APELLIDOS: ....

NOMBRE: ....D.N.I.: ....

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

13 de enero de 2016

Ejercicio 1. Sea $p(x) = x^7 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Factoriza $p(x)$ como producto de irreducibles.

Solución:
Comprobamos en primer lugar si $p(x)$ tiene o no raíces. Claramente, $p(0) = 2$, pero $p(1) = 0$. Dividimos por $x - 1 = x + 2$.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Como en la segunda división el resto ha sido distinto de cero nos quedamos únicamente con la primera. Es decir, hemos visto que $p(x) = (x+2)(x^6+x^5+x^3+1)$, y este último polinomio no tiene a 1 como raíz. Continuamos dividiendo por $x-2 = x+1$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
2 & & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 &
\end{array}
$$

Y llegamos a que $p(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^5 + x^2 + 2x + 1)$.
Dividimos ahora por los irreducibles de grado 2. El primero, $x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
2 & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Y vemos que el resto es 0 y el cociente $x^3 + 2x + 1$. A continuación realizamos la misma división sin usar el algoritmo de Horner:

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
x^5 & & & + & x^2 & + & 2x & + & 1 & x^2 + 1 \\
\cline{10-10}
x^5 & + & x^3 & & & & & & & x^3 + 2x + 1 \\
\cline{1-3}
 & & 2x^3 & + & x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & 2x^3 & & & + & 2x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x^2 & & & + & 1 & \\
 & & & & x^2 & & & + & 1 & \\
\cline{5-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Y tenemos entonces que $p(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 2x + 1)$. Y como $x^3 + 2x + 1$ es de grado 3 y no tiene raíces es irreducible.

Ejercicio 2. Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x^4+x^3+x^2+1}$.

1. Estudia si A es un cuerpo.
2. Calcula, si es posible, $(x^4+x^3+1)^{-1}$.
3. Encuentra $\alpha \in A$ tal que $(\alpha+x)(x^3+1) = (\alpha+1)x^4$.

Solución:

1. Para ver si A es un cuerpo estudiamos si $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ es irreducible o no. Fácilmente vemos que no tiene raíces. Dividimos entonces entre x^2+x+1, y podemos comprobar como $x^5+x^4+x^3+x^2+1 = (x^2+x+1)\cdot(x^3+1)+x$. Es decir, el resto de la división es x.

   Vemos entonces que $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ es irreducible luego A es un cuerpo.

2. Para calcular el inverso nos valemos del algoritmo extendido de Euclides. Realizamos las divisiones:

   - $x^5+x^4+x^3+x^2+1 = (x^4+x^3+1)\cdot x + x^3+x^2+x+1$.
   - $x^4+x^3+1 = (x^3+x^2+x+1)\cdot x + x^2+x+1$.
   - $x^3+x^2+x+1 = (x^2+x+1)\cdot x + 1$.

   Y con esto ya hemos terminado las divisiones. Esto nos da lugar a la siguiente tabla:

$r(x)$	$c(x)$	$v(x)$
$x^5+x^4+x^3+x^2+1$		0
x^4+x^3+1		1
x^3+x^2+x+1	x	
x^2+x+1	x	
1	x	

   Y ahora completamos esta tabla:

$r(x)$	$c(x)$	$v(x)$	
$x^5+x^4+x^3+x^2+1$		0	
x^4+x^3+1		1	
x^3+x^2+x+1	x	x	$0-x\cdot 1 = -x = x$
x^2+x+1	x	x^2+1	$1-x\cdot x = 1-x^2 = x^2+1$
1	x	x^3	$x-x\cdot(x^2+1) = x-x^3-x = x^3$

   Tenemos entonces que $(x^4+x^3+1)^{-1} = x^3$.

3. Tenemos que resolver una ecuación de grado 1. Para esto, dejamos en un miembro todos los términos que tienen a la incógnita (α) y en otro el resto. Y despejamos α.

   $(\alpha+x)(x^3+1) = (\alpha+1)x^4$
   $\alpha x^3+\alpha+x^4+x = \alpha x^4+x^4$
   $\alpha x^3+\alpha-\alpha x^4 = x^4-x^4-x$
   $\alpha x^4+\alpha x^3+\alpha = x$
   $\alpha(x^4+x^3+1) = x$
   $\alpha = x\cdot(x^4+x^3+1)^{-1}$
   $\alpha = x\cdot x^3 = x^4$

Ejercicio 3. Tenemos 5 niños: Antonio, Begoña, Carlos, Dolores y Esteban. Repartimos 20 caramelos entre estos 5 niños de forma que cada niño recibe al menos uno. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?. ¿En cuántos de los repartos anteriores tiene Carlos un número par de caramelos?.

¿En cuántos de los repartos tienen todos los niños un número par de caramelos?

Solución:

Llamemos A, B, C, D y E al número de caramelos que repartimos a cada uno de los niños.

Puesto que cada niño se lleva al menos un caramelo, entonces hemos de repartir 15 caramelos. Por tanto, lo que tenemos es que encontrar el número de soluciones naturales de la ecuación

$$A' + B' + C' + D' + E' = 15$$

Este número es $\binom{15+5-1}{5-1} = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4!\cdot 15!} = 3876$.

Si queremos ver en cuantos repartos se lleva Carlos un número par de caramelos, lo que hacemos es distinguir los posibles casos:

- Carlos se lleva 2 caramelos. En este caso, $C' = 1$ (pues $C' = C-1$, es decir, una unidad menos que el número de caramelos que se lleva Carlos). Nos quedan entonces por repartir 14 caramelos entre los otros cuatro niños, luego tenemos que contar el número de soluciones naturales de la ecuación $A' + B' + D' + E' = 14$, y no da $\binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3} = 680$.
- Carlos se lleva 4 caramelos. Contamos las soluciones de la ecuación $A' + B' + D' + E' = 12$, y son $\binom{15}{3} = 455$.
- Carlos se lleva 6 caramelos. Nos queda la ecuación $A' + B' + D' + E' = 10$, que tiene $\binom{13}{3} = 286$ soluciones.
- Carlos se lleva 8 caramelos. Hay $\binom{11}{3} = 165$ posibilidades.
- Carlos se lleva 10 caramelos. Hay $\binom{9}{3} = 84$ posibilidades.
- Carlos se lleva 12 caramelos. Hay $\binom{7}{3} = 35$ posibilidades.
- Carlos se lleva 14 caramelos. Hay $\binom{5}{3} = 10$ posibilidades.
- Carlos se lleva 16 caramelos. Hay $\binom{3}{3} = 1$ posibilidad.

Entonces el número de repartos en los que Carlos se lleva un número par de caramelos es $680 + 455 + 286 + 165 + 84 + 35 + 10 + 1 = 1716$.

Por último, vamos a contar el número de repartos en los que todos los niños se llevan un número par de caramelos.

El número mínimo de caramelos que puede llevar ahora cada niño es 2. Por tanto, nos quedan por repartir 10 caramemlos a los 5 niños.

Hay que contar entonces el número de soluciones naturales pares de la ecuación $A + B + C + D + E = 10$. Pero puesto que A, B, C, D, E son pares, podemos escribirlos como $A = 2A'$, $B = 2B'$, $C = 2C'$, $D = 2D'$ y $E = 2E'$.

Contamos entonces el número de soluciones naturales de la ecuación $2A' + 2B' + 2C' + 2D' + 2E' = 10$, es decir, $A' + B' + C' + D' + E' = 5$.

El número de soluciones es $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$.

En la siguiente tabla están los 126 repartos.

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
2	2	2	2	12	2	4	2	2	10	2	6	4	6	2	4	2	4	6	4	4	6	4	2	4	6	4	4	4	2
2	2	2	4	10	2	4	2	4	8	2	6	6	2	4	4	2	4	8	2	4	6	4	4	2	6	4	6	2	2
2	2	2	6	8	2	4	2	6	6	2	6	6	4	2	4	2	6	2	6	4	6	6	2	2	6	6	2	2	4
2	2	2	8	6	2	4	2	8	4	2	6	8	2	2	4	2	6	4	4	4	8	2	2	4	6	6	2	4	2
2	2	2	10	4	2	4	2	10	2	2	8	2	2	6	4	2	6	6	2	4	8	2	4	2	6	6	4	2	2
2	2	2	12	2	2	4	4	2	8	2	8	2	4	4	4	2	8	2	4	4	8	4	2	2	6	8	2	2	2
2	2	4	2	10	2	4	4	4	6	2	8	2	6	2	4	2	8	4	2	4	10	2	2	2	8	2	2	2	6
2	2	4	4	8	2	4	4	6	4	2	8	4	2	4	4	2	10	2	2	6	2	2	2	8	8	2	2	4	4
2	2	4	6	6	2	4	4	8	2	2	8	4	4	2	4	4	2	2	8	6	2	2	4	6	8	2	2	6	2
2	2	4	8	4	2	4	6	2	6	2	8	6	2	2	4	4	2	4	6	6	2	2	6	4	8	2	4	2	4
2	2	4	10	2	2	4	6	4	4	2	10	2	2	4	4	4	2	6	4	6	2	2	8	2	8	2	4	4	2
2	2	6	2	8	2	4	6	6	2	2	10	2	4	2	4	4	2	8	2	6	2	4	2	6	8	2	6	2	2
2	2	6	4	6	2	4	8	2	4	2	10	4	2	2	4	4	4	2	6	6	2	4	4	4	8	4	2	2	4
2	2	6	6	4	2	4	8	4	2	2	12	2	2	2	4	4	4	4	4	6	2	2	6	2	8	4	2	4	2
2	2	6	8	2	2	4	10	2	2	4	2	2	2	10	4	4	4	6	2	6	2	6	2	4	8	4	4	2	2
2	2	8	2	6	2	6	2	2	8	4	2	2	4	8	4	4	6	2	4	6	2	6	4	2	8	6	2	2	2
2	2	8	4	4	2	6	2	4	6	4	2	2	6	6	4	4	6	4	2	6	2	8	2	2	10	2	2	2	4
2	2	8	6	2	2	6	2	6	4	4	2	2	8	4	4	4	8	2	2	6	4	2	2	6	10	2	2	4	2
2	2	10	2	4	2	6	2	8	2	4	2	2	10	2	4	6	2	2	6	6	4	2	4	4	10	2	4	2	2
2	2	10	4	2	2	6	4	2	6	4	2	4	2	8	4	6	2	4	4	6	4	2	6	2	10	4	2	2	2
2	2	12	2	2	2	6	4	4	4	4	2	4	4	6	4	6	2	6	2	6	4	4	2	4	12	2	2	2	2

Ejercicio 4. Tenemos un grupo de 20 personas: 11 mujeres y el resto, hombres. Elegimos 12 de ellas para realizar un trabajo.

- ¿De cuántas formas distintas podemos hacerlo?
- ¿En cuántas de ellas hay más mujeres que hombres?
- Si entre las 20 personas hay dos que no pueden trabajar juntas. ¿De cuántas formas podríamos entonces elegir el grupo de las doce?

Solución:

- Tenemos que ver de cuántas formas podemos elegir 12 personas de un grupo de 20. El número es $\binom{20}{12} = 125970$.
- Para que haya más mujeres que hombres tenemos varias posibilidades:
  - Que haya 7 mujeres (y 5 hombres). Podemos realizar $\binom{11}{7} \cdot \binom{9}{5} = 330 \cdot 126 = 41580$ grupos distintos con esta composición (en primer lugar elegimos 7 mujeres de un total de 11 y a continuación elegimos 5 hombres de un total de 9).
  - Que haya 8 mujeres y 4 hombres. El número de formas de elegirlos es $\binom{11}{8} \cdot \binom{9}{4} = 165 \cdot 126 = 20790$.
  - Que haya 9 mujeres y 3 hombres. Podemos elegirlos de $\binom{11}{9} \cdot \binom{9}{3} = 55 \cdot 84 = 4620$ formas distintas.
  - Que haya 10 mujeres y 2 hombres. Se pueden elegir de $\binom{11}{10}\binom{9}{2} = 11 \cdot 36 = 396$ maneras.
  - Que haya 11 mujeres y 1 hombre. Hay $\binom{11}{11} \cdot \binom{9}{1} = 1 \cdot 9 = 9$ formas de elegirlos.

  En total tenemos que podemos formar el grupo con más mujeres que hombres de $41580+20790+4620+396+9 = 67395$ formas diferentes.

- Supongamos que A y B son las dos personas que no pueden ir juntas. Podemos plantear el ejercicio de dos formas:
  1. Contamos en cuantas elecciones están estas dos personas. El resultado lo restamos al número total de formas de seleccionar un grupo de 12.

     En este caso, si A y B están en el grupo, nos queda elegir 10 personas de un grupo de 18, lo que podemos hacer de $\binom{18}{10} = 43758$ formas.

     Por tanto, tenemos $125970 - 43758 = 82212$ posibles grupos en los que no están simultáneamente las personas A y B.
  2. Distinguimos las tres posibles situaciones que se pueden dar, y sumamos el número de posibilidades de cada una de ellas:
     - La persona A está en el grupo, pero la B no. Hay que elegir entonces 11 personas de un grupo de 18, lo que podemos hacer de $\binom{18}{11} = 31824$ formas.
     - La persona B está en el grupo, pero la A no. Al igual que antes, hay que elegir 11 personas de un grupo de 18 que se puede hacer de 31824 formas.
     - No están ni la persona A ni la persona B. En tal caso, debemos elegir 12 personas de un grupo de 18, que podemos hacer de $\binom{18}{12} = 18564$ formas.

     Esto nos da un total de $31824 + 31824 + 18564 = 82212$, como era de esperar.