# ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

## 24 de Enero de 2018

**Alumno:**____________________ **D.N.I.:**__________ **Grupo:**______

**Ejercicio 1.** *A cada uno de los 37 niños de una clase queremos llevarle un pequeño regalo. Vamos a una tienda de juguetes para comprarlos y encontramos dos tipos de juegos que vemos adecuados para regalar y con un precio acorde a nuestro presupuesto. Uno de ellos es ligeramente más caro, concretamente 95 céntimos más. La compra total nos sale por 205,9 euros. ¿Podrías determinar el precio de cada uno de los juegos y cuántos compramos de cada tipo?*

**Solución:**

Tenemos dos tipos de juegos. Denotemos por $J_1$ al más barato y $J_2$ al más caro. Sea $x$ el precio de $J_1$ (en céntimos). En tal caso, el precio de $J_2$ es $x+95$.

Sea $y$ el número de juegos $J_1$ que compramos. Puesto que en total compramos 37 juegos, quiere decir que compramos $37-y$ juegos $J_2$.

Organizamos esta información en la siguiente tabla:

| | número juegos | precio/juego | dinero gastado |
|---|---|---|---|
| $J_1$ | $y$ | $x$ | $xy$ |
| $J_2$ | $37-y$ | $x+95$ | $(37-y)(x+95)$ |

Puesto que nos dicen que nos gastamos en total $205,9$ euros tenemos la siguiente relación entre $x$ e $y$:

$$xy+(37-y)(x+95)=20590.$$

Operamos en esta ecuación:

- $xy+(37-y)(x+95)=20590.$
- $xy+37x+37\cdot 95-xy-95y=20590.$
- $xy+37x+3515-xy-95y=20590.$
- $37x-95y=20590-3515.$
- $37x-95y=17075,$

Como $x$ e $y$ son números enteros, nos encontramos con una ecuación diofántica. La resolvemos. Para eso, la convertimos en la congruencia $-95y\equiv 17075 \text{mód } 37$, y la resolvemos. Vemos en primer lugar que, puesto que $\text{mcd}(37,95)=1$ la congruencia tiene solución.

$$\begin{array}{l} -95y\equiv 17075 \text{ mód } 37 \\ 16y\equiv 18 \text{ mód } 37 \\ y\equiv 18\cdot 7 \text{ mód } 37 \\ y\equiv 126 \text{ mód } 37 \\ y\equiv 15 \text{ mód } 37 \\ y=15+37k : k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| 37 | | 0 |
| 16 | | 1 |
| 5 | 2 | −2 |
| 1 | 3 | 7 |

$16^{-1} \text{ mód } 37=7.$

Al ser $y$ el número de juegos $J_1$ que compramos, este valor debe estar comprendido entre 0 y 37. El único valor de $k$ para el que ocurre eso es $k=0$, luego $y=15$.

Ahora, de la ecuación $37x-95y=17075$ despejamos $x$.

$$37x-95\cdot 15=17075 \Longrightarrow 37x=17075+95\cdot 15=17075+1425=18500 \Longrightarrow x=\frac{18500}{37}=500.$$

De donde el juego más barato vale 500 céntimos, es decir, 5 euros. Y de él compramos 15 unidades.

Del otro juego compramos $37-15=22$ unidades y cada una nos cuesta $5'95$ euros.

Podemos comprobar el resultado viendo que

$$15\cdot 5+22\cdot 5'95=75+130'9=205'9.$$

**Ejercicio 2.** *Sea $b$ un número natural mayor que 1, sea $x$ el número cuya representación en base $b$ es 48 e $y$ el número cuya representación en base $b$ es 72. Si la representación de $x \cdot y$ en base $b$ es 2010, ¿cuánto vale $b$, $x$ e $y$?*

**Solución:**
Sabemos que:
$x = 48)_b \Longrightarrow x = 4b + 8$.
$y = 72)_b \Longrightarrow y = 7b + 2$.
$x \cdot y = 2010)_b \Longrightarrow 2b^3 + b$.
Por otra parte:

$$x \cdot y = (4b + 8)(7b + 2) = 28b^2 + 8b + 56b + 16 = 28b^2 + 64b + 16.$$

Nos queda entonces la siguiente ecuación:

$$2b^3 + b = 28b^2 + 64b + 16 \Longrightarrow 2b^3 - 28b^2 - 63b - 16 = 0.$$

Tenemos que encontrar una raíz del polinomio $2b^3 - 28b^2 - 63b - 16$. Esta raíz tiene que ser mayor que 8 (pues si $b$ valiera 8 o menos, no podríamos escribir en base $b$ el número 48).
Además, las raíces enteras de un polinomio se encuentran entre los divisores del término independiente, luego $b$ debe ser un divisor de 16.
El único número mayor que 8 y divisor de 16 es el 16. Probamos que 16 es raíz:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -28 & -63 & -16 \\ 16 & & 32 & 64 & 16 \\ \hline & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Vemos que efectivamente $b = 16$ es raíz del polinomio luego la base es $b = 16$. Es decir, los números están expresados en hexadecimal. Con esto vemos que:
$x = 4 \cdot 16 + 8 = 72$.
$y = 7 \cdot 16 + 2 = 114$.
$x \cdot y = 72 \cdot 114 = 8208$.
Y también:
$x \cdot y = 2 \cdot 16^3 + 16 = 2 \cdot 4096 + 16 = 8192 + 16 = 8208$.

También se podría obtener $b$ como sigue:
La última cifra de un número en base $b$ es el resto de la división de este número por $b$. Por tanto, tenemos que $x \equiv 8 \text{ mód } b$ e $y \equiv 2 \text{ mód } b$. Entonces, por una parte, $xy \equiv 0 \text{ mód } b$ y por otra, $xy \equiv 8 \cdot 2 \text{ mód } b$. Por tanto, $16 \equiv 0 \text{ mód } b$, lo que nos dice que $b$ es un divisor de 16. Además, $b$ tiene que ser mayor que 8, luego $b$ debe valer 16.
Es decir, la única posible solución al problema es $b = 16$. Ahora habría que comprobar que ésta es una solución válida.

**Ejercicio 3.** *Da un cuerpo con 32 elementos, y calcula en él el inverso de $x^2$.*

**Solución:**

Puesto que $32 = 2^5$, para dar un cuerpo con 32 elementos necesitamos un polinomio $m(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ de grado 5 y que sea irreducible. En tal caso, el cuerpo sería $K = \mathbb{Z}_2[x]_{m(x)}$.

Para buscar un polinomio irreducible de grado 5 debemos buscar un polinomio que no sea divisible por ningún polinomio de grado menor o igual que 2. Por tanto, el polinomio no puede tener raíces y no puede ser múltiplo de $x^2 + x + 1$ (que es el único irreducible de grado 2).

Para que el 0 no sea raíz es necesario que el término independiente no sea cero, y para que el 1 no sea raíz hace falta que el polinomio sea suma de un número impar de monomios.

Probamos entonces con $m(x) = x^5 + x + 1$. Es claro que $m(0) = m(1) = 1$. Lo dividimos por $x^2 + x + 1$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1).$$

y vemos que no es irreducible.

Sea ahora $m(x) = x^5 + x^2 + 1$. Aquí también $m(0) = m(1) = 1$, y al dividirlo por $x^2 + x + 1$ nos queda:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad x^5 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2) + 1.$$

Luego el polinomo $m(x) = x^5 + x^2 + 1$ es irreducible.

Cualquiera de los siguientes polinomios es también irreducible, luego también nos valdría para dar el cuerpo.

$$x^5 + x^3 + 1;\ x^5 + x^3 + x^2 + x + 1;\ x^5 + x^4 + x^2 + x + 1;\ x^5 + x^4 + x^3 + x + 1;\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1.$$

Tomamos entonces $K = \mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^2+1}$, y calculamos en él $(x^2)^{-1}$.

Puesto que $x^5 + x^2 + 1 = x^2(x^3 + 1) + 1$ tenemos que $1 = x^5 + x^2 + 1 + x^2(x^3 + 1)$, luego el inverso de $x^2$ vale $x^3 + 1$. Podemos comprobarlo también con la siguiente tabla:

| | | |
|---|---|---|
| $x^5 + x^2 + 1$ | | $0$ |
| $x^2$ | | $1$ |
| $1$ | $x^3 + 1$ | $x^3 + 1$ |

En la siguiente tabla tenemos las seis posibles construcciones del cuerpo con 32 elementos y en cada uno de ellos el inverso de $x^2$.

| $K$ | $(x^2)^{-1}$ |
|---|---|
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^2+1}$ | $x^3 + 1$ |
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^3+1}$ | $x^3 + x$ |
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^3+x^2+x+1}$ | $x^4 + x^3 + x^2$ |
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^4+x^2+x+1}$ | $x^4 + x^2 + x$ |
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^4+x^3+x+1}$ | $x^4 + x + 1$ |
| $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^4+x^3+x^2+1}$ | $x^3 + x^2 + x + 1$ |

**Ejercicio 4.** *Sea $X$ el conjunto de números naturales menores que* $100000$.

1. *¿Cuántos elementos de $X$ hay que no tengan dos cifras iguales?*
2. *¿Cuántos elementos de $X$ hay cuyas cifras sumen* $13$*?*

**Solución:**

1. Un número menor que 100000 puede tener 5 cifras, tener cuatro cifras, tener 3 cifras, tener 2 cifras o tener una cifra.

   Contamos entonces cuántos números hay que no tengan dos cifras iguales:

   - con una cifra. Hay 10 (desde el 0 hasta el 9). Ninguno de estos tiene dos cifras iguales.
   - con dos cifras. Hay 81. Llamemos $x$ a la cifra de las decenas e $y$ a la cifra de las unidades. Tenemos 9 posibilidades para $x$ (desde 1 hasta 9) y 9 para $y$ (desde 0 hasta 9 pero descartando la que hemos elegido para las decenas). En total hay $9 \cdot 9 = 81$.
   - con tres cifras. Aquí hay $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Si el número es $xyz$ tenemos 9 posibilidades para $x$, 9 para $y$, y 8 para $z$.
   - con cuatro cifras. Hay $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.
   - con cinco cifras hay $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.

   En total tenemos $10 + 81 + 648 + 4536 + 27216 = 32491$ números naturales menores que 100000 y que no tienen dos cifras iguales.

2. Supongamos que las cifras del número son $x, y, z, t, u$ (las cifras de la izquierda podrían ser cero). Entonces, tenemos que ver cuántas soluciones naturales tiene la ecuación $x + y + z + t + u = 13$ en las que ninguna de las incógnitas es mayor que 9.

   El número de soluciones de $x + y + z + t + u = 13$ es $\binom{13+5-1}{5-1} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{4! \cdot 13!} = 2380$.

   Ahora vemos cuántas soluciones hay en las que $x \geq 10$. Para esto, contamos el número de soluciones naturales de $x' + y + z + t + u = 3$. Este número es $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$.

   De la misma forma hay 35 soluciones en las que $y \geq 10$, 35 en las que $z \geq 10$, 35 en las que $t \geq 10$ y 35 en las que $u \geq 10$. Y ninguna aparece repetida, pues dos incógnitas no pueden ser a la vez mayores o iguales que 10 (pues en tal caso sumaría más de 13).

   El número de elementos de $X$ cuyas cifras suman 13 es entonces $2380 - 5 \cdot 35 = 2205$.

   Al final del documento están los 2205 números menores que 100000 cuyas cifras suman 13.

**Ejercicio 5.** *Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_3$*:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & az & = & 2a \\ x & + & y & + & (a+2)z & = & a+2 \\ & & 2y & + & az & = & 2a \\ 2x & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \end{array}\right.$$

*Estudia para que valores del parámetro a es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

**Solución:**

Para responder a esta cuestión vamos a calcular el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada. Tomamos esta matriz y realizamos operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2a \\ 1 & 1 & a+2 & a+2 \\ 0 & 2 & a & 2a \\ 2 & 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+2 \\ 0 & 2 & a & 2a \\ 0 & 1 & 2a+1 & 2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+2 \\ 0 & 2 & a & 2a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+2 \\ 0 & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & a+2 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(2a+1)]{\substack{E_{13}(2a) \\ E_{23}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a^2+a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2+a \end{pmatrix}$$

Cuando $a = 0$ ó $a = 1$ se tiene que $2a^2 + a = 0$, y la matriz nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema es compatible determinado, pues $rg(A) = rg(A|b) = 3$.

Cuando $a = 2$, la matriz que nos queda es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema es incompatible.

**Ejercicio 6.** *Demuestra que si $A$ es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $Id - A$ es regular.*

**Solución:**
Puesto que $A^2 = 0$ tenemos que:

$$(Id - A) \cdot (Id + A) = Id^2 + Id \cdot A - A \cdot Id - A^2 = Id + A - A - 0 = Id.$$

Y por tanto $Id - A$ es regular y su inversa es $Id + A$.

**Ejercicio 7.** *Sean* $B_1 = \{(2,3,4),\ (3,3,0),\ (2,4,0)\}$ *y* $B_2 = \{(1,1,1),\ (0,2,1),\ (3,1,4)\}$ *dos bases de* $(\mathbb{Z}_5)^3$.

*Calcula la matriz del cambio de base de* $B_1$ *a* $B_2$.

**Solución:**

Sabemos que $M_{B_1\to B_2} = M_{B_c\to B_2}\cdot M_{B_1\to B_c}$. Y ahora:

$M_{B_1\to B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$M_{B_c\to B_2} = (M_{B_2\to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, donde esta matriz se ha obtenido como sigue:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(4)]{E_{21}(4)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{23}(4)]{E_{13}(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$M_{B_1\to B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

También se podría haber obtenido esta matriz como sigue:

Calculamos las coordenadas de $(2,3,4)$ en $B_2$:

$(2,3,4) = a\cdot(1,1,1) + b\cdot(0,2,1) + c\cdot(3,1,4)$. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & + & 3c & = & 2 \\ a & + & 2b & + & c & = & 3 \\ a & + & b & + & 4c & = & 4 \end{array}\right.$

Las soluciones de este sistema son $a=1$, $b=0$, $c=2$. Esto nos da la primera columna de $M_{B_1\to B_2}$.

Ahora repetimos con los vectores $(3,3,0)$ y $(2,4,0)$:

$(3,3,0) = a'\cdot(1,1,1) + b'\cdot(0,2,1) + c'\cdot(3,1,4)$ $\qquad$ $(2,4,0) = a''\cdot(1,1,1) + b''\cdot(0,2,1) + c''\cdot(3,1,4)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a' & & & + & 3c' & = & 3 \\ a' & + & 2b' & + & c' & = & 3 \\ a' & + & b' & + & 4c' & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a'' & & & + & 3c'' & = & 2 \\ a'' & + & 2b'' & + & c'' & = & 4 \\ a'' & + & b'' & + & 4c'' & = & 0 \end{array}\right.$$

cuyas soluciones son $a'=0$, $b'=1$, $c'=1$ y $a''=4$, $b''=2$, $c''=1$.

**Ejercicio 8.** *Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z)=(y-z,-x+y,x+y-2z)$.*

1. *Calcula una base de $N(f)$.*
2. *Calcula las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$.*
3. *Calcula una base de $N(f)\cap Im(f)$.*
4. *Sea $B=\{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\}$. Calcula $M_B(f)$.*

**Solución:**

1. Puesto que $N(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0\}$, tenemos que $N(f)$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones:

$$N(f)\equiv\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 0\\ -x & + & y & & & = & 0\\ x & + & y & - & 2z & = & 0\end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema. Para ello tomamos la matriz de coeficientes y realizamos operaciones por filas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{12}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Luego $N(f)\equiv\left\{\begin{array}{l} x-z=0\\ y-z=0\end{array}\right.$ por lo que $\dim(N(f))=3-2=1$, y una base es $B_{N(f)}=\{(1,1,1)\}$.

2. Sabemos que $Im(f)=L[f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)]$. Además, $\dim(Im(f))=3-\dim(N(f))=3-1=2$. Como $f(1,0,0)$ y $f(0,1,0)$ son linealmente independientes, una base de la imagen de $f$ es $B_{Im(f)}=\{(0,-1,1),\ (1,1,1)\}$. El número de ecuaciones cartesianas que definen a esta subespacio es $3-2=1$. Esta ecuación puede obtenerse como sigue:

$$Im(f)\equiv\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ x & y & z\end{vmatrix}=0;\quad Im(f)\equiv -2x+y+z=0.$$

También podríamos haber obtenido esta ecuación formando una base lo más reducida posible (y esto lo hacemos a partir de un sistema de generadores)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{12}(1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A partir de la base obtenida, $\{(1,0,2),\ (0,1,-1)\}$ escribimos las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & a & & \\ y & = & & & b\\ z & = & 2a & - & b\end{array}\right.$$

Lo que nos da la ecuación $z=2x-y$ para el subespacio $\mathrm{Im}(f)$, que si nos fijamos es la misma que la obtenida previamente.

3. Hemos visto que una base del núcleo de $f$ es $\{(1,1,1)\}$. Este vector pertenece a $\mathrm{Im}(f)$ (esto podemos verlo porque $(1,1,1)=f(0,1,0)$, o bien porque este vector satisface la ecuación de $\mathrm{Im}(f)$). Por tanto, $N(f)\subseteq\mathrm{Im}(f)$. En tal caso, $N(f)\cap\mathrm{Im}(f)=N(f)$ y por tanto, una base de la intersección es $\{(1,1,1)\}$.

4. Para calcular $M_B(f)$ calculamos las imágenes de los vectores de $B$ y posteriormente calculamos sus coordenadas en la base $B$. Tenemos que:

- $f(1,0,1) = (-1,-1,-1) = 0 \cdot (1,0,1) + 0 \cdot (0,1,1) - 1 \cdot (1,1,1)$.
- $f(0,1,1) = (0,1,-1) = -2 \cdot (1,0,1) - 1 \cdot (0,1,1) + 2 \cdot (1,1,1)$.
- $f(1,1,1) = (0,0,0) = 0 \cdot (1,0,1) + 0 \cdot (0,1,1) + 0 \cdot (1,1,1)$.

Luego $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 9.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{47})$.

1. *Estudia si $A$ es diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentra $P \in M_2(\mathbb{Z}_{47})$, regular, tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.*
2. *Calcula $A^{48}$.*

**Solución:**

1. Comenzamos por el cálculo del polinomio característico:

   $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda + (-45) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 + 44\lambda + 2.$

   Calculamos los valores propios, es decir, las raíces de este polinomio. Podemos ver que $p_A(1) = 0$, por lo que dividimos por $\lambda - 1$.

   $$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 44 & 2 \\ 1 & & 1 & 45 \\ \hline & 1 & 45 & 0 \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array}$$

   Los valores propios son entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Ambos tienen multiplicidad algebraica igual a 1. A partir de aquí construimos la siguiente tabla, con los valores propios y sus multiplicidades:

   | Valor propio | M. algebraica | M. geométrica |
   |---|---|---|
   | $\lambda_1 = 1$ | $\alpha_1 = 1$ | $d_1 = 1$ |
   | $\lambda_2 = 2$ | $\alpha_2 = 1$ | $d_2 = 1$ |

   Y como la suma de las multiplicidades geométricas es igual al número de filas de la matriz, entonces $A$ es diagonalizable.

   A continuación calculamos los subespacios propios. Para ello tomamos las matrices $A - Id$ y $A - 2Id$ y calculamos sus formas de Hermite:

   $A - Id = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(24)} \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 9 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(38)} \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego $V_1 \equiv x + 26y = 0$ y una base es $B_{V_1} = \{(21, 1)\}$.

   $A - 2Id = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(38)} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $V_2$ es el subespacio de ecuación $x + 5y = 0$ y una base es $B_{V_2} = \{(42, 1)\}$.

   Entonces, si tomamos $P = \begin{pmatrix} 21 & 42 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Si llamamos $D$ a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $A = PDP^{-1}$, luego $A^{48} = PD^{48}P^{-1}$. Y puesto que $D$ es una matriz diagonal, $D^{48} = \begin{pmatrix} 1^{48} & 0 \\ 0 & 2^{48} \end{pmatrix}$.

   Y ahora, dado que 47 es primo, tenemos que $2^{46} = 1$, luego $D^{46} = Id$ y $A^{46} = Id$. En tal caso,

   $$A^{48} = A^{46}A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}.$$

49, 58, 67, 76, 85, 94, 139, 148, 157, 166, 175, 184, 193, 229, 238, 247, 256, 265, 274, 283, 292, 319, 328, 337, 346, 355, 364, 373, 382, 391, 409, 418, 427, 436, 445, 454, 463, 472, 481, 490, 508, 517, 526, 535, 544, 553, 562, 571, 580, 607, 616, 625, 634, 643, 652, 661, 670, 706, 715, 724, 733, 742, 751, 760, 805, 814, 823, 832, 841, 850, 904, 913, 922, 931, 940, 1039, 1048, 1057, 1066, 1075, 1084, 1093, 1129, 1138, 1147, 1156, 1165, 1174, 1183, 1192, 1219, 1228, 1237, 1246, 1255, 1264, 1273, 1282, 1291, 1309, 1318, 1327, 1336, 1345, 1354, 1363, 1372, 1381, 1390, 1408, 1417, 1426, 1435, 1444, 1453, 1462, 1471, 1480, 1507, 1516, 1525, 1534, 1543, 1552, 1561, 1570, 1606, 1615, 1624, 1633, 1642, 1651, 1660, 1705, 1714, 1723, 1732, 1741, 1750, 1804, 1813, 1822, 1831, 1840, 1903, 1912, 1921, 1930, 2029, 2038, 2047, 2056, 2065, 2074, 2083, 2092, 2119, 2128, 2137, 2146, 2155, 2164, 2173, 2182, 2191, 2209, 2218, 2227, 2236, 2245, 2254, 2263, 2272, 2281, 2290, 2308, 2317, 2326, 2335, 2344, 2353, 2362, 2371, 2380, 2407, 2416, 2425, 2434, 2443, 2452, 2461, 2470, 2506, 2515, 2524, 2533, 2542, 2551, 2560, 2605, 2614, 2623, 2632, 2641, 2650, 2704, 2713, 2722, 2731, 2740, 2803, 2812, 2821, 2830, 2902, 2911, 2920, 3019, 3028, 3037, 3046, 3055, 3064, 3073, 3082, 3091, 3109, 3118, 3127, 3136, 3145, 3154, 3163, 3172, 3181, 3190, 3208, 3217, 3226, 3235, 3244, 3253, 3262, 3271, 3280, 3307, 3316, 3325, 3334, 3343, 3352, 3361, 3370, 3406, 3415, 3424, 3433, 3442, 3451, 3460, 3505, 3514, 3523, 3532, 3541, 3550, 3604, 3613, 3622, 3631, 3640, 3703, 3712, 3721, 3730, 3802, 3811, 3820, 3901, 3910, 4009, 4018, 4027, 4036, 4045, 4054, 4063, 4072, 4081, 4090, 4108, 4117, 4126, 4135, 4144, 4153, 4162, 4171, 4180, 4207, 4216, 4225, 4234, 4243, 4252, 4261, 4270, 4306, 4315, 4324, 4333, 4342, 4351, 4360, 4405, 4414, 4423, 4432, 4441, 4450, 4504, 4513, 4522, 4531, 4540, 4603, 4612, 4621, 4630, 4702, 4711, 4720, 4801, 4810, 4900, 5008, 5017, 5026, 5035, 5044, 5053, 5062, 5071, 5080, 5107, 5116, 5125, 5134, 5143, 5152, 5161, 5170, 5206, 5215, 5224, 5233, 5242, 5251, 5260, 5305, 5314, 5323, 5332, 5341, 5350, 5404, 5413, 5422, 5431, 5440, 5503, 5512, 5521, 5530, 5602, 5611, 5620, 5701, 5710, 5800, 6007, 6016, 6025, 6034, 6043, 6052, 6061, 6070, 6106, 6115, 6124, 6133, 6142, 6151, 6160, 6205, 6214, 6223, 6232, 6241, 6250, 6304, 6313, 6322, 6331, 6340, 6403, 6412, 6421, 6430, 6502, 6511, 6520, 6601, 6610, 6700, 7006, 7015, 7024, 7033, 7042, 7051, 7060, 7105, 7114, 7123, 7132, 7141, 7150, 7204, 7213, 7222, 7231, 7240, 7303, 7312, 7321, 7330, 7402, 7411, 7420, 7501, 7510, 7600, 8005, 8014, 8023, 8032, 8041, 8050, 8104, 8113, 8122, 8131, 8140, 8203, 8212, 8221, 8230, 8302, 8311, 8320, 8401, 8410, 8500, 9004, 9013, 9022, 9031, 9040, 9103, 9112, 9121, 9130, 9202, 9211, 9220, 9301, 9310, 9400, 10039, 10048, 10057, 10066, 10075, 10084, 10093, 10129, 10138, 10147, 10156, 10165, 10174, 10183, 10192, 10219, 10228, 10237, 10246, 10255, 10264, 10273, 10282, 10291, 10309, 10318, 10327, 10336, 10345, 10354, 10363, 10372, 10381, 10390, 10408, 10417, 10426, 10435, 10444, 10453, 10462, 10471, 10480, 10507, 10516, 10525, 10534, 10543, 10552, 10561, 10570, 10606, 10615, 10624, 10633, 10642, 10651, 10660, 10705, 10714, 10723, 10732, 10741, 10750, 10804, 10813, 10822, 10831, 10840, 10903, 10912, 10921, 10930, 11029, 11038, 11047, 11056, 11065, 11074, 11083, 11092, 11119, 11128, 11137, 11146, 11155, 11164, 11173, 11182, 11191, 11209, 11218, 11227, 11236, 11245, 11254, 11263, 11272, 11281, 11290, 11308, 11317, 11326, 11335, 11344, 11353, 11362, 11371, 11380, 11407, 11416, 11425, 11434, 11443, 11452, 11461, 11470, 11506, 11515, 11524, 11533, 11542, 11551, 11560, 11605, 11614, 11623, 11632, 11641, 11650, 11704, 11713, 11722, 11731, 11740, 11803, 11812, 11821, 11830, 11902, 11911, 11920, 12019, 12028, 12037, 12046, 12055, 12064, 12073, 12082, 12091, 12109, 12118, 12127, 12136, 12145, 12154, 12163, 12172, 12181, 12190, 12208, 12217, 12226, 12235, 12244, 12253, 12262, 12271, 12280, 12307, 12316, 12325, 12334, 12343, 12352, 12361, 12370, 12406, 12415, 12424, 12433, 12442, 12451, 12460, 12505, 12514, 12523, 12532, 12541, 12550, 12604, 12613, 12622, 12631, 12640, 12703, 12712, 12721, 12730, 12802, 12811, 12820, 12901, 12910, 13009, 13018, 13027, 13036, 13045, 13054, 13063, 13072, 13081, 13090, 13108, 13117, 13126, 13135, 13144, 13153, 13162, 13171, 13180, 13207, 13216, 13225, 13234, 13243, 13252, 13261, 13270, 13306, 13315, 13324, 13333, 13342, 13351, 13360, 13405, 13414, 13423, 13432, 13441, 13450, 13504, 13513, 13522, 13531, 13540, 13603, 13612, 13621, 13630, 13702, 13711, 13720, 13801, 13810, 13900, 14008, 14017, 14026, 14035, 14044, 14053, 14062, 14071, 14080, 14107, 14116, 14125, 14134, 14143, 14152, 14161, 14170, 14206, 14215, 14224, 14233, 14242, 14251, 14260, 14305, 14314, 14323, 14332, 14341, 14350, 14404, 14413, 14422, 14431, 14440, 14503, 14512, 14521, 14530, 14602, 14611, 14620, 14701, 14710, 14800, 15007, 15016, 15025, 15034, 15043, 15052, 15061, 15070, 15106, 15115, 15124, 15133, 15142, 15151, 15160, 15205, 15214, 15223, 15232, 15241, 15250, 15304, 15313, 15322, 15331, 15340, 15403, 15412, 15421, 15430, 15502, 15511, 15520, 15601, 15610, 15700, 16006, 16015, 16024, 16033, 16042, 16051, 16060, 16105, 16114, 16123, 16132, 16141, 16150, 16204, 16213, 16222, 16231, 16240, 16303, 16312, 16321, 16330, 16402, 16411, 16420, 16501, 16510, 16600, 17005, 17014, 17023, 17032, 17041, 17050, 17104, 17113, 17122, 17131, 17140, 17203, 17212, 17221, 17230, 17302, 17311, 17320, 17401, 17410, 17500, 18004, 18013, 18022, 18031, 18040, 18103, 18112, 18121, 18130, 18202, 18211, 18220, 18301, 18310, 18400, 19003, 19012, 19021, 19030, 19102, 19111, 19120, 19201, 19210, 19300, 20029, 20038, 20047, 20056, 20065, 20074, 20083, 20092, 20119, 20128, 20137, 20146, 20155, 20164, 20173, 20182, 20191, 20209, 20218, 20227, 20236, 20245, 20254, 20263, 20272, 20281, 20290, 20308, 20317, 20326, 20335, 20344, 20353, 20362, 20371, 20380, 20407, 20416, 20425, 20434, 20443, 20452, 20461, 20470, 20506, 20515, 20524, 20533, 20542, 20551, 20560, 20605, 20614, 20623, 20632, 20641, 20650, 20704, 20713, 20722, 20731, 20740, 20803, 20812, 20821, 20830, 20902, 20911, 20920, 21019, 21028, 21037, 21046, 21055, 21064, 21073, 21082, 21091, 21109, 21118, 21127, 21136, 21145, 21154, 21163, 21172, 21181, 21190, 21208, 21217, 21226, 21235, 21244, 21253, 21262, 21271, 21280, 21307, 21316, 21325, 21334, 21343, 21352, 21361, 21370, 21406, 21415, 21424, 21433, 21442, 21451, 21460, 21505, 21514, 21523, 21532, 21541, 21550, 21604, 21613, 21622, 21631, 21640, 21703, 21712, 21721, 21730, 21802, 21811, 21820, 21901, 21910, 22009, 22018, 22027, 22036, 22045, 22054, 22063, 22072, 22081, 22090, 22108, 22117, 22126, 22135, 22144, 22153, 22162, 22171, 22180, 22207, 22216, 22225, 22234, 22243, 22252, 22261, 22270, 22306, 22315, 22324, 22333, 22342, 22351, 22360, 22405, 22414, 22423, 22432, 22441, 22450, 22504, 22513, 22522, 22531, 22540, 22603, 22612, 22621, 22630, 22702, 22711, 22720, 22801, 22810, 22900, 23008, 23017, 23026, 23035, 23044, 23053, 23062, 23071, 23080, 23107, 23116, 23125, 23134, 23143, 23152, 23161, 23170, 23206, 23215, 23224, 23233, 23242, 23251, 23260, 23305, 23314, 23323, 23332, 23341, 23350, 23404, 23413, 23422, 23431, 23440, 23503, 23512, 23521, 23530, 23602, 23611, 23620, 23701, 23710, 23800, 24007, 24016, 24025, 24034, 24043, 24052, 24061, 24070, 24106, 24115, 24124, 24133, 24142, 24151, 24160, 24205, 24214, 24223, 24232, 24241, 24250, 24304, 24313, 24322, 24331, 24340, 24403, 24412, 24421, 24430, 24502, 24511, 24520, 24601, 24610, 24700, 25006, 25015, 25024, 25033, 25042, 25051, 25060, 25105, 25114, 25123, 25132, 25141, 25150, 25204, 25213, 25222, 25231, 25240, 25303, 25312, 25321, 25330, 25402, 25411, 25420, 25501, 25510, 25600, 26005, 26014, 26023, 26032, 26041, 26050, 26104, 26113, 26122, 26131, 26140, 26203, 26212, 26221, 26230, 26302, 26311, 26320, 26401, 26410, 26500, 27004, 27013, 27022, 27031, 27040, 27103, 27112, 27121, 27130, 27202, 27211, 27220, 27301, 27310, 27400, 28003, 28012, 28021, 28030, 28102, 28111, 28120, 28201, 28210, 28300, 29002, 29011, 29020, 29101, 29110, 29200, 30019, 30028, 30037, 30046, 30055, 30064, 30073, 30082, 30091, 30109, 30118, 30127, 30136, 30145, 30154, 30163, 30172, 30181, 30190, 30208, 30217, 30226, 30235, 30244, 30253, 30262, 30271, 30280, 30307, 30316, 30325, 30334, 30343, 30352, 30361, 30370, 30406, 30415, 30424, 30433, 30442, 30451, 30460, 30505, 30514, 30523, 30532, 30541, 30550, 30604, 30613, 30622, 30631, 30640, 30703, 30712, 30721, 30730, 30802, 30811, 30820, 30901, 30910, 31009, 31018, 31027, 31036, 31045, 31054, 31063, 31072, 31081, 31090, 31108, 31117, 31126, 31135, 31144, 31153, 31162, 31171, 31180, 31207, 31216, 31225, 31234, 31243, 31252, 31261, 31270, 31306, 31315, 31324, 31333, 31342, 31351, 31360, 31405, 31414, 31423, 31432, 31441, 31450, 31504, 31513, 31522, 31531, 31540, 31603, 31612, 31621, 31630, 31702, 31711, 31720, 31801, 31810, 31900, 32008, 32017, 32026, 32035, 32044, 32053, 32062, 32071, 32080, 32107, 32116, 32125, 32134, 32143, 32152, 32161, 32170, 32206, 32215, 32224, 32233, 32242, 32251, 32260, 32305, 32314, 32323, 32332, 32341, 32350, 32404, 32413, 32422, 32431, 32440, 32503, 32512, 32521, 32530, 32602, 32611, 32620, 32701, 32710, 32800, 33007, 33016, 33025, 33034, 33043, 33052, 33061, 33070, 33106, 33115, 33124, 33133, 33142, 33151, 33160, 33205, 33214, 33223, 33232, 33241, 33250, 33304, 33313, 33322, 33331, 33340, 33403, 33412, 33421, 33430, 33502, 33511, 33520, 33601, 33610, 33700, 34006, 34015, 34024, 34033, 34042, 34051, 34060, 34105, 34114, 34123, 34132, 34141, 34150, 34204, 34213, 34222, 34231, 34240, 34303, 34312, 34321, 34330, 34402, 34411, 34420, 34501, 34510, 34600, 35005, 35014, 35023, 35032, 35041, 35050, 35104, 35113, 35122, 35131, 35140, 35203, 35212, 35221, 35230, 35302, 35311, 35320, 35401, 35410, 35500, 36004, 36013, 36022, 36031, 36040, 36103, 36112, 36121, 36130, 36202, 36211, 36220, 36301, 36310, 36400, 37003, 37012, 37021, 37030, 37102, 37111, 37120, 37201, 37210, 37300, 38002, 38011, 38020, 38101, 38110, 38200, 39001, 39010, 39100, 40009, 40018, 40027, 40036, 40045, 40054, 40063, 40072, 40081, 40090, 40108, 40117, 40126, 40135, 40144, 40153, 40162, 40171, 40180, 40207, 40216, 40225, 40234, 40243, 40252, 40261, 40270, 40306, 40315, 40324, 40333, 40342, 40351, 40360, 40405, 40414, 40423, 40432, 40441, 40450, 40504, 40513, 40522, 40531, 40540, 40603, 40612, 40621, 40630, 40702, 40711, 40720, 40801, 40810, 40900, 41008, 41017, 41026, 41035, 41044, 41053, 41062, 41071, 41080, 41107, 41116, 41125, 41134, 41143, 41152, 41161, 41170, 41206, 41215, 41224, 41233, 41242, 41251, 41260, 41305, 41314, 41323, 41332, 41341, 41350, 41404, 41413, 41422, 41431, 41440, 41503, 41512, 41521, 41530, 41602, 41611, 41620, 41701, 41710, 41800, 42007, 42016, 42025, 42034, 42043, 42052, 42061, 42070, 42106, 42115, 42124, 42133, 42142, 42151, 42160, 42205, 42214, 42223, 42232, 42241, 42250, 42304, 42313, 42322, 42331, 42340, 42403, 42412, 42421, 42430, 42502, 42511, 42520, 42601, 42610, 42700, 43006, 43015, 43024, 43033, 43042, 43051, 43060, 43105, 43114, 43123, 43132, 43141, 43150, 43204, 43213, 43222, 43231, 43240, 43303, 43312, 43321, 43330, 43402, 43411, 43420, 43501, 43510, 43600, 44005, 44014, 44023, 44032, 44041, 44050, 44104, 44113, 44122, 44131, 44140, 44203, 44212, 44221, 44230, 44302, 44311, 44320, 44401, 44410, 44500, 45004, 45013, 45022, 45031, 45040, 45103, 45112, 45121, 45130, 45202, 45211, 45220, 45301, 45310, 45400, 46003, 46012, 46021, 46030, 46102, 46111, 46120, 46201, 46210, 46300, 47002, 47011, 47020, 47101, 47110, 47200, 48001, 48010, 48100, 49000, 50008, 50017, 50026, 50035, 50044, 50053, 50062, 50071, 50080, 50107, 50116, 50125, 50134, 50143, 50152, 50161, 50170, 50206, 50215, 50224, 50233, 50242, 50251, 50260, 50305, 50314, 50323, 50332, 50341, 50350, 50404, 50413, 50422, 50431, 50440, 50503, 50512, 50521, 50530, 50602, 50611, 50620, 50701, 50710, 50800, 51007, 51016, 51025, 51034, 51043, 51052, 51061, 51070, 51106, 51115, 51124, 51133, 51142, 51151, 51160, 51205, 51214, 51223, 51232, 51241, 51250, 51304, 51313, 51322, 51331, 51340, 51403, 51412, 51421, 51430, 51502, 51511, 51520, 51601, 51610, 51700, 52006, 52015, 52024, 52033, 52042, 52051, 52060, 52105, 52114, 52123, 52132, 52141, 52150, 52204, 52213, 52222, 52231, 52240, 52303, 52312, 52321, 52330, 52402, 52411, 52420, 52501, 52510, 52600, 53005, 53014, 53023, 53032, 53041, 53050, 53104, 53113, 53122, 53131, 53140, 53203, 53212, 53221, 53230, 53302, 53311, 53320, 53401, 53410, 53500, 54004, 54013, 54022, 54031, 54040, 54103, 54112, 54121, 54130, 54202, 54211, 54220, 54301, 54310, 54400, 55003, 55012, 55021, 55030, 55102, 55111, 55120, 55201, 55210, 55300, 56002, 56011, 56020, 56101, 56110, 56200, 57001, 57010, 57100, 58000, 60007, 60016, 60025, 60034, 60043, 60052, 60061, 60070, 60106, 60115, 60124, 60133, 60142, 60151, 60160, 60205, 60214, 60223, 60232, 60241, 60250, 60304, 60313, 60322, 60331, 60340, 60403, 60412, 60421, 60430, 60502, 60511, 60520, 60601, 60610, 60700, 61006, 61015, 61024, 61033, 61042, 61051, 61060, 61105, 61114, 61123, 61132, 61141, 61150, 61204, 61213, 61222, 61231, 61240, 61303, 61312, 61321, 61330, 61402, 61411, 61420, 61501, 61510, 61600, 62005, 62014, 62023, 62032, 62041, 62050, 62104, 62113, 62122, 62131, 62140, 62203, 62212, 62221, 62230, 62302, 62311, 62320, 62401, 62410, 62500, 63004, 63013, 63022, 63031, 63040, 63103, 63112, 63121, 63130, 63202, 63211, 63220, 63301, 63310, 63400, 64003, 64012, 64021, 64030, 64102, 64111, 64120, 64201, 64210, 64300, 65002, 65011, 65020, 65101, 65110, 65200, 66001, 66010, 66100, 67000, 70006, 70015, 70024, 70033, 70042, 70051, 70060, 70105, 70114, 70123, 70132, 70141, 70150, 70204, 70213, 70222, 70231, 70240, 70303, 70312, 70321, 70330, 70402, 70411, 70420, 70501, 70510, 70600, 71005, 71014, 71023, 71032, 71041, 71050, 71104, 71113, 71122, 71131, 71140, 71203, 71212, 71221, 71230, 71302, 71311, 71320, 71401, 71410, 71500, 72004, 72013, 72022, 72031, 72040, 72103, 72112, 72121, 72130, 72202, 72211, 72220, 72301, 72310, 72400, 73003, 73012, 73021, 73030, 73102, 73111, 73120, 73201, 73210, 73300, 74002, 74011, 74020, 74101, 74110, 74200, 75001, 75010, 75100, 76000, 80005, 80014, 80023, 80032, 80041, 80050, 80104, 80113, 80122, 80131, 80140, 80203, 80212, 80221, 80230, 80302, 80311, 80320, 80401, 80410, 80500, 81004, 81013, 81022, 81031, 81040, 81103, 81112, 81121, 81130, 81202, 81211, 81220, 81301, 81310, 81400, 82003, 82012, 82021, 82030, 82102, 82111, 82120, 82201, 82210, 82300, 83002, 83011, 83020, 83101, 83110, 83200, 84001, 84010, 84100, 85000, 90004, 90013, 90022, 90031, 90040, 90103, 90112, 90121, 90130, 90202, 90211, 90220, 90301, 90310, 90400, 91003, 91012, 91021, 91030, 91102, 91111, 91120, 91201, 91210, 91300, 92002, 92011, 92020, 92101, 92110, 92200, 93001, 93010, 93100, 94000