TEMA 4

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

Ejercicio 1. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 2. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 3. Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son equivalentes, pero que no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Ejercicio 4. Calcula la inversa, cuando exista, de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2),\ M_3(\mathbb{Z}_3),\ M_3(\mathbb{Q})$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3),\ M_4(\mathbb{Z}_5)$

Ejercicio 5. ¿Cómo afecta a un sistema de ecuaciones si en la matriz de coeficientes intercambiamos dos columnas? ¿Y si multiplicamos una columna por un escalar no nulo?

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = \mathrm{Id}$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = \mathrm{Id}$?

Ejercicio 7. Encuentra, si es posible, $P \in M_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 3 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 3x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

discútelo considerando los coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$. En el caso de que sea compatible, encuentra explícitamente todas las soluciones.

Ejercicio 9. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la siguiente matriz, vista con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (en $\mathbb{R}$) se pide:

1. Transforma el sistema en un sistema escalonado reducido.
2. Discute el sistema.
3. Resuelve el sistema si tiene solución.
4. Escribe la matriz ampliada del sistema.
5. Calcula su forma escalonada reducida por filas (forma de Hermite por filas).
6. Compara en cada caso los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

-
$$\begin{array}{rrrcr} & x_2 & -2x_3 & = & -4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$$

-
$$\begin{array}{rrrrrcr} x & -y & +z & +t & +v & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & -v & = & 0 \\ -x & -y & +z & +t & -v & = & 0 \end{array}$$

-
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 4 \\ 2x & -y & +z & = & 1 \end{array}$$

-
$$\begin{array}{rrrrcr} x & +y & & +t & = & 0 \\ x & & +z & +t & = & 0 \\ & y & -z & & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \end{array}$$

-
$$\begin{array}{rrrrrcr} x & +y & -z & +t & -v & = & 0 \\ x & -y & +z & +t & +v & = & 1 \\ x & & & +t & & = & 1 \end{array}$$

Ejercicio 11. Repite el ejercicio anterior considerando los coeficientes de los sistemas en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. Para los sistemas indeterminados calcular el número de soluciones.

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & a & 2 \\ 3 & 0 & 5 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Estudia para que valores del parámetro a la matriz A tiene inversa para el producto.

Ejercicio 13. Calcula el rango de cada una de las matrices siguientes mediante operaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 10 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 6}(\mathbb{Z}_{11})$$

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ay & + & (a+1)z & = & 4 \\ ax & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}$$

Discútelo según los valores del parámetro a, y resuélvelo para $a=-1$.

Ejercicio 15. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 4 \\ 3x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Discútelo según el valor del parámetro a.
Si para $a=4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 16. Calcula los siguientes determinantes (considerando las matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$):

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/5 \\ -1 & 1/2 & -1/3 & -1/5 \\ 1 & 1/2 & 4/3 & 1/5 \\ 2 & 1 & 2/3 & 11/5 \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

5.
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 17. Calcula el rango de la siguiente matriz, con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$, según los valores de los parámetros a y b.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & a & b & a+b \end{pmatrix}$$