APELLIDOS: .... GRUPO: ....

NOMBRE: .... NIF: ....

ALEM

Grado en Ingeniería Informática

21 de diciembre 2017

1. Sean $X_1 = \{(1,3,2),\ (3,4,3)\}$ y $X_2 = \{(1,1,3),\ (2,1,2),\ (3,1,1),\ (0,1,2)\}$ dos subconjuntos de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

   a) Comprueba que los vectores de X_1 son linealmente independientes y amplía este conjunto una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$ (llama a esta base B_1).

   b) Comprueba que los vectores de X_2 forman un sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Toma una base que esté contenida en X_2 (llámala B_2).

   c) Calcula la matriz del cambio de base de B_1 a B_2.

   d) Sea u el vector cuyas coordenadas en B_1 son $(1,1,1)$. ¿Cuál es el vector u? ¿Cuáles son sus coordenadas en B_2?

   Solución:

   a) Para comprobar si los vectores de X_1 son linealmente independientes formamos una matriz cuyas filas son estos vectores (más concretamente, las coordenadas de estos vectores en la base canónica). Si el rango coincide con el número de vectores, entonces serán linealmente independientes.

   Puesto que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 2$, ya que $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes.

   El rango también lo podríamos haber obtenido realizando operaciones elementales en la matriz:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Una vez visto que son linealmente independientes, ampliamos este conjunto a una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Dado que este espacio vectorial tiene dimensión 3, necesitamos añadir un vector. Y puesto que $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que

   $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

   Por tanto, nuestra base puede ser $B_1 = \{(1,3,2),\ (3,4,3),\ (1,0,0)\}$.

   Notemos que no podemos añadir el vector $(0,0,1)$, ya que en tal caso, el conjunto resultante (es decir, $\{(1,3,2),\ (3,4,3),\ (0,0,1)\}$) no sería una base pues ese conjunto es linealmente dependiente como nos lo muestra la siguiente igualdad: $(0,0,1) = (1,3,2) + 3(3,4,3)$.

   b) Para ver que el conjunto X_2 es un sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_5)^3$ comprobamos que el rango de la matriz formada por los vectores (sus coordenadas en B_c) es igual a la dimensión de $(\mathbb{Z}_5)^3$, es decir, igual a 3.

   Formamos la matriz (escribimos los vectores por columnas) y calculamos el rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(3)]{E_{14}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y como el rango es 3 concluimos que X_2 es un sistema de generadores.

Ahora hemos de extraer de este conjunto una base. Dicha base debe contener tres vectores, luego hay que eliminar uno. Para ello, tenemos que ver qué vector es combinación lineal del resto. Planteamos la ecuación $a(1,1,3)+b(2,1,2)+c(3,1,1)+d(0,1,2)=(0,0,0)$, que nos da el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ 3a & + & 2b & + & c & + & 2d & = & 0 \end{array}\right.$$

Para resolverlo, tomamos la matriz del sistema y calculamos su forma normal de Hermite (acabamos de calcularla). El sistema que nos queda es:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & 4c & & & = & 0 \\ & & b & + & 2c & & & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 0 \end{array}\right.$$

Una solución es $a=c=1$, $b=3$, $d=0$, luego $(1,1,3)+3(2,1,2)+(3,1,1)+0(0,1,2)=(0,0,0)$. De aquí podemos despejar $(1,1,3)$, $(2,1,2)$ y $(3,1,1)$, pero no $(0,1,2)$:

- $(1,1,3)=2(2,1,2)+4(3,1,1)$.
- $(2,1,2)=3(1,1,3)+3(3,1,1)$.
- $(3,1,1)=4(1,1,3)+2(2,1,2)$.

Puesto que $(3,1,1)$ es combinación lineal del resto, podemos suprimirlo, y nos queda entonces $B_2=\{(1,1,3),\ (2,1,2),\ (0,1,2)\}$ (también podríamos haber obtenido B_2 suprimiendo el $(2,1,2)$ o el $(1,1,3)$, pero no el $(0,1,2)$).

c) Sabemos que $M_{B_1\to B_2}=M_{B_c\to B_2}\cdot M_{B_1\to B_c}$, y que:

- $M_{B_1\to B_c}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (las columnas de esta matriz son las coordenadas de los vectores de B_1 en la base canónica).

- $M_{B_c\to B_2}=(M_{B_2\to B_c})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (esta última matriz se ha calculado realizando en la matriz Id las mismas operaciones que hemos realizado en el apartado anterior para obtener la forma de Hermite).

Luego:

$$M_{B_1\to B_2}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Se tiene que $u=1(1,3,2)+1(3,4,3)+1(1,0,0)=(0,2,0)$, ya que u tiene coordenadas $(1,1,1)$ en la base B_1.

Para calcular las coordenadas de u en B_2, multiplicamos las coordenadas de u en B_1 por la matriz del cambio de base de B_1 a B_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir, las coordenadas de u en B_2 son $(1,2,4)$.

2. Sean U y W los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^3$:

$$U = L[(1,2,1),\ (1,0,2)]; \quad W \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Calcula las ecuaciones cartesianas de U.

b) Calcula las ecuaciones cartesianas de $U+W$.

Solución:

a) Vamos a obtener una base de U lo más sencilla posible, a partir de ella escribiremos las ecuaciones paramétricas de U y de ahí las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego el conjunto $B_U = \{(1,0,2),\ (0,1,1)\}$ es una base de U (también lo es el conjunto $\{(1,2,1),\ (1,0,2)\}$, pero con el que hemos elegido los cálculos son más sencillos). Ahora, un vector (x,y,z) pertenece a U si es combinación lineal de estos dos vectores, es decir, $(x,y,z) = a(1,0,2) + b(0,1,1)$:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & a & & \\ y & = & & & b \\ z & = & 2a & + & b \end{array} \quad \text{de donde } z = 2x + y$$

Por tanto, U viene dado por una ecuación que es $x + 2y + z = 0$ (podemos comprobar fácilmente cómo los dos vectores $(1,2,1)$ y $(1,0,2)$ satisfacen esta ecuación).

b) Ahora calculamos el subespacio $U+W$. Necesitamos una base de W. Puesto que W viene dado por dos ecuaciones, la dimensión de W vale $3-2=1$, por lo que una base de W estará formada por un vector. Resolvemos el sistema que nos define a W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $W \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & + \ 2z & = & 0 \end{array} \right.$. Le damos a z el valor 1 y nos queda el vector $(0,1,1)$. Una base de W es entonces $B_W = \{(0,1,1)\}$.

Vemos como este vector pertenece a U, lo que nos dice que $W \subseteq U$. En tal caso, $U + W = U$, y por tanto, $U + W \equiv x + 2y + z = 0$.

3. Sea $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^2$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

   a) Calcula una base del núcleo de f.

   b) Sean $B_1 = \{(1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{(0, 1),\ (1, 1)\}$. Calcula $M_{B_1,B_2}(f)$.

Solución:

a) Tenemos que:

$$N(f) = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : \begin{array}{rcrcl} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Vemos que $dim(N(f)) = 3 - 2 = 1$, y una base del núcleo de f es $B_{N(f)} = \{(1, 1, 1)\}$.

b) Para calcular la matriz de f en las bases B_1 y B_2, calculamos las coordenadas en B_2 de las imágenes de los vectores de B_1. Estas coordenadas formarán las columnas de la matriz que nos piden:

- $f(1, 1, 0) = (1, 1) = 0 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1)$. Las coordenadas son $(0, 1)$.
- $f(1, 0, 1) = (0, 1) = 1 \cdot (0, 1) + 0 \cdot (1, 1)$. Las coordenadas son $(1, 0)$.
- $f(0, 0, 1) = (1, 1) = 0 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1)$. Las coordenadas son $(0, 1)$.

Tenemos entonces que $M_{B_1;B_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando la fórmula $M_{B_1;B_2}(f) = M_{B'_c \to B_2} \cdot M_{B_c;B'_c}(f) \cdot M_{B_1 \to B_c}$ también podemos obtener esta matriz. Para ello, calculamos las matrices que intervienen en la expresión:

- $M_{B_c;B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (las columnas de esta matriz son las imágenes de los vectores de la base canónica).
- $M_{B_1 \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (las columnas de esta matriz son los vectores de la base B_1).
- $M_{B'_c \to B_2} = (M_{B_2 \to B'_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$M_{B_1;B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

   a) Calcula los valores propios de A.

   b) Calcula una base de vectores propios de la matriz A.

   c) Calcula A^{11}.

Solución:

a) En primer lugar calculamos el polinomio característico. Puesto que A es una matriz 2×2 se tiene que:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Calculamos las raíces: $\lambda = \frac{-(-1)\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$, que nos da como valores propios $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

b) Calculamos una base de cada uno de los subespacios propios.

- Base de V_2.
  Puesto que $A - 2Id = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, el subespacio V_2 tiene como ecuación $x + y = 0$. Una base de V_2 es $B_{V_2} = \{(1, -1)\}$.
- Base de V_{-1}.
  Tenemos que $A - (-Id) = A + Id = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, y su forma de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Por tanto, la ecuación de V_{-1} es $x + 4y = 0$, y una base es $B_{V_{-1}} = \{(4, -1)\}$.

Juntando ambas bases tenemos una base de vectores propios: $B = \{(1, -1),\ (4, -1)\}$.

c) Sabemos que A es diagonalizable, y que si tomamos $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1}AP = D$, donde $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En tal caso, se tiene que $A = PDP^{-1}$, luego $A^{11} = PD^{11}P^{-1}$.

Tenemos que $D^{11} = \begin{pmatrix} 2^{11} & 0 \\ 0 & (-1)^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto:

$$A^{11} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2048 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2048 & -4 \\ -2048 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 684 & -2732 \\ -683 & 2731 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma que hemos calculado A^{11} podríamos haber calculado A^n, y obtendríamos;

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2^n + 4(-1)^n & -2^{n+2} + 4(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+2} - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Esta expresión es válida para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.