ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

12 de Febrero de 2019

Alumno:____________________ **D.N.I.:**__________ **Grupo:**_____

Ejercicio 1. *De un número x, menor que 5000, sabemos que acaba en 81, su doble, escrito en base 4 acaba en 22 y su triple, escrito en base 9 acaba en 33. ¿Cuál es el número x?*

Ejercicio 2. *Calcula tres soluciones de la ecuación diofántica $15x + 21y + 35z = 11$.*

Ejercicio 3. *Sea $m(x) = x^5 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ y sea $A = \mathbb{Z}_3[x]_{m(x)}$.*

1. *Factoriza $m(x)$ como producto de irreducibles.*
2. *Estudia cuáles de los siguientes elementos son unidades en A, y calcula sus inversos cuando sea posible: $x^4 + 2x^2 + 1$, $x^4 + x^2 + 1$.*

Ejercicio 4. *Sea X el conjunto de los números naturales menores que $2^{11} = 2048$.*

1. *¿Cuántos elementos de X tienen 7 unos en su representación binaria?*
2. *¿Cuántos elementos de X tienen 6 ceros en su representación binaria?*
3. *¿Cuántos elementos de X tienen más unos que ceros en su representación binaria?*
4. *¿Cuántos elementos de X tienen nueve unos consecutivos en su representación binaria?*

Ejercicio 5. *Indica, en función del parámetro a, si el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{Z}_7$ es incompatible, compatible indeterminado o compatible determinado.*

$$\begin{aligned} x + (a+2)y + (a+3)z &= a + 6 \\ (a+2)x + az &= a + 2 \\ (a+3)x + (a+2)y + (2a+3)z &= 2a + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_2)$, *y* $B = \{(1,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,1)\}$.

1. *Comprueba que A es regular y calcula A^{-1}.*
2. *Justifica que B es una base de $(\mathbb{Z}_2)^4$ y calcula M_{B_cB}.*
3. *Calcula las coordenadas en B del vector $(1,1,0,1)$.*

Ejercicio 7. *Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^3$ generado por $\{(3,2,5),(2,6,1)\}$ y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^3$ de ecuaciones* $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 5y + 3z = 0 \end{array} \right.$

¿Pertenece el vector $(1,3,1)$ al subspacio $U + W$?

Ejercicio 8. *Calcula la matriz respecto de las bases canónicas de una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^3$ que cumpla las siguientes condiciones:*

- $(1,2,2,0) \in \ker f$,
- $f(1,0,0,1) = (1,0,1)$,
- $(1,0,2),(1,1,1) \in \operatorname{im} f$.

Estudia, además, si la aplicación calculada es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Ejercicio 9. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es A (es decir, $M_{B_c}(f) = A$).*

- *Calcula una base de vectores propios de A (llámala B).*
- *Calcula $M_B(f)$.*