Apellidos: .... Grupo: ....

Nombre: .... nif: ....

ALEM

Grado en Ingeniería Informática

12 de diciembre 2017

1. Tenemos 18 balones que queremos repartir a 6 menores: José, Javier, Julia, Jacinto, Juana y Jorge.

   a) ¿De cuántas formas podemos repartirlos? ¿Y si queremos que todos se lleven al menos un balón?

   b) De los 18 balones, hay 9 con el escudo del R. Madrid y otros 9 con el escudo del F.C. Barcelona. Jacinto, Jorge y Juana sólo los quieren del Barcelona, mientras que Julia, José y Javier los quieren del R. Madrid. ¿De cuántas formas puede hacerse el reparto, de forma que cada niño se lleve al menos un balón?

   c) Ahora, la única restricción es que Jorge no quiere ninguno del R. Madrid. El resto puede recibir balones de cualquiera de los dos equipos. ¿De cuántas formas se pueden repartir?

   Solución:

   a) Llamemos x, y, z, t, u, v al número de balones que reciben José, Javier, Julia, Jacinto, Juana y Jorge respectivamente. Cada reparto de balones se corresponde con una solución (natural) de la ecuación $x+y+z+t+u+v=18$. El número de tales soluciones es el número de combinaciones con repetición de 6 elementos tomados de 18 en 18:

   $$CR_6^{18} = \binom{18+6-1}{6-1} = \binom{23}{5} = \frac{23!}{5!18!} = 33649.$$

   Si queremos que cada niño tenga al menos un balón, damos entonces un balón a cada niño y repartimos los 12 restantes. El número de formas posibles de hacerlo es

   $$CR_6^{12} = \binom{17}{5} = 6188.$$

   b) Ahora lo que tenemos que hacer es repartir los nueve balones con el escudo del R. Madrid entre Julia, José y Javier y los nueve balones del Barcelona entre Jacinto, Jorge y Juana, de forma que cada niño se lleve al menos un balón.

   El reparto de los balones del R. Madrid se puede hacer de $CR_3^6 = \binom{8}{2} = 28$ formas distintas, y el reparto de los balones con el escudo del Barcelona también de 28 formas distintas.

   Puesto que el reparto lo hemos dividido en dos etapas (primero repartimos los del R. Madrid, y después los del F.C. Barcelona), multiplicamos ambos resultados. El número de formas de hacer el reparto en las condiciones exigidas es entonces $28 \cdot 28 = 784$.

   c) Aquí también dividimos el reparto en dos etapas:

   - En primer lugar repartimos los 9 balones del R. Madrid entre José, Javier, Julia, Jacinto y Juana. El número de formas de hacerlo es $CR_5^9 = \binom{13}{4} = 715$.
   - A continuación repartimos los 9 balones del Barcelona entre los 6 niños, lo cuál puede hacerse de $CR_6^9 = \binom{14}{5} = 2002$ formas distintas.

   El número total de maneras de hacer el reparto es $715 \cdot 2002 = 1431430$.

2. Enuncia un problema de conteo cuya respuesta sea:

   a) $\frac{10!}{4!}$.

   b) $\binom{9}{4} \cdot \binom{7}{3}$.

   c) $\binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6}$.

   Solución:

   a) Los siguientes problemas tienen como solución el número $\frac{10!}{4!}$.

   - En una competición participan 10 personas, y hay premio para las 6 primeras. ¿De cuántas formas pueden repartirse los premios?
   - ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra CABALGADAS?

   En el primer problema, la solución es el número de variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 6 en 6, es decir, $\frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!}$.

   En el segundo tenemos permutaciones con repetición de 10 elementos en donde hay 4 que son iguales entre sí (y el resto son todos diferentes).

   b) El problema aquí podría ser:

   > Tenemos un grupo de 16 personas entre las que hay 9 hombres y 7 mujeres. Queremos elegir entre ellos una comisión compuesta por 4 hombres y 3 mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerse?

   Para contar el número de formas de hacerlo, elegimos primero 4 hombres entre los 9 posibles (lo que puede hacerse de $\binom{9}{4}$ formas distintas) y a continuación elegimos 3 mujeres entre las 7 que hay (lo que podemos hacer de $\binom{7}{3}$ formas). El número total de maneras de formar la comisión es entonces $\binom{9}{4} \cdot \binom{7}{3}$.

   c) Damos aquí también dos enunciados:

   - ¿Cuántos números positivos menores que 128 hay con un número par de unos en su representación binaria?
   - De un grupo de 7 personas queremos elegir un número par de ellas (y al menos una). ¿De cuántas formas puede hacerse?

   En el primer enunciado, y puesto que $128 = 2^7$, lo que tenemos es que buscar números con 7 cifras o menos en su representación binaria, y que tengan un número par de unos (no vale el número 0, pues son números positivos). Tenemos tres posibilidades:

   > - Que el número de unos sea 2. Entre las 7 posibles cifras del número hay que elegir la posición que van a ocupar los dos unos. Esto puede hacerse de $\binom{7}{2}$ formas distintas.
   > - Que el número de unos sea 4. Hay en total $\binom{7}{4}$ números con estas condiciones.
   > - Que el número de unos sea 6. Ahora tenemos $\binom{7}{6}$ posibilidades.

   Puesto que los tres casos son excluyentes, la cantidad total de números es la suma de estos tres casos, es decir $\binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6}$.
   El segundo problema se resuelve de forma análoga.

3. Calcula el rango de la siguiente matriz en función del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & a \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5).$$

Solución:

Para calcular el rango de A realizamos en A operaciones elementales por filas. Esto no cambia el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & a \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3a \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(2)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3a \\ 0 & 3 & 2 & a \\ 0 & 4 & a+4 & a+4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3a \\ 0 & 1 & 4 & 2a \\ 0 & 4 & a+4 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 4 & 2a \\ 0 & 0 & a+3 & 3a+4 \end{pmatrix}.$$

Vemos que si $a = 2$, la última fila nos quedaría $(0\ 0\ 0\ 0)$, luego en ese caso el rango de la matriz es 2. Si $a \neq 2$, entonces $a + 3 \neq 0$, luego el rango de A valdría 3.

También podríamos haber calculado el rango usando determinantes. Veamos como:

Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ tenemos que $rg(A) \geq 2$. Calculamos los determinantes de las dos matrices 3×3 que podemos formar y que contienen como submatriz esta última de la que hemos calculado el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 4a + 36 + 9 - 24 - 18 - 3a = 4a + 1 + 4 + 1 + 2 + 2a = a + 3.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 9a + 0 - 6a - 12 - 0 = 1 + 4a + 4a + 3 = 3a + 4.$$

Ahora resolvemos las ecuaciones $a + 3 = 0$, $3a + 4 = 0$, que en los dos casos tiene como solución $a = 2$.

Entonces, si $a = 2$ todas las submatrices 3×3 tienen determinante igual a cero, luego $rg(A) = 2$. Si $a \neq 2$ hay al menos una submatriz 3×3 cuyo determinante es distinto de cero, luego $rg(A) = 3$.

4. Da un ejemplo de:

   a) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

   b) Una matriz A, cuadrada, distinta de 0, y tal que $A^2 = 0$.

   c) Dos matrices A y B, tales que $A \cdot B = Id$ pero $B \cdot A \neq Id$.

   d) Un sistema que tenga exactamente dos soluciones.

Solución:

a) Para este aparatado, podemos fijarnos en el ejercicio anterior. Para $a = 2$ tenemos una matriz 3×4 cuyo rango es 2, y las tres primeras columnas forman una submatriz cuadrada cuyo rango es también 2. En tal caso, el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 4z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \end{array} \right.$$

es compatible indeterminado, pues $rg(A) = rg(A|b) = 2$, y el número de incógnitas es 3.
También podríamos haber formado un sistema compatible indeterminado como sigue:
Tomamos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

con coeficientes en el cuerpo que queramos. Este sistema es compatible indeterminado (la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2). Le añadimos una ecuación que sea combinación lineal de las dos que tenemos (por ejemplo, podemos repetir una, o sumar ambas ecuaciones, etc.). El sistema que resulte tendrá tres ecuaciones, tres incógnitas y será compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es distinta de cero, y su cuadrado es la matriz nula. También valdría la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Si las matrices A y B fueran cuadradas, al ser $AB = Id$ tendríamos que B sería la inversa de A, luego BA sería también igual a la identidad. Por tanto, las matrices no pueden ser cuadradas. Podemos tomar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $AB = Id_2$, mientras que $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

También valdría $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En tal caso, $AB = (1)$, que es la identidad 1×1, mientras que $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Para que tenga dos soluciones, el sistema debe ser compatible indeterminado y depender de un parámetro que pueda tomar dos valores. Por tanto, hemos de dar un sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & & & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

para que x, y, z sea solución debe cumplirse que $x = y = z$. Por consiguiente, las únicas soluciones son: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.