ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

17 de Diciembre de 2018

Alumno:____________________________________ **D.N.I.:**_______________ **Grupo F**

Ejercicio 1. *Tenemos* 25 *caramelos (iguales), que queremos repartir entre* 3 *niños.*

1. *¿De cuántas formas podemos repartirlos?*
2. *¿De cuántas formas podemos repartirlos si queremos que todos los niños tengan al menos dos caramelos?*
3. *¿De cuántas formas podemos repartirlos para que el primer niño no tenga más caramelos que los otros dos juntos?*
4. *¿De cuántas formas podemos repartirlos para que ningún niño tenga más caramelos que los otros dos juntos?*

Solución:

Vamos a llamar x al número de caramelos que recibe el primer niño, y al número de caramelos que recibe el segundo niño y z al número de caramelos que recibe el tercer niño.

1. En este primer apartado lo que hemos de ver es cuántas soluciones naturales tiene la ecuación $x+y+z=25$. Esto son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 25 en 25. El resultado es:
$$\binom{3+25-1}{3-1}=\binom{27}{2}=\frac{27!}{2!\cdot 25!}=\frac{27\cdot 26}{2}=27\cdot 13=351.$$
2. Si queremos que todos los niños tengan al menos dos caramelos, lo que hacemos es, en primer lugar, dar dos caramelos a cada niño, y a continuación repartimos los 19 restantes. El número de formas de hacerlo es:
$$\binom{3+19-1}{3-1}=\binom{21}{2}=\frac{21!}{2!\cdot 19!}=\frac{21\cdot 29}{2}=21\cdot 10=210.$$
3. Lo que vamos a contar es de cuántas formas podemos repartir los caramelos de forma que el primero tenga más caramelos que los otros dos juntos. Luego, este resultado lo restaremos a las 351 formas que tenemos de repartir los caramelos.

   Puesto que hay 25 caramelos, lo que hay que ver es en cuántos repartos el primer niño tiene 13 caramelos o más. En tal caso, los otros dos sumarán 12 o menos. Y para eso, le damos 13 caramelos al primer niño y repartimos los 12 restantes entre los 3. El número de formas de hacerlo es:
$$\binom{3+12-1}{3-1}=\binom{14}{2}=\frac{14!}{2!\cdot 12!}=\frac{14\cdot 13}{2}=7\cdot 13=91.$$
   Luego en total habrá $351-91=260$ repartos en donde el primer niño no tendrá más que sus otros dos compañeros juntos.
4. Sabemos que hay 91 repartos donde el primer niño tiene más caramelos que los otros dos juntos. De la misma forma, hay 91 repartos en los que el segundo tiene más caramelos que los otros dos juntos. Y estos 91 repartos son todos diferentes a los anteriores (pues a la vez no pueden tener el primero más caramelos que el segundo y el tercero, y el segundo más caramelos que el primero y el tercero). Nos quedan otros 91 repartos donde el tercero tiene más caramelos que el primero y el segundo juntos.

   En total tenemos $91\cdot 3=273$ repartos donde al menos un niño tiene más caramelos que los otros dos juntos. Por tanto, nos quedan $351-273=78$ repartos en los que ninguno de los niños tiene más caramelos que sus otros dos compañeros juntos.

Al final del fichero enumeraremos todos estos repartos.

Ejercicio 2.

1. *¿Cuántas palabras podemos formar con las letras de la palabra AUTORREGULAREMOS (tomando todas las letras)?*
2. *¿En cuántas de ellas aparecen juntas la S y la T?*
3. *¿En cuántas de ellas aparecen juntas una R y la L?*
4. *¿En cuántas de ellas se alternan vocales y consonantes?*
5. *¿En cuántas de ellas aparecen todas las vocales juntas?*

Solución:
En primer lugar, vemos las letras que hay distintas, y cuántas hay de cada una de ellas en la palabra:

A - 2	U - 2	T - 1	O - 2	R - 3	E - 2	G - 1	L - 1	M - 1	S - 1

Lo que nos da un total de 16 letras.

1. Las formas que tenemos de ordenar estas letras es $\frac{16!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{20922789888000}{96} = 217945728000$.
2. Distinguimos dos casos:
   - En nuestra ordenación tenemos la T después de la S. Para contar cuántas palabras hay, quitamos la S y la T y consideramos un nuevo carácter que denotaremos como ST.

     Es decir, las letras a ordenar son ahora:

A - 2	U - 2	O - 2	R - 3	E - 2	G - 1	L - 1	M - 1	ST - 1

     El número de formas de ordenar estos 15 caracteres es $\frac{15!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1307674368000}{96} = 13621608000$.
   - En nuestra ordenación tenemos la S después de la T. El número total de ordenaciones es el mismo que el caso anterior, es decir, 13621608000.

   El número total de ordenaciones en que aparecen juntas la S y la T es entonces $13621608000 + 13621608000 = 27243216000$.
3. Lo razonamos de forma parecida al caso anterior:
   - Contamos palabras en las que aparezca la secuencia RL. Las letras que tenemos ahora son

A - 2	U - 2	T - 1	O - 2	R - 2	E - 2	G - 1	M - 1	S - 1	RL - 1

     que podemos ordenar de $\frac{15!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{1307674368000}{32} = 40864824000$.
   - Las palabras en las que aparezca la secuencia LR son también 40864824000.

   Pero ahora no nos vale con sumar ambas cantidades, pues las palabras que tengan RLR las hemos contado dos veces. Vemos entonces cuántas palabras hay con RLR

   - Ahora, las letras que tenemos son:

A - 2	U - 2	T - 1	O - 2	R - 1	E - 2	G - 1	M - 1	S - 1	RLR - 1

     que podemos ordenar de $\frac{14!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{87178291200}{16} = 5448643200$.

   Y por tanto, el número de ordenaciones en las que parecen juntas una R y la L son $40864824000 + 40864824000 - 5448643200 = 76281004800$.
4. Puesto que tenemos 8 vocales y 8 consonantes, para que se alternen vocales y consonantes, la palabra debe tener una de las dos estructuras siguientes: VCVCVCVCVCVCVCVC o CVCVCVCVCVCVCVCV.

   Contamos cuántas ordenaciones hay de la primera forma, y la segunda se calculará igual

   El proceso de obtener una ordenación de la forma VCVCVCVCVCVCVCVC lo dividimos en varias etapas:

- Ordenamos las vocales. Esto lo podemos hacer de $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 2520$ formas.
- Ordenamos las consonantes. Esto lo podemos hacer de $\frac{8!}{3!} = 6720$ formas.
- Vamos eligiendo una vocal y una consonante en el orden en que las hemos colocado. Esto se puede hacer de 1 forma.

Por el principio del producto, hay un total de $2520 \cdot 6720 = 16934400$ ordenaciones de la forma VCVCVCVCVCVCVCVC.

De la misma forma hay 16934400 ordenaciones de la forma CVCVCVCVCVCVCVCV.

En total, hay $16934400 + 16934400 = 33868800$ ordenaciones en las que se alternan vocales y consonantes.

5. Aquí, al igual que antes, dividimos el proceso de obtener una ordenación en varias etapas. Contaremos de cuántas formas se puede completar cada una de las etapas, y multiplicaremos los resultados parciales obtenidos.

- Ordenamos las 8 consonantes. Esto podemos hacerlo de 6720 formas.
- Ordenamos las 8 vocales. Esto podemos hacerlo de 2520 formas.
- Colocamos las 8 vocales, todas juntas, tal y como las hemos obtenido en la etapa anterior, bien al principio, bien al final, bien entre dos consonantes. Esto lo podemos hacer de 9 formas distintas, pues las 8 vocales las podemos colocar en cada uno de los siguientes huecos:

$$H_1C_1H_2C_2H_3C_3H_4C_4H_5C_5H_6C_6H_7C_7H_8C_8H_9.$$

  Dicho de otra forma, tenemos que elegir una H de la secuencia anterior y colocar ahí las 8 vocales. En cada una de las Cs, colocamos una consonante en el orden elegido en la etapa primera.

Si multiplicamos los resultados, vemos que podemos ordenar las 16 letras de forma que las 8 vocales vayan juntas de $6720 \cdot 2520 \cdot 9 = 152409600$ formas distintas.

Ejercicio 3. *Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & a-1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina, para cada valor del parámetro a, cuánto vale el rango de A.

Solución:

Calculamos el determinante de la submatriz formada por las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) = 2 \neq 0.$$

Al ser distinto de cero, podemos ver que el rango de A es mayor o igual que 2.

Si añadimos la tercera fila y la tercera columna, el determinante de la matriz que resulta vale 0, pues las columnas primera y tercera son iguales.

Añadimos entonces la tercera fila y la cuarta columna, y calculamos el determinante correspondiente:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot a \cdot 2 + (-4) \cdot (a-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-1) \cdot 1 - (a-1) \cdot a \cdot 2 \\ &= 6 - 2a - 4(a-1) - 6 - 4 - 2(a^2 - a) \\ &= 6 - 2a - 4a + 4 - 6 - 4 - 2a^2 + 2a \\ &= -2a^2 - 4a \\ &= -2(a^2 + 2a) \\ &= -2a(a+2). \end{aligned}$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$ ó $a = -2$.

Entonces, si $a = 0$ ó $a = -2$ el rango de A vale 2. Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$ el rango de A vale 3.

Ejercicio 4. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Calcula su forma normal de Hermite H_A*, y una matriz regular* P *tal que* $P \cdot A = H_A$*.*

Encuentra, si es posible, otra matriz regular Q *tal que* $Q \cdot A = H_A$*. Si no es posible, explica porqué.*

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$*.*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Solución:

Formamos la matriz $(A|Id)$ y realizamos operaciones por filas hasta obtener una matriz escalonada reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de estos cálculos vemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que el rango de A vale 2, y es menor que el número de filas, podemos encontrar otra matriz regular Q tal que $Q \cdot A = H_A$. Podemos, para obtenerla, en la matriz resultante de realizar las operaciones elementales, sumarle la tercera fila a la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y tenemos la matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, que es regular, y $Q \cdot A = H_A$.

Por último, para resolver el sistema de ecuaciones, como la matriz ampliada es la matriz A, el sistema es equivalente a:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

que podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3 + 3y \\ z & = & 2 \end{array}$$

El sistema es compatible indeterminado, y las soluciones se obtienen dándole a y los valores $0, 1, 2, 3, 4$.

$$x = 3\ y = 0\ z = 2; \quad x = 1\ y = 1\ z = 2; \quad x = 4\ y = 2\ z = 2; \quad x = 2\ y = 3\ z = 2; \quad x = 0\ y = 4\ z = 2.$$

25	0	0	24	1	0	24	0	1	23	2	0	23	1	1	23	0	2	22	3	0	22	2	1	22	1	2
22	0	3	21	4	0	21	3	1	21	2	2	21	1	3	21	0	4	20	5	0	20	4	1	20	3	2
20	2	3	20	1	4	20	0	5	19	6	0	19	5	1	19	4	2	19	3	3	19	2	4	19	1	5
19	0	6	18	7	0	18	6	1	18	5	2	18	4	3	18	3	4	18	2	5	18	1	6	18	0	7
17	8	0	17	7	1	17	6	2	17	5	3	17	4	4	17	3	5	17	2	6	17	1	7	17	0	8
16	9	0	16	8	1	16	7	2	16	6	3	16	5	4	16	4	5	16	3	6	16	2	7	16	0	8
16	0	9	15	10	0	15	9	1	15	8	2	15	7	3	15	6	4	15	5	5	15	4	6	15	3	7
15	2	8	15	1	9	15	0	10	14	11	0	14	10	1	14	9	2	14	8	3	14	7	4	14	6	5
14	5	6	14	4	7	14	3	8	14	2	9	14	1	10	14	0	11	13	12	0	13	11	1	13	10	2
13	9	3	13	8	4	13	7	5	13	6	6	13	5	7	13	4	8	13	3	9	13	2	10	13	1	11
13	0	12	12	13	0	12	12	1	12	11	2	12	10	3	12	9	4	12	8	5	12	7	6	12	6	7
12	5	8	12	4	9	12	3	10	12	2	11	12	1	12	12	0	13	11	14	0	11	13	1	11	12	2
11	11	3	11	10	4	11	9	5	11	8	6	11	7	7	11	6	8	11	5	9	11	4	10	11	3	11
11	2	12	11	1	13	11	0	14	10	15	0	10	14	1	10	13	2	10	12	3	10	11	4	10	10	5
10	9	6	10	8	7	10	7	8	10	6	9	10	5	10	10	4	11	10	3	12	10	2	13	10	1	14
10	0	15	9	16	0	9	15	1	9	14	2	9	13	3	9	12	4	9	11	5	9	10	6	9	9	7
9	8	8	9	7	0	9	6	10	9	5	11	9	4	12	9	3	13	9	2	14	9	1	15	9	0	16
8	17	0	8	16	1	8	15	2	8	14	3	8	13	4	8	12	5	8	11	6	8	10	7	8	9	8
8	8	9	8	7	10	8	6	11	8	5	12	8	4	13	8	3	14	8	2	15	8	1	16	8	0	17
7	18	0	7	17	1	7	16	2	7	15	3	7	14	4	7	13	5	7	12	6	7	11	7	7	10	8
7	9	9	7	8	10	7	7	11	7	6	12	7	5	13	7	4	14	7	3	15	7	2	16	7	1	17
7	0	18	6	19	0	6	18	1	6	17	2	6	16	3	6	15	4	6	14	5	6	13	6	6	12	7
6	11	8	6	10	9	6	9	10	6	8	11	6	7	12	6	6	13	6	5	14	6	4	15	6	3	16
6	2	17	6	1	18	6	0	19	5	20	0	5	19	1	5	18	2	5	17	3	5	16	4	5	15	5
5	14	6	5	13	7	5	12	8	5	11	9	5	10	10	5	9	11	5	8	12	5	7	14	5	6	14
5	5	15	5	4	16	5	3	17	5	2	18	5	1	19	5	0	20	4	21	0	4	20	1	4	19	2
4	18	3	4	17	4	4	16	5	4	15	6	4	14	7	4	13	8	4	12	9	4	11	10	4	10	11
4	9	12	4	8	13	4	7	14	4	6	15	4	5	16	4	4	17	4	3	18	4	2	19	4	1	20
4	0	21	3	22	0	3	21	1	3	20	2	3	19	3	3	18	4	3	17	5	3	16	6	3	15	7
3	14	8	3	13	9	3	12	10	3	11	11	3	10	12	3	9	13	3	8	14	3	7	15	3	6	16
3	5	17	3	4	18	3	3	19	3	2	20	3	1	21	3	0	22	2	23	0	2	22	1	2	21	2
2	20	3	2	19	4	2	18	5	2	17	6	2	16	7	2	15	8	2	14	9	2	13	10	2	12	11
2	11	12	2	10	13	2	9	14	2	8	15	2	7	16	2	6	17	2	5	18	2	4	19	2	3	20
2	2	21	2	1	22	2	0	23	1	24	0	1	23	1	1	22	2	1	21	3	1	20	4	1	19	5
1	18	8	1	17	7	1	16	8	1	15	9	1	14	10	1	13	11	1	12	12	1	11	13	1	10	14
1	9	15	1	8	16	1	7	17	1	6	18	1	5	19	1	4	20	1	3	21	1	2	22	1	1	23
1	0	24	0	25	0	0	24	1	0	23	2	0	22	3	0	21	4	0	20	5	0	19	6	0	18	7
1	17	8	0	16	9	0	15	10	0	14	11	0	13	12	0	12	13	0	11	14	0	10	15	0	9	16
1	8	17	0	7	18	0	6	19	0	5	20	0	4	21	0	3	22	0	2	23	0	1	24	0	0	25

Estas son las 351 formas de repartir los 25 caramelos entre los 3 niños.

Si nos fijamos, las 91 primeras son todas las soluciones en las que $x \geq 13$, es decir, los repartos en los que el primer niño se lleva más caramelos que los otros dos juntos. En los otros 260 repartos, el primer niño tiene menos caramelos que los otros dos juntos.

A continuación ponemos los 78 repartos en que ningún niño tiene más caramelos que los otros dos juntos:

12	12	1	12	11	2	12	10	3	12	9	4	12	8	5	12	7	6	
12	6	7	12	5	8	12	4	9	12	3	10	12	2	11	12	1	12	
11	12	2	11	11	3	11	10	4	11	9	5	11	8	6	11	7	7	
11	6	8	11	5	9	11	4	10	11	3	11	11	2	12	10	12	3	
10	11	4	10	10	5	10	9	6	10	8	7	10	7	8	10	6	9	
10	5	10	10	4	11	10	3	12	9	12	4	9	11	5	9	10	6	
9	9	7	9	8	8	9	7	9	9	6	10	9	5	11	9	4	12	
8	12	5	8	11	6	8	10	7	8	9	8	8	8	9	8	7	10	
8	6	11	8	5	12	7	12	6	7	11	7	7	10	8	7	9	9	
7	8	10	7	7	11	7	6	12	6	12	7	6	11	8	6	10	9	
6	9	10	6	8	11	6	7	12	5	12	8	5	11	9	5	10	10	
5	9	11	5	8	12	4	12	9	4	11	10	4	10	11	4	9	12	
3	12	10	3	11	11	3	10	12	2	12	11	2	11	12	1	12	12	

Por último, los repartos en que todos los niños tienen al menos dos caramelos son:

21	2	2	20	3	2	20	2	3	19	4	2	19	3	3	19	2	4	18	5	2
18	4	3	18	3	4	18	2	5	17	6	2	17	5	3	17	4	4	17	3	5
17	2	6	16	7	2	16	6	3	16	5	4	16	4	5	16	3	6	16	2	7
15	8	2	15	7	3	15	6	4	15	5	5	15	4	6	15	3	7	15	2	8
14	9	2	14	8	3	14	7	4	14	6	5	14	5	6	14	4	7	14	3	8
14	2	9	13	10	2	13	9	3	13	8	4	13	7	5	13	6	6	13	5	7
13	4	8	13	3	9	13	2	10	12	11	2	12	10	3	12	9	4	12	8	5
12	7	6	12	6	7	12	5	8	12	4	9	12	3	10	12	2	11	11	12	2
11	11	3	11	10	4	11	9	5	11	8	6	11	7	7	11	6	8	11	5	9
11	4	10	11	3	11	11	2	12	10	13	2	10	12	3	10	11	4	10	10	5
10	9	6	10	8	7	10	7	8	10	6	9	10	5	10	10	4	11	10	3	12
10	2	13	9	14	2	9	13	3	9	12	4	9	11	5	9	10	6	9	9	7
9	8	8	9	7	9	9	6	10	9	5	11	9	4	12	9	3	13	9	2	14
8	15	2	8	14	3	8	13	4	8	12	5	8	11	6	8	10	7	8	9	8
8	8	9	8	7	10	8	6	11	8	5	12	8	4	13	8	3	14	8	2	15
7	16	2	7	15	3	7	14	4	7	13	5	7	12	6	7	11	7	7	10	8
7	9	9	7	8	10	7	7	11	7	6	12	7	5	13	7	4	14	7	3	15
7	2	16	6	17	2	6	16	3	6	15	4	6	14	5	6	13	6	6	12	7
6	11	8	6	10	9	6	9	10	6	8	11	6	7	12	6	6	13	6	5	14
6	4	15	6	3	16	6	2	17	5	18	2	5	17	3	5	16	4	5	15	5
5	14	6	5	13	7	5	12	8	5	11	9	5	10	10	5	9	11	5	8	12
5	7	13	5	6	14	5	5	15	5	4	16	5	3	17	5	2	18	4	19	2
4	18	3	4	17	4	4	16	5	4	15	6	4	14	7	4	13	8	4	12	9
4	11	10	4	10	11	4	9	12	4	8	13	4	7	14	4	6	15	4	5	16
4	4	17	4	3	18	4	2	19	3	20	2	3	19	3	3	18	4	3	17	5
3	16	6	3	15	7	3	14	8	3	13	9	3	12	10	3	11	11	3	10	12
3	9	13	3	8	14	3	7	15	3	6	16	3	5	17	3	4	18	3	3	19
3	2	20	2	21	2	2	20	3	2	19	4	2	18	5	2	17	6	2	16	7
2	15	8	2	14	9	2	13	10	2	12	11	2	11	12	2	10	13	2	9	14
2	8	15	2	7	16	2	6	17	2	5	18	2	4	19	2	3	20	2	2	21

que podemos ver que hay 210.