1. (1,5 points) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{Z}_7$ en función del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = a - 2 \\ ax - 2ay + 3z = 0 \\ 2x + 8y - z = 2a - 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & -2a & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a-2 \\ a & -2a & 3 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 2a-4 \end{array}\right)$$

Rango de A: Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-2=-4=1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$

Estudiamos el determinante de A.

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 5a & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4a + 6a + a - 10a + a^2 - 6 = a^2 + a + 1$$

Resolvemos la ecuación: $a^2+a+1=0 \Rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+2}{2} = 4 \\ \dfrac{-1-2}{2} = 2 \end{cases}$

Por tanto, si $a \neq 4$ y $a \neq 2 \Rightarrow rg(A) = 3$ y si $a = 4$ ó $a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2$.

Si $a \neq 4$ y $a \neq 2 \Rightarrow rg(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado

Estudiamos los casos $a=4$ y $a=2$.

$\underline{a=2}$. El sistema queda

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \\ 2x + 8y - z = 0 \end{cases}$$

Como hemos visto, $rg(A) = 2$ y $rg(A^*) = 2$, puesto que estamos añadiendo una columna nula. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado

$\underline{a=4}$. El sistema queda

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ 4x + 6y + 3z = 0 \\ 2x + 8y - z = 4 \end{cases}$$

Tomamos el determinante siguiente de una submatriz de A^*:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 1 - 5 - 5 + 0 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \text{ y como } rg(A) = 2,$$

el sistema es incompatible

2. (1,5 points) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideran los subespacios vectoriales V_1, con base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, y V_2, dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x+y+z+t=0; x+z=0; 2y+3t=0 \right\}$$

(a) (1 point) Encuentra una base de $V_1 + V_2$.

(b) (0,5 points) ¿Cuál es la dimensión de $V_1 \cap V_2$?

(a) En primer lugar, encontramos una base de V_2. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x \quad +z \quad =0 \\ 2y+3t=0 \end{array} \right. \xRightarrow{E_2-E_1} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ 4y+4t=0 \\ 2y+3t=0 \end{array} \right. \xRightarrow{4E_2} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \\ 2y+3t=0 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{E_3+3E_2} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \\ t=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+z=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \\ t=0 \end{array} \right.$$

La dimensión de V_2 es 1 y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Un sistema generador de V_1+V_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Encontramos una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim(V_1+V_2)=3$.

(a) Tenemos $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1+V_2) - \dim(V_1) - \dim(V_2) = 3-2-1=0$.