Relación De Ejercicios del Tema III

(*Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices.*)

Ejercicio .1. *Consideramos las siguientes matrices con entradas en el cuerpo* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -4 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) *Calcular, si es posible, las siguientes matrices:*

$$AB,\ BA,\ CA,\ BC,\ DC,\ EF,\ \ y\ \ ED - 3\mathbb{I}_3,$$

donde $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es decir* $\mathbb{I}_3$ *es la matriz identidad.*

(2) *Calcular el determinante* $det(ED - 3\mathbb{I}_3)$ *y estudia si esta matriz es invertible o no, calculando su matriz inversa en su caso.*

Ejercicio .2. *Consideramos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *con entradas números reales y definimos la matriz* $B = A^2 - 5A + 6\mathbb{I}_3$.

Nota: *las operaciones anteriores, son operaciones de matrices; es decir, suma y multiplicaciones de matrices* 3.

(1) *Calcule* B *luego* AB.

(2) *Deduce que* A *no es una matriz invertible.*

(3) *Para* $n = 3, 4, 5, 6$, *expresar* A^n *en función de* $\mathbb{I}_3$, A *y* A^2.

Ejercicio .3. *Consideramos las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con entradas números reales.

(1) *Determinar los valores de* a, b *para los cuales se tiene que la igualdad* $A\,D = D\,A$.

(2) *Consérvese los valores anteriores de* a *y* b *y denota* $N = A - D$. *Calcular* N^2.

(3) *Calcule* A^n *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

(4) *Consideramos las siguientes sucesiones de números reales:*

$$\begin{cases} w_{n+1} \;=\; 2w_n \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \\ w_0 \;=\; 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{n+1} \;=\; 2v_n + w_n \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \\ v_0 \;=\; 1 \end{cases}$$

Expresar v_n *y* w_n *en función de* n.

Ejercicio .4. *Consideramos las siguientes matrices con entradas en* $\mathbb{Z}_5$.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Encuentre la forma normal de Hermite de cada una de esas matrices y calcula sus determinantes.*

(2) *Estudia cual de las matrices* P, Q *y* R *es una matriz invertible, en su caso calcule su inversa.*

Ejercicio .5. *Se considera la siguiente matriz con entradas en el cuerpo* $\mathbb{Z}_{11}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -7 \\ 8 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(1) *Calcular el determinante de* M.

(2) *Calcular la matriz inversa* M^{-1} *de* M.

(3) *Encuentra una matrix* $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_{11})$ *tales que*

$$5AM \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio .6. *Todas las matrices tienen coeficientes en* $\mathbb{Z}_{11}$.

(1) *Calcula la matriz adjunta* $Adj(M)$ *de la siguiente matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) *Efectúe los cálculos necesarios para determinar las productos* $Adj(M)\,M$ *y* $M\,Adj(M)$.

(3) *Encuentra una matriz* $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_{11})$ *tales que*

$$3BM \;=\; \begin{pmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio .7. *Calcule el rango de cada una de las siguientes matrices con entradas en* $\mathbb{Z}_{11}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & 9 \\ 1 & -5 & -3 & -7 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -5 & 10 & 1 \\ 10 & 5 & -2 & -8 & 0 & 10 \\ 7 & -4 & 2 & 1 & 8 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 7 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & -4 & -6 & 7 & 9 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 9 & -9 \\ 2 & -3 & 5 & 10 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio .8. *Encuentre la forma normal de Hermite de cada una de las siguientes matrices con entradas en* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -3 & -6 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -5 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & -2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 2 & -4 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio .9. *Sean A y B dos matrices en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que se diferencian unicamente en la primera fila. Comprueba que*

$$det(A+B) \;=\; 4\Big(det(A) + det(B)\Big).$$

Ejercicio .10. *Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq n}$ una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo cualquiera con $n \geq 1$. Demuestre que para cualquier $l, k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $k \neq l$, se tiene que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{i+j} \Delta_{lj} \;=\; 0.$$

Ejercicio .11. *Comprueba que para cualquier terna de números reales $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \;=\; 0.$$

Ejercicio .12. *Determina los escalares $t \in \mathbb{Z}_5, s \in \mathbb{Z}_7$ para los cuales las matrices*

$$A_t \;=\; \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \;\in\; M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5), \quad B_s \;=\; \begin{pmatrix} s^2-1 & 6 & -5 \\ -1 & s-2 & -1 \\ -1 & 0 & s-5 \end{pmatrix} \;\in\; M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_7).$$

sean invertibles.

Ejercicio .13 (Determinante de Van Der Monde)**.** *Sea $(a, b, c.d) \in \mathbb{R}^4$. Consideramos el determinante*

$$V \;=\; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Demuestre la siguiente igualdad:

$$V \;=\; (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

De la cual deduce el valor de V. ¿Cuales el valor de V si tomamos $a^2 = b = c = d$?

Ejercicio .14. *Sea n un número natural ≥ 1 y x una indeterminada en un cuerpo. Consideramos la siguiente sucesión de determinantes:*

$$D_1(x) = x,\ D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix},\ D_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \cdots\cdots,\ D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Calcule el valor del determinante $D_n(x)$ para cualquier $n \geq 1$.

Ejercicio .15. *Sea n un número natural ≥ 1 y consideramos el siguiente determinante (de una matriz $n \times n$)*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

(1) Calcule D_1, D_2, D_3 y D_4.

(2) Encuentre una relación de recurrencía entre D_n y D_{n-1} (para $n \geq 2$).

(3) Deduce una expresión de D_n en función de n.

Ejercicio .16. *Determinar para que valor de x se anulan los siguientes determinantes con coeficientes reales:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -1 & \sqrt{2} & 0 \\ x & x^2 & 1 \\ -4 & x & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 4 \\ x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & x+2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & x-1 & -1 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & -3 \\ 1 & x-3 & 0 & -3 \\ x^1-1 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio .17. *Determinar según los valores del parámetro real $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de las soluciones de los siguientes sistemas*

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - ay = a \end{cases},\quad \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 2 \end{cases},\quad \begin{cases} ax + (1-a)y = 1 \\ (1-a)x - ay = a \end{cases},\quad \begin{cases} ax + (1-a)y = a \\ ax + ay = a \end{cases}$$

Ejercicio .18. *Consideramos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ y con parámetro $t \in \mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{cases} x - 4y = 2 - t \\ x - y = 3 + 2t \end{cases},\quad \begin{cases} x - 5y = 2t - 1 \\ x - 6y = t - 1 \end{cases},\quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 - t \\ 4x - 4y = 3t - 1 \end{cases},\quad \begin{cases} x - 5y = 2 - t \\ 3x + 3y = 3t - 4 \end{cases}$$

Resuelve cada uno de esos sistemas y en su caso representa gráficamente el conjunto de soluciones.

Ejercicio .19. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 6 \end{cases}\quad \begin{cases} 3x - y = -1 \\ x - 6y + z = -2 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}\quad \begin{cases} x - 4y + z = -1 \\ -2x - y + 5z = 6 \\ -5x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2t+2x-3y+\ \ z=4 \\ -t+\ \ x-\ \ y-\ \ z=-4 \\ -t+2x-3y+4z=2 \\ -t+\ \ x-\ \ y+\ \ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6t+\ \ x-\ \ y+z=-5 \\ -6t+4x-6y+z=-3 \\ -3t+4x-3y-z=-1 \\ t+\ \ x-\ \ y+z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} -t+4x-2y+\ \ z=-2 \\ -t+\ \ x-\ \ y+3z=6 \\ 2t+2x-\ \ y+3z=1 \\ -t+\ \ x-\ \ y+\ \ z=-2 \end{cases}$$

En el caso de los tres primeros, intenta representar gráficamente las soluciones (si hay alguna).

Ejercicio .20. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en* $\mathbb{Z}_{11}$*:*

$$\begin{cases} 3x-8y+7z=9 \\ x-7y+8z=10 \\ x-6y+8z=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x-10y=-10 \\ 7x-\ \ y+5z=-8 \\ 4x-\ \ 3y+\ \ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-\ \ y-5z=-10 \\ -x-4y+\ \ z=-8 \\ -x-3y+7z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5t+\ \ x-4y+7z=7 \\ -t+\ \ x-5y-7z=-2 \\ -6t+4x-\ \ y+5z=-4 \\ -4t+\ \ x-3y+\ \ z=5 \end{cases} \quad \begin{cases} -t+4x-2y+\ \ z=-8 \\ -5t+3x-2y+2z=-7 \\ -3t+\ \ x-\ \ y-3z=-3 \\ 2t+\ \ x-2y+\ \ z=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} -4t+\ \ x-3y+\ \ z=-7 \\ -t+\ \ x-7y+6z=4 \\ 6t+3x-2y+\ \ z=10 \\ -t+2x-\ \ y+3z=-3 \end{cases}$$

En el caso de los tres primeros, intenta representar gráficamente las soluciones (si hay alguna).

Ejercicio .21. *Determinar según los valores de los parámetros reales* $a, b \in \mathbb{R}$*, el conjunto de las soluciones de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x+\ \ y-\ \ z=1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+\ \ y-\ \ z=b \end{cases} \quad \begin{cases} ax+(b-1)y+2z\ =\ 1 \\ ax+(2b-3)y+3z\ =\ 1 \\ ax+(b-1)y+(b+2)z=2b-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-ay+z\ =\ -b \\ -2ax-by+5z\ =\ 0 \\ -x-y+bz\ =\ a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z-2bt\ =\ -1 \\ x-(b+1)y-z-at\ =\ -b \\ x-y+az-bt\ =\ 2a-b \\ ax-by+z-t\ =\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+y+z+t\ =\ 1 \\ x+ay+z+t\ =\ b \\ x+y+az+t\ =\ b^2 \\ x+y+z+at\ =\ b^3 \end{cases}$$

Ejercicio .22. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en* $\mathbb{C}$*:*

$$\begin{cases} x-iy-iz\ =\ 1 \\ ix-y+z\ =\ 1 \\ ix+iy+iz\ =\ 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -iy+x=i-1 \\ -iy+x+z=-i \\ -iy+x+z=i-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-(4-i)y+z\ =\ i-1 \\ -2ix-y+z\ =\ i-2 \\ -x-y+3iz\ =\ 1+i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3iy+iz-it\ =\ i-4 \\ x-iy-z-it\ =\ -i+1 \\ x-y+z-it\ =\ 2 \\ ix-y+iz-t\ =\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+z-6t\ =\ i-5 \\ x-iy+iz-t\ =\ i-3 \\ ix-y-iz-t\ =\ -1 \\ x+iy+z+it\ =\ i-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-iy+z-it\ =\ -i \\ ix-y+3iz-t\ =\ 1 \\ x-iy+iz+t\ =\ 1-i \\ ix-y+z-it\ =\ -i \end{cases}$$

Ejercicio .23. *Encuentra tres números reales* α, β *y* γ *tales que para cualquier polinomio* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *de grado* ≤ 3*, se tiene la siguiente igualdad*

$$\int_2^4 P(x)dx\ =\ \alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4).$$