

Aplicaciones Lineales

Ejercicio 1. De las siguientes aplicaciones decide cuáles son lineales y cuáles no.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_1(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_2(x, y, z) = (xy, yz, -zx)$$

3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_3(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 2y)$$

4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_4(x, y) = (x + 1, y, x)$$

5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_5(x, y, z) = (x + 1, x + 2, x + 3)$$

6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f_6(x, y, z) = (x, z)$$

7. $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_7(x) = (x, 2x, 3x)$$

8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_8(x, y) = x^2 + y^2$$

Ejercicio 2. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

1. $f : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2, f(x, y) = (x + 1, y + 2).$

2. $f : V \rightarrow V', f(v) = 0.$

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(r) = r^2.$

4. $f : \mathbb{Z}_7^3 \rightarrow \mathbb{Z}_7^2, f(x, y, z) = (x + y + z, 28x + 92z).$

Ejercicio 3. Sea V un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión 4 y V' un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión 3. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ bases de V y V' . Se considera la única aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$ que verifica:

$$f(v_1) = 4v'_1 + 7v'_2 + 2v'_3$$

$$f(v_2) = -v'_1 + 3v'_2 + 9v'_3$$

$$f(v_3) = v'_2 + 2v'_3$$

$$f(v_4) = 2v'_1 - v'_2 - 8v'_3$$

Se pide:

1. Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' .
2. Calcula la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f .
3. ¿Es f una aplicación lineal inyectiva? ¿Y sobreyectiva? Justifica las respuestas.

Ejercicio 4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - z, 5x - 2y, -9x + 10y - 2z)$$

1. ¿Pertenece el vector $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ a la imagen de f ?
2. ¿Existe algún vector de la forma $(2, 5, \lambda)$ que pertenezca al núcleo de f ?
3. ¿Es f un isomorfismo de espacios vectoriales?

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2z)$. Calcula las ecuaciones implícitas y paramétricas de $N(f)$ y de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 6. Calcula la matriz asociada respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que lleva

$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 1, 2) & \text{en} & v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ u_2 = (0, 1, 1) & \text{en} & v_2 = (0, 1, -1, 1) \\ u_3 = (1, 1, 0) & \text{en} & v_3 = (0, 1, 1, 0) \end{array}$$

Calcula el núcleo y la imagen.

Ejercicio 7. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ que verifica

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &\in N(f) \\ f(1, 2, 1) &= (1, 1, 2) \\ f(1, 2, 2) &= (0, 1, 1) \end{aligned}$$

1. Calcula la matriz de f en la base canónica.
2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f .

Ejercicio 8. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ de forma que $f(0, 1) = (28, 92)$ y $f(1, 0) = (92, 28)$.

Ejercicio 9. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^4$ de forma que

$$\text{im}(f) = L((1, 2, 0, 2), (2, 0, 2, 0)).$$

Ejercicio 10. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ de forma que el vector $(1, 0, 1)$ pertenezca al núcleo de f y los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a la imagen.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, 3x + 2y + z)$. Calcula una base de $N(f)$ y una base de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Encuentra la matriz de f respecto de la base canónica y respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios de \mathbb{Z}_5^3 :

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5\}$
3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f .
2. Calcula ecuaciones implícitas (o cartesianas) de la imagen de f .
3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$