TEMA 1

Conjuntos, aplicaciones y relaciones (segunda parte)

Ejercicio 1. Dado el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los subconjuntos $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $T = \{0, 3, 6, 9\}$, calcula los siguientes subconjuntos de X:

$$P \cup T;\ P \cap T;\ \overline{P};\ \overline{T};\ \overline{P} \cap T;\ P \cap \overline{T};\ \overline{\overline{P} \cap T}$$

Ahora calcula los siguientes subconjuntos de $X \times X$:

$$P \times T;\ \overline{P} \times \overline{P};\ \overline{P} \times \overline{T};\ \overline{P \times T};\ \overline{P} \times T$$

$$(P \times \overline{T}) \cap (P \times \overline{P});\ (P \cap T) \times (\overline{P} \cap \overline{T})$$

Ejercicio 2.
Consideramos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, y los subconjuntos $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$ y $T = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Describe los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$.

$$P \cup T;\ P \cap T;\ \overline{P};\ \overline{T};\ \overline{P} \cap T;\ P \cap \overline{T};\ \overline{\overline{P} \cap T}$$

Ejercicio 3.
Sea X un conjunto. En $\mathcal{P}(X)$ tenemos definida la operación **diferencia simétrica**

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que para cualesquiera $A, B, C \subset X$ se tiene:

1. $A \Delta B = B \Delta A$.
2. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
3. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. $A \Delta A)\emptyset$.
5. $A \Delta \emptyset = A$.
6. $A \Delta X = \overline{A}$.
7. $A \Delta \overline{A} = X$.
8. $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 4.
Estudia si las siguientes identidades son verdaderas o falsas:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,

3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$,
4. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$,
5. $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$,
6. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

Ejercicio 5.
Comprueba las siguientes afirmaciones,

1. $A \cup B = B \cap C$ si, y sólo si, $A \subseteq B \subseteq C$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
3. Si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$, entonces $B \subseteq C$.

Ejercicio 6.
Da una aplicación biyectiva $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Ejercicio 7.
¿Define la expresión $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a}$ una aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$?

Ejercicio 8.
Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ cuando sea posible para cada uno de los siguientes pares de aplicaciones:

1. $\begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$

2. $\begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \\ x \mapsto \frac{3x+2}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & +\sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Ejercicio 9.
Para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ encuentra todas las aplicacines $f : A \to A$ tales que $f \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Ejercicio 10.
Dado un conjunto X no vacío, y $A, B \subseteq X$, se define $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Prueba que:

1. $\chi_A = \chi_B$ si, y sólo si, $A = B$.
2. $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.
3. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
4. $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$.
5. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$.
6. La aplicación $\chi : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X$ dada por $\chi(A) = \chi_A$ es una biyección[1].

[1] $\{0, 1\}^X$ denota el conjunto de todas las aplicaciones $X \to \{0, 1\}$.

Ejercicio 11.
Sea $f : X \to X$ una aplicación biyectiva, e Y un subconjunto de X tal que $f_*(Y) \subseteq Y$. ¿Es cierto que la aplicación $Y \to Y$ dada por $y \mapsto f(y)$ es biyectiva?

Ejercicio 12.
Estudia en que casos existe una aplicación satisfaciendo las condiciones que se exigen:

1. $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$, $f([x]_8) = [x]_4$.
2. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x]_8$.
3. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_4$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_4$, donde $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ verifica $g([x]_8) = [x]_8^2$.
4. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x^2]_8$.
5. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_2$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_2$ y g es la misma aplicación del apartado 3.
6. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(\frac{a}{b}) = a + b$.
7. $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $f([x]_n) = [E(\frac{x}{2})]_n$, donde E es la función *parte entera*.
8. $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$, $f([x]_3) = [x^2]_6$.
9. $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9$, $f([x]_3) = [x^2]_9$.

Ejercicio 13.
Para cada una de las relaciones de equivalencia siguientes definidas sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, da una interpretación geométrica del conjunto cociente.

1. $(a, b)R(c, d) \iff a + b = c + d$.
2. $(a, b)R(c, d) \iff |a| + |b| = |c| + |d|$.
3. $(a, b)R(c, d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
4. $(a, b)R(c, d) \iff a^2 + 2b^2 = c^2 + 2d^2$.

Ejercicio 14.
Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que a cada entero $n$le asocia el resto de dividir n por 7.

1. Calcula $f(259)$.
2. Calcula $Im(f)$.
3. Calcula $f^*(\{1, 3, 5, 7\})$.
4. Calcula $f^*(\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\})$.