $U_1 + U_2$, donde

$$U_1 = L\big((1,1,0),(2,0,0)\big), \quad U_2 = L\big((0,0,1),(2,1,3)\big).$$

¿Es $\mathbb{Z}_7^3 = U_1 \oplus U_2$?

Ejercicio 14. Para cada una de las siguientes parejas de subespacios de $\mathbb{R}4$ calcula $U \cap W$ y $U + W$.

1.
$$U = \{(a,b,-b,a)/\ a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{(a,b,0,c)/\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

2.
$$U \equiv \left\{\begin{array}{lcllll} x_1 & = & \lambda & & \\ x_2 & = & 0 & & \\ x_3 & = & \lambda & +\mu & \\ x_4 & = & \lambda & +\mu & +\gamma \end{array}\right.$$
$$W \equiv \left\{\begin{array}{lcllll} x_1 & = & \lambda & +\mu & +\gamma \\ x_2 & = & \lambda & +\mu & \\ x_3 & = & 0 & & \\ x_4 & = & \lambda & & \end{array}\right.$$

3.
$$U = L((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$$
$$W \equiv \left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & +x_2 & & -x_4 & =0 \\ & x_2 & +x_3 & & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & =0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 15. Encuentra la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(1,2),(0,1),(-1,3)\}$ en $\mathbb{Z}_5^2$
2. $\{1+x+x^2, 2-x^2+x^3, 1-x-2x^2+x^3, 1+3x+4x^2-x^3\}$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 16. Dada la base $B = \{(1,0,1,1);\ (0,1,1,0);\ (1,1,1,1);\ (0,1,0,1)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^4$, calcula las coordenadas del vector $(0,0,0,1)$ en la base B.

Ejercicio 17. Sea $V = \mathbb{Z}_3^4$ y sean los subespacios vectoriales

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in V \;\middle|\; \begin{array}{r} x-y-z=0 \\ t=0 \end{array} \right\} \qquad W = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,1) \rangle.$$

1. ¿Cuántos elementos hay en W?
2. Calcula bases de $U+W$ y $U \cap W$.
3. Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas (o implícitas) de $U+W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 18. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(2,3,1)$ y $(1,4,3)$, y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\}$.

Calcula unas ecuaciones cartesianas o implícitas del subespacio $U+W$.