ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

16 de Enero de 2020

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**________________ **Grupo:**________

Ejercicio 1. *Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *¿Existe el inverso de* 251 *en* $\mathbb{Z}_{512}$*? En caso afirmativo, calcúlalo.*
2. *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica* $251x + 512y = 13$ *en las que* x *esté comprendida entre* 1000 *y* 3000*?*
3. *¿Existe algún número natural,* $n \geq 1$ *tal que* $251^n = 1$ *en* $\mathbb{Z}_{512}$*? ¿Y tal que* $152^n = 1$*? En los casos en que exista, da uno.*

Ejercicio 2. *Calcula todas las soluciones naturales menores que* 5000 *del sistema de congruencias:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} 19x & \equiv & 40 & \textit{mód}\ 60 \\ 5x & \equiv & 167 & \textit{mód}\ 231 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3. *Sea* $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^5+x^4+2x^2+2x+1}$.

1. *¿Cuántos elementos tiene* A*?*
2. *Realiza, si es posible, los siguientes cálculos en* A*:*
   - $(x^3 + 1)(x^3 + 2)$.
   - $(x^3 + x^2 + x + 1)^{-1}$.
   - $(x^2 + 2x + 2)^{-1}$
3. *¿Es* A *un cuerpo? Justifica la respuesta.*

Ejercicio 4. *Consideramos las letras de la palabra RECONOCER*

1. *¿De cuántas formas podemos ordenarlas?*
2. *¿En cuántas ordenaciones aparecen juntas la N y una E?*
3. *¿En cuántas ordenaciones están juntas todas las vocales?*
4. *¿En cuántas ordenaciones aparece una E inmediatamente después de una R?*
5. *¿En cuántas ordenaciones hay juntas una R y una E?*

Ejercicio 5. *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ *dos matrices* 2×3 *con coeficientes en* $\mathbb{Q}$.

1. *Calcula la forma escalonada reducida por filas de la matriz* A.
2. *Estudia para qué valores del parámetro* a*, existe una matriz regular* $P \in M_2(\mathbb{Q})$ *tal que* $P \cdot A = B$.

Ejercicio 6. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ *y sea* $B_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,1),(1,1,1)\}$ *un subconjunto de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.

1. *Comprueba que* B_1 *es una base de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.
2. *Sea* B_2 *una base tal que* $M_{B_2 \to B_1} = A$*. Calcula la base* B_2.
3. *Calcula la matriz del cambio de base de* B_c *a* B_1*, donde* B_c *es la base canónica de* $(\mathbb{Z}_2)^3$.

Ejercicio 7. *Sea* $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, *y sean* $f, g : V \to V$ *las aplicaciones lineales:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x + 2y + z, 3x + 3y + 2z, 4x + 2y + 2z) \\ g(x,y,z) &= (x + 3z, 2x + y + 4z, x + 4y) \end{aligned}$$

Sean $U = N(f)$ *y* $W = Im(g)$.

1. *Calcula una base de* U *y las ecuaciones cartesianas de* W.
2. *Calcula la dimensión del subespacio* $Im(f)$.
3. *Calcula una base de* $U + W$. *¿Es dicha suma directa?*

Ejercicio 8. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal dada por*

$$f(x,y,z) = (-2x + z, -x - y + z, -2x + z).$$

Y sea $A = M_{B_c}(f)$.

1. *Halla la matriz* A.
2. *Calcula los valores propios de* A.
3. *Calcula una base de vectores propios de* A. *Llama a esta base* B.
4. *Calcula* $M_B(f)$.
5. *Calcula las ecuaciones cartesianas de* $Im(f)$.