APELLIDOS: ....

NOMBRE: .... D.N.I.: ....

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

12 de noviembre de 2015

Ejercicio 1. Sea $X = D(20)$, $Y = D(21)$ y $Z = D(420)$ los conjuntos formados por los divisores positivos de 20, 21 y 420 respectivamente. Definimos la aplicación $f : X \times Y \to Z$ como $f(x, y) = x \cdot y$.

1. Estudia el carácter de f.
2. Calcula, si es posible, una inversa por la izquierda y/o por la derecha.

Solución:

1. Tenemos que estudiar si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

   Veamos que f es sobreyectiva. Para esto, sea $z \in D(420)$. Puesto que $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, el número z será de la forma $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, donde $a \leq 2$, $b \leq 1$, $c \leq 1$, $d \leq 1$. Tomamos entonces $x = 2^a \cdot 5^c$ e $y = 3^b \cdot 7^d$ (es decir, $x = \mathrm{mcd}(z, 20)$ e $y = \mathrm{mcd}(z, 21)$). Es claro que $x \in D(20)$, $y \in D(21)$ y que $f(x, y) = x \cdot y$ es igual a z.

   En resumen, dado $z \in D(420)$, hemos encontrado $(x, y) \in D(20) \cdot D(21)$ tal que $f(x, y) = z$. Esto nos dice que f es sobreyectiva.

   Vamos a ver algunos ejemplos de esto que hemos dicho:

   - $z = 210$. Entonces $x = \mathrm{mcd}(210, 20) = 10$ e $y = \mathrm{mcd}(210, 21) = 21$. Claramente $f(10, 21) = 210$.
   - $z = 21$. Ahora $x = \mathrm{mcd}(21, 20) = 1$ e $y = \mathrm{mcd}(21, 21) = 21$. Tenemos que $f(1, 21) = 21$.
   - $z = 28$. En este caso, $x = \mathrm{mcd}(28, 20) = 4$ e $y = \mathrm{mcd}(28, 21) = 7$. Claramente $f(4, 7) = 28$.

   Tenemos que $D(20)$ tiene cardinal 6, $D(21)$ tiene cardinal 4, luego $D(20) \times D(21)$ tiene cardinal 24, que es igual al cardinal de $D(420)$. Tenemos también una aplicación $f : D(20) \times D(21) \to D(420)$ que es sobreyectiva. Al tener ambos conjuntos igual cardinal, esta aplicación es también inyectiva.

2. Al comprobar que f es sobreyectiva hemos construido una aplicación $g : D(420) \to D(20) \times D(21)$ dada por $g(z) = (\mathrm{mcd}(z, 20), \mathrm{mcd}(z, 21))$. Esta aplicación es la inversa de f.

Ejercicio 2. Dado un número natural n definimos $s(n)$ como la suma de las cifras de la representación binaria de n (por ejemplo, $s(5) = 2$, pues $5 = 101)_2$ y la suma de estas cifras vale 2).

Sea $X = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 30, 31\}$. En X definimos la relación de equivalencia xRy si $s(x) = s(y)$.

1. Calcula [3], [10], [16] y [23].
2. Describe el conjunto cociente, indicando cuántos clases de equivalencia tiene y cuántos elementos tienen cada clase de equivalencia.

Solución:

1. Se tiene que $s(3) = 2$, ya que $3 = 11)_2$. Por tanto, [3] va a estar formada por todos aquellos elementos de X que en binario se representen con dos unos. Es decir:

   $$\begin{aligned} [3] &= \{11)_2,\ 101)_2,\ 110)_2,\ 1001)_2,\ 1010)_2,\ 1100)_2,\ 10001)_2,\ 10010)_2,\ 10100)_2,\ 11000)_2\} \\ &= \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24\}. \end{aligned}$$

   Puesto que $10 \in [3]$ (ya que $s(10) = s(3)$, ambas clases son iguales, es decir, $[10] = [3]$.

   Para el 16, y dado que $s(16) = 1$, su clase de equivalencia es $[16] = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

   Por último, $23 = 10111)_2$, lo que nos dice que $s(23) = 4$. La clase de equivalencia de 23 es

   $[23] = \{1111)_2,\ 10111)_2,\ 11011)_2,\ 11101)_2,\ 11110)_2\} = \{15, 23, 27, 29, 30\}$.

2. El conjunto cociente tiene seis elementos (es decir, hay seis clases de equivalencia). Éstas son $X/R = \{[0],[1],[3],[7],[15],[31]\}$.

   - $[0] = \{0\}$. los números que no tienen ningún 1 en su representación binaria.
   - $[1] = \{1,2,4,8,16\}$. Los números que tienen un 1 en su representación binaria. Hay 5.
   - $[3] = \{3,5,6,9,10,12,17,18,20,24\}$. Los que tienen dos *unos* en su representación binaria. Hay 10.
   - $[7] = \{7,11,13,14,19,21,22,25,26,28\}$. Los que tienen tres *unos* en su representación binaria. Hay 10.
   - $[15] = \{15,23,27,29,30\}$. Los que tienen cuatro *unos* en su representación binaria. Hay 5.
   - $[31] = \{31\}$. El único elemento de X con cinco *unos* en su representación binaria.

Ejercicio 3. Realiza en $\mathbb{Z}_{87}$, si es posible, los siguientes cálculos:

1. $43+79$.
2. $58-75$.
3. $33\cdot 79$.
4. 73^{-1}.
5. 34^{340}.
6. Encuentra todos los elementos x que verifican que $6x = 75$.
7. $46\cdot(32-19)+13\cdot 58^{-1}$.

Solución:

1. $43+79 = 122 = 35$, ya que 35 es el resto de dividir 122 entre 87.
2. $58-75 = -17 = -17+87 = 70$. Hemos sumado 87, ya que en $\mathbb{Z}_{87}$ $87 = 0$.
3. $33\cdot 79 = 2607 = 84$, pues $2607 = 29\cdot 87+84$.
4. 73^{-1}. En primer lugar hemos de ver si dicho inverso existe. En este caso, la respuesta es que sí, ya que $\operatorname{mcd}(87,73) = 1$. Calculamos el inverso.

$$\begin{array}{rcrcr} 87 &=& 73\cdot 1 &+& 14\\ 73 &=& 14\cdot 5 &+& 3\\ 14 &=& 3\cdot 4 &+& 2\\ 3 &=& 2\cdot 1 &+& 1 \end{array}$$

87		0
73		1
14	1	v_1
3	5	v_2
2	4	v_3
1	1	v_4

$$\begin{aligned} v_1 &= 0-1\cdot 1 = -1\\ v_2 &= 1-5\cdot(-1) = 6\\ v_3 &= -1-4\cdot 6 = -25\\ v_4 &= 6-1\cdot(-25) = 31 \end{aligned}$$

87		0
73		1
14	1	-1
3	5	6
2	4	-25
1	1	31

   Por tanto, $73^{-1} = 31$.

5. Dado que $\operatorname{mcd}(34,87) = 1$ se tiene que $34^{\varphi(87)} = 1$.

   $\varphi(87) = \varphi(3\cdot 29) = \varphi(3)\cdot\varphi(29) = 2\cdot 28 = 56$.

   Puesto que $340 = 56\cdot 6+4$ tenemos que:

$$34^{340} = 34^{56\cdot 6+4} = 34^{56\cdot 6}\cdot 34^4 = (34^{56})^6\cdot 34^4 = 1\cdot 34^4 = 1336336 = 16.$$

6. Escribimos la ecuación $6x = 75$ como la congruencia $6x \equiv 75 \operatorname{mód} 87$. Puesto que $\operatorname{mcd}(6,87) = 3$ y 75 es múltiplo de 3, la congruencia tiene solución, y la ecuación también. Dividimos todo por 3 y nos queda $2x \equiv 25 \operatorname{mód} 29$.

   Es fácil ver que $2^{-1} = 15$, por lo que la congruencia queda $x \equiv 375 \operatorname{mód} 29$, o lo que es lo mismo, $x \equiv 27 \operatorname{mód} 29$.

   Esta congruencia tiene como soluciones a los números $x = 27+29k:\ k\in\mathbb{Z}$. Para $k = 0,1,2$ obtenemos los valores $x = 27$, $x = 56$, $x = 85$, que son las tres soluciones de la ecuación $6x = 75$ en $\mathbb{Z}_{87}$.

7. Puesto que $\mathrm{mcd}(87, 58) = 29 \neq 1$ no existe 58^{-1}, por lo que no podemos realizar este cálculo.

Ejercicio 4. Da tres soluciones de la ecuación diofántica $15x + 18y + 20z = 41$. En una de ellas x debe ser mayor que 10, en otra y debe ser mayor que 12 y en la otra z debe ser mayor que 8.

Solución:
Calculamos todas las soluciones de la ecuación que nos dan:

Pasamos la z al miembro de la derecha	$15x + 18y = 41 - 20z$.
Estudiamos para que valores de z tiene solución	
Puesto que mcd(15,18)=3, para que haya solución	
$41 - 20z$ debe ser múltiplo de 3:	$41 - 20z \equiv 0$ mód 3.
	$2 + z \equiv 0$ mód 3.
	$z \equiv 1$ mód 3.
	$z = 1 + 3k$.
Sustituimos z en la ecuación.	$15x + 18y = 41 - 20(1 + 3k)$.
Operamos:	$15x + 18y = 41 - 20 - 60k$.
	$15x + 18y = 21 - 60k$.
	$5x + 6y = 7 - 20k$.
Convertimos en una congruencia:	$5x \equiv 7 - 20k$ mód 6.
Reducimos módulo 6:	$5x \equiv 1 + 4k$ mód 6.
Multiplicamos por $5 = 5^{-1}$:	$x \equiv 5 + 20k$ mód 6.
Reducimos módulo	6: $x \equiv 5 + 2k$ mód 6.
Obtenemos x:	$x = 5 + 2k + 6k'$.
Sustituimos en la ecuación:	$15(5 + 2k + 6k') + 18y + 20(1 + 3k) = 41$.
Operamos y despejamos y:	$75 + 30k + 90k' + 18y + 20 + 60k = 41$.
	$95 + 90k + 90k' + 18y = 41$.
	$18y = 41 - 95 - 90k - 90k'$.
	$18y = -54 - 90k - 90k'$.
	$y = \frac{-54-90k-90k'}{18}$.
	$y = -3 - 5k - 5k'$.

En resumen, la solución de la ecuación es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & + & 2k & + & 6k' \\ y & = & -3 & - & 5k & - & 5k' \\ z & = & 1 & + & 3k & & \end{array}$$

Y ahora buscamos las soluciones que nos piden:

- Una solución en la que $x > 10$. Podemos obtenerla, por ejemplo, tomando $k = 0$, $k' = 1$. La solución es $x = 11$, $y = -8$, $z = 1$.
- Para que y sea mayor que 12, tomamos, por ejemplo, $k = -3$, $k' = -1$. La solución es $x = -7$, $y = 17$, $z = -8$.
- Para que z sea mayor que 8 tomamos $k = 3$, $k' = 0$. La solución es $x = 11$, $y = -18$, $z = 10$.