Apellidos: .......................................................................... Grupo: ...........

Nombre: ........................................... nif: .......................... nº hojas ...........

# ALEM

## Grado en Ingeniería Informática

### 14 de julio de 2017

1. Sean $A, B, C$ tres conjuntos. Demuestra que $A \cup B \subseteq B \cap C$ si, y sólo si, $A \subseteq B \subseteq C$.

2. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $R$ la relación en $X$ definida por:

$$xRy \quad \text{si} \quad 5 \mid 2x + 3y$$

   *a*) Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia.

   *b*) Calcula la clase de equivalencia del 1.

   *c*) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente? ¿Cuáles son?

3. Dado el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} 17x - 9 \equiv {} & 19 \pmod{24} \\ 52x \equiv {} & 65 \pmod{105} \end{aligned}$$

   decide razonadamente si tiene solución y en caso de respuesta afirmativa, encuéntrala y di razonadamente cuántas tiene comprendidas entre 0 y 1000.

4. Determina todos los números de dos cifras que al escribirlos en hexadecimal se escriben con las mismas cifras pero en orden inverso.

5. Sea $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^4+2x^3+2x^2+x+1}$.

   *a*) Estudia si $A$ es un cuerpo.

   *b*) Calcula, si es posible, la expresión reducida para los siguientes elementos de $A$:

      - $(x^2 + 2x + 2)^2$.
      - $(x^3 + x + 2)^{-1}$.

   *c*) ¿Cuántos elementos de $A$ tienen inverso para el producto?

6. En una asamblea que consta de 6 hombres y 7 mujeres, ¿de cuantas maneras es posible elegir un comité en las siguientes condiciones?:

   *a*) El comité está formado por 7 personas.

   *b*) El comité está formado por 7 personas entre las que debe haber más mujeres que hombres.

   *c*) El comité está formado por 4 hombres y 3 mujeres, pero hay un hombre y una mujer que no pueden estar juntos en el comité.

7. En el espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$ consideramos el conjunto $B = \{(2, 1, 3),\ (1, -1, 2),\ (1, -3, 2)\}$.

   *a*) Comprueba que $B$ es una base de $\mathbb{Q}^3$.

   *b*) Calcula la matriz del cambio de base de $B_c$ a $B$, donde $B_c$ es la base canónica de $\mathbb{Q}^3$.

   *c*) Sea $u$ un vector cuyas coordenadas en $B$ son $(3, -2, 1)$. ¿De qué vector se trata?

   *d*) Sea $v$ el vector $(-2, 1, -3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en $B$?

8. Consideremos en $(\mathbb{Z}_5)^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 \colon x + 4y = 0, z + 4t = 0\} \\ U_2 &= \mathrm{L}[(0,1,2,0),\ (0,3,1,0)] \\ U_3 &= \{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 \colon x + 4y + 3z + 2t = 0\} \end{aligned}$$

   *a*) Calcula una base del subespacio $U_1 + U_2$.

   *b*) Decide razonadamente si $U_3 = U_1 + U_2$. En caso afirmativo, ¿es dicha suma directa?

9. Sea $a \in \mathbb{Z}_7$ y $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica de dicho espacio es

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

   Según el parámetro $a$ estudia la dimensión del núcleo y de la imagen de $f$.

   Indica para que valores del parámetro $a$ es la aplicación $f$ inyectiva y/o sobreyectiva.

10. Sea $A = \left( \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \right) \in M_2(\mathbb{Z}_{11})$.

   *a*) Estudia si $A$ es o no diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular $P$ de forma que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

   *b*) Calcula $A^{321}$.

   *c*) Encuentra, si es posible, una matriz $B$ tal que $B^2 = A$.