ejerciciostlaiachi1.pdf

Ejercicios resueltos Tema 1 - Laiachi

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

1. ~~4~~ 4.2 $(A \cap B) \times Y = (A \times Y) \cap (B \times Y)$

$\cancel{A \cap B}$ $(x,y) \in (A \cap B) \times Y \iff x \in (A \cap B) \times y \in Y \iff x \in A$ e $y \in Y$

y $x \in B$ e $y \in Y \iff (A \times Y) \cap (B \times Y)$

4.3) $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$

$\rightarrow \begin{cases} (x,y) \in A \times X \\ \text{y} \\ (x,y) \in (B \times Y \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \text{ e } y \in X \\ \text{y} \\ x \in B \text{ e } y \in Y \end{cases} \iff x \in A$ y B e $y \in X$ e Y

$\iff x \in (A \cap B)$ e $y \in (X \cap Y) \iff (A \cap B) \times (X \cap Y)$

11. 18

a) $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ 2x \equiv 1[7] = x \equiv \underbrace{1 \cdot 4}_{4}[7] \end{cases}$

1) $mcd(5,7) = 1$ | Se puede aplicar el Teorema del Resto del Chino

$M = 5 \cdot 7 = 35$

$m_1 = 5$ $m_2 = 7$

$a_1 = 3$ $a_2 = 4$

$M_1 = 7$ $M_2 = 5$

2) $1 = 7 \cdot V_1 + 5 \cdot U_1 \rightarrow V_1 = -2$, $U_1 = 3$

$1 = 5 \cdot V_2 + 7 \cdot U_2 \rightarrow V_2 = 3$, $U_2 = -2$

Entonces: Sabiendo $x \equiv a[M]$ y que $a = a_1 \cdot M_1 \cdot V_1 + a_2 \cdot M_2 \cdot V_2 = \underbrace{3 \cdot 7 \cdot -2}_{-42} + \underbrace{4 \cdot 5 \cdot 3}_{60} = 18$

El resultado es: $\boxed{x \equiv 18[35]}$

b) $\begin{cases} 4x \equiv 1 [7] \to \\ 5x \equiv 2[13] \to \end{cases}$ $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 6 [13] \end{cases}$

$1 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 2$

$2 = 5 \cdot x$

$x = 3$

$2 \cdot 3$

mcd 5, 13 → 1
mcd 7, 4 → 1 ∃ inversa

1) mcd (7,13) = 1
Se puede aplicar el Teorema del Resto del Chino

2) $M = 7 \cdot 13 = 91$
$M_1 = 13$
$M_2 = 7$

$a_1 = 2$

$a_2 = 6$

$m_1 = 7$

$m_2 = 13$

$1 = 13 \cdot v_1 + 7 \cdot u_1 \to v_1 = -1 \quad u_1 = 2$

$1 = 7 \cdot v_2 + 13 \cdot u_2 \to v_2 = 2 \quad u_2 = -1$

$a = a_1 \cdot M_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot M_2 \cdot v_2 = 2 \cdot 13 \cdot -1 + 6 \cdot 7 \cdot 2$
$-26 + 84 = 58$

Entonces:

$x \equiv a [M] = \boxed{x \equiv 58 [91]}$

3) c) $\begin{cases} x \equiv 2[5] \\ 2x \equiv 3[7] \\ 2x \equiv 4[12] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 3 \cdot 5 [7] \to x \equiv 15[7] \\ x \equiv -4 \cdot 4 [12] \to x \equiv -16[12] \end{cases} \to \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 1[7] \\ x \equiv 8[12] \end{cases}$

$2 \cdot x = 3$

$x = 5 \to 2 \cdot 5 = 10 = 3$

$2x = 4 \mod 12$

$x = -4$

1) $mcd(5,7) = mcd(12,5) = mcd(12,7) = 1$ Se puede aplicar el Teorema del Resto del Chino

2) $M = 5 \cdot 7 \cdot 12 = 35 (10+2) = 350 + 70 = 420$
$M_1 = 7 \cdot 12 = 84 \quad 2 = a_1 \quad m_1 = 5$
$M_2 = 5 \cdot 12 = 60 \quad 1 = a_2 \quad m_2 = 7$
$M_3 = 7 \cdot 5 = 35 \quad 8 = a_3 \quad m_3 = 12$

3) $1 = 84 v_1 + 5 \cdot u_1 \to v_1 = -1 \quad u_1 = 17$
$1 = 60 v_2 + 7 u_2 \to v_2 = 1 \quad u_2 = -17$
$1 = 35 v_3 + 12 V_3 \to V_3 = -1 \quad u_3 = 3$

$a = a_1 M_1 v_1 + a_2 v_2 M_2 + a_3 v_3 M_3$
$= 84 \cdot 2 \cdot (-1) + 60 \cdot 1 \cdot 2 + 35 \cdot 8 \cdot (-1)$
$= -168 + 120 - 280 = -328$
$= -168 + \underbrace{120 - 280}_{-160}$

Entonces: $x \equiv a [M] \Rightarrow x \equiv -328 [420] = \boxed{x \equiv 92 [420]}$

$$\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 3[5] \end{cases}$$

1) $Mcd(3,5) = 1$

2) $M = 3 \cdot 5 = 15$

$M_1 = 5 \quad a_1 = 2 \quad m_1 = 3$

$M_2 = 3 \quad a_2 = 3 \quad m_2 = 5$

3) $1 = 5 \cdot v_1 + 3 u_1 \rightarrow v_1 = -1 \quad u_1 = 2$

$1 = 3 \cdot v_1 + 5 u_2 \rightarrow v_1 = 2 \quad u_2 = -1$

4) $a = a_1 M_1 v_1 + a_2 M_2 v_2 = 2 \cdot 5 \cdot -1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = -10 + 18 = 8$

$x \equiv a[M] \Rightarrow x \equiv 8[15]$

II 25

$\varphi\ \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $\varphi(113400) = \cdot$

113400	2	2825	5
56700	2	565	5
28350	2	113	113
14125	5	1	
2825	5		

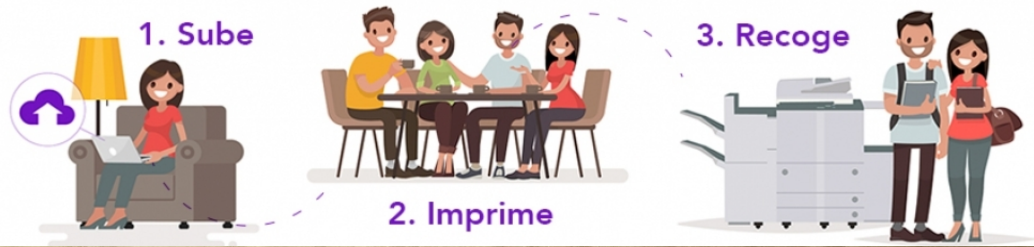
$113400 \lfloor 2$; 13 ; 1400 ; 000 ; $56700 \lfloor 2$; 0700 ; $28350 \lfloor 2$; 0350 ; 10 ; 0 ; $14125 \lfloor 5$; 14 ; 41 ; 12 ; 25 ; $2825 \lfloor 5$; 32 ; 25 ; $565 \lfloor 5$; 15 ; 113

Sabemos que

$$\varphi(113400) = \varphi(2^3 \cdot 5^3 \cdot 113) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3) \cdot \varphi(113) =$$

$$(2^3 - 2^2) \cdot (5^3 - 5^2) \cdot (113^1 - 113^0) = 4 \cdot 100 \cdot 112 = 11200 \cdot 4 = 44800$$

$8 - 4 \qquad 125 - 25 = 100$



$$\varphi(4225) = \varphi(5^2\cdot 13^2) = \varphi(5^2)\cdot\varphi(13^2) = (5^2-5^1)\cdot(13^2-13^1)$$

$$= (25-5)\cdot(169-13) = 20\cdot(156) = 312\cdot 10 = 3120$$

4225	5
845	5
169	13
13	13
1	

4225 |5 → 225, 845
845 |5 → 169
169 |13 → 0, 13

El resto de dividir

1573^{3881} entre 113400 $= 1573^{3881}$ en $\mathbb{Z}_{113400}$

$$\varphi(113400) = \varphi(2^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 3^4) = \varphi(2^3)\cdot\varphi(5^2)\cdot\varphi(7^1)\cdot\varphi(3^4)$$

113400	2
56700	2
28350	2
14175	5
2835	5
567	7
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$= \underbrace{(2^3-2^2)}_{4}\underbrace{(5^2-5)}_{20}\cdot\underbrace{(7^1-7^0)}_{6}\cdot\underbrace{(3^4-3^3)}_{81-27=54} = 25920$$

3881 |25920 → 3881, 0

No se puede (~~al ser~~)

1.15 Definimos en $\mathbb{R}$: $xRy \iff x-y\in\mathbb{Z}$

a) ¿R d E?
b) ¿Conjunto cociente?

a) $xRx \iff x-x=0\in\mathbb{Z}$ ✓
$xRy \iff x-y\in\mathbb{Z}$ ✓
$xRy,\ yRz \iff x-z\in\mathbb{Z}$ ✓
} RdE

Para cualquier $n\in\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[0],[1],[-1],[2],[-2]\dots [n]\ n\in\mathbb{Z}\}$

$xRy \iff x-y \in 2\pi\mathbb{Z}$ $\quad (2\pi\mathbb{Z} = 2\pi \cdot k \in \mathbb{Z})$

a) ¿R d E?

$$\left.\begin{array}{l} xRx \iff x-x = 0 \in 2\pi\mathbb{Z} \checkmark \\ xRy \iff x-y \in 2\pi\mathbb{Z} \checkmark \\ xRy, yRz \iff x-z \in 2\pi\mathbb{Z} \checkmark \end{array}\right\} R \text{ d } E$$

$x = y + 2\pi k_1$, $y = z + 2\pi k_2$ $\{ x - z = \cancel{y} + 2\pi k_1 \cancel{+} (y - 2\pi k_2) = 2\pi\underbrace{(k_1+k_2)}_{\in \mathbb{Z}}$

b) $R/_{\mathbb{Z}} = \{ [0], [2\pi], [-2\pi], [4\pi], [-4\pi] \ldots [k \cdot 2\pi] \}$ $\quad k \in \mathbb{Z}'$

1.19

Considera en $\mathbb{R}$: la relación: $xRy \iff x-y \in \mathbb{Q}$

a) R d E

$$\left.\begin{array}{l} xRx \iff x-x = 0 \in \mathbb{Q} \checkmark \\ xRy \iff x-y \in \mathbb{Q} \checkmark \\ xRy, yRq \iff x-z \in \mathbb{Q} \checkmark \end{array}\right\} R \text{ d } E$$

b)

Si $0 - y \in \mathbb{Q}$ entonces $y \in \mathbb{Q}$

$[0] = \{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{10}{3} \ldots q \in \mathbb{Q} \}$

$[\frac{3}{2}] = \{ 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 9, -15, \ldots q \in \mathbb{Q} \}$ $\quad \frac{3}{2} - y \in \mathbb{Q}$ entonces $y \in \mathbb{Q}$

$[\pi] \rightarrow$ no tiene clase en $\mathbb{Q}$, ya que es un número irracional

1.21

$\mathbb{Z}$ $\quad xRy \iff x-y$ es multiplo de $3 = 3 \cdot k \in \mathbb{Z}$

a) ¿R d E?

$xRx \iff x-x = 0 = 3 \cdot 0,\ 0 \in \mathbb{Z}$

$xRy \iff x-y \in 3\mathbb{Z} = 3 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

$xRy, yRz \iff x-z \in \mathbb{Z} = 3 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow x - z = 3k_1 + 3k_2 = 3\underbrace{(k_1+k_2)}_{\in \mathbb{Z}},\ k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$

$x = y + 3k_1,\ y = z + 3k_2$

b) Si x e y pares, $[x] \neq [y]$

Siempre y cuando $x \neq y$ y pertenezcan a la relación, $[x] \neq [y]$

c) ¿$[x] \cap [y] = \emptyset$? Que no tienen ningún elemento en común, es decir que si un elemento x ~~R~~ y se R con y, lo a y será distinta

$[x] \cup [y] = \mathbb{Z}$ Al no tener ningún elemento en común, y al hacer la unión entre estos conjuntos, sale el dominio

d ¿$\mathbb{Z}/R$? $= \{ [0], [1], [2], [-5] \ldots [k \in \mathbb{Z}] \}$

$\{0, 3, 6, 9, -6, \ldots\}$ $\{1, 4, 7 \ldots\}$

11|27

$[MCD(2, 1)$ en $\mathbb{Z}_2 \rightarrow MCD(2, 1) = 1]$

En $\mathbb{Z}_2$ es 1

$MCD(10, 12)$ en $\mathbb{Z}_{14}$, Lo haremos con Bezout. $[MCD(10, 12)$ en $\mathbb{Z}_{14}$ es $2]$

12 |10
2 1

a	b	z	c	u	v
				1	0
				0	1
				1	-1
12	10	2 (MCD)	1	-5	6
10	2	0	5		

$1 - 0 \cdot 1 = 1$
$0 - 1 \cdot 1 = -1$

$0 - 1 \cdot 5 = -5$
$1 - 5 \cdot -1 = 1 + 5 = 6$

MCD(14, 18) en Z_{20} → 2

a	b	r	c	u	v
				1	0
				0	1
18	14	4	1	1	-1
14	4	2 (MCD)	3	-3	4
4	2	0	2	7	-9

$1 - 2 \cdot -3 = 1 + 6 = 7$

$-1 - 4 \cdot 2 = -9 = 11$

11. 17

a) $3x \equiv 2 [5]$; $\left[x \equiv \frac{1}{3} \cdot 2 [5] \equiv \frac{2 \cdot 2}{6} [5] = 4 [5] \right]$

mcd(3, 5) = 1

$\frac{1}{3} [5] = \frac{2 \cdot 1}{\underbrace{2 \cdot 3}_{6 = 1}} [5]$

Entonces:

$x = 4 + 5 \cdot K, K \in Z$

b) $7x \equiv 4 [10]$; $\left[x \equiv \frac{1}{7} \cdot 4 [10] \equiv \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 3} [10] = 12 [10] \equiv 2 [10] \right]$

Mcd(7, 10) = 1 $\qquad 21 = 1$

Entonces:

$x = 2 + 10 \cdot K, K \in Z$

c) $9x \equiv 3 [12]$

mcd(9, 12) = 3 ≠ 1 → 9, No tiene inversa en mod 12

f) $6x \equiv 3 [4]$;

MCD(6, 4) = 2 ≠ 1 → no inversa en mod 4

II 24

Si p es primo, $\sqrt{p}$ es irracional

Absurdo → ¿si fuese racional? ; $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$; $p = \frac{a^2}{b^2}$; → Irreducible

$[p \cdot b^2 = a^2 \rightarrow a^2 =$ es múltiplo de $p]$

Y sabiendo que:

a es producto de primos y a es producto de p

Entonces $[a^2 = k \cdot p]$ → a múltiplo de p
ya que es múltiplo de p
un número entero

$p \cdot b^2 = k^2 \cdot p^2$; $b^2 = k^2 \cdot p$ → b^2 es múltiplo de p, y esto puede ser, porque al ser ya irreducibles, implicaría que fuesen reducibles y es una contradicción

Entonces si p es primo, su raíz es irracional.

$\sqrt{75}$ → ¿Irracional? → No, al ser $75[5] \equiv 0$

$\sqrt{17}$ → ¿Irracional? → Sí, al ser primo

$\sqrt{2017}$ → Irracional al ser primo

III. 5

1) $p(x) = 3x^2 + x + 5$, $q(x) = x^3 - x + 3$ ¿$p(x) + q(x)$? en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$

Suma

En $\mathbb{Z}[x]$, $p(x) + q(x) = x^3 + 3x^2 + 8$

En $\mathbb{Z}_7[x] = x^3 + 3x^2 + 1$

En $\mathbb{Z}_6[x] = x^3 + 3x^2 + 2$

Producto

$p(x) \cdot q(x) = 3x^2(x^3 - x + 3) + x(x^3 - x + 3) + 5(x^3 - x + 3)$

$= 3x^5 - 3x^3 + 9x^2 + x^4 - x^2 + 3x + 5x^3 - 5x + 15$

$= 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 2x + 15 \rightarrow \mathbb{Z}[x]$

$\mathbb{Z}_6[x] = 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

$\mathbb{Z}_7[x] = 3x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 1$

3) $p(x)=3x^2$ $q(x)=2x$

Suma

$p(x)+q(x)=3x^2+2x$ en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_6[x]$ y $\mathbb{Z}_7[x]$

Producto

$p(x)\cdot q(x)=6x^3$ en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}_7[x]$ y 0 en $\mathbb{Z}_6[x]$

5). $5x^3-x^2+2=p(x)$ $q(x)=x^2+3$

Suma

$p(x)+q(x)=5x^3+x^2+5$ en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_6[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$

Producto

$p(x)\cdot q(x)=5x^3(x^2+3)-x^2(x^2+3)+2(x^2+3)=5x^5+15x^3-x^4-3x^2+2x^2+6$

En $\mathbb{Z}[x]=5x^5-x^4+15x^3-x^2+6=p(x)\cdot q(x)$

En $\mathbb{Z}_7[x]=5x^5+6x^4+x^3+6x^2+6=p(x)\cdot q(x)$

En $\mathbb{Z}_6[x]=5x^5+5x^4+3x^3+5x^2+0=p(x)\cdot q(x)$

III. 6

$\frac{x^4}{2x^2}=\frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $\frac{-\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=-\frac{1}{4}$

1) $x^4-2x+1 \mid 2x^2+1$

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}$

$-x^4-\frac{1}{2}x^2$

$-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

$+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$

$-2x+\frac{5}{4}$

$1+\frac{1}{4}=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$

¿Resultado?
En $\mathbb{Q}[x]$
" $\mathbb{R}[x]$
" $\mathbb{Z}_5[x]$
" $\mathbb{Z}_7[x]$

Entonces el Resto $R(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$ es $-2x+\frac{5}{4}$ y el Cociente $C(x)$ $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}$

15

En $Z_5[x]$

$$x^4 - 2x + 1 \;\big|\; 2x^2 + 1$$

$$-6x^4 - 3x^2 \qquad 3x^2 + 1$$

$$-\cancel{5x^4} - 3x^2 - 2x + 1$$

$$0 \quad -2x^2 - 2$$

$$\emptyset - 2x - 1 = 3x + 4$$

$$\frac{x^4}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{6}x^2 = 3x^2$$

$$\frac{9}{6} = \frac{4}{1}x^2$$

$$-\frac{3x^2}{2x^2} = -\left(\frac{3 \cdot 3x^2}{2 \cdot 3x^2}\right) = \frac{9}{6} - 4 = -1$$

Entonces el resto es $\underbrace{3x+4}_{R(x)}$ y el cociente $\underbrace{3x^2+1}_{C(x)}$ en Z_5

En $Z_7[x]$

$$x^4 - 2x + 1 \;\big|\; 2x^2 + 1$$

$$-8x^4 - 4x^2 \qquad 4x^2 + 5$$

$$-\cancel{7x^4} - 4x^2 - 2x + 1$$

$$-10x^2 - 5$$

$$-\cancel{14x^2} - 2x - 4 = 5x + 3$$

$$\frac{x^4}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} = \frac{4 \cdot 1x^2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8}x^2 = 4x^2$$

$$-\frac{4x^2}{2x^2} = -2 = -2 + 7 = 5$$

El resto es $\underbrace{5x+3}_{R(x)}$ y el cociente $\underbrace{4x^2+5}_{C(x)}$ en $Z_7[x]$

$Z_5[x$

11.19

Amor < 3 toneladas

Medidas de peso	Resto
1 → 7K	6K
2 → 15K	11K
3 → 19K	14K

¿Amor cultivado?

$x \equiv 6\ [7]$

$x \equiv 11\ [15]$

$x \equiv 14\ [19]$

$x \equiv a\ [M]$

1) $mcd(7,15) = mcd(15,19) = mcd(7,19) = 1$

Aplicamos el Teorema del Chino

2) $M = 7 \cdot 15 \cdot 19 = 15 \cdot 133 = 1995$

$M_1 = 285 \quad M_2 = 133 \quad M_3 = 105$

$a_1 = 6 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 11$

$m_1 = 7 \quad m_2 = 15 \quad m_3 = 19$

3) $1 = 285v_1 + 7u_1 \quad v_1 = 3 \quad u_1 = -122$

$1 = 133v_2 + 15u_2 \ ; \ v_2 = 7 \quad u_2 = -62$

$1 = 105v_3 + 19u_3 \ ; \ v_3 = 2 \quad u_3 = -11$

a	b	x	c	U_1	V_1
				1 0	0 1
285	7		5 40	1	-40
7	5		2 1	-1	41
5	2		1 2	3	-122
2	1		0 2		

(He hecho los procedimientos en una hoja aparte, así que pongo un ejemplo) 285 | 7 5 40

$1 = 7 \cdot -122 + 285 \cdot 3 = 855 - 854 = 1$

$120 \cdot 7 = 840 + 2 \cdot 7 = 14 = 854$

Entonces

$a = a_1 M_1 \cdot U_1 + a_2 M_2 \cdot U_2 + a_3 M_3 \cdot U_3 = 6 \cdot 285 \cdot 3 + 19 \cdot 105 \cdot 2 + 11 \cdot 133 \cdot 1 =$
$18311 = 356$

Entonces:

$x \equiv 356\ [1995] \Rightarrow x = 356 + 1995K, K \in \mathbb{Z}$ entonces si la cantidad es < 3000, $K = 1$

$x = 356 + 1995 \cdot 1 = 2351$ Kg han cultivado

III 13

Irreducibilidad en $\mathbb{Z}_3[x]$

6) x^2+1

$f(0)=1$
$f(1)=2$
$f(2)=5=2$

Al ser de G 2, como máximo se puede expresar como producto de polinomios irreducibles de grado 1, pero hemos comprobado que no $f \neq 0$ → Irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$

¿ $\mathbb{Z}_5[x]$?

x^2+1

$f(0)=1$
$f(1)=2$
$f(2)=5=0$ → No es irreducible
f ...

x^3+x+2

$f(0)=2$
$f(1)=1+1+2=4=1$
$f(2)=8+2+2=12=0$ RAÍZ

Ya sabemos que no es irreducible

x^3+x+2 $\quad 27+3+2=32$

$f(0)=2$
$f(1)=4$
$f(2)=12=2$
$f(3)=32=2$
$f(4)=70=0$ → No irreducible en $\mathbb{Z}_5[x]$