ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

22 de Enero de 2019

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo:**_____

Ejercicio 1. *Calcula todas las soluciones del siguiente sistema de congruencias*

$$\begin{array}{rcll} 34x & \equiv & 18 & \textit{mód } 76 \\ 33x & \equiv & 15 & \textit{mód } 78 \\ 32x & \equiv & 12^{938} & \textit{mód } 79 \end{array}$$

comprendidas entre -30000 *y* 30000

Ejercicio 2.

Sea x *un número de dos cifras. Si le restamos* 6 *y el resultado lo expresamos en hexadecimal, obtenemos las mismas cifras que* x *pero en orden inverso. ¿Cuál es el número* x*?*

Ejercicio 3. *Sean* $m(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ *y* $q(x) = x^5 + 2x^3 + 2$ *dos polinomios con coeficientes en* $\mathbb{Z}_3$*, y sea* $A = \mathbb{Z}_3[x]_{m(x)}$*.*

1. *Calcula* $mcd(m(x), q(x))$*.*
2. *Factoriza* $m(x)$ *como producto de irreducibles.*
3. *Encuentra, si es posible, un elemento* $\alpha \in A$ *tal que* $\alpha \cdot (2x^2 + 2x + 2) + x^3 + x + 1 = x^4 + 2$*.*

Ejercicio 4. *Tenemos un grupo formado* 15 *personas,* 8 *de ellas mujeres y el resto hombres.*

- *¿De cuántas formas podemos elegir* 8 *personas de estas* 15*?*
- *¿De cuántas formas podemos elegir* 8 *personas, de forma que haya más mujeres que hombres?*
- *Necesitamos elegir* 4 *parejas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo? (una pareja está formada por dos personas, sin mirar si son hombres o mujeres).*
- *Necesitamos elegir* 4 *parejas, cada pareja formada por un hombre y una mujer. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?*

Ejercicio 5. *Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & ay & + & z & = & -1 \\ -2x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & ay & + & (a+2)z & = & a+2 \end{array}$$

Determina, en función del parámetro a*, cuándo es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

Ejercicio 6. *Sea* $B_1 = \{(1,-1,0),\ (0,-1,1),\ (1,1,-1)\}$*, y sea* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Comprueba que* B_1 *es una base de* $\mathbb{R}^3$

Sea B_2 *una base de* $\mathbb{R}^3$ *tal que la matriz del cambio de base de* B_2 *a* B_1 *es la matriz* P*.*

- *Calcula la base* B_2*.*
- *Si* u *el vector cuyas coordenadas en* B_1 *son* $(1,1,1)$*. Calcula el vector* u *y sus coordenadas en* B_2*.*

Ejercicio 7. *Sea* U *el subespacio de* $(\mathbb{Z}_2)^4$ *generado por los vectores* $(1,1,1,0),\ (0,1,1,1),\ (1,0,0,1)$ *y* W *el subespacio de* $(\mathbb{Z}_2)^4$ *de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

Calcula las ecuaciones cartesianas y una base de $U + W$*.*

Ejercicio 8. *De una aplicación lineal* $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ *sabemos que* $(2,3,1)$ *pertenece al núcleo (kernel) de* f*,* $(1,2,4)$ *es un vector propio de valor propio* 2 *y* $f(1,1,1) = (4,0,3)$.

- *Calcula la matriz de* f *en la base canónica.*
- *Calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio* $Im(f)$.

Ejercicio 9. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Estudia si A *es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula una matriz regular* P *tal que* $P^{-1} \cdot A \cdot P$ *sea una matriz diagonal.*

Calcula A^{20}.