ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

12 de Diciembre de 2019

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo F**

Ejercicio 1. *Tenemos una urna con* 6 *bolas rojas,* 8 *bolas azules y* 9 *bolas verdes.*

1. *Si extraemos* 6 *bolas, ¿cuántas extracciones distintas podemos hacer?*
2. *¿En cuantas de las extracciones del apartado anterior hay al menos una bola de cada color?*
3. *¿En cuántas, además, hay más bolas verdes que rojas?*
4. *Ahora extraemos* 10 *bolas. ¿Cuántas extracciones distintas hay?*

Solución:
Vamos a llamar x al número de bolas rojas, y al número de bolas azules y z al número de bolas verdes.

1. Cada extracción de bolas se corresponde con una solución de la ecuación $x+y+z=6$. El número de soluciones naturales de esta ecuación es el número de combinaciones con repetición de tres elementos (cada uno de los tipos de bolas) tomados de 6 en 6. Este número es $\binom{3+6-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$.

   Vamos a escribir las 28 soluciones y debajo de ellas, la correspondiente extracción de bolas:

6 0 0	5 1 0	5 0 1	4 2 0	4 1 1	4 0 2	3 3 0
$RRRRRR$	$RRRRRA$	$RRRRRV$	$RRRRAA$	$RRRRAV$	$RRRRVV$	$RRRAAA$
3 2 1	3 1 2	3 0 3	2 4 0	2 3 1	2 2 2	2 1 3
$RRRAAV$	$RRRAVV$	$RRRVVV$	$RRAAAA$	$RRAAAV$	$RRAAVV$	$RRAVVV$
2 0 4	1 5 0	1 4 1	1 3 2	1 2 3	1 1 4	1 0 5
$RRVVVV$	$RAAAAA$	$RAAAAV$	$RAAAVV$	$RAAVVV$	$RAVVVV$	$RVVVVV$
0 6 0	0 5 1	0 4 2	0 3 3	0 2 4	0 1 5	0 0 6
$AAAAAA$	$AAAAAV$	$AAAAVV$	$AAAVVV$	$AAVVVV$	$AVVVVV$	$VVVVVV$

2. Ahora sólo tenemos que contar cuántas extracciones distintas de tres bolas podemos hacer (pues las otras tres bolas son fijas: una roja, una azul y una verde). Tenemos entonces que contar soluciones naturales de la ecuación $x+y+z=3$, y hay $\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$. Estas 10 soluciones son:

   $$3\,0\,0 \quad 2\,1\,0 \quad 2\,0\,1 \quad 1\,2\,0 \quad 1\,1\,1 \quad 1\,0\,2 \quad 0\,3\,0 \quad 0\,2\,1 \quad 0\,1\,2 \quad 0\,0\,3$$

   que se corresponden con las siguientes extracciones:

   $RRRRAV \quad RRRAAV \quad RRRAVV \quad RRAAAV \quad RRAAVV \quad RRAVVV \quad RAAAAV \quad RAAAVV \quad RAAVVV \quad RAVVVV$

3. De estas vemos que hay 4 ($RRAVVV$, $RAAAVV$, $RAAVVV$ y $RAVVVV$) en las que hay más bolas verdes que rojas.

4. En primer lugar, calculamos cuántas soluciones naturales tiene la ecuación $x+y+z=10$. Este número es $\binom{10+3-1}{3-1}=66$.

   Ahora, de esas soluciones quitamos aquellas que no se corresponden con extracciones válidas. Para ver cuántas hay, distinguimos tres casos:

   - $x\geq 7$. Hay $\binom{3+3-1}{3-1}=10$.
   - $y\geq 9$. Hay $\binom{1+3-1}{3-1}=3$.

- $z \geq 10$. Hay $\binom{0+3-1}{3-1} = 1$.

Luego de las 66 soluciones de la ecuación hay $10 + 3 + 1 = 14$ soluciones que no se corresponden con ninguna extracción posible. El número total de extracciones es entonces $66 - 14 = 52$.

Las 66 soluciones de la ecuación $x + y + z = 10$ son:

10 0 0	9 1 0	9 0 1	8 2 0	8 1 1	8 0 2	7 3 0	7 2 1	7 1 2	7 0 3	6 4 0
6 3 1	6 2 2	6 1 3	6 0 4	5 5 0	5 4 1	5 3 2	5 2 3	5 1 4	5 0 5	4 6 0
4 5 1	4 4 2	4 3 3	4 2 4	4 1 5	4 0 6	3 7 0	3 6 1	3 5 2	3 4 3	3 3 4
3 2 5	3 1 6	3 0 7	2 8 0	2 7 1	2 6 2	2 5 3	2 4 4	2 3 5	2 2 6	2 1 7
2 0 8	1 9 0	1 8 1	1 7 2	1 6 3	1 5 4	1 4 5	1 3 6	1 2 7	1 1 8	1 0 9
0 10 0	0 9 1	0 8 2	0 7 3	0 6 4	0 5 5	0 4 6	0 3 7	0 2 8	0 1 9	0 0 10

Las diez en las que $x \geq 7$ son:

10 0 0	9 1 0	9 0 1	8 2 0	8 1 1	8 0 2	7 3 0	7 2 1	7 1 2	7 0 3

Las tres en las que $y \geq 9$ son 1 9 0, 0 10 0, 0 9 1. Y la única en la que $z \geq 10$ es 0 0 10.

Ejercicio 2. *Consideramos las letras de la palabra CANTANTE*

1. *¿De cuántas formas las podemos ordenar?*
2. *¿En cuántas ordenaciones aparecen juntas la C y la E?*
3. *¿En cuántas ordenaciones aparecen juntas la E y una A?*
4. *¿En cuántas no hay juntas dos vocales?*

Solución:

1. Tenemos 8 letras que queremos ordenar. Estas letras son AACENNTT. El número de formas de ordenarlas es $\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040$.

2. Para esto distinguimos dos casos:

   - La C va delante de la E (es decir, en la ordenación aparece la secuencia CE). Consideramos una nueva letra X que representa al grupo CE. Lo que tenemos que ordenar es entonces las letras AANNTTX. El número de formas de hacerlo es $\frac{7!}{2!2!2!1!} = 630$.
   - La E va delante de la C. Se procede igual que en el caso anterior, luego tenemos un total de 630 ordenaciones en las que aparece la secuencia EC.

   Ahora sólo hay que sumar lo que hemos obtenido analizando cada uno de los casos. El número total de ordenaciones en que aparecen juntas la C y la E es entonces $630 + 630 = 1260$.

3. Al igual que antes, distinguimos dos casos:

   - Tenemos la secuencia AE. Tenemos que ordenar las letras de ACNNTTX. El número de ordenaciones es $\frac{7!}{2!2!} = 1260$.
   - Tenemos la secuencia EA. Hay también 1260 ordenaciones.

   Pero ahora no basta con sumar los dos resultados anteriores, pues una ordenación como AEACNNTT la habríamos contado dos veces. Hemos entonces de ver en cuántas ordenaciones aparece la secuencia AEA. Lo que tenemos que ordenar entonces son las letras CNNTTX, y esto se puede hacer de $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

   El número total de ordenaciones en que están juntas la E y una A es entonces $1260 + 1260 - 180 = 2340$.

4. Podemos hacer este apartado de dos formas distintas:

   - Contamos en cuántas ordenaciones aparecen dos vocales juntas. El resultado que obtengamos se lo restamos a 5040.

     Vamos a llamar Y_1 al conjunto de todas las ordenaciones que tienen la secuencia AA, Y_2 el conjunto de ordenaciones que tienen la secuencia AE e Y_3 el conjunto de ordenaciones que tienen la secuencia EA. Es claro entonces que $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ es el conjunto de ordenaciones que tienen dos vocales juntas. Para hallar $|Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3|$ usamos el principio de inclusión-exclusión.

     - $|Y_1| = \frac{7!}{2!2!} = 1260$, pues tenemos que ordenar las letras CENNTTX.
     - $|Y_2| = |Y_3| = 1260$, ya calculados anteriormente.
     - $Y_1 \cap Y_2$ son las ordenaciones en las que aparece la secuencia AAE. Lo que tenemos entonces es que ordenar las letras CNNTTX, y esto puede hacerse de $\frac{6!}{2!2!} = 180$.
     - $Y_1 \cap Y_3$ son las ordenaciones en las que aparece la secuencia EAA. Hay también 180.
     - $Y_2 \cap Y_3$ es el conjunto con las ordenaciones en que aparece la secuencia AEA. Hay 180.
     - $Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \emptyset$.

     Con esto, tenemos que:

     $$\begin{aligned} |Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3| &= |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| - |Y_1 \cap Y_2| - |Y_1 \cap Y_3| - |Y_2 \cap Y_3| + |Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3| \\ &= 1260 + 1260 + 1260 - 180 - 180 - 180 + 0 = 3240. \end{aligned}$$

     Por tanto, el número de ordenaciones en que no aparecen dos vocales juntas es $5040 - 3240 = 1800$.

- Contamos directamente cuántas ordenaciones no tienen dos vocales juntas. El proceso de elegir una ordenación de estas características lo dividimos en 3 etapas:
  - Elegimos las posiciones en que van a ir las vocales y las consonantes. Puesto que tenemos 3 vocales, vamos a denotar por x al número de consonantes que irán a la izquierda de todas las vocales, y el número de consonantes que irán entre la primera y segunda vocales, z el número de consonantes que irán entre la segunda y tercera vocales y t el número de consonantes que irán a la derecha de las tres vocales. Entonces, $x+y+z+t=5$ (pues hay 5 consonantes), $y \geq 1$ (pues si valiera 0 la primera y segunda vocales irían juntas), y $z \geq 1$ (por un motivo análogo).
    El número de soluciones naturales de la ecuación $x+y+z+t=5$, con $y,z \geq 1$ es $\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$.
  - Una vez sabemos en que posiciones irán las vocales y las consonantes, ordenamos las vocales. Esto lo podemos hacer de $\frac{3!}{2!} = 3$ formas distintas.
  - Ahora ordenamos las consonantes. Esto se puede hacer de $\frac{5!}{2!2!} = 30$ formas distintas.

  Para ver de cuántas formas se pueden ordenar las letras sin que haya dos vocales juntas multiplicamos cada uno de los resultados parciales. El resultado final es $20 \cdot 3 \cdot 30 = 1800$.

Ejercicio 3. *Estudia para qué valores $a \in \mathbb{Z}_{11}$ las dos sistemas de ecuaciones siguientes tienen las mismas soluciones:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & & & + & 10z & + & 2t & = & 3 \\ 3x & + & y & + & az & + & 2t & = & 5 \\ 4x & & & + & 8z & + & t & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 4y & + & 8z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & y & & & + & t & = & 5 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & + & 6t & = & 10 \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, resolvemos el primer sistema de ecuaciones. Para eso, calculamos la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(9) \\ E_{31}(8)}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{E_{12}(7) \\ E_{32}(6)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{13}(3) \\ E_{23}(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí vemos que el sistema es compatible indeterminado y las soluciones del sistema son de la forma:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 9\alpha \\ y & = & 4 & + & 4\alpha \\ z & = & & & \alpha \\ t & = & 10 & & \end{array}$$

Ahora podemos proceder de varias formas:

- Puesto que el sistema tiene 11 soluciones elegimos una de ellas (en la que $z \neq 0$). Por ejemplo, $x = 10$, $y = 8$, $z = 1$, $t = 10$ (que se ha elegido tomando $\alpha = 1$). Y ahora, calculamos a para que sea solución del primer sistema de ecuaciones. Es decir:

  $$3 \cdot 10 + 8 + a \cdot 1 + 2 \cdot 10 = 5 \Longrightarrow 58 + a = 5 \Longrightarrow 3 + a = 5 \Longrightarrow a = 2.$$

  Esto nos dice que de haber un valor de a para el que ambos sistemas tengan las mismas soluciones, este debe ser $a = 2$.

- Puesto que tenemos las soluciones del segundo sistema, sustituimos en el primero:

  $$\begin{array}{l} 5(1+9\alpha) + 10\alpha + 2 \cdot 10 = 5 + 45\alpha + 10\alpha + 20 = 25 + 55\alpha = 3. \\ 3(1+9\alpha) + 4 + 4\alpha + a\alpha + 2 \cdot 10 = 3 + 27\alpha + 4 + 4\alpha + a\alpha + 20 = 27 + (31+a)\alpha = 5 + (9+a)\alpha. \\ 4(1+9\alpha) + 8\alpha + 10 = 4 + 36\alpha + 8\alpha + 10 = 14 + 44\alpha = 3. \end{array}$$

  Y vemos que si $a = 2$, entonces todas las soluciones del segundo sistema de ecuaciones son soluciones del primero.

- Resolvemos el primer sistema de ecuaciones.

  $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & a & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(9)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & a & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(8) \\ E_{31}(7)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & a+5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

  $$\xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & a+5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{13}(4) \\ E_{23}(8)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

  Y vemos que si $a + 5 = 7$, es decir, $a = 2$, las matrices ampliadas de ambos sistemas tiene la misma forma escalonada reducida, luego ambos sistemas tienen las mismas soluciones.

Ejercicio 4. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *tres matrices con coeficientes reales.*

Calcula todas las matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ *tales que* $AXB = C$.

Solución:

Notemos en primer lugar que tanto A como B son matrices regulares, pues sus determinantes son distintos de cero. Tenemos entonces:

$$AXB = C \Longrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}C \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Longrightarrow IdXId = A^{-1}CB^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Por tanto, existe una matriz X que cumple lo que nos piden. Vamos a calcularla.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalmente:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -14 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 & -16 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}.$$