TEMA 2

Números naturales y números enteros (segunda parte)

Ejercicio 1.
Demuestra que para $B \geq 3$, los números $(B-1)^2$ y $2(B-1)$ se escriben en base B como ab y ba respectivamente.

Ejercicio 2. Un número escrito en base b tiene 64 cifras. ¿Cuántas cifras tiene el mismo número expresado en base b^3?.

Ejercicio 3. Sea $x = 31^{1315}$. Calcula las dos últimas cifras de la expresión de x en base 6,

Ejercicio 4.
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Demuestra que:

1. $\mathrm{mcd}(a + b, ab) = 1$,

2. $\mathrm{mcd}(a - b, ab) = 1$.

Ejercicio 5.
Prueba que si x es un número entero e impar no divisible por 3 entonces $x^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Ejercicio 6.
Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1.
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv 3 \pmod{9} \\ 3x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

Ejercicio 7. ¿Cuántos números hay entre 60000 y 90000 que terminen en 45, y que su triple de resto 97 al dividirlos por 122?

Ejercicio 8.
Calcula 5 soluciones enteras de la ecuación

$$3761373923x + 472926384y = 382734927$$

Ejercicio 9.

Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.* Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

Ejercicio 10.

Resuelve el sistema de ecuaciones en congruencias

$$\begin{cases} 5x - 7y \equiv 9 & (\text{mód } 12) \\ 2x + 3y \equiv 10 & (\text{mód } 12) \end{cases}$$

Ejercicio 11.

1. Calcula una solución entera de la ecuación

$$79257x + 78610y = 1$$

2. Encuentra el inverso (para el producto) de 79257 en $\mathbb{Z}_{78610}$.

3. Encuentra 78610^{-1} en $\mathbb{Z}_{79257}$.

4. Calcula todas las soluciones de la ecuación

$$79257x + 78610y = 10$$

Ejercicio 12.

Calcula todas las soluciones en $\mathbb{Z}$ de las ecuaciones:

1. $6x + 9y + 15z = 7$.

2. $6x + 10y + 15z = 7$.

3. $35x + 45y + 55z = 60$.

Ejercicio 13.

Resuelve en $\mathbb{Z}$ la ecuación $14x + 30y + 105z = 13$. ¿Hay alguna solución en la que y valga 15?. ¿Y en la que y valga 17?. En caso afirmativo, da una.

Ejercicio 14.

Encuentra $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que 31 sea múltiplo de $5a + 7b + 11c$.

Demuestra que si x, y, z son números enteros tales que $5x + 7y + 11z$ es múltiplo de 31, también lo son $21x + 17y + 9z$ y $6x + 27y + 7z$.

Ejercicio 15. Calcula una solución entera de $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} + \frac{z}{13} = \frac{65}{273}$.

Ejercicio 16. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que b es divisor de a y $a + 2$. Demuestra que $b = 1$ ó $b = 2$.

Ejercicio 17. La suma de dos números es 60, y su máximo común divisor vale 12. ¿Cuáles son estos dos números?

Ejercicio 18. Demuestra que si a y b son impares, entonces $a^2 + b^2$ es par pero no es múltiplo de 4.

Ejercicio 19.
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Demuestra que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$. Estudia que pasa si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$.

Ejercicio 20.
Dado un número entereo n, demuestra que $\mathrm{mcd}(8n + 3, 5n + 2) = 1$.

Ejercicio 21. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que el máximo común divisor de $35a + 57$ y $45a + 76$ vale 1 ó 19. ¿Para que valores de a es este máximo común divisor igual a 19?.

Ejercicio 22.
Demuestra que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional. Concluye que $\sqrt{75}$ es irracional.

Ejercicio 23. Demuestra que si n es par, $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$, mientras que si n es impar, entonces $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

Ejercicio 24.
Sea $n = 2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^8 \cdot 7^{10} \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 37^{10}$ (un número de 47 cifras).

1. ¿Cuántos divisores positivos tiene n?
2. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 11^2 \cdot 37^2$?
3. ¿Cuántos son cuadrados perfectos?
4. ¿Cuántos son cuadrados perfectos y divisibles por $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 37^2$?
5. ¿Cuántos son cubos perfectos?
6. ¿Cuántos son cuadrados perfectos y cubos perfectos?

Ejercicio 25. Un número entero n se dice que está escrito en *forma ternaria equilibrada* si lo tenemos expresado como

$$n = e_n \cdot 3^n + e_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots + e_1 \cdot 3 + e_0$$

donde e_i vale -1, 0 ó 1.

1. Calcula una expresión ternaria equilibrada de los números 5, -12, 35, 121, 123456.
2. Demuestra que todo número entero distinto de cero admite una única expresión ternaria equilibrada en la que $e_n \neq 0$.

Ejercicio 26. Demuestra que si p es un número primo, entonces la congruencia $x^2 \equiv 1 (\text{mód } p)$ tiene exactamente dos soluciones positivas menores que p. Estudia que pasa si p no es primo.

Ejercicio 27. ¿Cuántos ceros tiene al final el número $100!$?.

Ejercicio 28. Sea n un número natural. Demuestra que n es un cuadrado perfecto si, y sólo si, el número de divisores positivos de n es impar.

Ejercicio 29. Encuentra todas las soluciones enteras de $x^2 - y^2 = 32$.